



중3 수학 심화

총 40문제 · 문제와 정답·풀이 포함

Q1 실수·근호 추론

이중근호 $\sqrt{7+2\sqrt{10}}$ 를 간단히 한 값은?

- ① ① $\sqrt{2} + \sqrt{5}$
- ② ② $1 + \sqrt{6}$
- ③ ③ $\sqrt{3} + \sqrt{4}$
- ④ ④ $2 + \sqrt{3}$

정답: ① $\sqrt{2} + \sqrt{5}$

1단계: $\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ ($a > b > 0$) 공식을 이용한다. 2단계: $7+2\sqrt{10}$ 에서 합이 7, 곱이 10인 두 양수를 찾으려면 2와 5이다. 3단계: 따라서 $\sqrt{7+2\sqrt{10}} = \sqrt{2+5+2\sqrt{2\cdot 5}} = \sqrt{2} + \sqrt{5}$. 검증:

$$(\sqrt{2} + \sqrt{5})^2 = 2 + 5 + 2\sqrt{10} = 7 + 2\sqrt{10} \checkmark$$

풀이 전략: 이중근호 풀이는 안쪽 식을 $a+b+2\sqrt{ab}$ 꼴로 바꾸는 것이 핵심. 합과 곱이 주어진 두 수 찾기 문제로 환원된다.

이중근호 풀이는 고등학교 무리식 단원의 기초가 된다.

Q2 실수·근호 추론

$\sqrt{2}$ 가 무리수임을 귀류법으로 증명할 때, 다음 단계 중 논리적으로 가장 핵심적인 모순이 발생하는 단계는?

(가) $\sqrt{2} = \frac{q}{p}$ (p, q 는 서로소인 양의 정수)로 가정

(나) 양변 제곱: $2p^2 = q^2$

(다) q^2 이 짝수이므로 q 도 짝수, $q = 2k$

(라) 대입: $2p^2 = 4k^2$ 즉 $p^2 = 2k^2 \rightarrow p$ 도 짝수

(마) p, q 모두 짝수가 되어 서로소 가정에 모순

- ① ① (가)
- ② ② (다)
- ③ ③ (라)와 (마)에서 두 수가 모두 짝수가 되어 서로소 가정과 충돌
- ④ ④ (나)에서 양변을 제곱한 것이 모순

정답: ③ (라)와 (마)에서 두 수가 모두 짝수가 되어 서로소 가정과 충돌

1단계: 귀류법은 결론의 부정을 가정한 뒤 모순을 이끌어낸다. 여기서 결론의 부정은 ' $\sqrt{2}$ 는 유리수'이고, 유리수의 정의로부터 서로소인 p, q 가 존재한다고 둘 수 있다. 2단계: (다)와 (라) 과정을 통해 p, q 가 모두 짝수임이 도출된다. 3단계: 이는 처음 가정인 ' p, q 는 서로소'와 정면으로 충돌하므로, 이 모순이 곧 ' $\sqrt{2}$ 는 유리수가 아니다'를 증명한다. 함정 분석: ②는 부분 단계의 결론일 뿐이며, ④는 동치변형이라 모순이 아니다.

풀이 전략: 귀류법의 구조: 가정 \rightarrow 추론 \rightarrow 모순 \rightarrow 가정 부정. 모순이 어느 명제와 부딪히는지를 정확히 짚어야 한다. '서로소'라는 초기 조건이 깨지는 순간이 결정적이다.

이 증명은 고대 그리스 피타고라스 학파에서 발견되었으며, 무리수의 존재를 처음 보인 역사적 증명이다.

Q3 인수분해 심화

$x + \frac{1}{x} = 3$ ($x > 0$)일 때, $x^3 + \frac{1}{x^3}$ 의 값은?

- ① ① 18
- ② ② 21
- ③ ③ 24
- ④ ④ 27

정답: ① 18

1단계: 인수분해 공식 $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$ 를 이용한다. 2단계: $a = x, b = \frac{1}{x}$ 로 놓으면 $ab = x \cdot \frac{1}{x} = 1$ 이고 $a + b = 3$. 3단계: 따라서 $x^3 + \frac{1}{x^3} = (x + \frac{1}{x})^3 - 3 \cdot 1 \cdot (x + \frac{1}{x}) = 3^3 - 3 \cdot 3 = 27 - 9 = 18$. 함정: 단순히 $3^3 = 27$ 로 답하면 ④에 걸린다.

풀이 전략: $x^n + \frac{1}{x^n}$ 꼴의 식의 값 문제는 $x \cdot \frac{1}{x} = 1$ 이라는 점을 활용하여 합과 곱의 관계로 환원하는 것이 핵심.

같은 방법으로 $x^4 + \frac{1}{x^4} = (x^2 + \frac{1}{x^2})^2 - 2$ 를 차례로 구할 수 있다.

Q4 인수분해 심화

다음 식을 인수분해한 결과로 옳은 것은?

$$x^2 - y^2 - 4x + 4y$$

- ① ① $(x - y)(x + y - 4)$
- ② ② $(x + y)(x - y - 4)$
- ③ ③ $(x + y)(x - y + 4)$
- ④ ④ $(x - y)(x + y + 4)$

정답: ① $(x - y)(x + y - 4)$

1단계: 같은 차수의 항끼리 묶기. $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y), -4x + 4y = -4(x - y)$. 2단계: 공통인수 $(x - y)$ 로 묶어내면 $(x - y)(x + y) - 4(x - y) = (x - y)(x + y - 4)$. 3단계: 검증을 위해 전개:

$(x - y)(x + y - 4) = x^2 + xy - 4x - xy - y^2 + 4y = x^2 - y^2 - 4x + 4y$ ✓. 함정: ②, ③, ④는 부호가 일치하지 않는다.

풀이 전략: 두 문자 식의 인수분해: 차수가 같은 항을 그룹으로 묶고, 한 그룹에서 나온 인수가 다른 그룹에도 나타나도록 변형하여 공통인수를 찾는다.

이 기법은 대칭식·교대식의 인수분해 기초이며, 고등학교에서는 다항식의 나눗셈으로 일반화된다.

Q5 이차방정식 활용

이차방정식 $x^2 - 5x + 3 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ 의 값은?

- ① ① $\frac{5}{3}$
- ② ② $\frac{3}{5}$
- ③ ③ $-\frac{5}{3}$
- ④ ④ $\frac{19}{3}$

정답: ① $\frac{5}{3}$

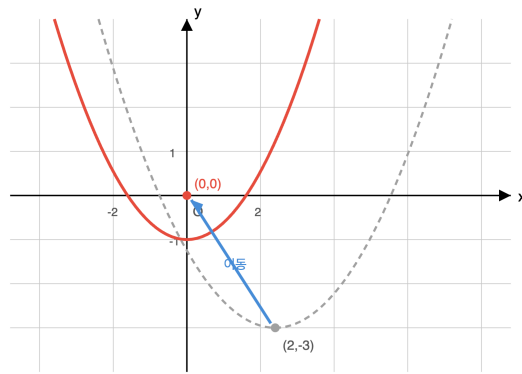
1단계: 근과 계수의 관계에서 $\alpha + \beta = -\frac{-5}{1} = 5, \alpha\beta = \frac{3}{1} = 3$. 2단계: 분수식을 통분하면 $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}$. 3단계: 값을 대입하면 $\frac{5}{3}$. 함정: ④는 $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 25 - 6 = 19$ 를 분자에 잘못 넣은 경우.

풀이 전략: 근과 계수의 관계는 두 근을 직접 구하지 않고도 두 근에 관한 대칭식의 값을 구할 수 있게 해준다. $\alpha + \beta$ 와 $\alpha\beta$ 만 알면 거의 모든 대칭식 표현 가능.

근과 계수의 관계는 16세기 비에트(Viète)가 정리하여 '비에트의 정리'로 불리며 고등학교 수학의 핵심 도구가 된다.

Q6 이차함수 심화

이차함수 $y = x^2 - 4x + 1$ 의 그래프를 x 축 방향으로 -2 , y 축 방향으로 3 만큼 평행이동한 그래프의 식은?



- ① ① $y = x^2$
- ② ② $y = (x + 2)^2 - 6$
- ③ ③ $y = (x - 4)^2$
- ④ ④ $y = x^2 - 3$

🎯 정답: ① $y = x^2$

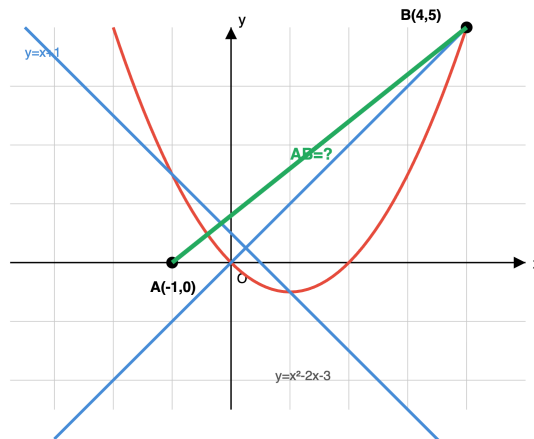
📖 1단계: 원래 식을 표준형으로 변형: $y = x^2 - 4x + 1 = (x - 2)^2 - 3$. 꼭짓점은 $(2, -3)$. 2단계: 평행이동하면 새 꼭짓점은 $(2 - 2, -3 + 3) = (0, 0)$. 3단계: 따라서 새 식은 $y = (x - 0)^2 + 0 = x^2$. 함정: ②는 x 방향 부호를 반대로 적용한 경우.

🧠 풀이 전략: 평행이동은 표준형 $y = (x - p)^2 + q$ 에서 꼭짓점 (p, q) 를 추적하면 가장 명료하다. x 축 방향으로 a 이동하면 $p \rightarrow p + a$, y 축 방향으로 b 이동하면 $q \rightarrow q + b$.

💡 포물선의 평행이동은 한 점(꼭짓점)만 이동시켜도 전체가 결정된다. 모양이 변하지 않기 때문이다.

Q7 이차함수 심화

이차함수 $y = x^2 - 2x - 3$ 의 그래프와 직선 $y = x + 1$ 의 두 교점을 A, B 라 할 때, 선분 AB 의 길이는?



- ① ① $5\sqrt{2}$
- ② ② 5
- ③ ③ $4\sqrt{2}$
- ④ ④ $\sqrt{50} \cdot \sqrt{2}$

정답: ① $5\sqrt{2}$

1단계: 교점의 x 좌표는 $x^2 - 2x - 3 = x + 1$, 즉 $x^2 - 3x - 4 = 0 \rightarrow (x + 1)(x - 4) = 0 \rightarrow x = -1$ 또는 $x = 4$. 2단계: 각각의 y 좌표는 직선식에 대입하여 $A(-1, 0), B(4, 5)$. 3단계: 거리 공식으로

$$AB = \sqrt{(4 - (-1))^2 + (5 - 0)^2} = \sqrt{25 + 25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \text{ . 함정: ④는 } \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \text{ 임을 모르고 한번 더 곱한 오답.}$$

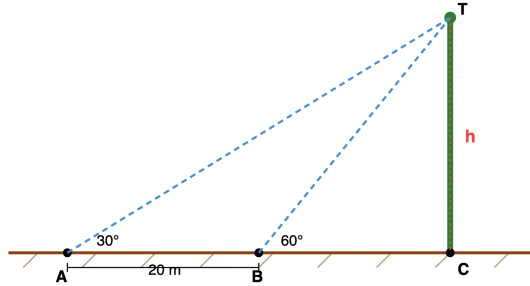
풀이 전략: 이차함수와 직선의 교점은 두 식을 연립한 이차방정식의 해. 교점 좌표를 구한 뒤 두 점 사이 거리 공식

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \text{ 적용.}$$

직선의 기울기가 1일 때 두 교점의 x 좌표 차이를 d 라 하면 $AB = \sqrt{2} \cdot d$ 가 된다. 본 문제에서 $d = 5$ 이므로 $5\sqrt{2}$ 로 빠르게 계산 가능.

Q8 삼각비 심화

오른쪽 그림과 같이 강 건너편 나무의 높이를 측정하기 위해 강가 지점 A에서 나무 꼭대기 T를 올려본 각이 30°이고, A에서 강을 가로질러 나무 쪽으로 20m 더 가까이 간 지점 B에서 T를 올려본 각이 60°이었다. 나무의 높이는? (단, $\sqrt{3} \approx 1.73$ 이며 측정자의 키는 무시한다.)



- ① ① $10\sqrt{3}$ m
- ② ② $20\sqrt{3}$ m
- ③ ③ 30 m
- ④ ④ 20 m

☞ 정답: ① $10\sqrt{3}$ m

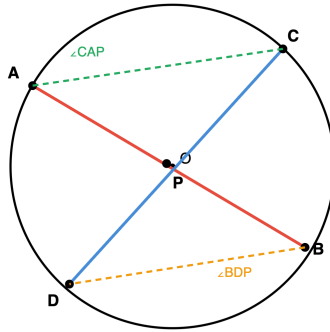
📖 1단계: 나무의 높이를 h , 나무 밑동에서 B까지 거리를 x 라 하면 직각삼각형 BTC에서 $\tan 60^\circ = \frac{h}{x}$, 즉 $h = \sqrt{3}x$. 2단계: 직각삼각형 ATC에서 $\tan 30^\circ = \frac{h}{x+20}$, 즉 $h = \frac{x+20}{\sqrt{3}}$. 3단계: 두 식을 연립: $\sqrt{3}x = \frac{x+20}{\sqrt{3}} \rightarrow 3x = x+20 \rightarrow x = 10$. 따라서 $h = 10\sqrt{3}$ m. 함정: ②는 $h = \sqrt{3} \cdot 20$ 으로 잘못 계산한 경우.

🧠 풀이 전략: 삼각비를 이용한 높이 측정의 표준 문제. 두 각의 정보 \rightarrow 두 식 연립 \rightarrow 미지수 소거. 두 각의 차가 클수록 측정 정확도가 높다.

💡 이 방법은 측량학(surveying)의 가장 기본적인 기법으로, 고대 이집트 피라미드 측량부터 현대 GPS 보정까지 사용된다.

Q9 원의 성질 증명

오른쪽 그림과 같이 원 O 의 두 현 AB 와 CD 가 원 내부의 한 점 P 에서 만난다. 이때 $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$ 임을 증명하는 핵심 단계로 가장 알맞은 것은?



$PA \cdot PB = PC \cdot PD$

- ① ① 원의 둘레의 길이는 $2\pi r$ 이다
- ② ② 호 BC 에 대한 원주각이 같으므로 $\angle BAC = \angle BDC$, $\angle ACD = \angle ABD \rightarrow$ 따라서 $\triangle PAC \sim \triangle PDB$ (AA닮음)
- ③ ③ 두 현이 같은 길이이면 중심에서 떨어진 거리가 같다
- ④ ④ 점 P 가 원의 중심이므로 $\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC} = \overline{PD}$

☞ 정답: ② 호 BC 에 대한 원주각이 같으므로 $\angle BAC = \angle BDC$, $\angle ACD = \angle ABD \rightarrow$ 따라서 $\triangle PAC \sim \triangle PDB$ (AA닮음)

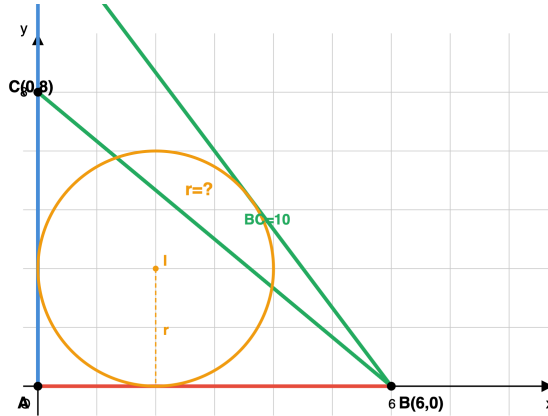
📖 1단계: 두 삼각형 $\triangle PAC$ 와 $\triangle PDB$ 를 본다. $\angle APC = \angle DPB$ (맞꼭지각). 2단계: 호 BC 에 대한 원주각이 같으므로 $\angle PAC = \angle PDB$. 따라서 AA 닮음에 의해 $\triangle PAC \sim \triangle PDB$. 3단계: 닮음비에서 $\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB}$, 양변에 $PB \cdot PD$ 를 곱하면 $PA \cdot PB = PC \cdot PD$. 함정: ④는 P 가 중심이라는 잘못된 가정.

🧠 풀이 전략: 원에서 두 현이 만나는 문제는 보조선을 그어 닮은 삼각형 두 개를 만드는 것이 정석. 같은 호에 대한 원주각이 같다는 사실이 핵심 도구.

💡 이 정리는 '방멩 정리(Power of a Point)'의 한 경우로, 점이 원 외부에 있을 때도 유사한 형태로 성립한다.

Q10 도형 종합 추론

좌표평면 위의 세 점 $A(0, 0)$, $B(6, 0)$, $C(0, 8)$ 을 꼭짓점으로 하는 직각삼각형 ABC 의 내접원의 반지름의 길이는?



- ① ① 2
- ② ② $\frac{12}{5}$
- ③ ③ 3
- ④ ④ $\frac{24}{7}$

정답: ① 2

1단계: 빗변 $BC = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$. 2단계: 직각삼각형의 넓이는 두 가지 방법으로 표현 가능. 직접 계산: $S = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$. 내접원 반지름을 r 이라 하면 $S = \frac{1}{2}r(a + b + c) = \frac{1}{2}r(6 + 8 + 10) = 12r$. 3단계: $24 = 12r \rightarrow r = 2$. 별해: 직각삼각형 전용 공식 $r = \frac{a + b - c}{2} = \frac{6 + 8 - 10}{2} = 2$ 로도 검증 가능.

풀이 전략: 내접원 반지름은 '넓이의 두 가지 표현'을 등치시키는 것이 표준 풀이. 일반 삼각형에서 $S = rs$ (s 는 둘레의 절반). 직각삼각형은 짧은 공식이 별도로 존재.

💡 직각삼각형의 내접원 반지름 공식 $r = \frac{a + b - c}{2}$ 는 두 직각변의 합에서 빗변을 뺀 값의 절반이라는 기하학적 의미를 가진다.

Q11 통계 심화

어떤 자료의 평균이 m , 분산이 V 이다. 이 자료의 모든 값에 각각 2를 곱한 후 3을 더하여 새 자료를 만들었다. 새 자료의 평균과 분산은?

- ① ① 평균 $2m + 3$, 분산 $4V$
- ② ② 평균 $2m + 3$, 분산 $4V + 3$
- ③ ③ 평균 $2m + 3$, 분산 $2V$
- ④ ④ 평균 $2m$, 분산 $4V + 9$

정답: ① 평균 $2m + 3$, 분산 $4V$

1단계: 자료값 x_i 를 $y_i = 2x_i + 3$ 으로 변환. 새 평균 $\bar{y} = \frac{\sum (2x_i + 3)}{n} = 2\bar{x} + 3 = 2m + 3$. 2단계: 새 편차 $y_i - \bar{y} = (2x_i + 3) - (2m + 3) = 2(x_i - m)$. 즉, 더하기 3은 편차에 영향이 없다(평행이동이므로 흩어짐 불변). 3단계: 새 분산은 $\frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n} = \frac{\sum 4(x_i - m)^2}{n} = 4V$. 함정: ②, ④처럼 분산에 상수를 더하면 안 된다.

풀이 전략: 자료의 일차변환 $y = ax + b$ 에서: 평균은 $ax + b$ 로 따라 변하고, 분산은 a^2V 로 변하며 b 의 영향은 없다(평행이동이라 흩어짐 불변). 표준편차는 $|a|\sigma$.

💡 이 성질은 단위 변환(섭씨 \rightarrow 화씨, cm \rightarrow m 등)에서 통계량이 어떻게 변하는지 예측할 때 매우 유용하다.

Q12 경시 퍼즐·확률

한 변의 길이가 1인 정삼각형 안에 임의로 5개의 점을 찍을 때, 거리가 $\frac{1}{2}$ 이하인 두 점이 반드시 존재함을 보이려고 한다. 이때 사용되는 핵심 원리는 무엇인가?

- ① ① 한 변이 1인 정삼각형을 한 변이 $\frac{1}{2}$ 인 정삼각형 4개로 분할 → 점 5개를 영역 4개에 넣으면 비둘기집 원리에 의해 어떤 영역에는 2개 이상이 들어가며, 그 영역 내 두 점의 거리는 $\frac{1}{2}$ 이하이다
- ② ② 정삼각형의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}$ 이므로 점 사이 평균 거리는 $\frac{1}{2}$ 미만이다
- ③ ③ 점이 무작위이므로 확률적으로 두 점이 가까울 가능성이 높다
- ④ ④ 정삼각형의 한 내각이 60° 이므로 점들은 자동으로 가까워진다

정답: ① 한 변이 1인 정삼각형을 한 변이 $\frac{1}{2}$ 인 정삼각형 4개로 분할 → 점 5개를 영역 4개에 넣으면 비둘기집 원리에 의해 어떤 영역에는 2개 이상이 들어가며, 그 영역 내 두 점의 거리는 $\frac{1}{2}$ 이하이다

1단계: 큰 정삼각형의 각 변의 중점을 이으면 한 변이 $\frac{1}{2}$ 인 작은 정삼각형 4개로 분할된다. **2단계:** 비둘기집 원리(Pigeonhole Principle): $n + 1$ 개의 물건을 n 개의 상자에 넣으면 어떤 상자에는 2개 이상이 들어간다. 점 5개를 영역 4개에 넣으면 어떤 작은 정삼각형 안에는 적어도 2개의 점이 있다. **3단계:** 한 변의 길이가 $\frac{1}{2}$ 인 정삼각형 안의 두 점 사이 거리는 그 정삼각형의 가장 긴 변(한 변)의 길이를 넘을 수 없으므로 $\frac{1}{2}$ 이하이다. 따라서 거리가 $\frac{1}{2}$ 이하인 두 점이 반드시 존재한다. **합정:** ②는 평균 개념의 오용, ③은 확률적 직관이지 증명이 아니다.

풀이 전략: 비둘기집 원리는 '쪼개기 + 개수 비교'의 두 단계로 작동. 핵심은 어떻게 영역(상자)을 만들 것인가. 거리 조건이 $\frac{1}{2}$ 이하라면 한 변 $\frac{1}{2}$ 짜리 영역으로 쪼개야 한다.

비둘기집 원리는 단순히 보이지만 정수론, 그래프 이론, 컴퓨터 과학의 깊은 정리들을 증명하는 데 쓰이며 수학 올림피아드의 단골 주제이다.

Q13 이차방정식 활용

두 이차방정식 $x^2 + ax + 6 = 0$ 과 $x^2 + 6x + a = 0$ 이 오직 하나의 공통근을 갖는다. 이때 상수 a 의 값은? (단, $a \neq 6$)

- ① ① $a = -7$
- ② ② $a = -5$
- ③ ③ $a = 5$
- ④ ④ $a = 7$

정답: ① $a = -7$

1단계: 공통근을 α 라 하면 $\alpha^2 + a\alpha + 6 = 0 \dots (1)$, $\alpha^2 + 6\alpha + a = 0 \dots (2)$.

2단계: (1)-(2)을 하면 $(a - 6)\alpha + (6 - a) = 0$, 즉 $(a - 6)(\alpha - 1) = 0$. $a \neq 6$ 이므로 $\alpha = 1$.

3단계: $\alpha = 1$ 을 (1)에 대입하면 $1 + a + 6 = 0$, 따라서 $a = -7$.

검증: $a = -7$ 이면 $x^2 - 7x + 6 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x - 6) = 0$, $x^2 + 6x - 7 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x + 7) = 0$. 공통근은 $x = 1$ 하나뿐이다.

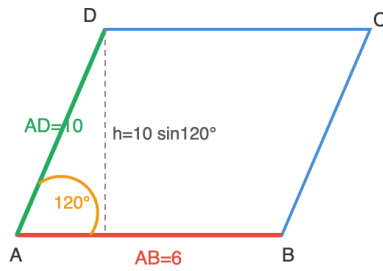
풀이 전략: 두 식을 번끼리 빼면 이차항이 소거되어 일차식이 된다. 이 일차식으로 공통근 α 를 먼저 구한 뒤 원래 식에 대입해 미지 상수를 결정한다. 두 이차방정식이 관련될 때 '식의 뺄셈으로 차수 낮추기'가 핵심 전략이다.

두 이차방정식이 공통근 조건을 만족하려면 판별식 대신 '결과식(resultant)'을 0으로 놓는 방법도 있으며, 고등학교 이후 대수학에서 더 깊이 다룬다.

Q14 삼각비 심화

평행사변형 ABCD에서 $\overline{AB} = 6$, $\overline{AD} = 10$, $\angle DAB = 120^\circ$ 일 때, 평행사변형 ABCD의 넓이는?

$$S = ab \sin \theta$$



- ① ① 30
- ② ② $30\sqrt{3}$
- ③ ③ 60
- ④ ④ $60\sqrt{3}$

정답: ② $30\sqrt{3}$

1단계: 두 변과 끼인각이 주어진 평행사변형의 넓이 공식은 $S = \overline{AB} \cdot \overline{AD} \cdot \sin(\angle DAB)$ 이다.

2단계: $\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3단계: $S = 6 \times 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 60 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 30\sqrt{3}$.

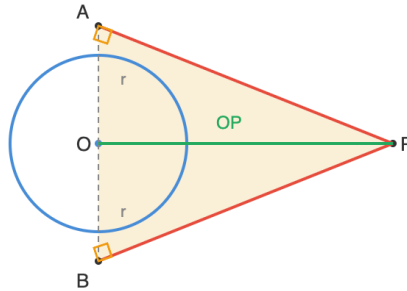
따라서 넓이는 $30\sqrt{3}$.

풀이 전략: 둔각이 주어졌을 때도 $\sin \theta$ 는 $\sin(180^\circ - \theta)$ 로 바꿔 예각의 삼각비로 바로 계산할 수 있다. 평행사변형의 넓이는 두 이웃 변과 그 사이각의 사인 곱으로 한 번에 얻어진다는 점을 이용한다.

💡 이 공식은 사각형의 대각선과 그 사이각으로 표현한 일반 사각형 넓이 공식 $\frac{1}{2}d_1d_2\sin\theta$ 의 특수 사례와도 연결된다.

Q15 원의 성질 증명

원 O 밖의 한 점 P에서 원에 두 접선을 그어 접점을 각각 A, B라 할 때, $\overline{PA} = \overline{PB}$ 가 성립함을 증명하려 한다. 다음 중 이 증명의 근거로 사용되지 않는 것은?



- ① ① 접선은 접점을 지나는 반지름과 수직이다.
- ② ② 두 반지름 OA와 OB의 길이가 같다.
- ③ ③ 선분 OP는 두 직각삼각형 OAP, OBP의 공통 빗변이다.
- ④ ④ 두 접선이 이루는 각 $\angle APO$ 와 $\angle BPO$ 가 같다는 사실을 먼저 가정한다.

정답: ④ 두 접선이 이루는 각 $\angle APO$ 와 $\angle BPO$ 가 같다는 사실을 먼저 가정한다.

1단계: 접선의 성질로 $\angle OAP = \angle OBP = 90^\circ$ 이다(근거 ①).

2단계: 두 반지름 $\overline{OA} = \overline{OB}$ 이고(근거 ②), 직각삼각형 OAP와 OBP는 선분 OP를 공통 빗변으로 공유한다(근거 ③).

3단계: 따라서 직각삼각형 합동 조건(RHS: 빗변-한 변)에 의해 $\triangle OAP \cong \triangle OBP$ 이고, 대응변에서 $\overline{PA} = \overline{PB}$ 를 얻는다.

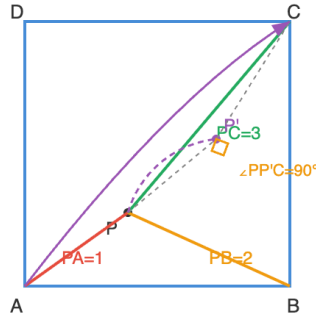
4단계: ④의 '두 각이 같다'는 것은 증명의 가정이 아니라 같은 두 삼각형 합동에서 따라오는 결론이므로 근거로 사용할 수 없다.

풀이 전략: 증명 문제에서는 '무엇을 가정하고 무엇을 결론으로 끌어내는가'를 구분해야 한다. 접선-반지름의 수직 성질, 반지름의 길이 동일성, 공통변은 모두 독립적으로 성립하는 조건이지만, 각이 같다는 사실은 합동 이후에 얻어지는 2차 결과라는 점이 함정이다.

💡 RHS 합동은 '빗변과 한 변'만 같아도 직각삼각형이 합동이 되는 특수 조건으로, 일반 SSS·SAS보다 판단이 빠르다.

Q16 도형 종합 추론

정사각형 ABCD 내부의 한 점 P에 대해 $\overline{PA} = 1$, $\overline{PB} = 2$, $\overline{PC} = 3$ 이다. 정사각형의 한 변의 길이를 s 라 할 때 s^2 의 값은?



- ① ① $3 + 2\sqrt{2}$
- ② ② $5 + 2\sqrt{2}$
- ③ ③ $5 + 4\sqrt{2}$
- ④ ④ $7 + 2\sqrt{2}$

정답: ② $5 + 2\sqrt{2}$

1단계: 점 P를 B를 중심으로 정사각형의 성질상 $\angle ABC = 90^\circ$ 이므로 90° 회전한 상을 P'라 하자. A는 C로 옮겨지고, $\overline{BP'} = \overline{BP} = 2$, $\overline{P'C} = \overline{PA} = 1$ 이 된다.

2단계: 삼각형 BPP'는 $BP = \overline{BP'} = 2$ 이고 사잇각 90° 인 직각이등변삼각형이므로 $\overline{PP'} = 2\sqrt{2}$ 이고 $\angle BP'P = 45^\circ$.

3단계: 삼각형 PP'C에서 $\overline{PP'} = 2\sqrt{2}$, $\overline{P'C} = 1$, $\overline{PC} = 3$. $(2\sqrt{2})^2 + 1^2 = 8 + 1 = 9 = 3^2$ 이므로 P'에서 직각, 즉 $\angle PP'C = 90^\circ$.

4단계: 따라서 $\angle BP'C = \angle BP'P + \angle PP'C = 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ$. 삼각형 BP'C에 코사인법칙을 적용하면

$$\overline{BC}^2 = \overline{BP'}^2 + \overline{P'C}^2 - 2 \cdot \overline{BP'} \cdot \overline{P'C} \cos 135^\circ = 4 + 1 - 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 5 + 2\sqrt{2} .$$

5단계: $\overline{BC} = s$ 이므로 $s^2 = 5 + 2\sqrt{2}$.

풀이 전략: 정사각형 내부 한 점과 꼭짓점들 사이의 거리 세 개가 주어지면 '90° 회전' 기법을 써 세 거리 1, 2, 3을 한 삼각형 안으로 모을 수 있다. 회전은 거리를 보존하므로 PA가 P'C로 이동하고, 마침 $1^2 + (2\sqrt{2})^2 = 3^2$ 이 성립해 피타고라스 수로 깔끔하게 맞물린다는 점이 관건이다.

내부 점 P에 대해 $\overline{PA}^2 + \overline{PC}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{PD}^2$ 이라는 '영국 깃발 정리(British Flag Theorem)'도 성립해 $\overline{PD}^2 = 1 + 9 - 4 = 6$ 을 얻는다.

Q17 인수분해 심화

다음 식을 인수분해하시오.

$$(x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) - 3$$

- ① ① $(x^2 + 5x + 3)(x^2 + 5x + 7)$
- ② ② $(x^2 + 5x + 2)(x^2 + 5x + 8)$
- ③ ③ $(x^2 + 5x + 1)(x^2 + 5x + 9)$
- ④ ④ $(x^2 + 5x)(x^2 + 5x + 10)$

정답: ① $(x^2 + 5x + 3)(x^2 + 5x + 7)$

1단계: 반복되는 부분을 치환한다. $t = x^2 + 5x + 5$ 로 놓으면 $x^2 + 5x + 4 = t - 1$, $x^2 + 5x + 6 = t + 1$.

2단계: 주어진 식은 $(t - 1)(t + 1) - 3 = t^2 - 1 - 3 = t^2 - 4$.

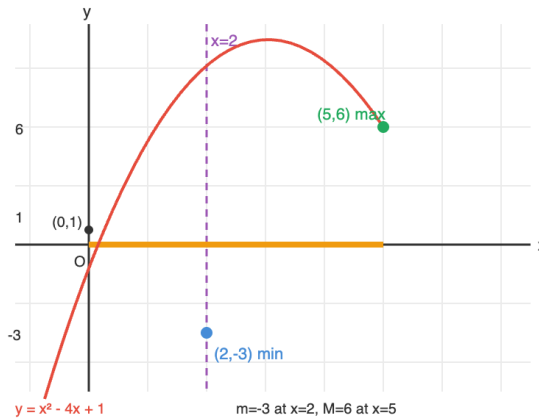
3단계: $t^2 - 4 = (t - 2)(t + 2) = (x^2 + 5x + 5 - 2)(x^2 + 5x + 5 + 2) = (x^2 + 5x + 3)(x^2 + 5x + 7)$.

풀이 전략: 공통되는 이차식 $x^2 + 5x$ 를 중심으로 두 괄호가 4와 6, 즉 중앙값 5로부터 각각 ± 1 떨어져 있다는 '대칭 구조'를 간파한다. 중앙값을 새 문자 t 로 치환하면 $(t - 1)(t + 1) = t^2 - 1$ 로 단숨에 정리되어, 계산이 급격히 단순해진다.

💡 이처럼 중앙값으로 치환하는 기법은 $(n - 1)(n + 1) = n^2 - 1$ 항등식을 활용하는 '대칭화(symmetrization)' 전략으로, 경시 인수분해에서 자주 등장한다.

Q18 이차함수 심화

이차함수 $y = x^2 - 4x + 1$ 에서 $0 \leq x \leq 5$ 일 때, 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 하자. $M + m$ 의 값은?



- ① ① 1
- ② ② 3
- ③ ③ 5
- ④ ④ 9

정답: ② 3

1단계: $y = x^2 - 4x + 1 = (x - 2)^2 - 3$ 으로 정리하면 축이 $x = 2$ 인 아래로 볼록 포물선이다.

2단계: 축 $x = 2$ 가 구간 $[0, 5]$ 안에 포함되므로 최솟값은 축 위에서 결정된다. $x = 2$ 에서 $y = -3$ 이므로 $m = -3$.

3단계: 최댓값은 두 끝 $x = 0$, $x = 5$ 에서 비교한다. $y(0) = 1$, $y(5) = 25 - 20 + 1 = 6$. 따라서 $M = 6$.

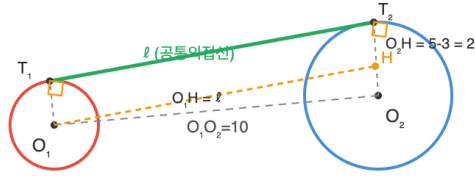
4단계: $M + m = 6 + (-3) = 3$.

풀이 전략: 제한된 구간 위 아래로 볼록 이차함수의 최댓값·최솟값은 (i) 축이 구간에 들어오는지, (ii) 구간의 두 끝 중 어느 쪽이 축에서 더 먼가를 따져 결정한다. 축이 구간 내부에 있으면 최솟값은 축 위, 최댓값은 축에서 먼 끝점에서 나타난다는 '거리 기반 추론'이 핵심이다.

💡 아래로 볼록 포물선은 축에서 멀어질수록 함수값이 커지므로, 구간의 두 끝점 중 축으로부터 더 멀리 떨어진 쪽이 항상 최댓값 위치가 된다.

Q19 원의 성질 증명

반지름의 길이가 각각 3, 5인 두 원 O_1, O_2 의 중심 사이의 거리가 10이다. 이 두 원의 공통외접선의 길이는?



- ① ① $2\sqrt{21}$
- ② ② 6
- ③ ③ $4\sqrt{6}$
- ④ ④ 8

정답: ③ $4\sqrt{6}$

1단계: 공통외접선 l 에 두 반지름 O_1T_1, O_2T_2 를 그으면 각각 l 과 수직이고, 따라서 서로 평행이다.

2단계: O_1 에서 O_2T_2 에 내린 수선의 발을 H 라 하면 사각형 $O_1T_1T_2H$ 는 직사각형이고 $O_1H = T_1T_2 = l$.

3단계: 직각삼각형 O_1HO_2 에서 빗변 $O_1O_2 = 10$, 한 변 $O_2H = O_2T_2 - T_2H = 5 - 3 = 2$.

4단계: 피타고라스 정리에 의해 $l^2 = 10^2 - 2^2 = 100 - 4 = 96$, 따라서 $l = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$.

풀이 전략: 두 원의 공통외접선 문제는 두 반지름의 차 $|r_1 - r_2|$ 를 한 변, 중심거리 d 를 빗변으로 하는 직각삼각형으로 환원해 푸는 것이 정석이다. 작은 원의 중심을 큰 원의 반지름 방향으로 옮겨 생긴 평행 직사각형과 직각삼각형을 활용한다.

💡 공통내접선의 길이는 $\sqrt{d^2 - (r_1 + r_2)^2}$ 인데, 본 문제 설정으로 계산하면 $\sqrt{100 - 64} = 6$ 이 되어 내접선은 외접선보다 더 짧다.

Q20 경시 퍼즐·확률

1부터 200까지의 자연수 중에서 2의 배수도 아니고, 3의 배수도 아니고, 5의 배수도 아닌 자연수의 개수는?

- ① ① 48
- ② ② 52
- ③ ③ 54
- ④ ④ 60

정답: ③ 54

1단계: 2, 3, 5의 배수 집합을 각각 A, B, C 라 하자. $|A| = \lfloor 200/2 \rfloor = 100, |B| = \lfloor 200/3 \rfloor = 66, |C| = \lfloor 200/5 \rfloor = 40$.

2단계: 교집합을 계산한다. $|A \cap B| = \lfloor 200/6 \rfloor = 33, |A \cap C| = \lfloor 200/10 \rfloor = 20, |B \cap C| = \lfloor 200/15 \rfloor = 13,$

$|A \cap B \cap C| = \lfloor 200/30 \rfloor = 6$.

3단계: 포함-배제 원리로 $|A \cup B \cup C| = 100 + 66 + 40 - 33 - 20 - 13 + 6 = 146$.

4단계: 전체 200개에서 빼면 $200 - 146 = 54$.

풀이 전략: '2도 3도 5도 아닌'이라는 조건은 여사건, 즉 '2 또는 3 또는 5의 배수'의 여집합이므로 포함-배제 원리로 합집합 크기를 구한 뒤 전체에서 빼는 것이 가장 빠르다. 여러 최소공배수(6, 10, 15, 30)를 정확히 짝지어 빠뜨리지 않는 것이 관건이다.

💡 이 개수를 전체 200으로 나누면 $54/200 = 0.27$ 로, 확률 기대값 $(1 - 1/2)(1 - 1/3)(1 - 1/5) = 4/15 \approx 0.267$ 과 매우 가까운데, 이는 오일러 피 함수의 기본 아이디어와 직접 연결된다.

Q21 통계 심화

세 모둠 A, B, C의 수학 점수 평균이 모두 75점으로 같고, 표준편차는 각각 A: 5, B: 8, C: 12이다. 다음 설명 중 옳은 것은?

- ① ① 평균이 같으므로 세 모듬의 점수 분포 모양은 모두 같다.
- ② ② A 모듬 학생들의 점수가 평균 주변에 가장 밀집되어 있다.
- ③ ③ C 모듬은 B 모듬보다 점수가 평균에 더 가깝다.
- ④ ④ 표준편차가 큰 모듬일수록 점수가 낮은 학생이 많다.

정답: ② A 모듬 학생들의 점수가 평균 주변에 가장 밀집되어 있다.

1단계: 표준편차는 자료가 평균으로부터 얼마나 흩어져 있는가를 나타내는 값이다. 작을수록 자료가 평균 가까이에 모여 있고, 클수록 넓게 흩어진다.

2단계: A의 표준편차 5는 B의 8보다, B의 8은 C의 12보다 작다. 따라서 평균 주변 밀집도는 $A > B > C$ 이다.

3단계: 각 선택지를 검토하면 ①은 평균이 같다고 분포 모양이 같지는 않으므로 오답. ③은 C의 표준편차가 더 커서 오히려 더 흩어져 있으므로 오답. ④는 표준편차는 '흩어짐'의 크기일 뿐 점수의 높낮이와 직접 관련이 없으므로 오답. 따라서 옳은 설명은 ②.

풀이 전략: 표준편차는 '평균 주변에 얼마나 모여 있는가'라는 밀집도의 지표이지, '평균이 얼마인가' 또는 '점수가 얼마나 낮은가'의 지표가 아니다. 함정은 표준편차가 크다는 것을 곧 '점수가 낮다' 혹은 '분포 모양이 다르다'로 잘못 확장하는 해석에 있다.

표준편차는 제곱근을 취하므로 원래 자료와 같은 단위를 가지며, 이 때문에 '점수 5점만큼 평균에서 떨어져 있다'처럼 직관적 비교에 자주 쓰인다.

Q22 실수·근호 추론

$\sqrt{5}$ 의 정수부분을 a , 소수부분을 b 라 할 때, $\frac{1}{b} + a$ 의 값은?

- ① ① $\sqrt{5} + 2$
- ② ② $\sqrt{5} + 3$
- ③ ③ $\sqrt{5} + 4$
- ④ ④ $2\sqrt{5} + 2$

정답: ③ $\sqrt{5} + 4$

1단계: $2^2 = 4 < 5 < 9 = 3^2$ 이므로 $2 < \sqrt{5} < 3$. 따라서 $\sqrt{5}$ 의 정수부분은 $a = 2$, 소수부분은 $b = \sqrt{5} - 2$.

2단계: $\frac{1}{b} = \frac{1}{\sqrt{5} - 2}$. 분모에 켄레 $\sqrt{5} + 2$ 를 곱해 유리화하면 $\frac{1}{b} = \frac{\sqrt{5} + 2}{(\sqrt{5})^2 - 2^2} = \frac{\sqrt{5} + 2}{5 - 4} = \sqrt{5} + 2$.

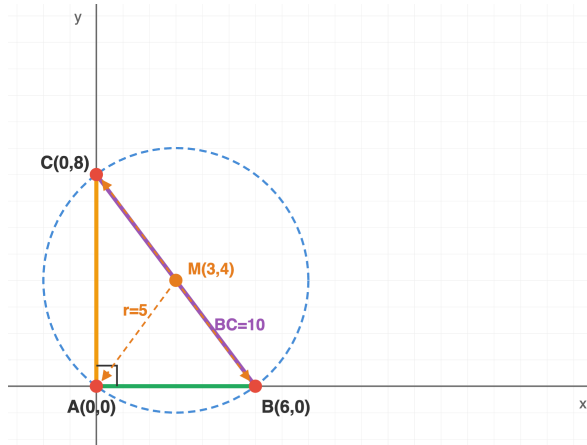
3단계: 따라서 $\frac{1}{b} + a = (\sqrt{5} + 2) + 2 = \sqrt{5} + 4$.

풀이 전략: 소수부분은 항상 (원래 수) - (정수부분)이고, 그 역수의 유리화는 켄레를 분자·분모에 곱해 분모를 정수로 만드는 방식이 표준이다. 정수부분을 결정할 때는 가장 가까운 완전제곱수들 사이에 있는가를 확인해 경계를 찾아낸다.

$\sqrt{5} - 2$ 의 역수가 다시 $\sqrt{5} + 2$ 가 되는 것은, 두 수가 이차방정식 $x^2 - 4x - 1 = 0$ 의 두 근이기 때문이다. 근과 계수의 관계에서 두 근의 곱이 -1 임을 확인할 수 있다.

Q23 도형 종합 추론

좌표평면 위 세 점 A(0, 0), B(6, 0), C(0, 8)을 이어 삼각형 ABC를 만들었다. 이 삼각형의 외접원의 둘레의 길이는?



- ① ① 5π
- ② ② 10π
- ③ ③ 20π
- ④ ④ 25π

정답: ② 10π

1단계: A(0, 0), B(6, 0), C(0, 8)이므로 변 AB는 x축 위, 변 AC는 y축 위에 있어 $\angle A = 90^\circ$. 삼각형 ABC는 직각삼각형이다.
 2단계: 직각삼각형의 외접원은 빗변을 지름으로 하는 원이다(원주각 90° 는 지름에 대한 원주각).
 3단계: 빗변 $BC = \sqrt{(6-0)^2 + (0-8)^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$. 따라서 외접원의 지름은 10, 반지름은 5.
 4단계: 외접원의 둘레의 길이는 $2\pi r = 2\pi \cdot 5 = 10\pi$.

풀이 전략: 좌표평면에서 주어진 세 점이 두 좌표축 위에 놓여 있으면 원점에서 바로 직각이 발생한다는 점에 주목한다. 직각삼각형은 외접원의 지름이 빗변과 일치하므로, 빗변의 길이만 구하면 곧장 외접원의 크기를 얻는다는 강력한 원리를 활용한다.

'지름에 대한 원주각은 90° '의 역명제인 '직각삼각형의 빗변 = 외접원의 지름'은 탈레스 정리의 핵심이며, 고등학교 사인법칙 $2R = \frac{a}{\sin A}$ 에서도 $\sin 90^\circ = 1$ 일 때 자연스럽게 드러난다.

Q24 이차방정식 활용

지면에서 공을 위로 쏘아 올렸을 때, t 초 후 지면으로부터의 높이 $h(m)$ 가 $h = -5t^2 + 30t$ 로 표현된다. 이 공이 지상 20m 이상의 높이에 머무르는 시간은 몇 초 동안인가?

- ① ① $\sqrt{5}$ 초
- ② ② $2\sqrt{5}$ 초
- ③ ③ 3초
- ④ ④ $4\sqrt{5}$ 초

정답: ② $2\sqrt{5}$ 초

1단계: 높이가 20m 이상인 조건은 $-5t^2 + 30t \geq 20$, 즉 $-5t^2 + 30t - 20 \geq 0$.
 2단계: 양변을 -5 로 나누면 부등호 방향이 바뀌어 $t^2 - 6t + 4 \leq 0$.
 3단계: $t^2 - 6t + 4 = 0$ 의 해는 근의 공식으로 $t = \frac{6 \pm \sqrt{36-16}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{20}}{2} = 3 \pm \sqrt{5}$.
 4단계: 따라서 $3 - \sqrt{5} \leq t \leq 3 + \sqrt{5}$ 이고, 머무르는 시간은 $(3 + \sqrt{5}) - (3 - \sqrt{5}) = 2\sqrt{5}$ 초.

풀이 전략: 실생활 포물체 운동 문제는 '조건 \rightarrow 이차부등식 \rightarrow 해의 범위 \rightarrow 길이'라는 4단계 흐름으로 처리한다. '머무르는 시간'은 부등식의 해집합 자체가 아니라, 그 구간의 길이(두 근의 차)임에 유의한다. 두 근의 차는 $\sqrt{b^2 - 4ac} / |a|$ 공식으로 바로도 얻을 수 있다.

공이 20m 이상에 머무는 시간 $2\sqrt{5} \approx 4.47$ 초는, 포물체가 최고점(중력 반환점)에 도달하는 $t = 3$ 초를 중심으로 대칭이다. 포물체 운동의 '시간 대칭성'의 한 예시다.

Q25 실수·근호 추론

세 수 $A = 3\sqrt{5}$, $B = 2\sqrt{11}$, $C = \sqrt{43}$ 의 대소관계를 부등호로 바르게 나타낸 것은?

- ① ① $A < B < C$
- ② ② $A < C < B$
- ③ ③ $C < B < A$
- ④ ④ $C < A < B$

정답: ③ $C < B < A$

1) 세 수가 모두 양수이므로 양변을 제곱해 비교한다. 2) $A^2 = (3\sqrt{5})^2 = 9 \cdot 5 = 45$, $B^2 = (2\sqrt{11})^2 = 4 \cdot 11 = 44$, $C^2 = (\sqrt{43})^2 = 43$. 3) $43 < 44 < 45$ 이고 세 수가 모두 양수이므로 $C < B < A$.

풀이 전략: 근호 안의 수와 계수가 모두 다른 무리수의 대소를 비교할 때는 근호를 직접 풀러 하지 말고 양수 조건을 확인한 뒤 양변을 제곱하여 정수끼리 비교한다. 음수가 섞여 있으면 부호 처리에 별도로 주의해야 한다.

세 값을 소수로 표현하면 $A \approx 6.708$, $B \approx 6.633$, $C \approx 6.557$ 로 차이가 0.1 이하이지만, 제곱하면 1씩 깔끔하게 차이가 난다.

Q26 실수·근호 추론

양수 x 가 $x = \sqrt{12+x}$ 를 만족한다. x 의 값을 구하시오.

- ① ① 3
- ② ② 4
- ③ ③ $\sqrt{13}$
- ④ ④ $2\sqrt{3}$

정답: ② 4

1) $x \geq 0$ 이고 $\sqrt{12+x} \geq 0$ 이므로 양변을 제곱해도 동치이다: $x^2 = 12 + x$, 즉 $x^2 - x - 12 = 0$. 2) 인수분해하면 $(x-4)(x+3) = 0$, $x = 4$ 또는 $x = -3$. 3) x 는 양수라는 조건에서 $x = 4$. 검산: $\sqrt{12+4} = \sqrt{16} = 4$ (무연근 -3 제거됨).

풀이 전략: 근호가 포함된 자기참조 방정식은 양변을 제곱해 다항방정식으로 변환하는 것이 첫 단계이다. 단, 제곱 과정에서 부호 정보가 사라져 무연근(원래 식을 만족하지 않는 가짜 해)이 생길 수 있으므로 반드시 원래 조건을 적용해 걸러내야 한다.

무한 중첩 근호 $\sqrt{12 + \sqrt{12 + \sqrt{12 + \dots}}}$ 의 값도 정확히 같은 식으로 4가 된다. 일반적으로 $\sqrt{n + \sqrt{n + \dots}} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4n}}{2}$.

Q27 인수분해 심화

$a + b + c = 0$ 일 때, 항등식 $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ 가 성립함을 보이고, 이를 이용하여 $97^3 + 3^3 + (-100)^3$ 의 값을 구하시오.

- ① ① -9000
- ② ② -29100
- ③ ③ -87300
- ④ ④ -2910000

정답: ③ -87300

1) [증명] $c = -(a+b)$ 를 대입하면 $a^3 + b^3 + c^3 = a^3 + b^3 - (a+b)^3$. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ 이므로 $a^3 + b^3 - (a+b)^3 = -3ab(a+b) = 3ab \cdot c = 3abc$. 따라서 $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. 2) $97 + 3 + (-100) = 0$ 이므로 위 항등식의 조건을 만족한다. 3) $97^3 + 3^3 + (-100)^3 = 3 \cdot 97 \cdot 3 \cdot (-100) = -87300$.

풀이 전략: 세 수의 합이 0이라는 조건은 $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ 라는 강력한 항등식을 사용할 수 있는 신호이다. 직접 계산이 매우 번거로운 큰 수들의 세제곱 합도 합이 0이 되도록 묶어주면 한 줄로 정리된다.

이 항등식은 일반 공식 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$ 에서 $a+b+c = 0$ 인 특수한 경우이다.

Q28 인수분해 심화

2 이상의 자연수 n 에 대하여 $n^4 + 4$ 가 항상 합성수임을 인수분해를 이용하여 증명하시오.

- ① ① $(n^2 + 2)(n^2 - 2)$ 로 인수분해된다
- ② ② $(n^2 + 2n + 2)(n^2 - 2n + 2)$ 로 인수분해된다
- ③ ③ $(n + 1)(n^3 - n^2 + n - 4)$ 로 인수분해된다
- ④ ④ 인수분해되지 않는다

정답: ② $(n^2 + 2n + 2)(n^2 - 2n + 2)$ 로 인수분해된다

1) $4n^2$ 를 더하고 빼서 완전제곱 꼴을 만든다: $n^4 + 4 = n^4 + 4n^2 + 4 - 4n^2 = (n^2 + 2)^2 - (2n)^2$. 2) 합차공식 $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$ 를 적용: $(n^2 + 2 + 2n)(n^2 + 2 - 2n) = (n^2 + 2n + 2)(n^2 - 2n + 2)$. 3) $n \geq 2$ 이면 $n^2 - 2n + 2 = (n - 1)^2 + 1 \geq 2 > 1$ 이고, $n^2 + 2n + 2 = (n + 1)^2 + 1 \geq 10 > 1$ 이다. 두 인수가 모두 1보다 크므로 $n^4 + 4$ 는 합성수. □

풀이 전략: $x^4 + 4$ 형태는 보통의 인수분해 공식으로 곧장 풀리지 않는다. $4x^2$ 를 더하고 빼서 $(x^2 + 2)^2 - (2x)^2$ 꼴을 만드는 '소피 제르맹 항등식'이 결정적 발상이다. 합성수 증명에서는 두 인수가 모두 1보다 크다는 것을 명시적으로 보여야 한다.

이 항등식은 18세기 프랑스의 여성 수학자 소피 제르맹(Sophie Germain)이 발견하여 그녀의 이름이 붙어 있다. 페르마의 마지막 정리를 연구하다가 발견했다.

Q29 이차방정식 활용

길이 20cm인 철사를 두 도막으로 잘라 각각 정사각형을 만들었더니 두 정사각형의 넓이의 합이 13cm^2 이었다. 잘라낸 두 도막의 길이의 차는 몇 cm인가?

- ① ① 2cm
- ② ② 3cm
- ③ ③ 4cm
- ④ ④ 6cm

정답: ③ 4cm

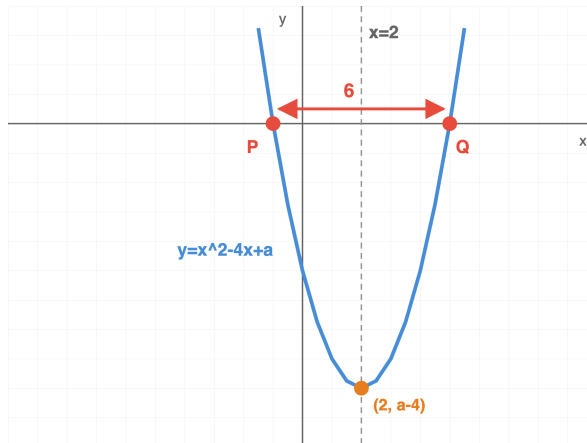
1) 두 도막의 길이를 각각 $4a, 4b$ ($a \geq b > 0$)로 두면 정사각형의 한 변은 a, b 이다. 조건에서 $4a + 4b = 20 \Rightarrow a + b = 5$, $a^2 + b^2 = 13$. 2) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 이므로 $25 = 13 + 2ab$, $ab = 6$. 3) $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab = 25 - 24 = 1$ 이므로 $a - b = 1$. 따라서 두 도막의 길이의 차 = $4(a - b) = 4\text{cm}$.

풀이 전략: 정사각형의 둘레 = 한 변 $\times 4$ 임을 활용해 변수를 $4a, 4b$ 로 잡으면 식이 깔끔해진다. $a + b$ 와 $a^2 + b^2$ 가 주어지면 $ab, (a - b)^2$ 를 차례로 구할 수 있어, 굳이 이차방정식의 근의 공식을 쓰지 않고도 두 미지수의 차를 알아낼 수 있다.

같은 둘레 20cm로 두 정사각형을 만들 때, 넓이의 합이 가장 작아지는 분할은 두 도막을 똑같이 10cm씩 자르는 경우이고, 그때 넓이의 합은 $2 \cdot 2.5^2 = 12.5\text{cm}^2$ 로 13보다 작다.

Q30 이차함수 심화

이차함수 $y = x^2 - 4x + a$ 의 그래프가 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나고, 그 두 교점 사이의 거리가 6일 때, 상수 a 의 값을 구하시오.



- ① ① -5
- ② ② -3
- ③ ③ 5
- ④ ④ 9

정답: ① -5

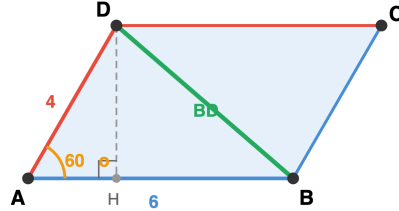
1) 완전제곱식으로 변형하면 $y = (x - 2)^2 + (a - 4)$. 그래프의 꼭짓점은 $(2, a - 4)$, 대칭축은 $x = 2$. 2) x 축과 서로 다른 두 점에서 만나려면 꼭짓점이 x 축 아래에 있어야 하므로 $a - 4 < 0$. 두 교점은 대칭축 $x = 2$ 에 대해 대칭이므로 $(x - 2)^2 = 4 - a$ 에서 $x = 2 \pm \sqrt{4 - a}$. 3) 두 교점 사이의 거리 $= 2\sqrt{4 - a} = 6$ 이므로 $\sqrt{4 - a} = 3$, $4 - a = 9$, $a = -5$. ($-5 < 4$ 이므로 조건 만족) ✓

풀이 전략: 이차함수 그래프와 x 축의 두 교점은 항상 대칭축에 대해 대칭이라는 사실을 활용하면, 근의 공식이나 근과 계수의 관계를 동원하지 않고도 완전제곱식과 거리 조건만으로 깔끔하게 풀린다. 마지막에 '서로 다른 두 점에서 만난다'는 조건을 만족하는지 반드시 확인한다.

💡 일반화하면 $y = ax^2 + bx + c$ 의 두 x 절편 사이 거리는 $\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|}$ 로, 분자는 판별식의 제곱근이다.

Q31 삼각비 심화

평행사변형 ABCD에서 $\overline{AB} = 6$, $\overline{AD} = 4$, $\angle BAD = 60^\circ$ 일 때, 대각선 \overline{BD} 의 길이를 구하시오. (단, 코사인 법칙을 사용하지 말고 풀 것.)



- ① ① $2\sqrt{5}$
- ② ② $2\sqrt{7}$
- ③ ③ $\sqrt{30}$
- ④ ④ $4\sqrt{2}$

정답: ② $2\sqrt{7}$

1) 점 D에서 변 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자. 직각삼각형 AHD에서 $\overline{AH} = \overline{AD}\cos 60^\circ = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$,

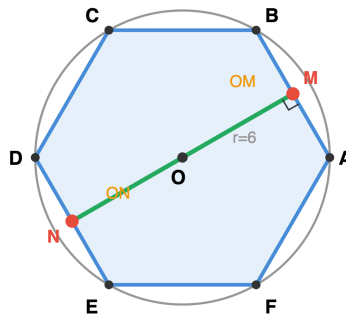
$\overline{DH} = \overline{AD}\sin 60^\circ = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$. 2) $\overline{HB} = \overline{AB} - \overline{AH} = 6 - 2 = 4$. 3) 삼각형 DHB는 $\angle DHB = 90^\circ$ 인 직각삼각형이므로 $\overline{BD}^2 = \overline{HB}^2 + \overline{DH}^2 = 16 + 12 = 28$. 따라서 $\overline{BD} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$.

풀이 전략: 삼각형의 두 변과 끼인각이 주어진 상황에서 나머지 한 변(여기서는 대각선)을 구할 때, 한 꼭짓점에서 수선을 내려 두 개의 직각삼각형으로 분해하는 것이 정석이다. 삼각비로 두 직각변의 길이를 구한 뒤 피타고라스 정리로 마무리한다.

💡 이 풀이 전 과정은 사실상 코사인 법칙 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ 를 직접 유도하는 과정이다. 고등학교에서 배우는 코사인 법칙은 이 분해 절차를 일반 공식으로 정리한 것에 불과하다.

Q32 원의 성질 증명

반지름이 6인 원 O 에 정육각형 $ABCDEF$ 가 내접한다. 변 AB 의 중점을 M , 변 DE 의 중점을 N 이라 할 때, 선분 MN 의 길이를 구하시오.



- ① $6\sqrt{2}$
- ② $6\sqrt{3}$
- ③ 9
- ④ 12

정답: ② $6\sqrt{3}$

1) 반지름 6인 원에 내접하는 정육각형의 한 변의 길이는 반지름과 같은 6이다. (중심과 두 인접한 꼭짓점이 만드는 삼각형이 변의 길이가 모두 6인 정삼각형이기 때문) 2) 중심 O 에서 변 AB 에 내린 수선의 발은 변 AB 의 중점 M 이다. 직각삼각형 OMA 에서 $OA = 6$, $AM = 3$ 이므로 $OM = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$. 같은 방법으로 $ON = 3\sqrt{3}$. 3) 변 AB 와 변 DE 는 정육각형에서 서로 마주보는 변이므로 평행하고, 정육각형은 중심 O 에 대해 점대칭이다. 따라서 M, O, N 은 한 직선 위에 있고 O 가 MN 의 중점이다.

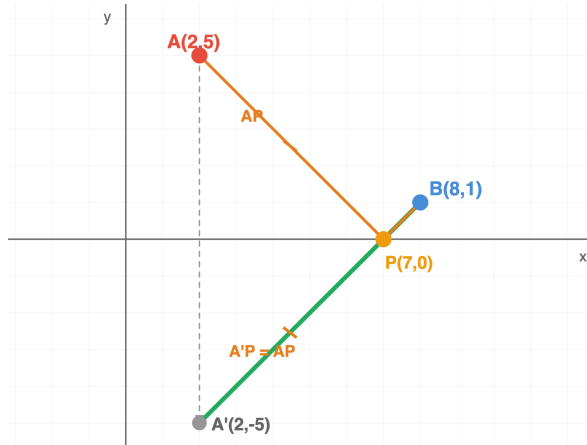
$$MN = OM + ON = 6\sqrt{3} .$$

풀이 전략: 정육각형의 핵심 성질 세 가지를 활용한다: (1) 한 변의 길이 = 외접원의 반지름, (2) 중심에서 한 변까지의 거리(아포섬) = $\frac{\sqrt{3}}{2} \times$ (한 변), (3) 마주보는 변끼리 평행하고 중심에 대해 점대칭이므로 두 마주보는 변의 중점은 중심을 지나는 한 직선 위에 있다.

💡 마주보는 두 변 사이의 거리(정육각형의 폭)가 $6\sqrt{3}$ 이라는 것은, 정육각형이 같은 반지름의 원 안에서 차지하는 실제 폭이 지름(12)의 약 86.6%임을 의미한다.

Q33 도형 종합 추론

좌표평면 위의 두 점 $A(2, 5)$, $B(8, 1)$ 이 있다. x 축 위의 한 점 P 에 대하여 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 가 최소가 되도록 하는 점 P 의 좌표를 구하시오.



- ① ① (5, 0)
- ② ② (6, 0)
- ③ ③ (7, 0)
- ④ ④ $(\frac{42}{5}, 0)$

정답: ③ (7, 0)

1) 점 A 를 x 축에 대하여 대칭이동시킨 점을 $A'(2, -5)$ 라 하면, x 축 위 임의의 점 P 에 대하여 $\overline{AP} = \overline{A'P}$ 이다. 따라서 $\overline{AP} + \overline{BP} = \overline{A'P} + \overline{BP}$. 2) 삼각부등식에 의해 $\overline{A'P} + \overline{BP} \geq \overline{A'B}$ 이고, 등호는 세 점 A', P, B 가 한 직선 위에 있을 때 성립한다. 즉, 직선 $A'B$ 가 x 축과 만나는 점이 답이다. 3) 직선 $A'B$ 의 기울기 $= \frac{1 - (-5)}{8 - 2} = 1$ 이고 식은 $y - 1 = 1 \cdot (x - 8)$, 즉 $y = x - 7$. $y = 0$ 일 때 $x = 7$ 이므로 $P(7, 0)$.

풀이 전략: 한 직선 위의 점에 대한 두 거리의 합을 최소화하는 문제는 '한 점을 그 직선에 대칭시켜 일직선으로 펴기'가 정석 풀이이다. 대칭을 이용해 꺾인 경로를 일직선으로 만든 뒤, 직선과 축의 교점을 구한다.

💡 이 원리는 빛이 거울에 반사될 때 입사각과 반사각이 같은 이유를 수학적으로 설명한다. 17세기 페르마는 이 '최단경로 원리'에서 출발하여 빛의 굴절 법칙(스넬의 법칙)까지 유도했다.

Q34 통계 심화

다섯 개의 변량 1, 3, 5, a , b 의 평균이 4이고 분산이 4일 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하시오.

- ① ① 43
- ② ② 50
- ③ ③ 57
- ④ ④ 65

정답: ④ 65

1) 평균 조건: $\frac{1+3+5+a+b}{5} = 4$ 이므로 $a + b = 11$. 2) 각 변량의 평균에 대한 편차는 $-3, -1, 1, a - 4, b - 4$ 이고, 분산은 편차 제곱의 평균이므로 $\frac{(-3)^2 + (-1)^2 + 1^2 + (a-4)^2 + (b-4)^2}{5} = 4 \Rightarrow (a-4)^2 + (b-4)^2 = 9$. 3) 좌변을 전개하면 $a^2 - 8a + 16 + b^2 - 8b + 16 = 9$, 즉 $a^2 + b^2 = 9 + 8(a + b) - 32 = 9 + 88 - 32 = 65$.

풀이 전략: 평균과 분산이 함께 주어진 미지수 변량 문제는 두 식 (합 조건과 편차 제곱 합 조건)을 세운 뒤, a 와 b 를 따로 구하지 않고 대칭식 ($a + b$ 와 $a^2 + b^2$)을 직접 구하는 것이 효율적이다. 분산 정의의 분모(자료 개수)를 빠뜨리지 않도록 주의한다.

💡 a, b 를 분리해 구하면 $ab = \frac{(a+b)^2 - (a^2 + b^2)}{2} = \frac{121 - 65}{2} = 28$ 이므로 a, b 는 $t^2 - 11t + 28 = 0$ 의 두 근, 즉 4와 7이다.

Q35 경시 퍼즐·확률

1부터 9까지의 자연수가 하나씩 적힌 9장의 카드 중에서 서로 다른 3장을 동시에 뽑을 때, 뽑힌 세 수의 합이 짝수가 될 확률을 기약 분수로 나타내시오.

- ① ① $\frac{5}{14}$
- ② ② $\frac{10}{21}$
- ③ ③ $\frac{11}{21}$
- ④ ④ $\frac{4}{7}$

정답: ③ $\frac{11}{21}$

1) 1~9 중 홀수는 {1, 3, 5, 7, 9}로 5개, 짝수는 {2, 4, 6, 8}로 4개이다. 세 수의 합이 짝수가 되려면 뽑힌 홀수의 개수가 짝수여야 하므로 (홀수 0개 + 짝수 3개) 또는 (홀수 2개 + 짝수 1개)의 두 경우뿐이다. 2) (홀수 0개, 짝수 3개): $\binom{4}{3} = 4$ 가지. (홀수 2개, 짝수 1개): $\binom{5}{2} \times \binom{4}{1} = 10 \times 4 = 40$ 가지. 합 = 44. 3) 전체 경우의 수 = $\binom{9}{3} = 84$. 따라서 확률 = $\frac{44}{84} = \frac{11}{21}$.

풀이 전략: 정수의 합의 홀짝은 홀수의 개수의 홀짝으로 결정된다(짝수는 합의 홀짝에 영향 없음). '세 수의 합이 짝수' 조건을 '홀수가 짝수 개(0개 또는 2개)'로 바꾸면 경우 분류가 단순해진다. 함정: 모든 경우를 직접 더하지 않고 여사건을 사용하면 더 짧지만, 둘 다 결과는 같다.

여사건(세 수의 합이 홀수)으로 풀어도 결과가 같다: 홀수 1개+짝수 2개 ($5 \times 6 = 30$) 또는 홀수 3개 ($\binom{5}{3} = 10$), 합 40. $\frac{40}{84} = \frac{10}{21}$ 이고 $1 - \frac{10}{21} = \frac{11}{21}$.

Q36 경시 퍼즐·확률

한 직선 위에 다섯 개의 점이 놓여 있고, 어떤 두 점을 골라도 그 사이의 거리가 1 이상이라고 한다. 이때 가장 멀리 떨어진 두 점 사이의 거리의 최솟값을 구하시오.

- ① ① 3
- ② ② 4
- ③ ③ 5
- ④ ④ $4\sqrt{2}$

정답: ② 4

1) 다섯 점의 좌표를 작은 것부터 정렬하여 $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5$ 라 하면, 가장 멀리 떨어진 두 점 사이의 거리는 $x_5 - x_1$ 이다. 2) '어떤 두 점의 거리도 1 이상'이라는 조건은, 특히 인접한 점들 사이에서도 성립해야 하므로 $x_{k+1} - x_k \geq 1$ ($k = 1, 2, 3, 4$). 3) 망원경 합으로 $x_5 - x_1 = (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + (x_4 - x_3) + (x_5 - x_4) \geq 1 + 1 + 1 + 1 = 4$. 등호는 인접한 두 점 사이의 거리가 모두 정확히 1일 때(예: 0, 1, 2, 3, 4) 성립하므로 최솟값은 4.

풀이 전략: 이산적인 배치에서 '최소 가능 거리'를 묻는 문제는 (a) 정렬하여 인접 차이의 합으로 분해, (b) 각 차이의 하한을 더해 전체 하한 도출, (c) 등호가 성립하는 구체적 예시 제시의 3단계로 접근한다. 망원경 합과 극단원리(가장 단순한 등간격 배치가 극값을 만든다)의 결합이다.

같은 조건에서 점이 n 개라면 가장 양 끝의 두 점 사이 거리의 최솟값은 항상 $n - 1$ 이다. 점 4개면 3, 점 100개면 99.

Q37 실수·근호 추론

$\sqrt{7+4\sqrt{3}}$ 을 $a+b\sqrt{3}$ 꼴(단, a, b 는 양의 유리수)로 나타낼 때, $a+b$ 의 값은?

- ① ① 2
- ② ② 3
- ③ ③ 4
- ④ ④ $2\sqrt{3}$

정답: ② 3

1 단계: 이중근호 풀이를 위해 $7+4\sqrt{3}$ 을 완전제곱 꼴로 변형한다. 2단계:

$7+4\sqrt{3} = 4+2\cdot 2\cdot \sqrt{3} + 3 = 2^2 + 2\cdot 2\cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = (2+\sqrt{3})^2$. 3단계: $\sqrt{(2+\sqrt{3})^2} = 2+\sqrt{3}$ (양수이므로 절댓값 그대로). 4단계: $a=2, b=1$ 이므로 $a+b=3$.

2 풀이 전략: 이중근호 $\sqrt{A\pm 2\sqrt{B}}$ 꼴은 $A=m+n, B=mn$ 을 만족하는 m, n 을 찾아 $(\sqrt{m}\pm\sqrt{n})^2$ 로 변형한다. 여기서 $4\sqrt{3} = 2\sqrt{12}$ 이므로 $m+n=7, mn=12$, 즉 $m=4, n=3$ 이다.

3 이중근호는 단순한 근호로 풀리지 않는 경우도 많다. 예를 들어 $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ 은 $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ 처럼 더 복잡한 형태로 표현된다.

Q38 인수분해 심화

식 x^4+x^2+1 을 유리계수 범위에서 두 이차식의 곱으로 인수분해하시오.

- ① ① $(x^2+1)(x^2-1)$
- ② ② $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$
- ③ ③ $(x^2+1)^2$
- ④ ④ $(x^2+x-1)(x^2-x-1)$

정답: ② $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

1 단계: x^4+x^2+1 의 가운데 항을 조작하기 위해 x^2 을 더하고 빼는 기법을 쓴다. 2단계:

$x^4+x^2+1 = (x^4+2x^2+1) - x^2 = (x^2+1)^2 - x^2$. 3단계: 제곱의 차 공식 $A^2-B^2 = (A+B)(A-B)$ 를 적용하면 $(x^2+1+x)(x^2+1-x) = (x^2+x+1)(x^2-x+1)$ 이다. 4단계: 각 이차식의 판별식은 $1-4 = -3 < 0$ 이므로 유리계수에서 더 이상 분해되지 않는다.

2 풀이 전략: 직접 인수분해가 어려운 x^4+x^2+1 같은 식은 '가상의 항'을 더하고 빼서 완전제곱으로 변형한 뒤 제곱의 차로 푸는 전략이 유용하다. 이 기법은 $x^4+4 = (x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$ (소피 제르맹) 등과 연결된다.

3 x^4+x^2+1 은 $x^6-1 = (x^2-1)(x^4+x^2+1)$ 의 인수이기도 하여, 1의 6제곱근 이론과 연결된다.

Q39 이차방정식 활용

이차방정식 $x^2-(k-2)x+k=0$ 이 서로 다른 두 양의 정수근을 가질 때, 상수 k 의 값은?

- ① ① 6
- ② ② 7
- ③ ③ 8
- ④ ④ 9

정답: ③ 8

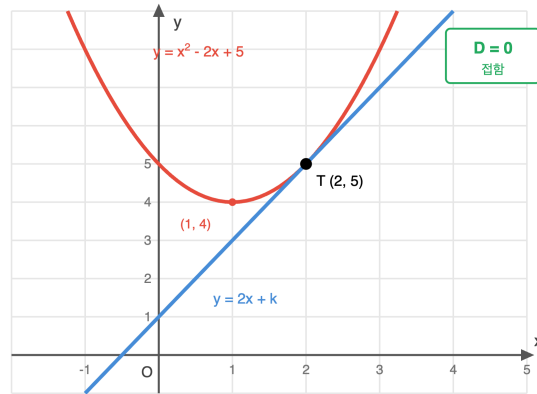
1 단계: 두 근을 α, β 라 하면 합은 $\alpha+\beta=k-2$, 곱은 $\alpha\beta=k$ 이다. 2단계: 두 식을 빼면 $\alpha\beta-(\alpha+\beta)=k-(k-2)=2$ 이므로 $\alpha\beta-\alpha-\beta+1=3$, 즉 $(\alpha-1)(\beta-1)=3$. 3단계: α, β 가 서로 다른 양의 정수이므로 $\alpha-1, \beta-1$ 은 음이 아닌 서로 다른 정수이고 곱이 3이다. 따라서 $\{\alpha-1, \beta-1\} = \{1, 3\}$, 즉 $\{\alpha, \beta\} = \{2, 4\}$. 4단계: $k = \alpha\beta = 2\cdot 4 = 8$.

2 풀이 전략: 근의 합과 곱을 동시에 포함한 조건식은 흔히 $(\alpha\pm 1)(\beta\pm 1)$ 형태로 인수분해되어 정수 조건을 강제한다. 양변에 1을 더하거나 빼서 곱의 형태를 만든 뒤 가능한 정수 조합을 체계적으로 검토하는 것이 핵심 전략이다.

3 이 기법은 고등학교에서 배우는 '인수분해의 역방향 사고'로, 디오판토스 방정식(정수해 방정식) 해결의 기본이다.

Q40 이차함수 심화

이차함수 $y = x^2 - 2x + 5$ 의 그래프와 직선 $y = 2x + k$ 가 접할 때, 상수 k 의 값은?



- ① ① 0
- ② ② 1
- ③ ③ 2
- ④ ④ 3

정답: ② 1

1단계: 접점의 조건은 두 식을 연립한 이차방정식이 중근을 가지는 것이므로 판별식이 0이다. **2단계:** $x^2 - 2x + 5 = 2x + k$ 를 정리하면 $x^2 - 4x + (5 - k) = 0$ 이다. **3단계:** 판별식 $D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (5 - k) = 16 - 20 + 4k = 4k - 4 = 0$. **4단계:** $k = 1$. 이때 접점의 x 좌표는 $x = 2$, y 좌표는 5이므로 접점은 $(2, 5)$ 이다.

풀이 전략: 포물선과 직선이 접한다는 것은 연립방정식이 유일한 해(중근)를 가지는 상황이다. 따라서 둘을 연립해 이차식으로 정리한 뒤 판별식을 0으로 놓는다. y 절편 k 는 직선을 위아래로 움직이는 조절 장치이므로, 포물선에 닿는 순간의 k 를 찾는 문제로 해석할 수 있다.

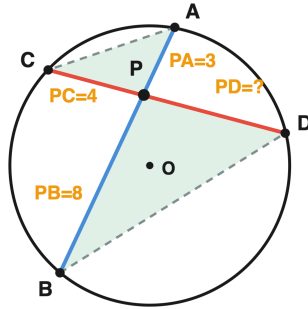
접선 개념은 고등학교에서 미분으로 일반화된다. 기울기가 2인 접선이 되는 점은 $y' = 2x - 2 = 2$ 에서 $x = 2$ 로, 이차방정식의 중근과 정확히 일치한다.

중3 수학 심화

총 40문제 · 문제와 정답·풀이 포함

Q41 원의 성질 증명

원 O 위에 네 점 A, B, C, D가 있고 두 현 AB, CD가 원의 내부의 점 P에서 만난다. $PA = 3, PB = 8, PC = 4$ 일 때, PD 의 길이는?



$\triangle PAC \sim \triangle PDB$

- ① ① 5
- ② ② 6
- ③ ③ 8
- ④ ④ 10

정답: ② 6

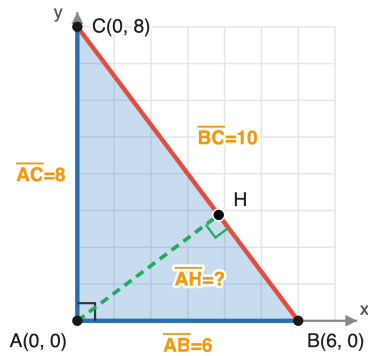
1단계: 삼각형 PAC와 삼각형 PDB에서 맞꼭지각 $\angle APC = \angle DPB$. 2단계: 원주각 정리에 의해 호 BC에 대한 원주각이 같으므로 $\angle PAC = \angle PDB$ (같은 호에 대한 원주각). 3단계: AA 닮음에 의해 $\triangle PAC \sim \triangle PDB$ 이므로 $\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB}$, 즉 $PA \cdot PB = PC \cdot PD$. 4단계: $3 \cdot 8 = 4 \cdot PD$ 이므로 $PD = 6$.

풀이 전략: 원 안에서 두 현이 만날 때 생기는 '방역 관계' $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ 는 원주각 정리가 주는 닮음의 결과다. 단순 공식 암기가 아니라, 두 삼각형이 닮음을 보이는 과정이 증명의 본질이다.

이 성질은 점 P의 원 O에 대한 '방역(power of a point)'이라 불리며 고등학교·대학 기하로 이어진다. P가 원 외부일 때도 비슷한 관계가 성립한다.

Q42 도형 종합 추론

좌표평면 위의 세 점 $A(0, 0)$, $B(6, 0)$, $C(0, 8)$ 을 꼭짓점으로 하는 직각삼각형이 있다. 꼭짓점 A 에서 빗변 BC 에 내린 수선의 발을 H 라 할 때, 선분 AH 의 길이는?



- ① ① $\frac{18}{5}$
- ② ② $\frac{21}{5}$
- ③ ③ $\frac{24}{5}$
- ④ ④ $\frac{27}{5}$

☞ 정답: ③ $\frac{24}{5}$

📖 1단계: 직각삼각형 ABC 에서 $AB = 6$, $AC = 8$ 이므로 빗변 $BC = \sqrt{36 + 64} = 10$. 2단계: 삼각형 ABC 의 넓이를 두 가지 방법으로 표현한다. 직각 두 변을 사용: $S = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$. 3단계: 빗변과 수선 AH 를 사용: $S = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AH = 5 \cdot AH$. 4단계: 두 표현을 같게 놓으면 $5 \cdot AH = 24$ 이므로 $AH = \frac{24}{5}$.

🧠 풀이 전략: 같은 삼각형의 넓이를 '직각 두 변으로 구하기'와 '빗변과 빗변 위 높이로 구하기' 두 방식으로 표현하고 같다고 놓는 것이 핵심. 이 방법은 직각삼각형에서 $AH = \frac{ab}{c}$ (a, b 는 직각 두 변, c 는 빗변) 공식을 유도한다.

💡 점 H 는 직각삼각형 고도정리(altitude-on-hypotenuse theorem)의 핵심이며, $AH^2 = BH \cdot HC$ 가 성립한다.

Q43 통계 심화

다섯 개의 값 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 의 평균이 6, 분산이 5이다. 이 자료에 새로운 값 6을 하나 추가하여 여섯 개의 자료를 만들 때, 새 자료의 분산은?

- ① ① $\frac{20}{6}$
- ② ② $\frac{23}{6}$
- ③ ③ $\frac{25}{6}$
- ④ ④ $\frac{30}{6}$

☞ 정답: ③ $\frac{25}{6}$

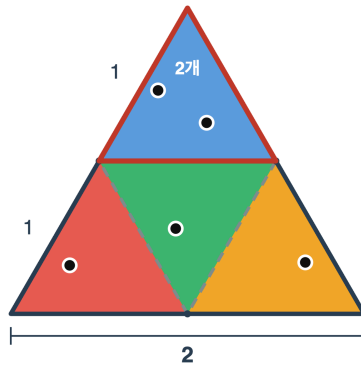
📖 1단계: 기존 5개 자료의 편차제곱의 합은 (분산) \times (자료수) $= 5 \times 5 = 25$ 이다. 2단계: 추가되는 값 6은 기존 평균과 같으므로, 새 자료의 총합은 $5 \cdot 6 + 6 = 36$ 이고 자료 수는 6이다. 따라서 새 평균도 $\frac{36}{6} = 6$ 으로 변함없다. 3단계: 기존 자료들의 편차(평균 6 기준)는 그대로이므로 편차제곱의 합도 그대로 25이다. 추가된 값 6의 편차는 $6 - 6 = 0$ 이므로 편차제곱이 0, 합에 아무 기여도 없다. 4단계: 새 분산 = $\frac{25 + 0}{6} = \frac{25}{6}$.

🧠 풀이 전략: 분산 문제의 핵심은 '편차제곱의 합'을 유지시키는 감각이다. 평균과 같은 값을 추가하면 평균이 그대로 유지되고 편차제곱의 합도 그대로이므로, 분산의 변화는 오로지 자료 수의 증가(분모 증가)에서만 나온다.

💡 평균값을 추가하는 것은 분산을 '희석'하는 효과가 있다. 분산이 감소하는 방향으로만 움직이며, 분자는 변하지 않는다.

Q44 경시 퍼즐·확률

한 변의 길이가 2인 정삼각형의 내부(경계 포함)에 임의로 5개의 점을 찍었다. '이 5개의 점 중 적어도 두 점 사이의 거리가 1 이하이다'를 증명하기 위한 가장 적절한 전략은?



- ① ① 세 변의 중점을 연결해 네 개의 합동인 작은 정삼각형으로 나누고, 비둘기집 원리로 어떤 영역에 점 두 개가 있음을 보인다.
- ② ② 각 꼭짓점에서 거리 1 이하인 원호 세 개를 그어 교집합 영역에 모든 점이 있음을 보인다.
- ③ ③ 5개의 점을 무게중심에서 가까운 순으로 정렬하여 첫 두 점의 거리를 계산한다.
- ④ ④ 정삼각형에 내접하는 원을 그려 원 내부에 있는 점의 개수를 센다.

정답: ① 세 변의 중점을 연결해 네 개의 합동인 작은 정삼각형으로 나누고, 비둘기집 원리로 어떤 영역에 점 두 개가 있음을 보인다.

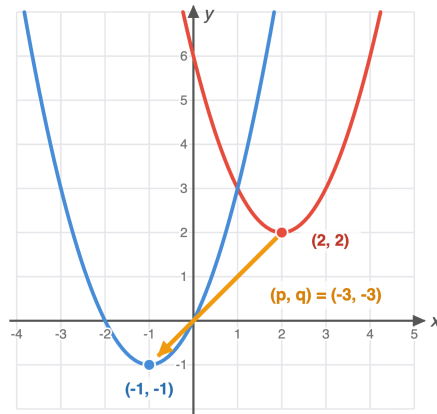
1단계: 한 변의 길이가 2인 정삼각형의 세 변의 중점을 연결하면, 한 변의 길이가 1인 합동인 정삼각형 4개로 분할된다. 2단계: 5개의 점을 4개의 영역에 배치할 때, 비둘기집 원리(서랍 원리)에 의해 어떤 한 영역에는 반드시 2개 이상의 점이 들어간다. 3단계: 한 변 1인 정삼각형 내부의 임의의 두 점 사이의 거리는 그 최댓값인 변의 길이 1을 넘지 않는다. 4단계: 따라서 같은 영역에 있는 그 두 점의 거리는 1 이하이므로 증명 완료.

풀이 전략: 이런 형태의 '반드시 ~가 존재한다'는 존재 증명은 공간을 적절히 조각내고 비둘기집 원리로 점의 분포를 강제하는 것이 정석이다. 핵심은 '한 조각의 지름'이 목표 거리 이하가 되도록 분할을 설계하는 것.

비둘기집 원리(pigeonhole principle)는 단순하지만 강력한 존재 증명 도구로, 국제수학올림피아드에서도 자주 등장한다.

Q45 이차함수 심화

이차함수 $y = x^2 - 4x + 6$ 의 그래프를 x 축 방향으로 p 만큼, y 축 방향으로 q 만큼 평행이동한 그래프가 $y = x^2 + 2x$ 의 그래프와 일치할 때, $p + q$ 의 값은?



- ① ① -6
- ② ② -5
- ③ ③ -4
- ④ ④ -3

정답: ① -6

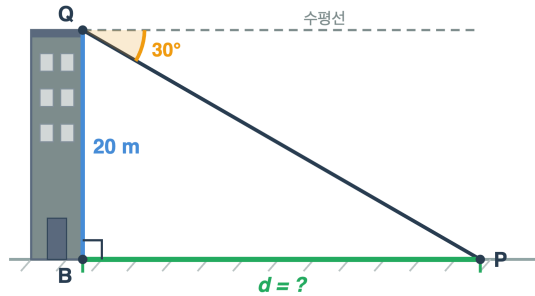
1단계: 원래 식을 표준형으로: $y = x^2 - 4x + 6 = (x - 2)^2 + 2$ 이므로 꼭짓점은 $(2, 2)$. **2단계:** 목표 식을 표준형으로: $y = x^2 + 2x = (x + 1)^2 - 1$ 이므로 꼭짓점은 $(-1, -1)$. **3단계:** 이차항 계수가 같으므로 두 그래프는 합동이며, 평행이동이 어떻게 움직였는지로 결정된다. **4단계:** $(2, 2) \rightarrow (-1, -1)$ 이므로 $p = -1 - 2 = -3$, $q = -1 - 2 = -3$. 따라서 $p + q = -6$.

풀이 전략: 이차함수의 평행이동은 꼭짓점의 이동과 같다. 두 이차식을 각각 표준형 $y = a(x - h)^2 + k$ 로 바꿔 꼭짓점을 찾은 뒤, 벡터처럼 차를 구하면 된다. 이 원리는 일반 함수 $y = f(x - p) + q$ 이동 법칙의 직관적 해석이다.

💡 이차항 계수가 다르면 아무리 평행이동해도 일치시킬 수 없다. 평행이동만으로 겹치는지 여부는 이차항 계수로 판정된다.

Q46 삼각비 심화

높이가 20m인 건물의 옥상에서 맞은편 지면의 한 지점 P를 내려다본 각의 크기가 30°이었다. 건물 바닥에서 지점 P까지의 수평 거리는? (단, $\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$)



- ① ① $10\sqrt{3}$ m
- ② ② 20 m
- ③ ③ $20\sqrt{3}$ m
- ④ ④ $30\sqrt{3}$ m

정답: ③ $20\sqrt{3}$ m

1단계: 옥상 Q, 건물 바닥 B, 지면 관측점 P를 꼭짓점으로 하는 직각삼각형 QBP를 그린다($\angle B=90^\circ$). 2단계: 내려본 각 30°는 옥상에서의 수평선과 시선 QP가 이루는 각이다. 엇각 관계에서 $\angle QPB$ 도 30°이다. 3단계: 직각삼각형 QBP에서 $\tan(\angle QPB) = \frac{QB}{BP} = \frac{20}{d}$. 4단계: $\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{20}{d}$ 이므로 $d = 20\sqrt{3}$ m.

풀이 전략: 내려본 각(부각)은 관측자 위치의 수평선과 시선 사이의 각이며, 엇각 관계로 관측 대상 위치에서의 올려본 각과 같다. 높이와 수평거리, 탄젠트의 기본 관계 $\tan\theta = \frac{\text{높이}}{\text{수평거리}}$ 를 적용한다.

실제 측량 장비인 경위의(theodolite)는 정확히 이 내려본 각·올려본 각 측정으로 거리를 산출한다.

Q47 통계 심화

네 수 1, 3, 5, 7에 어떤 수 x (단, $x > 5$)를 추가한 5개의 자료의 평균과 중앙값이 서로 같을 때, x 의 값은?

- ① ① 6
- ② ② 7
- ③ ③ 8
- ④ ④ 9

정답: ④ 9

1단계: $x > 5$ 이므로 5개의 자료를 오름차순으로 정렬하면 1, 3, 5, 7, x ($x > 7$ 일 때) 또는 1, 3, 5, x , 7 ($5 < x \leq 7$ 일 때). 어느 경우든 정렬했을 때 가운데(세 번째) 값은 5이다. 따라서 중앙값은 5. 2단계: 평균 $= \frac{1+3+5+7+x}{5} = \frac{16+x}{5}$. 3단계: 중앙값과 평균이 같으므로 $\frac{16+x}{5} = 5$, 즉 $16+x = 25$ 이므로 $x = 9$. 4단계: $x = 9 > 5$ 이고 이때 정렬은 1, 3, 5, 7, 9이며 실제 중앙값 5, 평균 $\frac{25}{5} = 5$ 로 조건 성립.

풀이 전략: 중앙값은 위치 기반 통계량이라 추가값의 순위가 바뀌지 않는 범위에서는 변하지 않는다. 조건을 먼저 지역별로(구간별로) 중앙값을 고정한 뒤, 평균 식에 대입해 해를 찾는 '구간별 분석' 전략이 유효하다.

평균은 모든 값에 민감하고 중앙값은 순위에만 민감하다. 이 차이 때문에 한쪽으로 치우친 자료(기울어진 분포)에서 평균과 중앙값의 차이가 크게 벌어진다.

Q48 실수·근호 추론

$\sqrt{3}$ 이 무리수임을 귀류법으로 증명하려고 한다. 다음은 증명의 일부이다.

- ① $\sqrt{3}$ 이 유리수라 가정하면 $\sqrt{3} = \frac{q}{p}$ (p, q 는 서로소인 자연수)로 나타낼 수 있다.
- ② 양변을 제곱하여 정리하면 $q^2 = 3p^2$ 이다.
- ③ 따라서 q^2 은 3의 배수이고, 3이 소수이므로 [㉠]도 3의 배수이다.
- ④ $q = 3k$ 를 대입하면 $p^2 = 3k^2$ 이 되어 p 또한 3의 배수이다.
- ⑤ 그러면 p, q 가 모두 3의 배수가 되어 [㉡]에 모순이다.

㉠, ㉡에 알맞은 것은?

- ① ① ㉠: p , ㉡: q 가 자연수
- ② ② ㉠: q , ㉡: p 와 q 가 서로소
- ③ ③ ㉠: p^2 , ㉡: 3이 소수
- ④ ④ ㉠: q , ㉡: 모두 짝수가 아님

정답: ②

1단계: 귀류법의 가정은 '결론의 부정'이다. $\sqrt{3}$ 을 유리수라 놓으면 기약분수 $\frac{q}{p}$ 로 쓸 수 있다.

2단계: $q^2 = 3p^2$ 에서 q^2 이 3의 배수. 3이 소수이므로 q 자체가 3의 배수(㉠).

3단계: $q = 3k$ 를 대입해 $p^2 = 3k^2$ 이 되어 p 도 3의 배수.

4단계: p 와 q 가 모두 3의 배수이면 '서로소 가정(㉡)'에 모순. 따라서 가정이 잘못, $\sqrt{3}$ 은 무리수이다.

풀이 전략: 무리수 증명의 표준 구조는 '유리수 가정 → 기약분수 → 제곱 → 공약수 도출 → 서로소 모순'이다. 3이 소수라는 성질이 ' q^2 의 약수 3'을 ' q 의 약수 3'으로 끌어올리는 핵심이다.

피타고라스학파는 $\sqrt{2}$ 가 무리수임을 증명한 사실을 비밀에 부쳤다고 전해진다.

Q49 인수분해 심화

식 $x^4 + 4$ 를 유리수 범위에서 두 이차식의 곱으로 인수분해한 결과는?

- ① ① $(x^2 + 2)(x^2 - 2)$
- ② ② $(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$
- ③ ③ $(x^2 + x + 2)(x^2 - x + 2)$
- ④ ④ $(x^2 + 4)(x^2 + 1)$

정답: ②

1단계: $x^4 + 4$ 는 제곱차 꼴이 아니므로 직접 분해되지 않는다.

2단계: '없던 항을 더하고 다시 뺀다'. $x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2$.

3단계: 제곱차로 보면 $(x^2 + 2 + 2x)(x^2 + 2 - 2x) = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$.

4단계: 계산. 두 식을 곱하면 $(x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = x^4 + 4$ ✓.

풀이 전략: 4차식은 겹으로 인수분해가 안 보여도 '적당한 항을 더하고 뺀다'는 기법으로 제곱차 꼴을 만들 수 있다. 이를 소피 제르망 항등식이라 부른다.

18세기 수학자 Sophie Germain은 이 항등식으로 페르마 대정리 연구에 중요한 기여를 했다.

Q50 이차방정식 활용

이차방정식 $x^2 - 5x + 3 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때 $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \alpha\beta$ 의 값은?

- ① ① $\frac{11}{3}$
- ② ② $\frac{14}{3}$
- ③ ③ $\frac{5}{3}$
- ④ ④ $\frac{17}{3}$

정답: ②

1단계: 근과 계수의 관계로 $\alpha + \beta = 5, \alpha\beta = 3$.

2단계: 역수의 합을 통분하면 $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{5}{3}$.

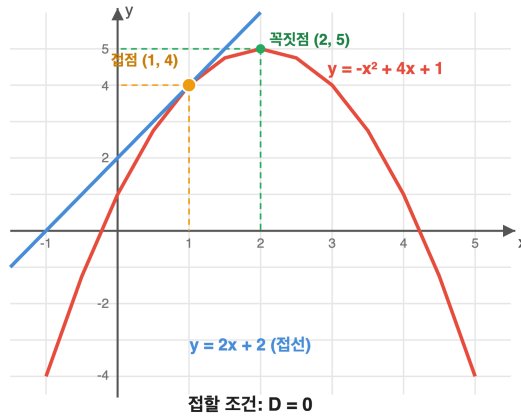
3단계: 따라서 $\frac{5}{3} + 3 = \frac{5+9}{3} = \frac{14}{3}$.

풀이 전략: 근을 구하지 않고 '두 근의 대칭식'을 근과 계수의 관계로 해결한다. 역수의 합은 '분모 통분' 이후 $\alpha + \beta, \alpha\beta$ 만 쓰면 된다.

근과 계수의 관계는 16세기 프랑수아 비에트(Viète)가 체계화하여 '비에타 정리'라고도 부른다.

Q51 이차함수 심화

이차함수 $y = -x^2 + 4x + 1$ 의 그래프와 직선 $y = 2x + k$ 가 서로 접할 때, 상수 k 의 값은?



- ① ① $k = 1$
- ② ② $k = 2$
- ③ ③ $k = 3$
- ④ ④ $k = 4$

정답: ②

1단계: 두 식을 연립하면 $-x^2 + 4x + 1 = 2x + k$, 정리해 $x^2 - 2x + (k - 1) = 0$.

2단계: '접한다'는 이차방정식이 중근을 갖는 것과 같으므로 판별식 $D = 0$.

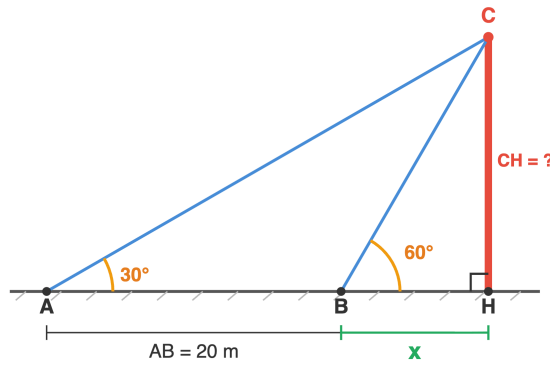
3단계: $D = (-2)^2 - 4(k - 1) = 4 - 4k + 4 = 8 - 4k = 0$. 따라서 $k = 2$.

4단계: 계산. $k = 2$ 일 때 $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 = 0$, 접점은 $x = 1, y = 4$.

풀이 전략: '접한다'는 그래프의 기하학적 조건은 대수적으로 '연립식의 중근'과 동치다. 중근 조건 판별식이 0'을 곧바로 적용한다.

Q52 삼각비 심화

지면 위 두 지점 A, B가 건물의 기둥 H와 같은 일직선 위에 있다. A에서 건물 꼭대기 C를 올려본 각은 30°, A보다 건물에 가까운 B에서 C를 올려본 각은 60°이다. AB=20m, 건물은 지면과 수직일 때 건물의 높이 CH는?



- ① ① $10\sqrt{3}$ m
- ② ② $20\sqrt{3}$ m
- ③ ③ $\frac{20\sqrt{3}}{3}$ m
- ④ ④ 10 m

☞ 정답: ①

📖 1단계: $BH = x$ 라 놓으면 직각삼각형 BCH에서 $\tan 60^\circ = \frac{CH}{x} = \sqrt{3}$. 즉 $CH = \sqrt{3} x$.

2단계: 직각삼각형 ACH에서 $AH = 20 + x$, $\tan 30^\circ = \frac{CH}{20+x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. 즉 $CH = \frac{20+x}{\sqrt{3}}$.

3단계: 두 식을 같게 하면 $\sqrt{3} x = \frac{20+x}{\sqrt{3}}$. 양변에 $\sqrt{3}$ 을 곱해 $3x = 20 + x$, $x = 10$.

4단계: 따라서 $CH = \sqrt{3} \cdot 10 = 10\sqrt{3}$ m.

🧠 풀이 전략: 관측각이 두 번 주어지면 직각삼각형 두 개를 세워 공통 변 CH(건물 높이)을 매개로 두 식을 만든다. 특수각 30°, 60°의 tan 값을 정확히 안다면 무리수가 깔끔히 정리된다.

💡 이 원리로 고대 이집트 측량사가 피라미드의 높이를 추정했다고 전해진다.

Q53 원의 성질 증명

원 O에서 호 AB에 대한 중심각을 $\angle AOB$, 호 AB가 아닌 원 위의 점 P에 대한 원주각을 $\angle APB$ 라 하자. P가 원의 지름 PQ의 한 끝점에 놓인 경우 '원주각은 중심각의 절반이다'를 다음과 같이 증명한다.

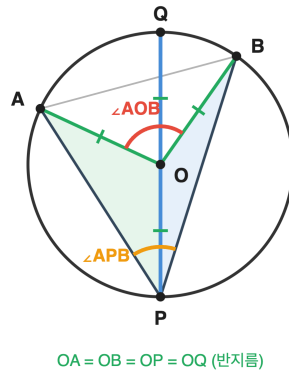
$\triangle OPA$ 는 $OA = OP$ (반지름)인 이등변삼각형이므로 $\angle OAP = \angle OPA$. 외각의 성질에서

$$\angle AOQ = \angle OAP + \angle OPA = 2\angle OPA.$$

같은 방식으로 $\angle BOQ = 2\angle OPB$.

따라서 [㉠].

[㉠]에 알맞은 식은?



- ① ① $\angle APB = \angle AOB$
- ② ② $\angle AOB = \angle AOQ + \angle BOQ = 2(\angle OPA + \angle OPB) = 2\angle APB$
- ③ ③ $\angle APB = 2\angle AOB$
- ④ ④ $\angle AOB = \angle APB + 90^\circ$

정답: ②

1단계: 이등변삼각형 OAP에서 두 밑각이 같으므로 외각 $\angle AOQ = 2\angle OPA$.

2단계: 마찬가지로 이등변삼각형 OBP에서 $\angle BOQ = 2\angle OPB$.

3단계: 중심각 $\angle AOB$ 는 두 외각의 합이므로 $\angle AOB = \angle AOQ + \angle BOQ = 2(\angle OPA + \angle OPB) = 2\angle APB$.

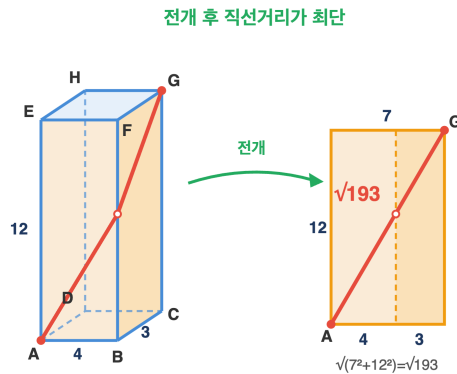
4단계: 양변을 반으로 나누면 $\angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB$. 원주각은 중심각의 절반.

풀이 전략: '반지름은 모두 같다'가 이등변삼각형을 만들고, 이등변삼각형의 '외각은 두 밑각의 합'이 중심각을 원주각의 두 배로 연결한다. 이 특수 상황 증명이 일반 원주각 정리로 확장된다.

이 정리는 유클리드 『원론』 제3권 명제 20에 실려 있으며 탈레스의 반원 정리를 일반화한다.

Q54 도형 종합 추론

밑면이 가로 4, 세로 3인 직사각형이고 높이가 12인 직육면체 ABCD-EFGH가 있다. 밑면 꼭짓점 A(가로 4, 세로 3의 한 모서리 끝)에서 마주 보는 대각 꼭짓점 G(윗면에서 대각선 반대쪽)까지 옆면 두 면(가로 4의 면, 세로 3의 면)을 따라 실을 팽팽히 감는다. 실의 최단 길이는?



- ① ① $\sqrt{193}$
- ② ② $\sqrt{149}$
- ③ ③ 13
- ④ ④ 14

정답: ①

1단계: 곡면·다면체 위 최단 경로는 '펼친 전개도 위의 직선'이다. 옆면 두 개를 나란히 이어 펼친다.
 2단계: 펼친 전개도는 가로 4 + 3 = 7, 세로 12인 직사각형. A는 한 모서리 끝, G는 반대쪽 위 모서리 끝이 된다.
 3단계: 두 점을 직선으로 잇는 거리는 피타고라스의 정리로 $\sqrt{7^2 + 12^2} = \sqrt{49 + 144} = \sqrt{193}$.
 4단계: 이 값이 실의 최단 길이이다.

풀이 전략: 3차원에서 표면 위 최단 경로를 직접 다루기는 어렵다. '전개도를 펼치면 평면에서 직선이 최단'이라는 원리로 문제를 2차원으로 축소해 피타고라스 정리를 적용한다.

💡 '거미가 방의 맞은편 모서리까지 가는 최단 경로' 문제는 19세기 영국 퍼즐 책 Dudeney의 고전이다.

Q55 통계 심화

두 야구팀 A, B의 최근 5경기 득점 기록이 다음과 같다.

A팀: 3, 3, 3, 3, 3

B팀: 1, 2, 3, 4, 5

두 팀의 평균과 분산에 대한 설명으로 옳은 것은?

- ① ① 평균이 서로 다르고 분산은 같다
- ② ② 평균은 같지만 B팀의 분산이 A팀보다 크다
- ③ ③ 평균도 분산도 모두 같다
- ④ ④ A팀의 분산이 B팀의 분산보다 크다

정답: ②

1단계: 평균 계산. A팀 $= \frac{3+3+3+3+3}{5} = 3$, B팀 $= \frac{1+2+3+4+5}{5} = 3$. 두 팀 평균이 같다.

2단계: A팀 편차는 전부 0이므로 분산은 0.

3단계: B팀 편차는 -2, -1, 0, 1, 2. 제곱의 합은 4 + 1 + 0 + 1 + 4 = 10. 분산 $= \frac{10}{5} = 2$.

4단계: 평균은 같지만 분산은 B팀(2)이 A팀(0)보다 크다. B팀 득점이 평균에서 더 퍼져 있다.


풀이 전략: 평균이 같다고 자료가 '비슷한' 것이 아니다. 분산은 '평균에서 얼마나 흩어져 있는지'를 나타낸다. 모든 값이 같으면 분산 0, 퍼질수록 분산이 커진다.

Q56 경시 퍼즐·확률

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때 나오는 두 눈의 곱이 12의 배수일 확률은?

- ① ① $\frac{5}{36}$
- ② ② $\frac{7}{36}$
- ③ ③ $\frac{1}{6}$
- ④ ④ $\frac{1}{4}$

 **정답: ②**

 1단계: 표본공간의 크기 = $6 \times 6 = 36$.

2단계: 두 눈의 곱이 12의 배수가 되려면 곱이 12, 24, 36 중 하나여야 한다.

3단계: 각 경우의 순서쌍을 나열한다.


- 곱=12: (2, 6), (6, 2), (3, 4), (4, 3) → 4가지


- 곱=24: (4, 6), (6, 4) → 2가지

- 곱=36: (6, 6) → 1가지

합 $4 + 2 + 1 = 7$ 가지.

4단계: 따라서 구하는 확률 = $\frac{7}{36}$. (곱이 18인 (3, 6), (6, 3)은 12의 배수가 아니므로 포함되지 않음에 주의)

 풀이 전략: '12의 배수'를 바로 가르려 하지 말고, 가능한 배수 값(12, 24, 36)을 먼저 열거한 뒤 각 값이 되는 순서쌍을 빠짐없이 세는 것이 안전하다.

 주사위의 마주 보는 두 면의 눈의 합은 항상 7이다 (1+6, 2+5, 3+4).

Q57 이차방정식 활용

이차방정식 $x^2 - 6x + k = 0$ 의 두 근의 차가 4일 때 상수 k 의 값은?

- ① ① 3
- ② ② 4
- ③ ③ 5
- ④ ④ 6


 **정답: ③**

 1단계: 근과 계수의 관계에서 두 근 α, β 에 대해 $\alpha + \beta = 6, \alpha\beta = k$.

2단계: 두 근의 차는 $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$ 로 구할 수 있다.

3단계: 조건 $|\alpha - \beta| = 4$ 이므로 $(\alpha - \beta)^2 = 16$. 대입하면 $36 - 4k = 16$.

4단계: $4k = 20, k = 5$. 검산: $x^2 - 6x + 5 = (x - 1)(x - 5)$, 두 근 1과 5의 차는 4. ✓

 풀이 전략: 근을 직접 구하지 않고 '근의 차의 제곱'을 $(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$ 로 바꿔 쓰는 항등식이 핵심. 근과 계수의 관계를 유연하게 이용한다.

Q58 원의 성질 증명

원 O의 내부 점 P에서 두 현 AB, CD가 만난다고 하자. 이때 $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ 를 다음과 같이 증명한다.

$\triangle PAC$ 와 $\triangle PDB$ 에서

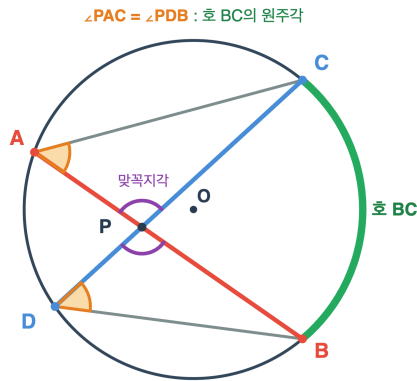
① $\angle APC = \angle DPB$ (맞꼭지각)

② $\angle PAC = \angle PDB$ ([⊙])

따라서 $\triangle PAC \sim \triangle PDB$ ([⊙] 닮음)

대응변의 비에서 $\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB}$, 즉 $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

⊙, ⊚에 알맞은 것은?



- ① ① ⊙: 엇각, ⊚: SSS
- ② ② ⊙: 동위각, ⊚: SAS
- ③ ③ ⊙: 한 호에 대한 원주각이 같다, ⊚: AA
- ④ ④ ⊙: 평행선의 성질, ⊚: RHS

정답: ③

1단계: $\angle PAC$ 는 호 BC를 바라보는 원주각이고, $\angle PDB$ 도 같은 호 BC를 바라보는 원주각이다. 한 호에 대한 원주각은 모두 같으므로 두 각이 같다(⊙).

2단계: 맞꼭지각 $\angle APC = \angle DPB$ 와 함께 두 쌍의 대응각이 같으므로 AA 닮음(⊙).

3단계: 닮음비에서 $\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB}$.

4단계: 교차곱하면 $PA \cdot PB = PC \cdot PD$. 방역의 정리(내부 교점 버전)가 증명된다.

풀이 전략: 현이 교차하는 점에서 '맞꼭지각 + 원주각 같음'으로 AA 닮음을 만들고, 닮음비의 교차곱으로 곱의 등식을 유도한다.

방역의 정리는 프랑스어로 'puissance d'un point'라 하며, 데카르트가 해석기하학에서 폭넓게 활용했다.

Q59 인수분해 심화

두 실수 x, y 가 $x - y = 1, x^3 - y^3 = 19$ 를 만족할 때 xy 의 값은?

- ① ① 4
- ② ② 5
- ③ ③ 6
- ④ ④ 7

정답: ③

1단계: 항등식 $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$ 에 대입하면 $19 = 1 \cdot (x^2 + xy + y^2)$. 즉 $x^2 + xy + y^2 = 19$**(A)**

2단계: 다른 항등식 $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$. 대입하면 $1 = x^2 - 2xy + y^2$, 즉 $x^2 + y^2 = 1 + 2xy$**(B)**

3단계: **(B)**를 **(A)**에 대입하면 $(1 + 2xy) + xy = 19$, 즉 $1 + 3xy = 19$.

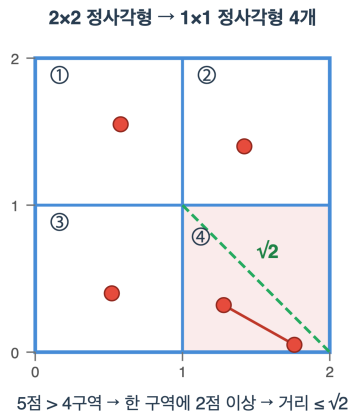
4단계: $3xy = 18$, 따라서 $xy = 6$.

풀이 전략: 미지수 2개·식 2개이지만 근을 직접 구하는 것보다 '대칭식 $x + y, xy$ ' 꼴로 바꾸는 편이 빠르다. 삼차 항등식과 제곱 항등식을 결합해 xy 만 남긴다.

💡 $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ 분해는 중국 송나라 수학자 양휘(楊輝)의 저서에도 등장한다.

Q60 경시 퍼즐·확률

한 변의 길이가 2인 정사각형 내부에 임의의 점 5개를 찍을 때, 두 점 사이의 거리가 $\sqrt{2}$ 이하인 두 점이 반드시 존재한다. 이를 비둘기집 원리로 증명하려면 정사각형을 몇 개의 합동인 작은 정사각형으로 분할해야 하는가?



- ① ① 2개
- ② ② 3개
- ③ ③ 4개
- ④ ④ 5개

정답: ③ 4개

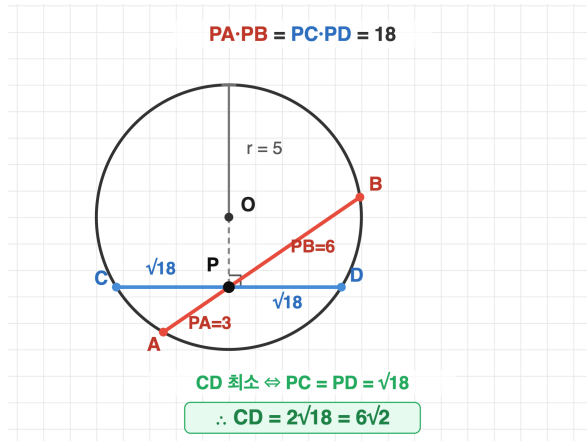
1단계(분할): 한 변 2인 정사각형을 합동인 1x1 정사각형 4개로 분할한다. 2단계(거리 상한): 한 변이 1인 정사각형 내부 두 점 사이 거리는 최대 대각선 길이 $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ 이하이다. 3단계(비둘기집): 5개의 점을 4개의 영역에 나누면 적어도 한 영역에 2개 이상의 점이 들어가므로, 그 두 점 사이의 거리는 $\sqrt{2}$ 이하이다.

풀이 전략: '반드시 존재함'을 보일 때는 비둘기집 원리가 강력하다. 거리 상한 $\sqrt{2}$ 가 핵심 힌트이므로, 지름이 $\sqrt{2}$ 인 영역(한 변 1인 정사각형)을 만들도록 분할 개수를 역산한다. 큰 정사각형(한 변 2)을 1x1 4개로 쪼개면 정확히 맞는다.

💡 비둘기집 원리는 '상자 n개에 공 n+1개를 넣으면 어느 한 상자는 2개 이상 담는다'는 당연한 말이지만, 수학 올림피아드에서 가장 자주 등장하는 강력한 존재 증명 도구이다.

Q61 도형 종합 추론

반지름 5인 원 내부의 한 점 P에서 서로 다른 두 현 AB, CD가 만난다. PA=3, PB=6일 때, 현 CD의 길이가 최소가 되는 경우 CD의 값은?



- ①) ① 6
- ②) ② $6\sqrt{2}$
- ③) ③ 8
- ④) ④ 9

정답: ② $6\sqrt{2}$

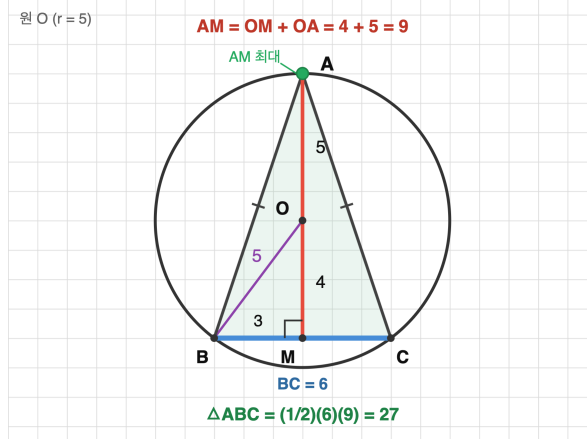
1단계(방멩 정리): 원 내부에서 두 현이 한 점에서 만나면 $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ 가 성립하므로 $PC \cdot PD = 3 \times 6 = 18$. 2단계(AM-GM 활용): $CD = PC + PD$ 이고, 곱 $PC \cdot PD = 18$ 이 고정일 때 합의 최솟값은 $PC = PD = \sqrt{18}$ 일 때 성립한다($a + b \geq 2\sqrt{ab}$). 3단계(계산): 따라서 $CD_{\min} = 2\sqrt{18} = 6\sqrt{2}$.

풀이 전략: 원 내부의 두 현이 한 점에서 만날 때의 불변량은 '교점에서 양 끝까지 거리의 곱'이다(방멩). 곱이 일정할 때 합의 최솟값은 산술-기하 평균 부등식으로 구한다. 곱 고정 → 두 값이 같을 때 합 최소라는 원리를 기억하자.

방멩(power of a point)은 원 내부뿐 아니라 외부 점에서 접선이나 할선을 그을 때도 같은 값으로 성립한다. 이 개념은 고등학교 기하에서 '원의 힘'이라는 이름으로 다시 등장한다.

Q62 도형 종합 추론

반지름 5인 원에 내접하는 이등변삼각형 ABC($AB=AC$)에서 밑변 $BC=6$ 이다. 이 삼각형의 넓이의 최댓값을 구하시오.



- ① ① 12
- ② ② 18
- ③ ③ 24
- ④ ④ 27

정답: ④ 27

1단계(대칭성): $AB=AC$ 이므로 꼭짓점 A는 BC의 수직이등분선 위에 있고, 원의 중심 O 역시 같은 직선 위에 있다. BC의 중점을 M이라 하자. 2단계(중심에서 현까지 거리): $OB = 5, BM = 3$ 이므로 $OM = \sqrt{25-9} = 4$. A가 원주 위에서 M의 반대 방향으로 가장 멀리 갈 때 $AM = OM + OA = 4 + 5 = 9$ 가 최대. 3단계(넓이): $\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AM = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 9 = 27$.

풀이 전략: 원 안에 고정된 현 BC 위에 꼭짓점 A를 둘 때, 넓이는 '높이(A에서 BC까지)'에 비례한다. 이등변 조건으로 A는 BC의 수직 이등분선 위에 있으며, 이 선은 원의 중심도 지난다. 따라서 '중심에서 현까지 거리'를 직각삼각형으로 먼저 계산하는 것이 열쇠.

반지름, 현의 반길이, 중심에서 현까지의 수직거리는 늘 직각삼각형을 이루며, 이는 '원의 현에 내린 수선은 현을 이등분한다'는 기본 정리의 직접적인 결과다.

Q63 통계 심화

두 자료 $A = \{a, 5, 9\}$ 와 $B = \{3, 5, 7\}$ 의 평균이 서로 같다. 이때 A의 분산은 B의 분산의 몇 배인가?

- ① ① 같다
- ② ② 2배
- ③ ③ 3배
- ④ ④ 4배

정답: ④ 4배

1단계(미지수 결정): B의 평균은 $(3 + 5 + 7)/3 = 5$. A의 평균도 5이므로 $(a + 5 + 9)/3 = 5$ 에서 $a = 1$. 따라서 $A = \{1, 5, 9\}$. 2단계(A의 분산): 편차 $-4, 0, 4$, 편차 제곱의 평균 $= (16 + 0 + 16)/3 = 32/3$. 3단계(B의 분산): 편차 $-2, 0, 2$, 편차 제곱의 평균 $= (4 + 0 + 4)/3 = 8/3$. 따라서 비는 $(32/3) \div (8/3) = 4$.

풀이 전략: 평균이 같아도 흩어짐은 크게 다를 수 있음을 보여주는 전형적인 문제다. 두 자료의 편차는 정확히 2배 차이(± 4 vs ± 2)이므로 분산은 $2^2 = 4$ 배 차이가 난다. 수치 계산 전에도 '편차가 k배 \rightarrow 분산은 k^2 배' 원리로 빠르게 예측할 수 있다.

분산은 편차의 '제곱' 평균이므로, 거리(1차원)가 아니라 면적(2차원)의 개념을 지닌다. 자료를 전체적으로 k배 늘이면 분산은 k^2 배가 된다.

Q64 경시 퍼즐·확률

1부터 100까지의 자연수 중 2의 배수도 아니고, 3의 배수도 아니며, 5의 배수도 아닌 자연수의 개수를 구하시오.

- ① ① 24
- ② ② 26
- ③ ③ 28
- ④ ④ 30

정답: ② 26

1단계(개별 집합 크기): 2의 배수 $|A| = 50$, 3의 배수 $|B| = 33$, 5의 배수 $|C| = 20$. 2단계(교집합): 6의 배수 $|A \cap B| = 16$, 10의 배수 $|A \cap C| = 10$, 15의 배수 $|B \cap C| = 6$, 30의 배수 $|A \cap B \cap C| = 3$. 3단계(포함-배제):

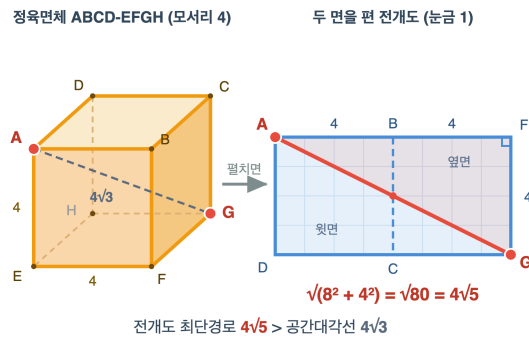
$$|A \cup B \cup C| = 50 + 33 + 20 - 16 - 10 - 6 + 3 = 74. \text{ 어느 것의 배수도 아닌 수} = 100 - 74 = 26.$$

풀이 전략: '~도 아니고 ~도 아닌' 조건은 여집합 전략이 자연스럽다. 전체 100에서 '적어도 하나의 배수'인 개수를 빼면 된다. 세 집합 합집합은 포함-배제 원리로 '단일 크기 합 - 두 쌍 교집합 합 + 세 집합 교집합'으로 구한다.

포함-배제 원리는 확률의 덧셈 정리 $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - \dots$ 와 본질적으로 같은 구조다. 개수 세기와 확률이 한 몸이라는 증거.

Q65 도형 종합 추론

한 모서리의 길이가 4인 정육면체에서 한 꼭짓점 A와 대각선 반대편 꼭짓점 G를 잇는, 정육면체 겉면을 따라가는 최단경로의 길이는?



- ① ① $4\sqrt{3}$
- ② ② $4\sqrt{5}$
- ③ ③ $4\sqrt{6}$
- ④ ④ 12

정답: ② $4\sqrt{5}$

1단계(전개도 전략): 겉면 위의 최단경로는 두 면을 한 평면으로 펼쳤을 때 두 꼭짓점을 잇는 직선거리와 같다. 2단계(치수): A가 속한 면과 G가 속한 이웃 면을 펼치면 가로 $4 + 4 = 8$, 세로 4인 직사각형이 되고, A는 한쪽 꼭짓점, G는 그 반대 꼭짓점이 된다. 3단계(피타고라스): $AG = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$. 공간 대각선 $4\sqrt{3}$ 보다 길다는 점에 주의.

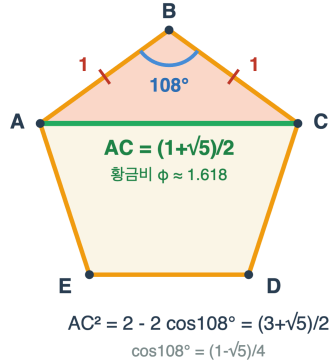
풀이 전략: 3차원 표면 위 최단경로는 '전개도를 펼쳐 직선으로 보기'가 표준 기법이다. 곡선 같아 보이던 경로가 펼치는 순간 직선으로 바뀐다. 어떤 두 면을 펼치느냐에 따라 길이가 달라질 수 있으니 후보 경로를 모두 확인해야 한다(정육면체는 대칭이므로 본 경우에 항상 $4\sqrt{5}$).

공간 내부 직선거리(공간 대각선 $4\sqrt{3} \approx 6.93$)는 겉면 경로($4\sqrt{5} \approx 8.94$)보다 짧다. 곡면 위에서 '직선'이 무엇인지를 묻는 측지선(geodesic) 이론으로 이어지는 문제다.

Q66 삼각비 심화

정오각형 ABCDE의 한 변의 길이가 1이다. 대각선 AC의 길이를 구하시오. (단, 정오각형의 한 내각은 108° 이고 $\cos 108^\circ = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$ 이다.)

정오각형 ABCDE, 한 변 = 1



- ① ① $\sqrt{3}$
- ② ② $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
- ③ ③ $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$
- ④ ④ $\frac{3}{2}$

☞ 정답: ② $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

📖 1단계(삼각형 관찰): $\triangle ABC$ 에서 $AB = BC = 1$, $\angle ABC = 108^\circ$. 2단계(삼각비 적용):

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos 108^\circ = 1 + 1 - 2 \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{4} = 2 - \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. 3단계(양수 근):

$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ 로 일치하므로 $AC = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. 이것이 바로 황금비 ϕ 이다.

🧠 풀이 전략: 정다각형의 대각선 길이는 '한 변과 대각선을 품은 이등변삼각형'을 분리해 삼각비를 적용하는 것이 표준 전략이다. 두 변의 길이와 끼인 각이 주어지면 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ 로 제3변을 구한다. 무리수 제곱 값이 깔끔하지 않을 때는 보기들을 제공해서 맞춰 보는 역산도 유용하다.

💡 정오각형 대각선과 한 변의 비 $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$ 은 '황금비'로, 해바라기 씨 배열, 앵무조개 껍질, 파르테논 신전 비율 등에 반복해서 나타난다.

Q67 통계 심화

n 개의 자료 x_1, x_2, \dots, x_n 의 평균이 m 이고, 자료 각각의 제곱 $x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2$ 의 평균이 k 일 때, 원 자료의 분산을 m 과 k 로 나타내면?

- ① ① $k - m$
- ② ② $k - m^2$
- ③ ③ $k^2 - m$
- ④ ④ $(k - m)^2$

☞ 정답: ② $k - m^2$

📖 1단계(정의): 분산 $V = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2$. 2단계(전개): $V = \frac{1}{n} \sum (x_i^2 - 2mx_i + m^2) = \frac{1}{n} \sum x_i^2 - 2m \cdot \frac{1}{n} \sum x_i + m^2$. 3단계(대입): $\frac{1}{n} \sum x_i^2 = k$, $\frac{1}{n} \sum x_i = m$ 이므로 $V = k - 2m \cdot m + m^2 = k - m^2$.

🧠 풀이 전략: 편차 제곱의 평균을 일일이 계산하기 번거로울 때는 '제곱의 평균 빼기 평균의 제곱' 공식이 훨씬 빠르다. 이 공식은 고등학교 확률통계에서 $V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$ 로 일반화된다.

💡 $V = E[X^2] - (E[X])^2 \geq 0$ 은 '제곱의 평균은 평균의 제곱 이상이다'라는 연산 부등식의 특수 사례이며, 모든 실 자료에 대해 성립한다.

Q68 경시 퍼즐·확률

주머니 A에는 빨간 공 2개와 파란 공 3개, 주머니 B에는 빨간 공 3개와 파란 공 1개가 들어 있다. 두 주머니 중 하나를 임의로 고른 뒤, 그 주머니에서 공 하나를 꺼낼 때 꺼낸 공이 빨간 공일 확률은?

- ① ① $\frac{1}{2}$
- ② ② $\frac{11}{20}$
- ③ ③ $\frac{23}{40}$
- ④ ④ $\frac{3}{5}$

정답: ③ $\frac{23}{40}$

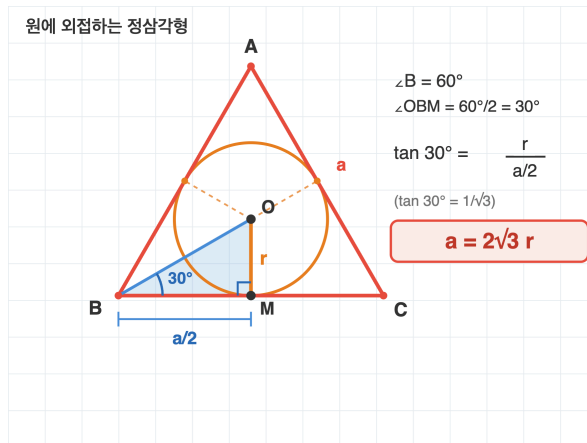
1단계(A 경우): 주머니 A를 뽑고(확률 $\frac{1}{2}$) 빨간 공을 꺼낼 확률 $\frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$. **2단계(B 경우):** 주머니 B를 뽑고(확률 $\frac{1}{2}$) 빨간 공을 꺼낼 확률 $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$. **3단계(합):** 두 경우는 서로 배반이므로 전체 확률은 $\frac{1}{5} + \frac{3}{8} = \frac{8+15}{40} = \frac{23}{40}$.

풀이 전략: '먼저 고르고, 그 다음 꺼낸다'는 2단계 시행은 나무그림(tree diagram)으로 시각화하면 좋다. 각 가지의 확률을 곱한 뒤, 원하는 결과에 이르는 가지들을 모두 더한다. 이것이 '전체 확률의 법칙'이다.

💡 두 주머니의 빨간 공 비율 $\frac{2}{5} = 0.4$ 와 $\frac{3}{4} = 0.75$ 를 단순 평균하면 $0.575 = \frac{23}{40}$ 이다. 주머니를 대칭적으로 뽑는다는 조건 덕분에 '평균 비율'이 답이 된다는 점이 이 원리의 직관이다.

Q69 도형 종합 추론

반지름 r 인 원에 외접하는 정삼각형의 한 변의 길이를 r 로 나타내시오.



- ① ① $\sqrt{3} r$
- ② ② $2r$
- ③ ③ $2\sqrt{3} r$
- ④ ④ $3r$

정답: ③ $2\sqrt{3} r$

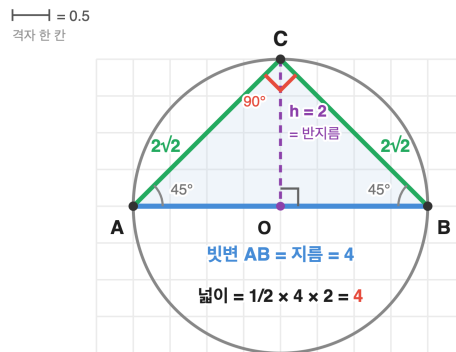
1단계(대칭과 직각삼각형): 한 변의 길이를 a 라 하고 내접원의 중심을 O, 한 변의 중점을 M이라 하자. $OM = r$, $BM = a/2$, 이등변·대칭에 의해 $\angle OBM = 30^\circ$ (정삼각형 한 각 60° 의 이등분). **2단계(삼각비):** 직각삼각형 OBM에서 $\tan 30^\circ = \frac{OM}{BM}$. 즉 $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{r}{a/2}$. **3단계(정리):** $\frac{a}{2} = \sqrt{3} r$ 이므로 $a = 2\sqrt{3} r$.

풀이 전략: 정다각형의 내접원 문제는 '중심 + 한 꼭짓점 + 한 변의 중점'으로 이루어진 직각삼각형이 보이도록 보조선을 그리는 것이 첫 단추다. 정삼각형의 경우 이 직각삼각형은 30-60-90 특수각 삼각형이므로 삼각비를 바로 대입할 수 있다.

💡 정삼각형에서는 외접원 반지름 R 과 내접원 반지름 r 사이에 $R = 2r$ 이라는 깔끔한 관계가 성립한다. 이 2배 관계는 정다각형 가운데 정삼각형에서만 나타난다.

Q70 삼각비 심화

반지름 2인 원 O에 내접하는 직각삼각형 ABC($\angle C = 90^\circ$)의 넓이가 최대일 때, 그 최댓값을 구하시오.



- ① ① 2
- ② ② 3
- ③ ③ 4
- ④ ④ $2\sqrt{2}$

정답: ③ 4

1단계(탈레스 정리): 원에 내접한 직각삼각형의 빗변은 원의 지름이다. 따라서 $AB = 2 \times 2 = 4$. **2단계(밑변-높이 분리):** 빗변 AB를 밑변으로 보면 넓이 $= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot h$, 여기서 h 는 점 C에서 AB에 내린 수선의 길이. C가 원 위에 있으므로 h 의 최댓값은 반지름 2(C가 반원의 꼭대기일 때). **3단계(계산):** 최대 넓이 $= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4$. 이때 $\triangle ABC$ 는 $\angle A = \angle B = 45^\circ$ 인 직각이등변삼각형이다.

풀이 전략: 원 위의 직각삼각형 문제에서는 '빗변=지름'(탈레스 정리)을 가장 먼저 떠올려야 한다. 빗변이 고정이면 넓이 최대는 높이 최대이고, 원 위의 점에서 직선(지름)까지 거리는 반지름이 최댓값이다. 최댓값에서의 삼각형은 대칭성 때문에 이등변이 된다.

💡 '둘레 같은 사각형 중 정사각형이 넓이 최대', '빗변 같은 직각삼각형 중 이등변 직각삼각형이 넓이 최대' 같은 원리는 모두 '대칭이 극값을 만든다'는 일반 법칙의 예다.

Q71 경시 퍼즐·확률

모든 정수 n 에 대해 $n^3 - n$ 이 항상 나누어떨어지는 가장 큰 자연수를 구하시오.

- ① ① 2
- ② ② 3
- ③ ③ 6
- ④ ④ 12

정답: ③ 6

1단계(인수분해): $n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n - 1) \cdot n \cdot (n + 1)$, 즉 연속한 세 정수의 곱이다. **2단계(2와 3의 배수성):** 연속한 두 정수에는 반드시 2의 배수가 하나 있고, 연속한 세 정수에는 반드시 3의 배수가 하나 있으므로 곱은 $2 \times 3 = 6$ 의 배수이다. **3단계(상한 확인):** $n = 2$ 일 때 $n^3 - n = 8 - 2 = 6$. 따라서 모든 정수에 대해 공통으로 나누어떨어지는 자연수는 6을 넘을 수 없다. 답은 6.

풀이 전략: '항상 나누어떨어지는 최대 수' 문제는 (1) 인수분해로 구조 드러내기, (2) 연속 정수의 곱이 $k!$ 의 배수임을 이용, (3) 구체적 작은 값으로 상한 고정 3단계로 접근한다. 증명 가능한 하한과 구체 예로 확인한 상한이 일치하면 답이다.

💡 연속한 k 개 정수의 곱이 항상 $k!$ 의 배수라는 사실은 이항계수 $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$ 이 언제나 정수라는 사실과 본질적으로 같은 진술이다.

Q72 실수·근호 추론

$\sqrt{3}$ 이 무리수임을 귀류법으로 증명하려 한다. ' $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$ (p, q 는 서로소인 양의 정수)'로 가정하고 양변을 제곱하면 $3q^2 = p^2$ 을 얻는다. 이로부터 'p가 3의 배수'라는 결론을 이끌어내는 핵심 근거로 가장 적절한 것은?

- ① ① 3은 소수이므로 p^2 이 3의 배수이면 p도 3의 배수이다
- ② ② p, q가 서로소이므로 p는 3의 배수이다
- ③ ③ q^2 이 3의 배수이므로 p도 3의 배수이다
- ④ ④ p가 q의 $\sqrt{3}$ 배이므로 p는 3의 배수이다

정답: ①

1단계: $3q^2 = p^2$ 에서 p^2 이 3의 배수임을 얻는다.

2단계: 3은 소수이므로 '소수 r이 ab를 나누면 r이 a 또는 b를 나눈다'는 성질의 따름정리로 ' $p^2 = p \cdot p$ 이 3의 배수이면 p가 3의 배수'가 성립한다. 이 단계는 '3이 소수'라는 사실에 전적으로 의존한다.

3단계: $p=3k$ 로 쓰고 대입하면 $3q^2 = 9k^2 \Rightarrow q^2 = 3k^2$ 로 q도 3의 배수가 되어 서로소 가정에 모순. 따라서 $\sqrt{3}$ 은 무리수이다.

풀이 전략: 귀류법의 전체 구조가 아니라 '왜 p^2 이 3의 배수이면 p도 3의 배수인가'라는 특정 단계의 논리적 근거를 묻는 문제임을 인식. 합성수 4의 경우 p^2 이 4의 배수여도 p가 4의 배수일 필요가 없음($p = 2$ 반례)을 대조하여 '소수' 조건이 본질임을 파악.

이 논증은 일반화되어 'n이 완전제곱수가 아닌 자연수이면 \sqrt{n} 은 무리수'임을 보이는 데 그대로 사용된다.

Q73 인수분해 심화

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ 를 인수분해하시오.

- ① ① $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$
- ② ② $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca)$
- ③ ③ $(a - b - c)(a^2 + b^2 + c^2 + ab - bc - ca)$
- ④ ④ $(a + b - c)(a^2 - b^2 - c^2 + ab + bc - ca)$

정답: ①

1단계: $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$ 를 이용해 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b)^3 + c^3 - 3ab(a + b) - 3abc$ 로 변형.

2단계: 앞의 두 항에 합의 세제곱 공식을 적용. $(a + b)^3 + c^3 = ((a + b) + c)((a + b)^2 - (a + b)c + c^2)$. 공통인수 $(a + b + c)$ 가 뒤의 항 $-3ab(a + b + c)$ 에도 있으므로 묶어낸다.

3단계: $(a + b + c)((a + b)^2 - (a + b)c + c^2 - 3ab)$. 괄호 안을 정리하면

$a^2 + 2ab + b^2 - ac - bc + c^2 - 3ab = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$. 따라서 $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$.

풀이 전략: 세 문자에 대한 대칭식이므로 인수도 대칭식이 될 가능성이 높다. $(a + b + c)$ 가 인수인지 확인하려면 $a + b + c = 0$ 대입: $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ 가 0이 되는지 검사. $c = -(a + b)$ 를 대입하면 0이 되므로 $(a + b + c)$ 를 반드시 인수로 가진다. 남은 이차식은 대칭식이고 $-3abc$ 보정을 위해 $-ab - bc - ca$ 부호가 필요.

이 항등식은 ' $a + b + c = 0 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ '라는 경시대회 단골 보조정리의 모태가 된다.

Q74 이차방정식 활용

이차방정식 $x^2 - 5x + k = 0$ 의 두 실근 α, β 에 대하여 $\alpha^2 + \beta^2 = 3\alpha\beta$ 가 성립할 때, 상수 k 의 값을 구하시오.

- ① ① 3
- ② ② 4
- ③ ③ 5
- ④ ④ 6

정답: ③

1단계: 근과 계수의 관계에서 $\alpha + \beta = 5, \alpha\beta = k$.

2단계: $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 25 - 2k$. 조건 $\alpha^2 + \beta^2 = 3\alpha\beta$ 에 대입하면 $25 - 2k = 3k$, 즉 $k = 5$.

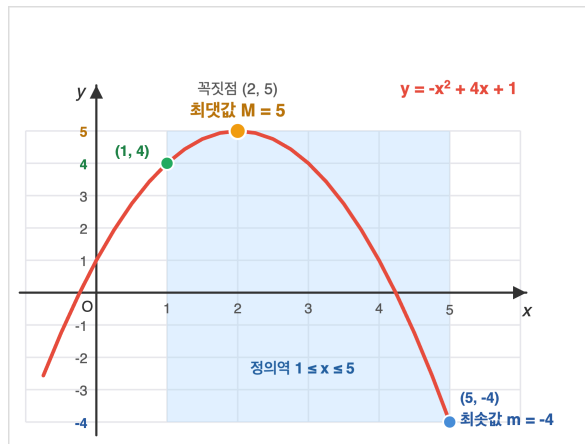
3단계: 실근 조건 확인. 판별식 $D = 25 - 4k = 25 - 20 = 5 > 0$ 이므로 실근이 존재한다. 따라서 $k = 5$.

풀이 전략: α, β 를 직접 구하지 않고 대칭식으로 환원. 대칭식은 $\alpha + \beta$ 와 $\alpha\beta$ 로 표현되므로 근과 계수의 관계를 쓴다. 마지막에 반드시 '실근' 조건(판별식 ≥ 0)을 검증해 무연근을 걸러낸다.

$\alpha^2 + \beta^2 = k\alpha\beta$ 꼴 조건은 고등 수학의 '두 근이 이루는 기하적 관계'(예: 직교 방향) 문제로 자연스럽게 확장된다.

Q75 이차함수 심화

이차함수 $f(x) = -x^2 + 4x + 1$ 의 정의역이 $1 \leq x \leq 5$ 일 때, 최댓값 M 과 최솟값 m 의 합 $M + m$ 을 구하시오.



- ① ① -1
- ② ② 0
- ③ ③ 1
- ④ ④ 3

정답: ③

1단계: 표준형 변형. $f(x) = -(x^2 - 4x) + 1 = -(x - 2)^2 + 5$. 꼭짓점 (2, 5), 위로 볼록.

2단계: 꼭짓점의 x좌표 2가 정의역 [1, 5]에 포함되므로 $x=2$ 에서 최댓값 $M=5$.

3단계: 위로 볼록한 포물선의 경우 최솟값은 꼭짓점에서 더 먼 경계에서 발생. $|1 - 2| = 1, |5 - 2| = 3$ 이므로 $x=5$ 가 더 멀다.

$f(5) = -25 + 20 + 1 = -4, f(1) = 4$. 따라서 $m=-4, M+m = 5 + (-4) = 1$.

풀이 전략: 제한구간 최댓·최솟값은 '꼭짓점이 구간에 들어오는가'를 먼저 판단. 위로 볼록이면 꼭짓점에서 최대, 경계 두 점 중 꼭짓점에서 먼 쪽이 최소. 구간과 꼭짓점의 상대 위치 분석이 핵심.

꼭짓점이 정의역 밖이면 단조 구간만 남은 경계값만 비교하면 된다. 고등 수학에서는 '구간 이동에 따른 최댓값의 변화'가 매개변수 함수 문제로 확장된다.

Q76 실수·근호 추론

$\frac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$ 의 분모를 유리화하시오.

- ① ① $\sqrt{5} - \sqrt{3}$
- ② ② $\frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{2}$
- ③ ③ $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2}$
- ④ ④ $2(\sqrt{5} - \sqrt{3})$

정답: ①

1단계: 분모의 켤레는 $\sqrt{5} - \sqrt{3}$. 분자·분모에 같이 곱한다.

2단계: 분모 = $(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3}) = 5 - 3 = 2$ (합·차 곱은 제곱의 차).

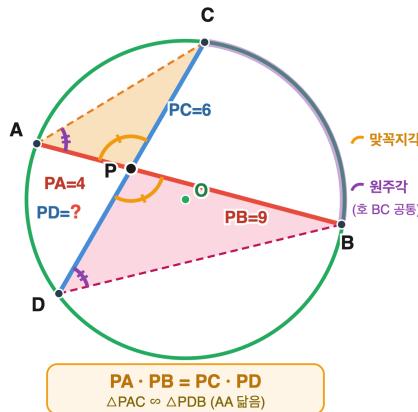
3단계: 분자 = $2(\sqrt{5} - \sqrt{3})$. 따라서 전체 = $\frac{2(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{2} = \sqrt{5} - \sqrt{3}$.

풀이 전략: 분모에 두 근호의 합이 있을 때는 '켤레'를 곱해 제곱의 차 꼴로 바꾸면 유리수가 된다. 약분 단계에서 2가 상쇄되어 깔끔한 결과가 나오는지 확인.

켤레 아이디어는 복소수 $\frac{1}{a+bi}$ 의 유리화로 그대로 이어지며, 고등에서 허수부를 제거하는 표준 기법이 된다.

Q77 원의 성질 증명

원 O의 내부의 한 점 P를 지나는 두 현 AB, CD가 있다. $PA = 4, PB = 9, PC = 6$ 일 때, PD의 길이를 구하고 그 근거를 설명하시오.



- ① ① 4
- ② ② 5
- ③ ③ 6
- ④ ④ 8

정답: ③

1단계: $\triangle PAC$ 와 $\triangle PDB$ 에서 $\angle APC = \angle DPB$ (맞꼭지각). 또한 $\angle PAC (= \angle BAC)$ 와 $\angle PDB (= \angle BDC)$ 는 모두 호 BC에 대한 원주각이므로 같다.

2단계: 두 각이 같으므로 $\triangle PAC \sim \triangle PDB$ (AA 닮음). 대응변의 비에서 $\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB}$, 즉 $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

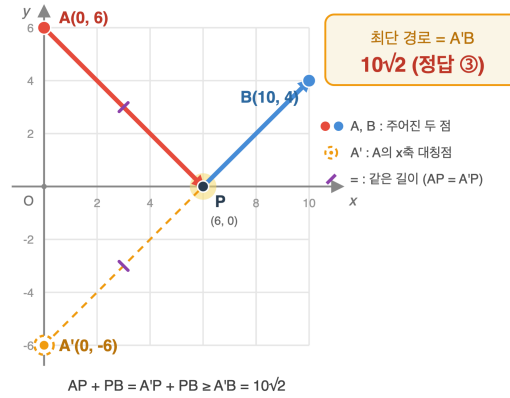
3단계: $4 \times 9 = 6 \times PD \Rightarrow PD = 6$.

풀이 전략: 원과 관련된 '길이의 곱' 등식은 닮음에서 나온다. 원주각 정리('같은 호에 대한 원주각은 같다')로 각 조건을 만들고, 맞꼭지각을 더해 AA 닮음을 완성. 이 정리는 고등에서 '방역(power of a point)'으로 일반화된다.

점 P가 원 외부에 있을 때도 같은 원리가 성립해 $PA \cdot PB = PT^2$ (T는 접점)로 확장된다.

Q78 도형 종합 추론

좌표평면에서 점 A(0, 6)에서 출발하여 x축 위의 한 점을 거쳐 점 B(10, 4)에 도착하는 경로의 최단거리를 구하시오.



- ① ① 10
- ② ② $4\sqrt{5}$
- ③ ③ $10\sqrt{2}$
- ④ ④ $\sqrt{296}$

정답: ③

1단계: 점 A를 x축에 대칭시켜 A'(0, -6)을 잡는다. x축 위 임의의 점 P에 대해 $AP = A'P$ 이므로 $AP + PB = A'P + PB$.

2단계: $A'P + PB$ 가 최소가 되는 경우는 A', P, B가 한 직선 위에 있을 때이며, 이때 값은 선분 A'B의 길이와 같다.

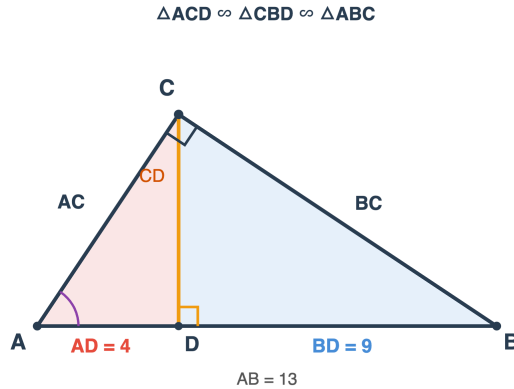
3단계: $A'B = \sqrt{(10-0)^2 + (4-(-6))^2} = \sqrt{100+100} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$.

풀이 전략: 경로가 '한 점에서 직선을 거쳐 다른 점으로' 가는 형태이면 대칭(거울반사) 변환으로 꺾인 경로를 펼쳐 직선 거리 문제로 바꾼다. 이는 스넬의 법칙·페르마의 최단시간 원리의 기하 버전.

이 대칭 기법은 당구공의 벽면 반사, 빛의 반사, 지도 위 해변가 최단 경로 등 다양한 실용 문제에 그대로 쓰인다.

Q79 삼각비 심화

직각삼각형 ABC에서 $\angle C = 90^\circ$ 이고, 점 D는 빗변 AB 위의 점으로 $CD \perp AB$ 이다. $AD = 4$, $BD = 9$ 일 때 $\sin A + \cos A$ 의 값을 구하시오.



- ① ① $\frac{\sqrt{13}}{13}$
- ② ② $\frac{3\sqrt{13}}{13}$
- ③ ③ $\frac{5\sqrt{13}}{13}$
- ④ ④ $\frac{7\sqrt{13}}{13}$

정답: ③

1단계: $AB = AD + BD = 13$. 직각삼각형에서 빗변에 내린 수선에 의해 만들어지는 세 삼각형은 모두 닮음이다. 이로부터 $CD^2 = AD \cdot BD = 4 \times 9 = 36$, $AC^2 = AD \cdot AB = 4 \times 13 = 52$, $BC^2 = BD \cdot AB = 9 \times 13 = 117$.

2단계: $AC = 2\sqrt{13}$, $BC = 3\sqrt{13}$. 따라서 $\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$.

3단계: $\sin A + \cos A = \frac{3\sqrt{13} + 2\sqrt{13}}{13} = \frac{5\sqrt{13}}{13}$.

풀이 전략: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ 가 각각 세 작은 삼각형 어디에 대응되는지 구분. 닮음비로부터 각 변의 길이를 $\sqrt{\quad}$ 꼴로 계산한 뒤 정의에 맞게 대입. 분모 유리화도 함께 수행.


💡 $CD^2 = AD \cdot BD$ (기하평균)과 $AC^2 = AD \cdot AB$ (산술 관계)은 고대 그리스의 '유클리드 정리'로 알려져 있으며, 기하평균·산술평균 부등식의 시각적 증명에도 쓰인다.

Q80 경시 퍼즐·확률

1부터 100까지의 자연수 중 임의로 51개를 뽑을 때, '뽑은 두 수 중 하나가 다른 하나의 약수가 되는 쌍'이 반드시 존재함을 증명하려 한다. 다음 중 가장 적절한 전략은?


- ① ① 각 수를 $2^k \cdot m$ (m 은 홀수) 꼴로 나타내면 m 의 값은 1, 3, 5, ..., 99 중 하나이므로 50종류이고, 51개를 뽑으면 같은 m 을 공유하는 두 수가 반드시 존재한다
- ② ② 51개 수의 평균이 50을 넘으므로 약수 관계가 강제된다
- ③ ③ 51개 중 짝수가 최소 26개이므로 2의 약수 관계가 성립한다
- ④ ④ 소수가 100 이하에 25개뿐이므로 나머지 수들은 서로 약수 관계이다


 **정답: ①**

 1단계: 1부터 100 사이의 모든 자연수 n 을 $n = 2^k \cdot m$ (k 는 0 이상의 정수, m 은 홀수)로 유일하게 표현한다. 여기서 m 은 1, 3, 5, ..., 99 중 하나이므로 '홀수 꼬리'의 종류는 정확히 50가지.

2단계: 비둘기집 원리: 51개의 수를 50종류의 '꼬리'에 분류하면 같은 꼬리 m 을 가지는 두 수 $2^{k_1}m, 2^{k_2}m$ (단, $k_1 < k_2$)이 반드시 존재한다.

3단계: 이 두 수의 비는 $2^{k_2 - k_1}$ 로 자연수. 즉 작은 수가 큰 수의 약수가 되어 원하는 쌍이 얻어진다.

 풀이 전략: '반드시 존재한다'는 존재성 증명이며, 직접 확인하기엔 경우가 폭발하므로 비둘기집 원리가 적합. 핵심은 '어떤 50칸의 상자에 비둘기를 몰아넣을까'를 설계하는 것. 홀수 꼬리는 약수 관계를 보존하는 자연스러운 분류.

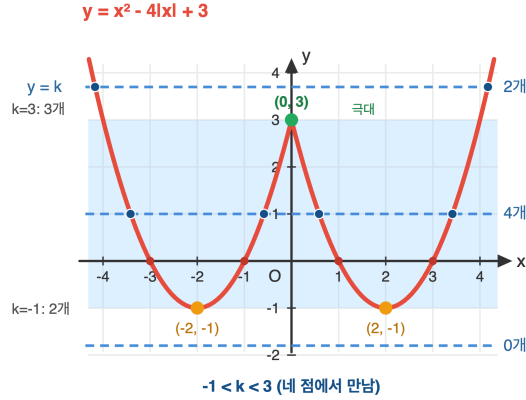
 비둘기집 원리는 Dirichlet이 정수론 증명에서 본격 사용했고, 이 특정 문제($n+1$ 개 중 약수 쌍 존재)는 Erdős가 즐겨 인용한 고전 예제이다.

중3 수학 심화

총 40문제 · 문제와 정답·풀이 포함

Q81 이차함수 심화

함수 $y = x^2 - 4|x| + 3$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 가 서로 다른 네 점에서 만나도록 하는 실수 k 의 값의 범위를 구하시오.



- ① ① $k = -1$ 또는 $k = 3$
- ② ② $-1 < k < 3$
- ③ ③ $-1 \leq k \leq 3$
- ④ ④ $0 < k < 3$

정답: ②

1단계: 절댓값 분리. $x \geq 0$ 이면 $y = x^2 - 4x + 3 = (x - 2)^2 - 1$ (꼭짓점 $(2, -1)$). $x < 0$ 이면 $y = x^2 + 4x + 3 = (x + 2)^2 - 1$ (꼭짓점 $(-2, -1)$). 그래프는 y 축에 대해 대칭인 'W'자.

2단계: $x = 0$ 에서 $y=3$ (극소최댓값), 양쪽 꼭짓점에서 $y=-1$ (전체 최솟값). 수평선 $y = k$ 와의 교점 수를 k 의 위치로 분류: $k < -1$ 이면 0개, $k = -1$ 이면 2개(꼭짓점 접촉), $-1 < k < 3$ 이면 4개, $k = 3$ 이면 3개(y 축 꼭짓점 통과), $k > 3$ 이면 2개.

3단계: 네 점에서 만나려면 엄격하게 $-1 < k < 3$. 경계 포함 시 교점 수가 줄거나 겹쳐서 정확히 4개가 되지 않는다.

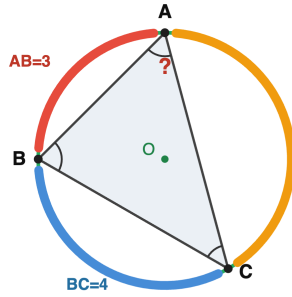
풀이 전략: 절댓값이 포함된 함수는 '부호별로 나누어 두 포물선으로 생각'하는 것이 핵심. 두 포물선의 극값과 연결점(y 축)의 값을 정확히 파악하고, 수평선을 아래에서 위로 스캔하며 교점 수의 변화를 세는 '수평선 테스트'를 수행. 부등호가 엄격한지 경계 포함인지 꼼꼼히 체크.

'W'자 그래프는 물리의 이중우물(double-well) 퍼텐셜 에너지 곡선과 동일한 형태로, 상전이(phase transition) 모델의 가장 단순한 예시이다.

Q82 원의 성질 증명

원 O에 내접하는 삼각형 ABC에서 $AB \frown : BC \frown : CA \frown = 3 : 4 : 5$ 일 때, $\angle A$ 의 크기를 구하시오.

원주각은 대응하는 호(중심각)에 비례
 $\angle A \leftrightarrow$ 호BC, $\angle B \leftrightarrow$ 호CA, $\angle C \leftrightarrow$ 호AB



$$\begin{aligned} \angle A : \angle B : \angle C &= 4 : 5 : 3 \\ &= 4 : 5 : 3 \\ &(\text{합 } 180^\circ) \\ \therefore \angle A &= 60^\circ \end{aligned}$$

- ① ① 30°
- ② ② 45°
- ③ ③ 60°
- ④ ④ 75°

정답: ③

1단계: 원주각 정리의 따름정리에 의해 '호에 대한 원주각은 그 호의 길이(=중심각)에 비례'한다. 꼭짓점 A에서의 원주각 $\angle A$ 는 호 BC에 대응, $\angle B$ 는 호 CA, $\angle C$ 는 호 AB에 대응한다.

2단계: 따라서 $\angle A : \angle B : \angle C = BC \frown : CA \frown : AB \frown = 4 : 5 : 3$.

3단계: $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ 이므로 한 단위는 $\frac{180^\circ}{4 + 5 + 3} = 15^\circ$. 따라서 $\angle A = 4 \times 15^\circ = 60^\circ$.

풀이 전략: 각과 대응되는 호를 헷갈리지 않는 것이 핵심. 꼭짓점에서 보는 호는 '그 꼭짓점을 포함하지 않는' 반대편 호이다. 호의 길이는 중심각에 비례하고 원주각은 중심각의 절반이므로, 결과적으로 원주각도 호에 비례. 전체 각의 합 180° 로 단위 스케일을 정한다.

호의 비가 $a : b : c$ 인 내접삼각형의 변의 비는 $\sin \frac{a\pi}{a+b+c} : \sin \frac{b\pi}{a+b+c} : \sin \frac{c\pi}{a+b+c}$ 가 되어, 외접원 반지름을 통해 사인법칙으로 이어진다.

Q83 경시 퍼즐·확률

어떤 학급 40명의 학생 중 수학을 좋아하는 학생이 25명, 영어는 22명, 과학은 20명이다. 수학과 영어 둘 다 좋아하는 학생이 15명, 영어와 과학이 12명, 수학과 과학이 14명이고, 세 과목 모두 좋아하는 학생이 8명이다. 세 과목 중 어느 것도 좋아하지 않는 학생 수를 구하시오.

- ① ① 4
- ② ② 5
- ③ ③ 6
- ④ ④ 7

정답: ③

1단계: 포함배제 원리로 적어도 하나의 과목을 좋아하는 학생 수를 구한다.

$$|M \cup E \cup S| = |M| + |E| + |S| - |M \cap E| - |E \cap S| - |M \cap S| + |M \cap E \cap S|.$$

2단계: 값 대입. $= 25 + 22 + 20 - 15 - 12 - 14 + 8 = 67 - 41 + 8 = 34$ 명.

3단계: 전체 40명 중 어느 과목도 좋아하지 않는 학생 = $40 - 34 = 6$ 명.

풀이 전략: 교집합 정보가 여러 층위로 주어질 때는 '이중으로 센 부분'을 빼고 '삼중으로 뺀 부분'을 다시 더해야 한다. 원리를 기계적으로 외우기보다 세 원의 벤 다이어그램을 머릿속에 그리고, 각 영역이 전체 합산에서 몇 번 세어지는지를 세어 보정.

포함배제 원리는 Leibniz가 체계화했으며, 암호학의 오일러 토션트 함수 $\varphi(n)$ 계산과 조합수학의 '교란순열(derangement)' 개수 공식의 기반이다.

Q84 실수·근호 추론

양수 a, b에 대하여 $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ 와 $\sqrt{a+b}$ 의 대소를 비교하고, 그 이유를 증명하시오.

- ① $\sqrt{a} + \sqrt{b} < \sqrt{a+b}$
- ② $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$
- ③ a, b 값에 따라 달라진다
- ④ $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$

정답: ④

1단계: 두 수는 모두 양수이므로 '제곱의 대소 = 원래 수의 대소'라는 성질을 이용할 수 있다.

2단계: $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{ab}$ 이고, $(\sqrt{a+b})^2 = a + b$ 이다.

3단계: 두 제곱값의 차가 $2\sqrt{ab} > 0$ (a, b가 양수)이므로 $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 > (\sqrt{a+b})^2$. 따라서 $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$.

풀이 전략: 근호 합과 근호 하나는 직접 비교가 어렵다. 양수 조건에서 제곱 후 비교하면 근호가 사라지고 교차항 $2\sqrt{ab}$ 의 부호로 결론을 낼 수 있다. 교차항은 항상 양수이므로 원래 수의 대소도 같은 방향으로 결정된다.

💡 \sqrt{x} 는 오목함수라서 이 부등식은 Jensen 부등식의 특수한 경우로 일반화된다.

Q85 통계 심화

자료 A = {3, 5, 7, 9, 11}과 자료 B = {103, 105, 107, 109, 111}에 대하여 두 자료의 표준편차의 관계로 옳은 것은?

- ① B의 표준편차가 A의 표준편차의 약 15배이다
- ② B의 표준편차는 A의 표준편차와 같다
- ③ B의 표준편차가 A보다 크다
- ④ A의 표준편차가 B보다 크다

정답: ②

1단계: 자료 B의 각 값은 자료 A의 각 값에 정확히 100을 더한 것이다. 즉 자료 전체가 '평행이동'만 되었다.

2단계: 자료 전체에 같은 상수 c를 더하면 평균도 c만큼 증가하지만, 각 '편차'(변량 - 평균) 값은 변하지 않는다:

$$(x_i + c) - (\bar{x} + c) = x_i - \bar{x}$$

3단계: 편차가 같으므로 편차의 제곱의 평균인 분산, 그리고 그 양의 제곱근인 표준편차도 변하지 않는다. 따라서 두 표준편차는 같다.

풀이 전략: 표준편차는 '자료가 평균으로부터 흩어진 정도'이므로 자료 전체를 같은 양만큼 이동해도 흩어진 정도는 변하지 않는다는 직관을 먼저 떠올린다. 식으로는 '편차 = 변량 - 평균'이 상수 이동에 불변임을 확인하면 된다.

💡 반면 자료의 모든 값에 상수 k를 곱하면 표준편차는 |k|배가 된다.

Q86 인수분해 심화

$x^4 + x^2 + 1$ 을 실수 범위에서 인수분해하시오.

- ① $(x^2 + 1)(x^2 - 1)$
- ② $(x^2 + 1)^2$
- ③ $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$
- ④ $(x + 1)^2(x - 1)^2$

정답: ③

1단계: 한가운데 항을 보강해 완전제곱을 만든다. $x^4 + x^2 + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2$.

2단계: $(x^2 + 1)^2 - x^2$ 는 제곱의 차 꼴이다.

3단계: $(A^2 - B^2) = (A + B)(A - B)$ 를 적용하면 $\{(x^2 + 1) + x\}\{(x^2 + 1) - x\} = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$.

풀이 전략: 주어진 식에서 이차항이 부족해 바로 인수분해되지 않는다. '이차항을 더하고 빼서 완전제곱을 만든 뒤 남은 항과 제곱의 차로 만드는 전략이 핵심. 이차항 계수 1을 2로 보충해 $(x^2 + 1)^2$ 를 만든 것이 통찰점이다.

💡 이 두 이차식 $x^2 + x + 1$ 과 $x^2 - x + 1$ 은 모두 판별식이 $-3 < 0$ 이므로 더 이상 실수 범위에서 인수분해되지 않는다.

Q87 이차방정식 활용

이차방정식 $x^2 - (k + 1)x + (k + 3) = 0$ 이 서로 다른 두 정수 해를 가질 때, 정수 k 의 값을 모두 구하시오.

- ① ① $k = 5$
- ② ② $k = -3$
- ③ ③ $k = 5$ 또는 $k = -3$
- ④ ④ $k = 3$ 또는 $k = -5$

정답: ③

1단계: 두 정수 해를 α, β 라 하면 근과 계수 관계에서 $\alpha + \beta = k + 1, \alpha\beta = k + 3$.

2단계: 두 식을 빼면 $\alpha\beta - (\alpha + \beta) = 2$. 양변에 1을 더해 좌변을 묶으면 $\alpha\beta - \alpha - \beta + 1 = 3$, 즉 $(\alpha - 1)(\beta - 1) = 3$.

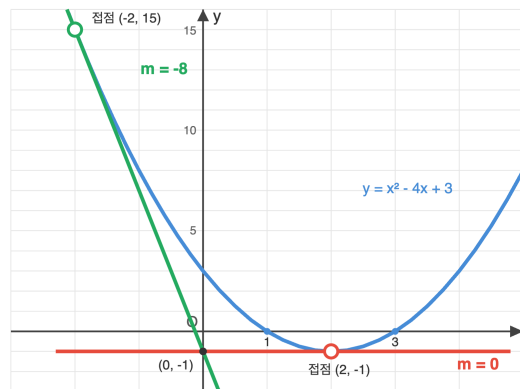
3단계: 3을 두 정수의 곱으로 나타내는 방법은 $1 \times 3, 3 \times 1, (-1) \times (-3), (-3) \times (-1)$. 이로부터 $(\alpha, \beta) \in \{(2, 4), (0, -2)\}$ (순서 무관). 각각 $k+1 = 6 \rightarrow k = 5, k+1 = -2 \rightarrow k = -3$. 두 값 모두 $\alpha\beta$ 조건도 만족한다.

풀이 전략: 정수 해 조건은 '판별식이 완전제곱' 만으로는 부족하고, 합과 곱이 모두 정수라는 조건을 활용해 k 에 대한 식을 두 변수 α, β 에 대한 '정수 인수분해 조건'으로 옮긴다. $(\alpha - 1)(\beta - 1)$ 꼴로 만드는 것이 핵심 아이디어.

💡 $k = 5$ 일 때 해는 2, 4 / $k = -3$ 일 때 해는 0, -2. 서로 다른 정수 해라는 조건에서 $\alpha\beta = 0$ 인 경우도 빠지지 않음을 유의.

Q88 이차함수 심화

이차함수 $y = x^2 - 4x + 3$ 의 그래프와 직선 $y = mx - 1$ 이 접할 때, 상수 m 의 모든 값을 구하시오.



- ① ① $m = 0$
- ② ② $m = -8$
- ③ ③ $m = 0$ 또는 $m = -8$
- ④ ④ $m = 4$ 또는 $m = -4$

정답: ③

1단계: 두 그래프의 공통점을 구하기 위해 연립하면 $x^2 - 4x + 3 = mx - 1$, 즉 $x^2 - (4 + m)x + 4 = 0$.

2단계: 접한다는 것은 이차방정식이 '중근'을 가진다는 뜻이므로 판별식 $D = 0$. $D = (4 + m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = (4 + m)^2 - 16$.

3단계: $(4 + m)^2 = 16 \rightarrow 4 + m = \pm 4 \rightarrow m = 0$ 또는 $m = -8$.

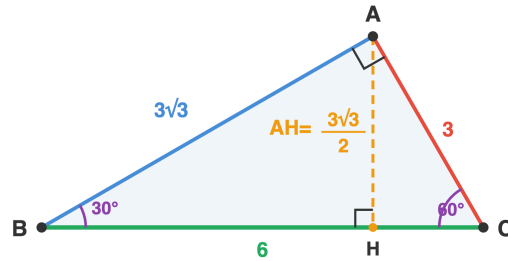
풀이 전략: '접함 = 중근 = 판별식 0'의 대응을 떠올리는 것이 출발점이다. 연립 결과를 이차방정식으로 정리한 뒤 판별식을 m 에 대한 이차식으로 만들어 제곱근을 풀면 m 값이 두 개 나온다. 두 접선 중 하나는 수평선, 다른 하나는 가파르게 기운 직선이라는 기하적 그림도 이해에 도움이 된다.

💡 포물선 바깥의 한 점에서 포물선에 그을 수 있는 접선은 항상 두 개다. $(1, 0, -1)$ 은 바로 그런 점 중 하나.

Q89 삼각비 심화

$\angle A = 90^\circ$, $\angle B = 30^\circ$ 인 직각삼각형 ABC에서 AC = 3이다. 꼭짓점 A에서 빗변 BC에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 선분 AH의 길이를 구하시오.

$$S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AH$$



- ① ① $\frac{3}{2}$
- ② ② $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
- ③ ③ $2\sqrt{3}$
- ④ ④ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

정답: ②

1단계: $\angle A = 90^\circ$, $\angle B = 30^\circ$ 이므로 $\angle C = 60^\circ$. AC = 3을 $\angle B = 30^\circ$ 의 대변으로 보면 $\sin B = \frac{AC}{BC}$ 에서 $BC = \frac{3}{\sin 30^\circ} = \frac{3}{1/2} = 6$.

또 $AB = \frac{AC}{\tan B} = \frac{3}{1/\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$.

2단계: 삼각형 ABC의 넓이를 두 변 AC, AB로 계산: $S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3\sqrt{3} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$.

3단계: 같은 넓이를 빗변 BC와 수선 AH로 계산: $S = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AH = 3 \cdot AH$. 따라서 $3 \cdot AH = \frac{9\sqrt{3}}{2}$ 이므로 $AH = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

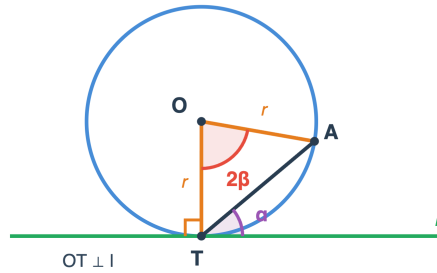
풀이 전략: 빗변으로 내린 수선의 길이를 직접 삼각비로 구하기보다 '넓이를 두 가지 방법으로 계산'하는 전략이 깔끔하다. 같은 삼각형의 넓이는 (밑변, 높이)를 어떻게 잡아도 같다는 성질 하나로 수선 길이를 뽑아낸다.

💡 $AH = \frac{AC \cdot AB}{BC}$ 는 직각삼각형에서 늘 성립하는 공식이다. AH는 가하적으로 빗변에 내린 수선이자 '점 A에서 BC까지의 거리'.

Q90 원의 성질 증명

원 O 위의 점 T에서 접선 l을 그었다. 원 위의 다른 점 A에 대하여 현 TA와 접선 l이 이루는 각을 α , 호 TA(A를 끼지 않는 쪽의 작은 호)에 대응하는 중심각을 2β 라 할 때, $\alpha = \beta$ 임을 증명하시오. (접선과 현이 이루는 각)

증명: $\alpha = \beta$



- ① ① $\alpha = 2\beta$
- ② ② $\alpha = \beta$
- ③ ③ $\alpha + \beta = 90^\circ$
- ④ ④ $\alpha = \beta/2$

정답: ②

1단계: 접선의 성질에서 접점을 지나는 반지름은 접선에 수직이다. 따라서 $\angle OTl = 90^\circ$, 즉 반지름 OT와 접선 l 사이 각이 직각이다.

2단계: 삼각형 OTA에서 $OT = OA = r$ (같은 원의 반지름)이므로 이등변삼각형이다. 꼭지각 $\angle TOA = 2\beta$ 이므로 밑각

$$\angle OTA = \angle OAT = \frac{180^\circ - 2\beta}{2} = 90^\circ - \beta.$$

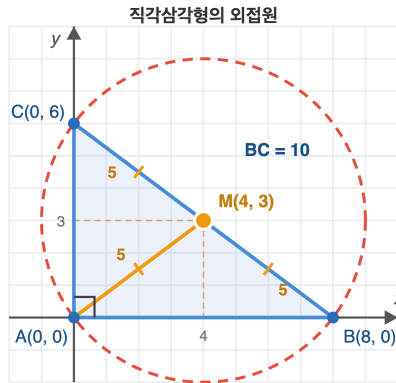
3단계: 접선과 현 사이의 각은 $\alpha = \angle OTl - \angle OTA = 90^\circ - (90^\circ - \beta) = \beta$. 따라서 $\alpha = \beta$ 가 성립한다.

풀이 전략: 접선-현 각은 '원주각 정리의 한계 버전'이다. A가 점점 접선 쪽으로 다가가 점점 T와 일치하는 극한 상황이 접선-현 각이므로, 원주각과 같은 값(호의 절반)이 되어야 자연스럽다. 증명은 '접선 \perp 반지름'과 '이등변삼각형 밑각' 두 가지 성질만으로 충분하다.

💡 이 성질은 원과 접선이 만드는 모든 '꺾임각'을 호로 환산하게 해주어, 두 원의 접선, 접선 2개와 현 등 다양한 도형 문제의 핵심 도구가 된다.

Q91 도형 종합 추론

좌표평면 위의 세 점 $A(0, 0)$, $B(8, 0)$, $C(0, 6)$ 을 꼭짓점으로 하는 직각삼각형의 외접원의 중심의 좌표와 반지름을 구하시오.



- ① ① 중심 (4, 3), 반지름 5
- ② ② 중심 (3, 4), 반지름 5
- ③ ③ 중심 (4, 3), 반지름 10
- ④ ④ 중심 (0, 0), 반지름 5

정답: ①

1단계: $A(0,0)$ 에서 AB (x 축 방향)와 AC (y 축 방향)가 수직이므로 $\angle A = 90^\circ$. 삼각형 ABC 는 A 가 직각인 직각삼각형이다.

2단계: '직각삼각형에서 외접원의 지름은 빗변'이라는 원의 성질(지름에 대한 원주각이 90°)을 이용한다. 따라서 외접원의 중심은 빗변 BC 의 중점이고, 반지름은 빗변의 절반이다.

3단계: 빗변 BC 의 중점은 $(\frac{0+8}{2}, \frac{6+0}{2}) = (4, 3)$. 빗변의 길이는 $\sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ 이므로 반지름은 5.

풀이 전략: 좌표 문제지만 핵심은 '직각삼각형의 외접원은 빗변을 지름으로 한다'는 기하 정리다. 이 정리는 '지름에 대한 원주각 = 90° ' (탈레스 정리)의 역 방향. 좌표 계산은 중점과 길이 두 개 뿐이라 간단하다.

이것이 '탈레스 원(Thales' circle)'이다. 반대로 어떤 세 점 A, B, C 에 대해 원 위의 점 P 가 A, B 를 지름의 양 끝으로 하는 원 위에 있다면 $\angle APB = 90^\circ$.

Q92 경시 퍼즐·확률

1부터 10까지의 자연수 중에서 서로 다른 여섯 개의 수를 임의로 뽑았다. 뽑은 여섯 수 안에는 합이 11이 되는 두 수가 반드시 존재함을 증명하시오.

- ① ① 뽑는 방법에 따라 다르다
- ② ② 합이 11인 두 수가 반드시 존재한다 (비둘기집 원리)
- ③ ③ 확률이 $\frac{1}{2}$ 이다
- ④ ④ 6개로는 부족하고 7개 이상이어야 한다

정답: ②

1단계: 1부터 10까지의 수를 '합이 11이 되는 쌍'으로 묶는다: $\{1, 10\}, \{2, 9\}, \{3, 8\}, \{4, 7\}, \{5, 6\}$. 이렇게 모두 다섯 쌍이 만들어지고, 1 ~ 10의 각 수는 정확히 한 쌍에만 속한다.

2단계: 여섯 개의 수를 뽑는다는 것은 비둘기(수) 6마리를 비둘기집(쌍) 5개에 넣는 것과 같다.

3단계: 비둘기집 원리에 의해 어느 한 쌍에는 두 수가 모두 들어간다. 그 쌍의 두 수의 합은 11이므로, 뽑은 여섯 수 안에는 합이 11이 되는 두 수가 반드시 존재한다.

풀이 전략: '반드시 존재한다'는 존재성 증명은 직접 찾기 어렵기 때문에, 비둘기집 원리(Pigeonhole)로 귀결시키는 것이 정석이다. 1 ~ 10에 11이라는 '목표 합'을 주고 대칭성을 만들어 5개의 쌍으로 분할한 뒤, 뽑은 수를 이 쌍에 분배해 수가 넘치는 쌍을 찾는 구조.

1 ~ 10에서 5개만 뽑는 경우에는 각 쌍에서 하나씩만 뽑아 합이 11이 되는 두 수가 없게 할 수 있다. 즉 '6개 뽑기'가 정확히 이 성질이 강제되기 시작하는 경계다.

Q93 이차방정식 활용

지면에서 수직으로 위로 쏘아 올린 공의 t 초 후 높이 h (미터)가 $h = 30t - 5t^2$ 로 주어진다. 공의 높이가 25m 이상인 시간 구간의 길이(초)를 구하시오.

- ① ① 3초
- ② ② 4초
- ③ ③ 5초
- ④ ④ 6초

정답: ②

1단계: 조건 $h \geq 25$ 를 식으로 쓰면 $30t - 5t^2 \geq 25$. 정리하면 $5t^2 - 30t + 25 \leq 0$, 양변을 5로 나누어 $t^2 - 6t + 5 \leq 0$.

2단계: 좌변을 인수분해하면 $(t - 1)(t - 5) \leq 0$.

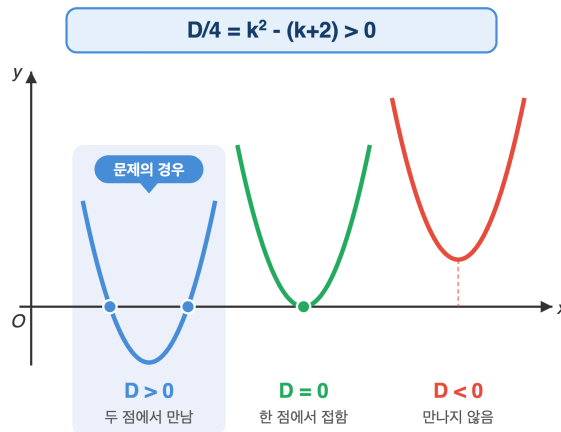
3단계: 이차부등식의 해는 두 근 사이이므로 $1 \leq t \leq 5$. 시간 구간의 길이는 $5 - 1 = 4$ (초).

풀이 전략: '높이 ≥ 25 '를 이차부등식으로 옮기는 것이 열쇠. 부등호 방향은 이차항 계수 부호에 맞춰 정리해야 혼동이 없다. 해를 구간으로 해석한 뒤 '구간의 길이 = 두 근의 차'로 답을 뽑는다.

공이 꼭대기에 도달하는 시간은 $t = 3$ 초이고 그때 최대 높이는 45m. 25m 통과 구간이 정확히 정점에 대칭(1초 ~ 5초)인 이유도 이차함수의 축 대칭성 때문이다.

Q94 이차함수 심화

포물선 $y = x^2 + 2kx + k + 2$ 가 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 k 의 값의 범위를 구하시오.



- ① ① $-1 < k < 2$
- ② ② $k < -1$ 또는 $k > 2$
- ③ ③ $k \leq -1$ 또는 $k \geq 2$
- ④ ④ $k < 2$

정답: ②

1단계: 포물선이 x 축과 서로 다른 두 점에서 만난다는 것은 이차방정식 $x^2 + 2kx + (k + 2) = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖는 것과 같다. 조건은 판별식 $D > 0$.

2단계: $\frac{D}{4} = k^2 - (k + 2) > 0 \rightarrow k^2 - k - 2 > 0$.

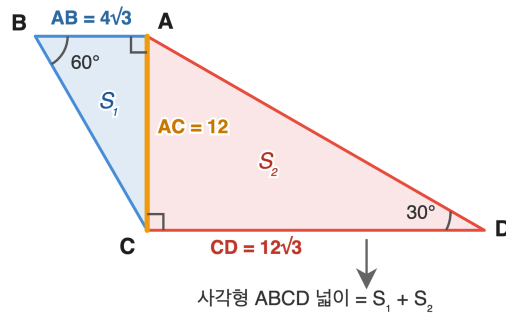
3단계: 좌변을 인수분해하면 $(k - 2)(k + 1) > 0$. 두 인수의 곱이 양수인 범위는 $k < -1$ 또는 $k > 2$.

풀이 전략: 'x축과 두 점에서 만난다'를 '이차방정식이 서로 다른 두 실근'으로 번역하는 것이 1단계. 이후 판별식을 k 에 대한 이차식으로 세우고, 이 이차부등식을 다시 인수분해로 해결한다. 이차방정식의 해와 이차부등식의 해 사이 구조 대응을 확인할 수 있다.

판별식 $D = 0$ 이 되는 경계값 $k = -1, 2$ 는 포물선이 x 축에 '접하는' 순간이고, 그 사이에서는 포물선이 x 축 위로 완전히 떠 있다.

Q95 삼각비 심화

사각형 ABCD에서 $\angle BAC = 90^\circ$, $\angle ACD = 90^\circ$, $\angle ABC = 60^\circ$, $\angle ADC = 30^\circ$, $AC = 12$ 이다. 사각형 ABCD의 넓이를 구하시오.



- ① ① $48\sqrt{3}$
- ② ② $60\sqrt{3}$
- ③ ③ $72\sqrt{3}$
- ④ ④ $96\sqrt{3}$

정답: ④

1단계: 대각선 AC로 사각형을 두 직각삼각형 ABC와 ACD로 나눈다.

2단계: 삼각형 ABC에서 $\angle A = 90^\circ$, $\angle B = 60^\circ$. 따라서 $\tan 60^\circ = \frac{AC}{AB}$ 에서 $AB = \frac{AC}{\tan 60^\circ} = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$. 넓이

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 12 = 24\sqrt{3}.$$

3단계: 삼각형 ACD에서 $\angle ACD = 90^\circ$, $\angle D = 30^\circ$. 따라서 $\tan 30^\circ = \frac{AC}{CD}$ 에서 $CD = \frac{12}{\tan 30^\circ} = 12\sqrt{3}$. 넓이

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 12\sqrt{3} = 72\sqrt{3}. \text{ 따라서 사각형 넓이} = S_1 + S_2 = 24\sqrt{3} + 72\sqrt{3} = 96\sqrt{3}.$$

풀이 전략: 사각형을 '공유하는 변(대각선 AC)'을 기준으로 두 직각삼각형으로 쪼갠 뒤, 각 직각삼각형에서 tan 비로 모르는 변을 구한다. 두 직각삼각형 모두 특수각(30° - 60° - 90°)이어서 정확한 값이 깔끔하게 나오는 구조. 각도 배치가 대칭처럼 보여도 빗변이 아닌 '짧은 쪽'과 '긴 쪽'이 반대라 두 넓이의 비가 1:3임을 알 수 있다.

💡 두 삼각형의 넓이 비가 $S_1 : S_2 = 1 : 3$ 인 것은 $\tan 60^\circ : \tan 30^\circ = \sqrt{3} : \frac{1}{\sqrt{3}} = 3 : 1$ 이라는 정확한 비율에서 온다.

Q96 통계 심화

변량 x_1, x_2, \dots, x_{10} 의 평균이 8, 분산이 4이다. 새 변량 $y_i = 2x_i - 3$ ($i = 1, 2, \dots, 10$)의 평균과 분산의 합은?

- ① ① 25
- ② ② 27
- ③ ③ 29
- ④ ④ 31

정답: ③ 29

1단계: 변량 $y_i = ax_i + b$ 의 평균은 $a\bar{x} + b$ 이다. 따라서 $y = 2 \times 8 - 3 = 13$.

2단계: 변량 $y_i = ax_i + b$ 의 분산은 $a^2 \times (x_i \text{의 분산})$ 이다. 상수 b 는 분산에 영향을 주지 않는다. 따라서 y_i 의 분산 = $2^2 \times 4 = 16$.

3단계: 평균과 분산의 합 = $13 + 16 = 29$.

풀이 전략: 일차변환 $y = ax + b$ 에서 평균은 그대로 같은 변환을 받지만, 분산은 편차 ($x_i - \bar{x}$)를 a 배 하므로 제곱하여 a^2 배가 된다. 상수 b 는 평행이동일 뿐이어서 흩어진 정도(분산)에 영향이 없다는 점이 핵심.

💡 표준편차는 $|a|$ 배가 되어 분산과 달리 절댓값이 붙는다. 고등학교 통계에서 '확률변수의 평균·분산' 공식과 동일한 구조다.

Q97 실수·근호 추론

$\sqrt{7+4\sqrt{3}} - \sqrt{7-4\sqrt{3}}$ 의 값을 구하시오.

- ① ① 2
- ② ② $\sqrt{3}$
- ③ ③ $2\sqrt{3}$
- ④ ④ 4

정답: ③ $2\sqrt{3}$

1단계: $7+4\sqrt{3}$ 을 완전제곱꼴로 변형한다. $7+4\sqrt{3} = 4+4\sqrt{3}+3 = (2+\sqrt{3})^2$. 따라서 $\sqrt{7+4\sqrt{3}} = 2+\sqrt{3}$.

2단계: $7-4\sqrt{3} = 4-4\sqrt{3}+3 = (2-\sqrt{3})^2$. 여기서 $2 > \sqrt{3}$ 이므로 $\sqrt{7-4\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$ (절댓값 주의).

3단계: $(2+\sqrt{3}) - (2-\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$.

풀이 전략: $a+2\sqrt{b}$ 꼴을 $(\sqrt{p} + \sqrt{q})^2$ 로 만들려면 $p+q = a, pq = b$ 인 두 수를 찾는다. 여기서는 $p+q = 7, pq = 12$ 이므로 $p = 4, q = 3$. 또한 $\sqrt{(2-\sqrt{3})^2} = |2-\sqrt{3}|$ 임을 절대 잊지 말아야 한다.

이중근호 풀이는 16세기 카르다노(Cardano)가 삼차방정식 해법을 연구하면서 체계화했다. 지금도 '근호 속 근호' 계산은 수학 경시의 단골이다.

Q98 인수분해 심화

$(x^2+x)^2 - 8(x^2+x) + 12$ 을 일차식들의 곱으로 완전히 인수분해하시오.

- ① ① $(x+2)(x-1)(x+3)(x-2)$
- ② ② $(x+1)(x-2)(x+3)(x-1)$
- ③ ③ $(x^2+x-2)^2$
- ④ ④ $(x+2)(x-1)(x^2+x-6)$

정답: ① $(x+2)(x-1)(x+3)(x-2)$

1단계: $x^2+x = t$ 로 치환하면 식은 $t^2 - 8t + 12 = (t-2)(t-6)$.

2단계: t 를 원래 식으로 되돌리면 $(x^2+x-2)(x^2+x-6)$.

3단계: 각 이차식을 더 인수분해한다. $x^2+x-2 = (x+2)(x-1), x^2+x-6 = (x+3)(x-2)$. 따라서 최종 인수분해는 $(x+2)(x-1)(x+3)(x-2)$.

풀이 전략: 복잡한 식에서 반복되는 부분(x^2+x)을 찾아 한 문자로 치환하면 차수가 내려가 다루기 쉬워진다. 치환 후 인수분해 결과가 이차식이라면 원래 변수로 되돌린 뒤 추가 인수분해 가능 여부를 반드시 확인해야 한다. '④'는 부분 인수분해만 된 상태이므로 완전한 답이 아님.

'완전 인수분해'란 더 이상 실수 범위 일차식으로 쪼갤 수 없을 때까지 분해한 상태를 말한다. 경시에서는 '끝까지'라는 조건이 숨어 있어 함정이 된다.

Q99 이차방정식 활용

두 이차방정식 $x^2 - 3x + a = 0$ 과 $x^2 + ax - 3 = 0$ 이 공통근을 가진다. $a \neq -3$ 일 때, 실수 a 의 값과 그 공통근을 구하시오.

- ① ① $a = 1$, 공통근 = 2
- ② ② $a = 2$, 공통근 = 1
- ③ ③ $a = 3$, 공통근 = -1
- ④ ④ $a = -2$, 공통근 = 1

정답: ② $a = 2$, 공통근 = 1

1단계: 공통근을 α 라 하면 $\alpha^2 - 3\alpha + a = 0 \dots(\gamma)$, $\alpha^2 + a\alpha - 3 = 0 \dots(\iota)$ 이 동시에 성립한다.

2단계: $(\gamma) - (\iota)$ 을 하면 $-3\alpha - a\alpha + a + 3 = 0$, 정리하면 $-\alpha(3 + a) + (a + 3) = 0$, 즉 $(a + 3)(1 - \alpha) = 0$. 조건에서 $a \neq -3$ 이므로 $\alpha = 1$.

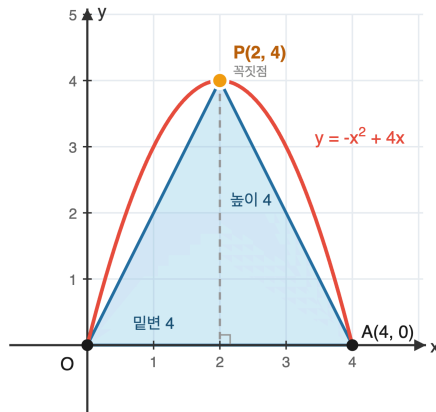
3단계: $\alpha = 1$ 을 (γ) 에 대입하면 $1 - 3 + a = 0$, 따라서 $a = 2$. 검산: (ι) 에 대입하면 $1 + 2 - 3 = 0$ 성립.

풀이 전략: 두 이차식에서 공통근 α 가 존재한다면 두 식 모두를 만족시키므로 '두 식의 차'도 α 에서 0이 된다. 두 식을 빼면 차수가 내려가 한 식으로 α 를 먼저 구할 수 있다. 제외 조건 $a \neq -3$ 을 놓치면 엉뚱한 답이 나오므로 조건 활용이 핵심.

이 '두 식 빼기' 전략은 고등 연립방정식·종말식(resultant)의 기초 아이디어다. 19세기 실베스터가 일반화했다.

Q100 이차함수 심화

포물선 $y = -x^2 + 4x$ 위를 움직이는 점 P가 있다. P의 x좌표가 $0 < x < 4$ 일 때, 원점 O(0, 0), 점 A(4, 0), 점 P로 이루어진 삼각형 OPA의 넓이의 최댓값은?



- ① ① 4
- ② ② 6
- ③ ③ 8
- ④ ④ 10

정답: ③ 8

1단계: 점 P의 좌표를 $(t, -t^2 + 4t)$ 로 놓는다($0 < t < 4$ 이므로 $-t^2 + 4t > 0$, 즉 P는 x축보다 위에 있다). 밑변 OA는 x축 위 길이 4인 선분이다.

2단계: 삼각형의 높이는 P의 y좌표 $h(t) = -t^2 + 4t$. 넓이 $S(t) = \frac{1}{2} \times 4 \times (-t^2 + 4t) = -2t^2 + 8t$.

3단계: $S(t) = -2(t - 2)^2 + 8$ 로 완전제곱하면 $t = 2$ 일 때 최댓값 8. 이때 P(2,4)는 포물선의 꼭짓점과 일치한다.

풀이 전략: 밑변이 x축 위 고정된 선분일 때 삼각형 넓이는 '제3의 꼭짓점의 y좌표'에 비례한다. 따라서 P의 y좌표를 최대화하는 문제로 환원되고, 이는 포물선 꼭짓점에서 실현된다. 최적화의 기본 전략: 변수를 하나로 모으고 완전제곱.

'고정 밑변 + 가변 꼭짓점' 구조는 곧 포물선의 모양 자체가 높이 함수가 되는 예쁜 상황이다. 페르마는 이 아이디어로 미분 없이도 극값을 찾았다.

Q101 실수·근호 추론

자연수 n 에 대하여 $\sqrt{n^2+n}$ 의 정수부분이 n 임을 부등식으로 증명하고, $n=10$ 일 때 $\sqrt{n^2+n}$ 의 정수부분 $[a]$ 를 구하시오.

- ① ① 9
- ② ② 10
- ③ ③ 11
- ④ ④ 12

정답: ② 10

1 단계: $n^2 < n^2 + n$ 이므로 $n < \sqrt{n^2+n}$. 2단계: $n^2 + n < n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$ 이므로 $\sqrt{n^2+n} < n+1$. 3단계: 따라서 $n < \sqrt{n^2+n} < n+1$ 이고 정수부분은 n . 4단계: $n=10$ 이면 $\sqrt{110}$ 의 정수부분은 10.

풀이 전략: 근호의 정수부분을 구하려면 두 인접 자연수의 제곱 사이에 끼우는 부등식을 만든 뒤 양변에 제곱근을 씌워 범위를 고립시킨다. n^2 과 $(n+1)^2$ 사이에 n^2+n 이 들어감을 직접 확인.

💡 $\sqrt{n(n+1)}$ 은 두 자연수의 기하평균이고, 항상 산술평균 $(n+0.5)$ 보다 작다. 이를 통해 $\sqrt{n^2+n} < n + \frac{1}{2}$ 도 성립한다.

Q102 인수분해 심화

다항식 $x^4 + 4y^4$ 를 실수 계수 범위에서 인수분해하시오.

- ① ① $(x^2 + 2y^2)^2$
- ② ② $(x - 2y)(x + 2y)(x^2 + y^2)$
- ③ ③ $(x^2 - 2xy + 2y^2)(x^2 + 2xy + 2y^2)$
- ④ ④ $(x + y)^2(x^2 - 2xy + 4y^2)$

정답: ③ $(x^2 - 2xy + 2y^2)(x^2 + 2xy + 2y^2)$

1 단계: 직접 인수분해가 어려우므로 $(2xy)^2$ 을 더하고 빼는 기법을 쓴다. $x^4 + 4y^4 = x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4 - 4x^2y^2$. 2단계: $= (x^2 + 2y^2)^2 - (2xy)^2$. 3단계: 합·차의 곱으로 $= (x^2 + 2y^2 - 2xy)(x^2 + 2y^2 + 2xy)$.

풀이 전략: 두 항만으로는 인수분해되지 않을 때, 적당한 항을 더했다 빼는 '소피 제르맹 항등식' 형태를 떠올린다. 완전제곱식을 만들고 차의 제곱으로 분해.

💡 이 항등식은 1738년 소피 제르맹이 페르마 소정리 연구 중 활용한 식으로, 임의의 $n > 1$ 에 대해 $n^4 + 4$ 가 합성수임을 증명할 때 쓰인다.

Q103 이차방정식 활용

두 이차방정식 $x^2 + ax + 1 = 0$ 과 $x^2 + x + a = 0$ 이 공통인 실근을 가질 때, 상수 a 의 값과 그 공통근을 구하시오. (단 $a \neq 1$)

- ① ① $a=-1$, 공통근 $x=1$
- ② ② $a=-2$, 공통근 $x=1$
- ③ ③ $a=-2$, 공통근 $x=-1$
- ④ ④ $a=2$, 공통근 $x=-1$

정답: ② $a=-2$, 공통근 $x=1$

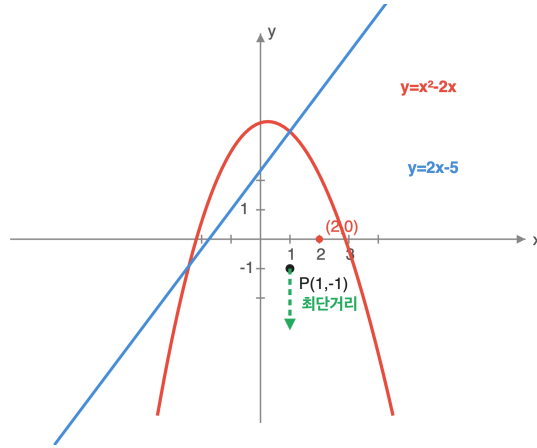
1 단계: 공통근을 α 라 하면 두 식이 모두 0이므로 두 식을 빼면 $(a-1)\alpha + (1-a) = 0$, 즉 $(a-1)(\alpha-1) = 0$. 2단계: $a \neq 1$ 이므로 $\alpha = 1$. 3단계: $\alpha=1$ 을 첫 식에 대입하면 $1 + a + 1 = 0$ 이므로 $a=-2$. 4단계: $a=-2$ 를 두 번째 식에 대입하면 $1 + 1 - 2 = 0$ 으로 성립함을 검증.

풀이 전략: 두 이차식의 공통근 문제는 두 식을 빼서 일차식을 만든 뒤 그 해가 공통근의 후보임을 이용한다. 차감으로 일차로 떨어뜨리고, 후보를 원식에 대입해 적합성을 검증.

💡 세 이차식이 한 근을 공유할 조건은 행렬식(종결식, resultant)이 0 이라는 고차원 조건으로 일반화된다.

Q104 이차함수 심화

포물선 $y = x^2 - 2x$ 위의 점에서 직선 $y = 2x - 5$ 까지의 최단 거리를 구하시오.



- ① ① $\frac{\sqrt{5}}{5}$
- ② ② $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
- ③ ③ $\frac{\sqrt{5}}{2}$
- ④ ④ $\sqrt{5}$

☞ 정답: ① $\frac{\sqrt{5}}{5}$

📖 1단계: 포물선 위의 점을 $P(t, t^2 - 2t)$ 로, 직선을 $2x - y - 5 = 0$ 으로 두면 점과 직선 사이 거리는

$$d(t) = \frac{|2t - (t^2 - 2t) - 5|}{\sqrt{5}} = \frac{|-t^2 + 4t - 5|}{\sqrt{5}} = \frac{|t^2 - 4t + 5|}{\sqrt{5}}. \text{ 2단계: } t^2 - 4t + 5 = (t - 2)^2 + 1 \geq 1 > 0 \text{ 이므로 절댓값을 풀면}$$

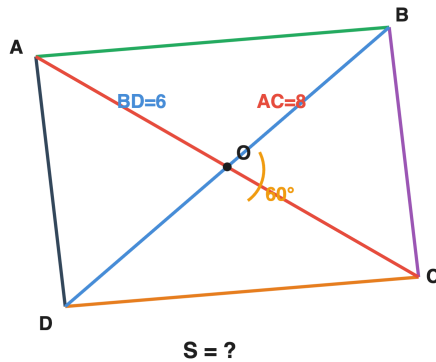
$$d(t) = \frac{(t - 2)^2 + 1}{\sqrt{5}}. \text{ 3단계: } t=2 \text{ 일 때 최솟값 } \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

🧠 풀이 전략: 포물선 위의 한 점에서 직선까지 거리를 매개변수 t 의 함수로 두면 분자가 t 에 관한 이차식이 된다. 절댓값 안의 식의 부호를 판별식으로 확인한 후 완전제곱으로 최솟값을 찾는다.

💡 고등수학에서는 미분으로 같은 답을 얻지만, 중3 수준에서도 완전제곱식만으로 충분히 풀 수 있다. 이때 거리가 최소인 점에서 포물선의 접선이 주어진 직선에 평행하다는 사실이 확인된다.

Q105 삼각비 심화

사각형 ABCD에서 두 대각선의 길이가 AC=8, BD=6 이고 두 대각선이 이루는 각이 60° 이다. 사각형 ABCD의 넓이를 구하시오.



- ① ① 12
- ② ② $12\sqrt{2}$
- ③ ③ $12\sqrt{3}$
- ④ ④ 24

정답: ③ $12\sqrt{3}$

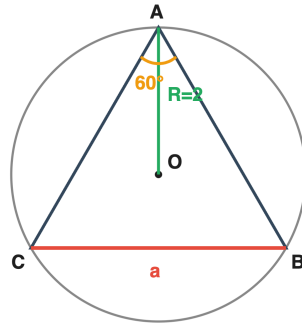
1단계: 대각선이 교차하는 사각형은 두 대각선과 교각으로 만든 네 개의 삼각형으로 분할된다. 각 작은 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2} \cdot p \cdot q \cdot \sin 60^\circ$ 형태(p,q 는 분할된 대각선 조각). 2단계: 네 삼각형 넓이의 합은 $\frac{1}{2} \sin 60^\circ \{(AO \cdot BO) + (AO \cdot DO) + (CO \cdot BO) + (CO \cdot DO)\} = \frac{1}{2} \sin 60^\circ (AO + CO)(BO + DO) = \frac{1}{2} \sin 60^\circ \cdot AC \cdot BD$. 3단계: $= \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$.

풀이 전략: 임의 사각형 넓이 공식 $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \theta$ 가 성립하는 이유를 네 삼각형 합으로 직접 유도한다. 분배법칙으로 묶으면 분할된 길이가 사라지고 전체 대각선 곱만 남는다.

이 공식은 마름모(대각선 직교, $\sin 90^\circ = 1$)의 넓이 공식 $\frac{1}{2} d_1 d_2$ 의 일반화이다. 대각선이 직교하지 않는 일반 사각형에도 그대로 적용 된다.

Q106 삼각비 심화

원 O에 내접하는 정삼각형 ABC의 외접원 반지름이 $R=2$ 일 때, 정삼각형의 한 변의 길이를 사인법칙 $\frac{a}{\sin A} = 2R$ 을 이용하여 구하시오.



$$a / \sin 60^\circ = 2R$$

- ① ① $\sqrt{3}$
- ② ② 2
- ③ ③ $2\sqrt{3}$
- ④ ④ $3\sqrt{3}$

🎯 정답: ③ $2\sqrt{3}$

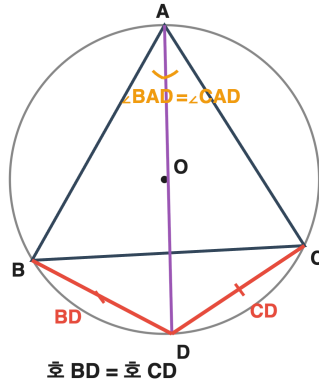
📖 1단계: 정삼각형의 한 내각은 60° 이고 사인법칙에 의해 $\frac{a}{\sin 60^\circ} = 2R$ 이다. 2단계: $a = 2R \sin 60^\circ = 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$. 3단계: 검증으로 정삼각형 외접원 반지름 공식 $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$ 에 $a=2\sqrt{3}$ 을 대입하면 $R = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2$ 로 일치.

🧠 풀이 전략: 고등수학의 사인법칙은 사실 중3 원주각 정리에서 자연스럽게 따라나온다. 한 변의 대각이 같은 호의 원주각이므로, 그 변과 사인값의 비가 지름과 같다.

💡 사인법칙의 분모 $2R$ 은 이 삼각형의 외접원 지름과 정확히 같으며, 이는 원에 내접하는 모든 삼각형에서 성립하는 보편적 공식이다.

Q107 원의 성질 증명

원 O에 내접하는 삼각형 ABC에서 $\angle A$ 의 이등분선이 외접원과 다시 만나는 점을 D라 할 때, $BD = CD$ 임을 증명하시오. 핵심 근거는 무엇인가?



- ① ① 같은 원에서 같은 크기의 원주각에 대응하는 호의 길이가 같으므로 호 $BD =$ 호 CD , 따라서 현의 길이도 같다
- ② ② 두 직선 BD, CD 가 원의 지름이므로
- ③ ③ 삼각형 BCD 가 정삼각형이므로
- ④ ④ $\angle BDA = \angle CDA$ 이므로 $\triangle ABD \cong \triangle ACD$

정답: ① 같은 원에서 같은 크기의 원주각에 대응하는 호의 길이가 같으므로 호 $BD =$ 호 CD , 따라서 현의 길이도 같다

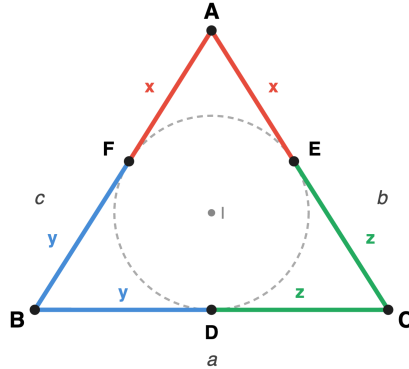
1단계: AD 가 $\angle A$ 의 이등분선이므로 $\angle BAD = \angle CAD$. **2단계:** $\angle BAD$ 는 호 BD 에 대한 원주각이고 $\angle CAD$ 는 호 CD 에 대한 원주각이다(D 반대쪽에서 본 호). 같은 원에서 원주각의 크기가 같으면 대응 호의 길이가 같으므로 호 $BD =$ 호 CD . **3단계:** 같은 원에서 호의 길이가 같으면 현의 길이도 같으므로 $BD = CD$.

풀이 전략: 각의 이등분과 원주각 정리를 결합하면, '같은 원주각 \rightarrow 같은 호 \rightarrow 같은 현'이라는 세 단계 사슬로 결과를 끌어낼 수 있다. 직접 합동을 보이기보다 호의 길이를 거치는 것이 깔끔.

이 점 D를 '호 BC의 중점'이라 부르며, 삼각형의 외심·내심을 잇는 직선 위에 있다는 오일러의 정리와도 연결된다.

Q108 원의 성질 증명

삼각형 ABC의 내접원이 변 BC, CA, AB와 접하는 점을 각각 D, E, F라 하자. BC=a, CA=b, AB=c 일 때, 접선 길이 AF의 값을 a, b, c로 표현하시오.



- ① ① $\frac{a+b+c}{2}$
- ② ② $\frac{a+b-c}{2}$
- ③ ③ $\frac{b+c-a}{2}$
- ④ ④ $\frac{a+c-b}{2}$

정답: ③ $\frac{b+c-a}{2}$

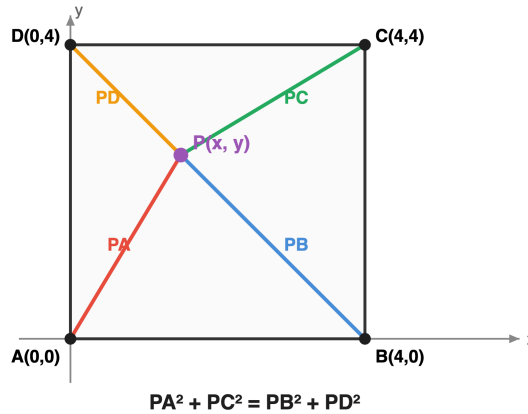
1단계: 원 밖의 한 점에서 그은 두 접선의 길이는 같으므로 $AF = AE = x$, $BF = BD = y$, $CD = CE = z$ 로 놓는다. 2단계: 변의 길이로부터 $x + y = c$ (변 AB), $y + z = a$ (변 BC), $x + z = b$ (변 CA) 라는 세 식을 얻는다. 3단계: 세 식을 모두 더하면 $2(x + y + z) = a + b + c$, $x + y + z = \frac{a+b+c}{2}$. 4단계: 양변에서 $y + z = a$ 를 빼면 $x = \frac{a+b+c}{2} - a = \frac{b+c-a}{2}$. 따라서 $AF = \frac{b+c-a}{2}$.

풀이 전략: 내접원 접선 길이는 한 점에서 그은 두 접선이 같다는 성질로 세 변수 x, y, z 를 도입하면 연립일차방정식이 된다. 둘레의 절반(반둘레) s 를 이용하면 모든 접선 길이가 깔끔하게 표현된다.

$s = \frac{a+b+c}{2}$ 를 반둘레라 부르며, $AF = s - a$, $BD = s - b$, $CE = s - c$ 로 외워두면 좋다. 또 헤론의 공식 $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ 에서도 이 양들이 등장한다.

Q109 도형 종합 추론

한 변의 길이가 4인 정사각형 ABCD가 있다. 정사각형 내부의 임의의 점 P에 대하여 항상 $PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$ 가 성립함을 좌표를 도입하여 증명하시오.



- ① ① P가 정사각형 중심에 있을 때만 성립
- ② ② 정사각형 내부 점에서만 성립하고 외부에서는 성립하지 않는다
- ③ ③ 평면 위 모든 점에서 성립한다
- ④ ④ $PA^2 + PC^2 > PB^2 + PD^2$ 이다

정답: ③ 평면 위 모든 점에서 성립한다

1단계: 좌표 A(0,0), B(4,0), C(4,4), D(0,4), P(x,y) 로 두면 $PA^2 = x^2 + y^2$, $PC^2 = (x-4)^2 + (y-4)^2$. 2단계: $PA^2 + PC^2 = x^2 + y^2 + (x-4)^2 + (y-4)^2$. 3단계: 한편 $PB^2 = (x-4)^2 + y^2$, $PD^2 = x^2 + (y-4)^2$ 이므로 $PB^2 + PD^2 = (x-4)^2 + y^2 + x^2 + (y-4)^2$. 4단계: 두 식의 항이 모두 일치하므로 $PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$ 가 P의 위치와 무관하게 항상 성립.

풀이 전략: 순수 도형 증명보다 좌표 도입으로 각 거리의 제곱을 전개하면 항이 자동으로 짝지어 같음이 드러난다. 마주 보는 두 꼭짓점 쌍 AC, BD 에 대해 거리 제곱의 합이 같다는 일반적 사실(직사각형에서도 성립).

이 성질은 '직사각형의 영국 깃발 정리(British Flag Theorem)' 라 불리며, 정사각형뿐만 아니라 모든 직사각형에서 성립한다. 영국 국기 모양으로 두 대각선 거리 합이 같음을 그릴 수 있다.

Q110 통계 심화

5개 자료 a, b, c, d, e 의 평균이 8, 분산이 4 이다. 모든 자료에 같은 수 3을 더한 새 자료 a+3, b+3, c+3, d+3, e+3 의 평균과 분산을 각각 구하시오.

- ① ① 평균 8, 분산 4
- ② ② 평균 11, 분산 4
- ③ ③ 평균 11, 분산 7
- ④ ④ 평균 11, 분산 13

정답: ② 평균 11, 분산 4

1단계: 자료의 평균은 자료 전체에 같은 값을 더하면 그만큼 이동하므로 새 평균은 $8 + 3 = 11$. 2단계: 새 자료의 편차는 $(a+3) - (m+3) = a - m$ 으로 원래 편차와 같다. 3단계: 따라서 편차제곱의 평균인 분산은 변하지 않고 그대로 4.

풀이 전략: 자료에 상수를 더하는 변환은 분포 전체를 평행이동시키므로 중심(평균)은 이동하고 흩어진 정도(분산)는 유지된다. 편차가 보존됨을 확인하는 것이 핵심.

변환 $y = ax + b$ 일 때 평균은 $ax + b$, 분산은 $a^2\sigma_x^2$ 가 된다. b는 평균만 옮기고 분산에 영향을 주지 못한다.

Q111 통계 심화

4개 자료 a, b, c, d 의 평균이 m , 분산이 σ^2 이다. 이 자료에 평균값 m 을 하나 추가하여 5개 자료 a, b, c, d, m 으로 만들었을 때, 새로운 자료의 평균과 분산을 각각 구하시오.

- ① ① 평균 m , 분산 σ^2
- ② ② 평균 m , 분산 $\frac{4}{5}\sigma^2$
- ③ ③ 평균 m , 분산 $\frac{5}{4}\sigma^2$
- ④ ④ 평균 $\frac{4m}{5}$, 분산 σ^2

정답: ② 평균 m , 분산 $\frac{4}{5}\sigma^2$

1단계: 4개 자료의 합은 $a + b + c + d = 4m$ 이므로 새 자료 5개의 합은 $4m + m = 5m$, 새 평균은 $\frac{5m}{5} = m$ (변화 없음). **2단계:** 분산 정의에 따라 원래 편차제곱의 합은 $(a - m)^2 + (b - m)^2 + (c - m)^2 + (d - m)^2 = 4\sigma^2$. **3단계:** 추가된 자료 m 은 평균과 같아 편차가 0 이므로 새 편차제곱의 합 = $4\sigma^2 + 0 = 4\sigma^2$. **4단계:** 자료 개수가 5로 늘었으므로 새 분산 = $\frac{4\sigma^2}{5} = \frac{4}{5}\sigma^2$.

풀이 전략: 평균과 같은 값을 추가하는 것은 평균은 유지하면서 자료 개수만 늘리는 효과다. 편차제곱의 총합은 그대로지만 나누는 분모가 커지므로 분산은 줄어든다.

💡 평균에 가까운 값을 추가할수록 분산이 감소하고, 평균에서 멀리 떨어진 값을 추가할수록 분산이 증가한다. 일반화하면 추가값 v 에 대해 새 분산 = $\frac{4\sigma^2 + (v - m_{new})^2 \cdot \text{개수}}{5}$.

Q112 경시 퍼즐·확률

주머니 안에 빨간 공 3개와 파란 공 5개가 들어 있다. 한 번에 한 개씩 비복원으로 두 개의 공을 차례로 꺼낼 때, 두 번째에 꺼낸 공이 빨간 공일 확률을 구하시오.

- ① ① $\frac{1}{8}$
- ② ② $\frac{1}{4}$
- ③ ③ $\frac{3}{8}$
- ④ ④ $\frac{1}{2}$

정답: ③ $\frac{3}{8}$

1단계: 첫 번째 공의 색에 따라 경우를 나눈다. 경우 1: 첫 번째가 빨강 → 확률 $\frac{3}{8}$. 이때 남은 공은 빨강 2, 파랑 5 이므로 두 번째가 빨강일 조건부 확률은 $\frac{2}{7}$. **2단계:** 경우 2: 첫 번째가 파랑 → 확률 $\frac{5}{8}$. 이때 남은 공은 빨강 3, 파랑 4 이므로 두 번째가 빨강일 조건부 확률은 $\frac{3}{7}$. **3단계:** 전체 확률 = $\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} + \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{6}{56} + \frac{15}{56} = \frac{21}{56} = \frac{3}{8}$. **4단계:** 결과는 첫 번째 시행 없이 그냥 한 개를 꺼낼 확률 $\frac{3}{8}$ 과 같다.

풀이 전략: 비복원 추출에서도 1번째 시행에서 특정 색이 나올 확률은 첫 번째 시행에서 나올 확률과 같다. 이는 모든 자리의 공을 동등하게 다루는 대칭성에서 비롯된다. 직접 경우 분할로 계산해 본 뒤 그 의미를 음미.

💡 이 결과는 카드 게임의 '대칭성 원리' 의 한 예시다. n 장의 카드를 무작위로 섞었을 때 어떤 자리에 특정 카드가 올 확률은 그 자리와 무관하게 항상 $\frac{1}{n}$ 이다. 이를 해석학에서는 '교환 가능성(exchangeability)' 이라 한다.

Q113 실수·근호 추론

$\sqrt{50}$ 의 정수 부분을 a , 소수 부분을 b 라 할 때, $\frac{1}{b} - a$ 의 값을 구하시오.

- ① ① $5\sqrt{2}$
- ② ② $5\sqrt{2} - 7$
- ③ ③ $\sqrt{2}$
- ④ ④ $5\sqrt{2} + 7$

☞ 정답: ① $5\sqrt{2}$

📖 1단계: $\sqrt{50} = 5\sqrt{2} \approx 7.07$ 이므로 정수 부분 $a = 7$ 이다.

2단계: 소수 부분은 $b = 5\sqrt{2} - 7$ 이다.

3단계: 분모를 유리화하면 $\frac{1}{b} = \frac{1}{5\sqrt{2} - 7} = \frac{5\sqrt{2} + 7}{(5\sqrt{2})^2 - 7^2} = \frac{5\sqrt{2} + 7}{50 - 49} = 5\sqrt{2} + 7$.

4단계: 따라서 $\frac{1}{b} - a = (5\sqrt{2} + 7) - 7 = 5\sqrt{2}$.

🧠 풀이 전략: 무리수를 정수부와 소수부로 분리한 뒤, $1/b$ 계산에서 분모의 꼴레식을 곱하여 유리화한다. 두 식의 차에서 정수항이 상쇄 되도록 설계된 문제임을 인지한다.

💡 $5\sqrt{2}$ 는 한 변의 길이가 5인 정사각형의 대각선 길이와 같다.

Q114 실수·근호 추론

$\sqrt{2} + \sqrt{3}$ 이 무리수임을 귀류법으로 증명하려고 한다. 다음 중 모순을 이끌어내는 핵심 식으로 가장 적절한 것은?

- ① ① $\sqrt{2} + \sqrt{3} = r$ 이라 하면 $\sqrt{6} = \frac{r^2 - 5}{2}$ 인데 좌변은 무리수, 우변은 유리수이므로 모순
- ② ② $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{6}$ 이고 $5 + 2\sqrt{6}$ 이 무리수이므로 모순
- ③ ③ $\sqrt{2} + \sqrt{3} > 3$ 이므로 자연수가 될 수 없어 모순
- ④ ④ $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \frac{p}{q}$ 이면 p 와 q 가 모두 짝수가 되어 모순

☞ 정답: ① $\sqrt{2} + \sqrt{3} = r$ 이라 하면 $\sqrt{6} = \frac{r^2 - 5}{2}$ 인데 좌변은 무리수, 우변은 유리수이므로 모순

📖 1단계: $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ 이 유리수라 가정하고 그 값을 r 로 둔다.

2단계: 양변을 제곱하면 $2 + 2\sqrt{6} + 3 = r^2$, 즉 $5 + 2\sqrt{6} = r^2$.

3단계: 이항하여 정리하면 $\sqrt{6} = \frac{r^2 - 5}{2}$. 우변은 유리수의 사칙연산으로 만들어지므로 유리수.

4단계: 그러나 $\sqrt{6}$ 은 무리수임이 알려져 있다(소인수 2와 3의 지수가 홀수). 가정과 모순. 따라서 $\sqrt{6}$ 은 유리수가 아니라는 사실에 의해 $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ 도 유리수일 수 없으므로 무리수이다.

🧠 풀이 전략: 단순히 무리수의 합이 무리수임을 직관으로 주장할 수 없다. 가정-제곱-이항으로 잘 알려진 무리수($\sqrt{6}$)의 유리수 표현을 만든 뒤, 그 모순을 활용하는 표준적 귀류법 전략을 적용한다.

💡 $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ 은 정수계수 다항식 $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$ 의 한 근으로, 이런 수를 '대수적 무리수'라고 한다.

Q115 인수분해 심화

다항식 $x^4 + 4y^4$ 를 두 이차식의 곱으로 인수분해하시오.

- ① ① $(x^2 + 2y^2)(x^2 - 2y^2)$
- ② ② $(x^2 + 2xy + 2y^2)(x^2 - 2xy + 2y^2)$
- ③ ③ $(x + y)^2(x - y)^2$
- ④ ④ $(x^2 + 2y)(x^2 - 2y)$

정답: ② $(x^2 + 2xy + 2y^2)(x^2 - 2xy + 2y^2)$

1단계: 단순 합 의 형태로는 직접 인수분해되지 않으므로 $4x^2y^2$ 를 더하고 빼는 변형을 시도.

$$x^4 + 4y^4 = (x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4) - 4x^2y^2.$$

2단계: 앞부분이 완전제곱식이 됨: $x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4 = (x^2 + 2y^2)^2$.

3단계: 식 전체는 $(x^2 + 2y^2)^2 - (2xy)^2$ 꼴로 곱의 차가 됨.

4단계: $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$ 적용: $(x^2 + 2y^2 + 2xy)(x^2 + 2y^2 - 2xy) = (x^2 + 2xy + 2y^2)(x^2 - 2xy + 2y^2)$.

풀이 전략: 단순 합 $A^4 + B^4$ 꼴은 인수분해되지 않는 듯 보이지만, 적절한 항을 더하고 빼서 완전제곱-단항제곱 차이로 만드는 '인위적 변형'이 핵심 기법이다.

이 항등식은 19세기 프랑스 수학자 소피 제르맹(Sophie Germain)이 페르마의 마지막 정리 연구에서 활용한 것으로 유명하다.

Q116 인수분해 심화

$x = \frac{1}{\sqrt{5} - 2}$, $y = \frac{1}{\sqrt{5} + 2}$ 일 때, $x^2 + y^2$ 의 값을 구하시오.

- ① ① 16
- ② ② 18
- ③ ③ 19
- ④ ④ 20

정답: ② 18

1단계: 분모를 유리화한다. $x = \frac{\sqrt{5} + 2}{(\sqrt{5})^2 - 2^2} = \sqrt{5} + 2$, $y = \sqrt{5} - 2$.

2단계: 두 식의 합과 곱을 구한다. $x + y = 2\sqrt{5}$, $xy = (\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2) = 5 - 4 = 1$.

3단계: 대칭식 변형 공식 $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$ 사용.

4단계: $(2\sqrt{5})^2 - 2(1) = 20 - 2 = 18$.

풀이 전략: x, y 를 직접 제공하지 말고 분모 유리화로 단순화한 뒤, 합과 곱을 구해 대칭식 변형 공식을 적용하는 것이 효율적이다.

결례 무리수 쌍($\sqrt{a} \pm a$)은 합과 곱이 모두 유리수가 되어 식의 값 계산에 자주 쓰인다.

Q117 이차방정식 활용

두 이차방정식 $x^2 - (k + 1)x + k = 0$ 과 $x^2 + (k - 2)x - 2k = 0$ 이 적어도 하나의 공통근을 가질 때, 이러한 모든 실수 k 의 값의 합을 구하시오.

- ① ① 0
- ② ② 1
- ③ ③ 2
- ④ ④ 3

정답: ② 1

1단계: 첫 식을 인수분해하면 $(x - 1)(x - k) = 0$ 이므로 근은 $x = 1$ 또는 $x = k$.

2단계: 둘째 식을 인수분해하면 $(x - 2)(x + k) = 0$ 이므로 근은 $x = 2$ 또는 $x = -k$.

3단계: 공통근이 될 수 있는 경우를 모두 나열한다.

(i) $1 = 2$: 불가능.

(ii) $1 = -k \rightarrow k = -1$.

(iii) $k = 2$.

(iv) $k = -k \rightarrow k = 0$.

4단계: 각 k 값을 대입해 실제로 공통근이 존재함을 확인한다 ($k = -1$: 공통근 1; $k = 2$: 공통근 2; $k = 0$: 공통근 0). 합은

$-1 + 2 + 0 = 1$.

풀이 전략: 두 이차식을 인수분해해 근을 구체화한 뒤, 양쪽 근들의 모든 짝맞춤을 케이스로 나열한다. 각 케이스에서 얻은 k 값을 검증해야 누락이나 중복을 막을 수 있다.

💡 두 다항식의 공통근은 두 다항식의 최대공약수(GCD)에 해당한다. 이는 고등 대수의 종결식(resultant) 개념으로 일반화된다.

Q118 이차방정식 활용

이차방정식 $x^2 - (k + 1)x + (k - 2) = 0$ 이 두 정수해를 가지도록 하는 가장 작은 자연수 k 의 값을 구하시오.

- ① ① 1
- ② ② 2
- ③ ③ 3
- ④ ④ 4

정답: ② 2

1단계: 정수해가 존재하려면 판별식 $D = (k + 1)^2 - 4(k - 2) = k^2 - 2k + 9$ 가 완전제곱수여야 한다.

2단계: $D = (k - 1)^2 + 8$ 이므로 $(k - 1)^2 + 8 = m^2$ ($m \geq 0$ 정수)로 놓으면 $m^2 - (k - 1)^2 = 8$, 즉 $(m - k + 1)(m + k - 1) = 8$.

3단계: 두 인수의 합 $2m$ 이 짝수이므로 두 인수는 같은 우기성. 8의 같은 우기성 짝: (2, 4). 따라서 $m - k + 1 = 2, m + k - 1 = 4 \rightarrow m = 3, k = 2$.

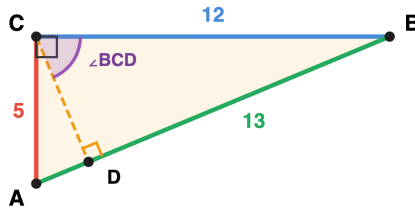
4단계: $k = 2$ 일 때 $x^2 - 3x + 0 = 0, x(x - 3) = 0$ 이므로 $x = 0$ 또는 $x = 3$. 두 정수해 확인. $k = 1$ 일 때 $D = 8$ 로 완전제곱이 아니므로 부적합. 따라서 가장 작은 자연수 $k = 2$.

풀이 전략: 정수해 조건을 판별식이 완전제곱이라는 조건으로 환원한 뒤, D 를 완전제곱식 + 상수 꼴로 변형해 두 제곱수의 차가 8이 되는 정수해를 찾는다.

💡 $k = 2$ 일 때 한 근이 0이라는 사실은 상수항이 0인 것과 동치이며, 자연스럽게 인수 x 가 떨어진다.

Q119 삼각비 심화

직각삼각형 ABC 에서 $\angle C = 90^\circ$, $BC = 12$, $CA = 5$ 이다. 점 D 는 빗변 AB 위에 있고 $CD \perp AB$ 일 때, $\sin(\angle BCD)$ 의 값을 구하시오.



- ① ① $\frac{5}{13}$
- ② ② $\frac{12}{13}$
- ③ ③ $\frac{5}{12}$
- ④ ④ $\frac{12}{5}$

정답: ② $\frac{12}{13}$

1단계: 피타고라스 정리로 $AB = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13$.

2단계: 삼각형 BCD 에서 $\angle BDC = 90^\circ$ 이고 $\angle DBC = \angle ABC$ (공통각)이므로 $\triangle BCD \sim \triangle BAC$ (AA 닮음).

3단계: 닮음에 의해 대응각이 같다. $\angle BCD$ 는 작은 삼각형 BCD 에서 $\angle B$ 의 대각이고, 이는 큰 삼각형 BAC 의 $\angle A$ 에 대응한다. 즉 $\angle BCD = \angle BAC$.

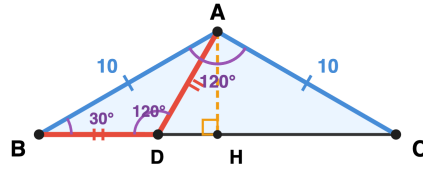
4단계: $\sin(\angle BAC) = \frac{BC}{AB} = \frac{12}{13}$ 이므로 $\sin(\angle BCD) = \frac{12}{13}$.

풀이 전략: 빗변 위의 수선이 만든 작은 삼각형이 원래 삼각형과 닮음을 인식하면 각의 사인 값을 변의 비로 즉시 환산할 수 있다.

직각삼각형의 빗변에 수선을 그으면 세 개의 닮은 직각삼각형이 만들어지고, 이로부터 ' $h^2 = pq$ ' 등의 빗변 분할 공식이 유도된다.

Q120 삼각비 심화

이등변삼각형 ABC 에서 $AB = AC = 10$ 이고 $\angle BAC = 120^\circ$ 이다. 변 BC 위의 점 D 가 $AD = BD$ 를 만족할 때, AD 의 길이를 구하시오.



- ① ① $\frac{10\sqrt{3}}{3}$
- ② ② $\frac{10}{3}$
- ③ ③ $5\sqrt{3}$
- ④ ④ $\frac{20\sqrt{3}}{3}$

☞ 정답: ① $\frac{10\sqrt{3}}{3}$

📖 1단계: $AB = AC$ 이고 $\angle A = 120^\circ$ 이므로 밑각 $\angle ABC = \angle ACB = 30^\circ$.

2단계: D 가 BC 위에 있고 $AD = BD$ 이므로 삼각형 ABD 는 이등변. 같은 변에 대응하는 두 밑각이 같으므로 $\angle DAB = \angle DBA = 30^\circ$. 따라서 $\angle ADB = 180^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 120^\circ$.

3단계: A 에서 BC 에 수선 AH 를 내리면 직각삼각형 ABH 에서 $\angle ABH = 30^\circ$, $AB = 10$ 이므로 $AH = 10\sin 30^\circ = 5$.

4단계: $\angle ADB = 120^\circ$ 이므로 그 보각 $\angle ADH = 60^\circ$. 직각삼각형 ADH 에서 $\sin 60^\circ = \frac{AH}{AD}$, 따라서

$$AD = \frac{5}{\sin 60^\circ} = \frac{5}{\sqrt{3}/2} = \frac{10}{\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{3}.$$

🧠 풀이 전략: 이등변 조건이 주는 각의 정보를 단계적으로 추출한다. 큰 삼각형의 각을 결정한 뒤, 부분 삼각형이 이등변이라는 사실에서 새로운 각을 유도하고, 끝으로 수선과 삼각비로 길이를 계산한다.

💡 꼭각이 120° 인 이등변삼각형의 밑변과 다리의 비는 $\sqrt{3} : 1$ 로 항상 일정하다.

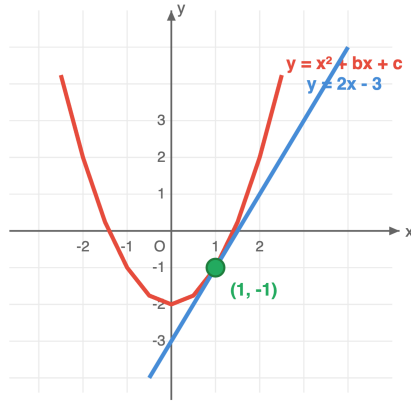


중3 수학 심화

총 40문제 · 문제와 정답·풀이 포함

Q121 이차함수 심화

이차함수 $y = x^2 + bx + c$ 의 그래프가 직선 $y = 2x - 3$ 과 점 $(1, -1)$ 에서 접한다. $b + c$ 의 값을 구하시오.



- ① ① -3
- ② ② -2
- ③ ③ -1
- ④ ④ 0

📌 정답: ② -2

📖 1단계: 두 그래프가 점 $(1, -1)$ 을 지나므로 포물선에 대입: $1 + b + c = -1$, 즉 $b + c = -2$ (*).

2단계: 두 그래프가 접한다는 것은 두 식을 연립한 방정식 $x^2 + bx + c = 2x - 3$, 즉 $x^2 + (b - 2)x + (c + 3) = 0$ 이 중근을 가진다는 뜻이다.

3단계: 그 중근이 $x = 1$ 이므로 두 근의 합과 곱 관계에서 $-(b - 2) = 1 + 1 = 2 \rightarrow b = 0, c + 3 = 1 \cdot 1 = 1 \rightarrow c = -2$.

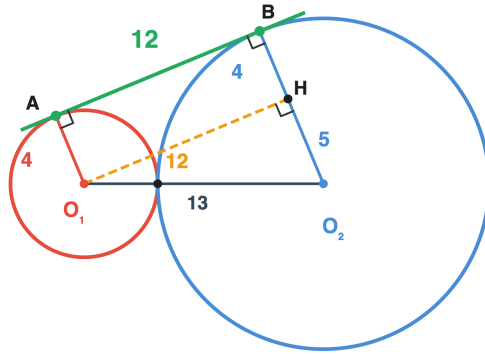
4단계: 따라서 $b + c = 0 + (-2) = -2$. (*)와도 일치하므로 검산 완료.

🧠 풀이 전략: 접한다는 기하적 조건을 '연립 후 중근'이라는 대수적 조건으로 변환한 뒤, 중근의 합과 곱으로 두 미정계수를 동시에 결정한다. 점을 지난다는 조건과 접한다는 조건이 모순 없이 양립함을 검산한다.

💡 이차함수가 직선과 한 점에서 접하면 그 직선은 이차함수의 접선이 된다. 고등학교에서 미분으로 다시 만나게 되는 개념이다.

Q122 원의 성질 증명

두 원 O_1, O_2 가 서로 외접한다. 두 원의 반지름이 각각 4와 9일 때, 두 원의 공통외접선이 두 원과 닿는 두 점 사이의 거리(공통외접선의 길이)를 구하시오.



- ① ① 11
- ② ② 12
- ③ ③ 13
- ④ ④ 14

정답: ② 12

1단계: 두 원이 외접하므로 중심거리 $O_1O_2 = 4 + 9 = 13$.

2단계: 공통외접선이 원에 접하는 점을 A (작은 원), B (큰 원)이라 하면 접선과 반지름의 수직 관계에서 $O_1A \perp AB$, $O_2B \perp AB$.

3단계: 사각형 O_1ABO_2 는 두 직각을 가진 사다리꼴. O_1 에서 O_2B 에 수선 O_1H 를 내리면 사각형 O_1AHB 가 직사각형이 되어

$BH = O_1A = 4$. 따라서 $O_2H = O_2B - BH = 9 - 4 = 5$.

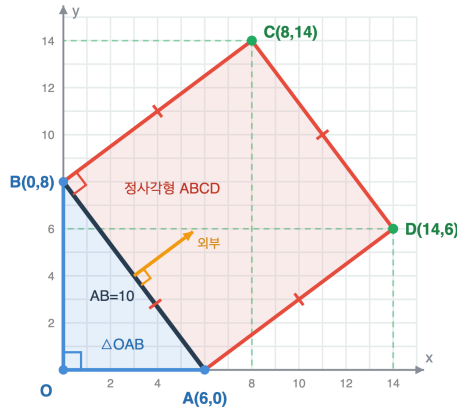
4단계: 직각삼각형 O_1HO_2 에서 피타고라스 정리: $O_1H = \sqrt{O_1O_2^2 - O_2H^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12$. 그런데 $O_1H = AB$ 이므로 공통외접선 길이는 12.

풀이 전략: 공통외접선과 두 반지름이 만드는 사다리꼴을 직사각형과 직각삼각형으로 분할하는 표준 기법이다. 평행이동(수선 내리기)으로 직각삼각형을 구성한 뒤 피타고라스 정리를 적용한다.

외접하는 두 원의 공통외접선 길이는 일반식으로 $2\sqrt{r_1r_2}$ 로 표현되며, 이 문제에서 $2\sqrt{36} = 12$ 로 일치함을 확인할 수 있다.

Q123 도형 종합 추론

좌표평면에서 직각삼각형 OAB (O 는 원점, $A(6, 0)$, $B(0, 8)$)의 빗변 AB 를 한 변으로 하고 삼각형의 반대편(원점에서 먼 쪽)에 정사각형 $ABCD$ 를 그린다. 이때 두 점 C, D 의 좌표 성분의 총합 $C_x + C_y + D_x + D_y$ 의 값을 구하시오.



- ① ① 38
- ② ② 40
- ③ ③ 42
- ④ ④ 44

정답: ③ 42

1단계: 빗변 길이 $AB = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$. 따라서 정사각형의 한 변도 10.

2단계: 벡터 $\vec{AB} = B - A = (-6, 8)$. 정사각형의 다음 변 \vec{BC} 는 \vec{AB} 에 수직이고 같은 길이. 90° 시계방향 회전: $(x, y) \rightarrow (y, -x)$ 적용하면 $\vec{BC} = (8, 6)$. 이 방향은 원점 반대편을 가리킨다(빗변 중점 $(3, 4)$ 에 더해 $(11, 10)$ 이 되어 원점에서 멀어짐).

3단계: 정사각형의 꼭짓점 결정: $C = B + \vec{BC} = (0, 8) + (8, 6) = (8, 14)$, $D = A + \vec{BC} = (6, 0) + (8, 6) = (14, 6)$.

4단계: 좌표 성분의 총합: $8 + 14 + 14 + 6 = 42$.

풀이 전략: 빗변을 벡터로 표현한 뒤 90° 회전(수직 벡터 생성)으로 정사각형의 다음 변 방향을 만든다. 두 회전 방향 중 외부 방향을 빗변 중점과 원점의 위치 관계로 식별한다.

직각삼각형의 세 변에 외접 정사각형을 그리면 빗변 위 정사각형의 넓이(AB^2)가 두 직각변 위 정사각형 넓이의 합($OA^2 + OB^2$)과 같아진다 - 피타고라스 정리의 시각적 증명이다.

Q124 경시 퍼즐·확률

4명의 학생 A, B, C, D가 각자 자신의 편지를 한 통씩 썼다. 이 4통을 무작위로 4명에게 한 통씩 나누어 줄 때, 정확히 한 명만 자기 가 쓴 편지를 받게 될 확률을 구하시오.

- ① ① $\frac{1}{4}$
- ② ② $\frac{1}{3}$
- ③ ③ $\frac{3}{8}$
- ④ ④ $\frac{11}{24}$

정답: ② $\frac{1}{3}$

1단계: 4통의 편지를 4명에게 분배하는 전체 경우의 수는 $4! = 24$.

2단계: '정확히 한 명만 자신의 편지'를 받는 경우 = (자신의 편지를 받는 사람 1명을 고르는 방법) × (나머지 3명은 모두 자기 것이 아닌 편지를 받는 배치 수).

3단계: 자신의 편지를 받는 사람 선택은 4가지. 나머지 3명이 모두 자기 편지가 아닌 편지를 받는 배치(완전순열) 수 $D_3 = 2$ (구체적으로 $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ 사이클과 $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ 사이클).

4단계: 유리한 경우의 수는 $4 \times 2 = 8$. 따라서 확률은 $\frac{8}{24} = \frac{1}{3}$.

풀이 전략: '정확히 1명' 조건을 '한 명을 고정 + 나머지는 자기 것을 받지 않음'으로 분해한다. 후자는 작은 완전순열 문제로 환원되어 직접 나열로 셀 수 있다.

n개 물건을 자기 자리에 가지 않게 배치하는 경우의 수를 완전순열(derangement)이라 하고 D_n 으로 쓰며, n이 커질수록 $\frac{n!}{e}$ 에 가까워진다 ($e \approx 2.718$).

Q125 실수·근호 추론

$\sqrt{3}$ 이 무리수임을 귀류법으로 증명하려고 한다. ' $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$ (p, q는 서로소인 양의 정수)'로 가정하고 양변을 제곱하여 $3q^2 = p^2$ 을 얻었다. 이 단계 이후 모순을 이끌어내는 가장 핵심적인 추론은?

- ① ① p^2 이 짝수이므로 p가 짝수이고, q^2 도 짝수이므로 q도 짝수가 되어 서로소 가정에 모순
- ② ② $p^2 = 3q^2$ 이므로 p^2 이 3의 배수이고, 따라서 p도 3의 배수가 된다. 이를 다시 식에 대입하면 q^2 도 3의 배수가 되어 q도 3의 배수가 되므로, p와 q가 서로소라는 가정에 모순
- ③ ③ $p^2 > q^2$ 이므로 $p > q$ 이고, 이로부터 p와 q는 서로 같을 수 없다
- ④ ④ $3q^2$ 이 9의 배수이므로 p가 9의 배수가 되어 p와 q의 비가 정수임을 얻는다

정답: ②

1단계: $3q^2 = p^2$ 에서 우변 p^2 이 3의 배수임을 안다. 소수 3에 대해 ' p^2 이 3의 배수이면 p도 3의 배수'(소인수 분해의 유일성)이므로 $p = 3k$ 로 둘 수 있다.

2단계: $p = 3k$ 를 대입하면 $3q^2 = 9k^2$, 즉 $q^2 = 3k^2$. 같은 논리로 q도 3의 배수가 된다.

3단계: 이는 p, q가 모두 3을 공약수로 가지므로 '서로소'라는 처음 가정에 정면으로 모순. 따라서 가정이 거짓이며, $\sqrt{3}$ 은 유리수가 아니다.

①은 2의 배수 논리이므로 $\sqrt{2}$ 의 무리수 증명에 쓰는 논거이다. ③④는 모순을 이끌어내는 핵심이 아니다.

풀이 전략: 귀류법은 '결론을 부정하고 모순 도출'이 본질. 핵심은 (1) 좌변 형태에서 어떤 소수의 배수성을 얻고, (2) 같은 배수성이 분자와 분모에 동시에 강제되어 (3) 서로소 가정과 부딪히게 만드는 흐름. 소수 자체가 3이라는 점에 주목해야 한다.

이 증명 방식은 일반적으로 '소수 p에 대해 \sqrt{p} 는 무리수'임을 똑같은 논리로 증명할 수 있다.

Q126 실수·근호 추론

$\sqrt{10}$ 의 정수부분을 m , 소수부분을 a 라 할 때, $a^2 + 6a$ 의 값을 구하시오.

- ① ① -1
- ② ② 0
- ③ ③ 1
- ④ ④ 2

정답: ③

1단계: $9 < 10 < 16$ 이므로 $3 < \sqrt{10} < 4$, 따라서 $m=3$ 이고 $a = \sqrt{10} - 3$.

2단계: $a^2 = (\sqrt{10} - 3)^2 = 10 - 6\sqrt{10} + 9 = 19 - 6\sqrt{10}$, 그리고 $6a = 6\sqrt{10} - 18$.

3단계: 두 식을 더하면 $a^2 + 6a = (19 - 6\sqrt{10}) + (6\sqrt{10} - 18) = 1$. 무리수 항 $6\sqrt{10}$ 이 정확히 상쇄되도록 식이 설계되어 있다.

다른 풀이: a 가 $x^2 + 6x - 1 = 0$ 의 근이 되도록 식을 설계했음을 알 수 있다. 즉 $a = \sqrt{10} - 3$ 이면 $(a + 3)^2 = 10$, $a^2 + 6a + 9 = 10$, $a^2 + 6a = 1$.

풀이 전략: 소수부분 문제의 표준 전략: 소수부분 a 를 직접 계산식에 대입하지 말고, $a = \sqrt{N} - m$ 의 형태에서 $a + m = \sqrt{N}$, $(a + m)^2 = N$ 이라는 일차/이차 항등식을 추출한다. 그 항등식의 양변을 적당히 변형해 구해야 하는 식과 같게 만든다. 이러면 무리수항이 자연스럽게 사라진다.

이 접근은 고등수학의 '근의 최소다항식'과 같은 발상이다.

Q127 인수분해 심화

$x^4 + x^2 + 1$ 을 인수분해한 결과로 옳은 것은?

- ① ① $(x^2 + 1)^2$
- ② ② $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$
- ③ ③ $(x^2 + x - 1)(x^2 - x - 1)$
- ④ ④ $(x + 1)^2(x - 1)^2$

정답: ②

1단계: 가운데 항을 분리한다. $x^4 + x^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2$.

2단계: 합과 차의 곱 공식 $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$ 를 $A = x^2 + 1$, $B = x$ 로 적용:

$(x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 + 1 + x)(x^2 + 1 - x) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$.

3단계: 검증. $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$ 를 전개하면 $x^4 - x^3 + x^2 + x^3 - x^2 + x + x^2 - x + 1 = x^4 + x^2 + 1$. ✓

오답 ①은 $(x^2 + 1)^2 = x^4 + 2x^2 + 1$ 이라 다름. ④는 $(x^2 - 1)^2 = x^4 - 2x^2 + 1$ 이라 다름.

풀이 전략: 표준 공식이 직접 적용되지 않는 사차식은 '+ x^2 '를 더하고 빼서 완전제곱-제곱 차'를 만드는 기법(보조항 추가)이 핵심. 자주 등장하는 형태: $x^4 + x^2 + 1$, $x^4 + 4$, $x^4 + x^2y^2 + y^4$ 등.

$x^6 - 1 = (x^3 - 1)(x^3 + 1) = (x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)$ 인데, 이를 $x^6 - 1 = (x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1)$ 로도 쓸 수 있다는 사실에서 자연스럽게 이 인수분해가 등장한다.

Q128 인수분해 심화

세 실수 a, b, c 가 $a + b + c = 0$ 을 만족할 때, $a^3 + b^3 + c^3$ 을 abc 만으로 나타내면?

- ① ① abc
- ② ② $2abc$
- ③ ③ $3abc$
- ④ ④ $-3abc$

정답: ③

1단계: 항등식 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$ 를 이용한다. 이는 인수분해 단원의 핵심 항등식.

2단계: 조건 $a + b + c = 0$ 을 대입하면 우변 전체가 0이 되어 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$.

3단계: 따라서 $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

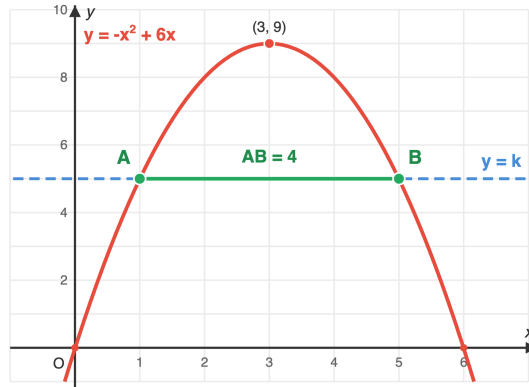
검산: $a = 1, b = 1, c = -2$ 로 놓으면 $a + b + c = 0$ 이고, 좌변 $1 + 1 - 8 = -6$, 우변 $3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-2) = -6$. ✓

풀이 전략: 세 변수 합이 0인 조건을 보면 즉시 항등식 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(...)$ 를 떠올리는 것이 정석. 이 항등식은 행렬식이나 대칭다항식 이론에도 등장하는 중요한 결과로, '세 변수 합이 0이면 세제곱의 합은 곱의 3배'라는 강력한 도구가 된다.

이 결과는 $1^3 + 2^3 + (-3)^3 = 1 + 8 - 27 = -18 = 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot (-3)$ 처럼 정수해 검산이 쉬워 경시문제에서 단골로 출제된다.

Q129 이차함수 심화

이차함수 $y = -x^2 + 6x$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 가 서로 다른 두 점 A, B에서 만난다. 선분 AB의 길이가 4일 때, 상수 k의 값을 구하시오.



- ① ① 3
- ② ② 4
- ③ ③ 5
- ④ ④ 8

정답: ③

1단계: 교점의 x좌표는 $-x^2 + 6x = k$, 즉 $x^2 - 6x + k = 0$ 의 두 근 x_1, x_2 이다. 근과 계수의 관계로 $x_1 + x_2 = 6$, $x_1x_2 = k$.

2단계: 두 교점은 같은 y좌표(=k)이므로 선분 AB는 수평이고, $AB = |x_1 - x_2|$ 이다. 한편

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 36 - 4k.$$

3단계: $|x_1 - x_2| = 4$ 이므로 $36 - 4k = 16$, $k = 5$. 검산: $x^2 - 6x + 5 = (x - 1)(x - 5) = 0$ 이므로 교점 (1,5), (5,5), 두 점 사이 거리 4. ✓

또한 서로 다른 두 점에서 만나려면 $36 - 4k > 0$, 즉 $k < 9$. $k=5$ 는 만족.

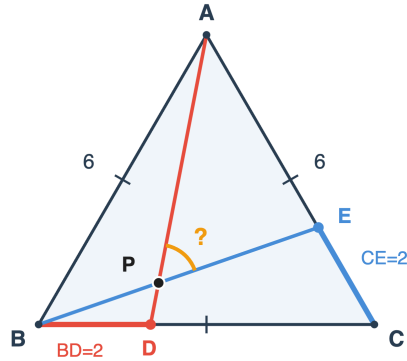
풀이 전략: 포물선과 수평선의 교점은 같은 y좌표를 갖는다는 점에서 거리= $|x_1 - x_2|$ 로 단순화된다. 이를 근과 계수의 관계로 옮겨 $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$ 라는 표준 변형을 적용하는 것이 정석. 이차함수와 직선 교점 문제는 항상 '판별식 부호'와 '두 근의 변형식'이 핵심.

💡 이 문제는 사실 꼭짓점 (3,9)에서 수직거리 $9-k=4$ 만큼 내려간 곳에서 폭이 4인 점을 찾는 것과 같다.

$y = -x^2 + 6x = -(x - 3)^2 + 9$ 로 변형해 폭=4는 좌우 2씩이라 보아도 답이 나온다.

Q130 원의 성질 증명

한 변의 길이가 6인 정삼각형 ABC의 변 BC, CA 위에 각각 점 D, E를 잡되 $BD=CE=2$ 가 되게 한다. 선분 AD와 BE가 만나는 점을 P라 할 때, $\angle APE$ 의 크기를 구하시오. (단, 카테고리는 도형 종합 추론에 해당하지만 회전 합동을 이용한 각 추론 문제다.)



- ① ① 60°
- ② ② 90°
- ③ ③ 120°
- ④ ④ 150°

정답: ①

1단계: $\triangle ABD$ 와 $\triangle BCE$ 를 비교. $AB=BC=6$ (정삼각형 변), $BD=CE=2$ (가정), $\angle ABD=\angle BCE=60^\circ$ (정삼각형 내각). SAS에 의해 $\triangle ABD \cong \triangle BCE$.

2단계: 합동으로부터 $\angle BAD=\angle CBE$. 이 두 각의 크기를 α 라 하자.

3단계: 점 P는 AD와 BE의 교점. $\triangle APB$ 의 한 외각이 $\angle APE$ 이며, 외각정리에 의해 $\angle APE=\angle PAB+\angle PBA$. 그런데 $\angle PAB=\angle DAB=\alpha$ 이고, $\angle PBA=\angle EBA=\angle ABC-\angle EBC=60^\circ-\alpha$. 따라서 $\angle APE = \alpha + (60^\circ - \alpha) = 60^\circ$.

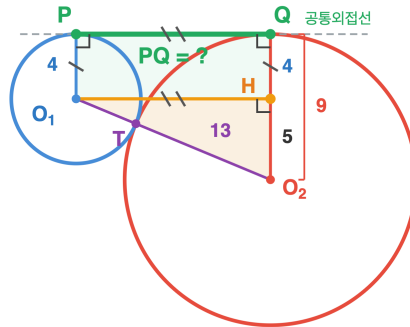
핵심: α 값과 무관하게 항상 60° 이다 (즉 $BD=CE$ 라는 조건만 있으면 위치에 관계없이 성립).

풀이 전략: 정삼각형 위 $BD=CE$ 같은 회전 대칭 조건을 보면, 회전 합동(SAS)을 떠올리는 것이 첫걸음. 두 직선 AD, BE의 교점에서 만들어지는 각을 $\triangle APB$ 의 외각으로 보고 '두 내각의 합' 정리를 쓰면 합동의 부산물($\angle BAD=\angle CBE$)이 깔끔하게 상쇄되어 60° 가 남는다. 일반화: 정n각형에서 같은 패턴을 만들면 그 각이 $\angle ABC$ 와 같다.

이 결과는 정삼각형의 60° 회전 대칭이라는 본질을 보여주는 대표적 경시 문제로, 정사각형(90°)·정육각형(120°) 등으로 일반화된다.

Q131 원의 성질 증명

두 원 O_1, O_2 의 반지름이 각각 4와 9이고 두 원이 외접한다. 두 원 모두에 접하는 공통외접선이 두 원과 각각 점 P, Q에서 접한다고 할 때, 선분 PQ의 길이를 구하시오.



- ① ① 6
- ② ② 10
- ③ ③ 12
- ④ ④ 15

정답: ③

1단계: 두 원이 외접하므로 중심거리 $O_1O_2 = 4 + 9 = 13$.

2단계: 접선의 성질에서 $O_1P \perp PQ, O_2Q \perp PQ$ 이므로 $O_1P \parallel O_2Q$. 사각형 O_1PQO_2 는 PQ를 한 평행변으로 하는 직각사다리꼴.

3단계: O_1 에서 O_2Q 에 내린 수선의 발을 H라 하면 $O_1H = PQ$ 이고 $HQ = O_1P = 4$, 따라서 $O_2H = O_2Q - HQ = 9 - 4 = 5$.

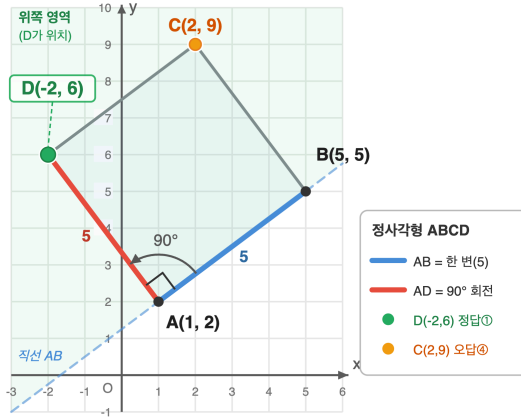
4단계: 직각삼각형 O_1HO_2 에 피타고라스를 적용. $O_1H^2 + O_2H^2 = O_1O_2^2, PQ^2 + 25 = 169, PQ^2 = 144, PQ=12$.

풀이 전략: 공통외접선 길이 공식 $\sqrt{d^2 - (R - r)^2}$ 의 유도가 곧 이 풀이. 두 접점에 반지름을 그리면 둘이 평행하고, 한 반지름의 끝에 서 다른 반지름에 수선을 내려 직각삼각형을 만드는 게 정석. 외접 조건에서 $d=R+r$ 이라는 점도 함께 처리해야 한다. 만약 두 원이 떨어져 있다면 d만 바뀌면 되고, 내접하면 $d=|R-r|$ 이라 외접선이 한 점에서 만나는 한계 상황.

💡 두 원의 공통내접선 길이는 $\sqrt{d^2 - (R + r)^2}$ 로, 부호와 합/차만 바뀌는 쌍대적인 공식이다. 외접하는 두 원에는 내접선이 단 하나(접점에서의 접선)뿐이라 길이는 0이 된다.

Q132 도형 종합 추론

좌표평면 위에 정사각형 ABCD가 있고, 두 이웃하는 꼭짓점이 A(1, 2), B(5, 5)이다. 점 D가 직선 AB의 위쪽(직선보다 y좌표가 큰 영역)에 있을 때, 점 D의 좌표를 구하시오.



- ① ① (-2, 6)
- ② ② (4, -2)
- ③ ③ (-3, 5)
- ④ ④ (2, 9)

정답: ①

1단계: \vec{AB} 의 변화량은 $(B-A)=(4, 3)$ 이고 길이는 $\sqrt{16+9} = 5$.

2단계: 정사각형이므로 $\vec{AD} \perp \vec{AB}$ 이고 $|\vec{AD}| = |\vec{AB}| = 5$. AB의 변화량 $(4, 3)$ 을 90° 반시계로 회전하면 $(-3, 4)$ (회전 규칙: $(x, y) \rightarrow (-y, x)$).

3단계: $D = A + (-3, 4) = (1-3, 2+4) = (-2, 6)$.

4단계: 위치 검증. 직선 AB: $y=2 + (3/4)(x-1) = (3/4)x + 5/4$. 점 $(-2, 6)$ 대입 시 직선의 y값은 $(3/4)(-2) + 5/4 = -1/4$ 로 점의 y좌표 6보다 작다. 즉 D는 직선 위쪽. ✓

오답 ②(4,-2)는 시계방향 회전한 결과로 직선 아래쪽 위치, ④(2,9)는 점 C의 좌표.

풀이 전략: 좌표평면에서 정사각형이나 정삼각형의 꼭짓점을 구할 때, 핵심은 '한 변 벡터를 적절한 각도로 회전한 벡터'를 다른 변 벡터로 사용하는 것. 90° 반시계 회전 규칙 $(x, y) \rightarrow (-y, x)$, 시계방향은 $(x, y) \rightarrow (y, -x)$. 두 가능성 중 어느 쪽인지는 추가 조건(상한, 분면 등)으로 가린다.

정사각형 ABCD에서 ABC를 직선 AC에 대해 대칭하면 D가 나오므로, '회전'과 '대칭' 두 관점에서 같은 점이 얻어진다. 둘 다 길이를 보존한다는 점이 본질이다.

Q133 통계 심화

5개 자료 a, b, c, d, e의 평균이 10이고 분산이 4이다. 각 자료에 2를 곱한 후 모두 3을 더해 만든 새 자료 $2a + 3, 2b + 3, \dots, 2e + 3$ 의 평균과 분산을 차례로 구하시오.

- ① ① 평균 13, 분산 4
- ② ② 평균 23, 분산 8
- ③ ③ 평균 23, 분산 16
- ④ ④ 평균 26, 분산 16

정답: ③

1단계: 자료 변환 $X \rightarrow pX + q$ 일 때, 새 평균 = $p \cdot (\text{원평균}) + q$, 새 분산 = $p^2 \cdot (\text{원분산})$. 상수 q는 모든 자료를 같은 양만큼 평행이 동시킴으로 분산을 바꾸지 않는다.

2단계: 새 평균 = $2 \cdot 10 + 3 = 23$.

3단계: 새 분산 = $2^2 \cdot 4 = 16$. q=3은 분산 변화에 영향 없음.

검증(원리): 새 자료의 편차 = $(2x_i + 3) - (2x + 3) = 2(x_i - x)$. 따라서 편차의 크기가 정확히 2배가 되고, 편차 제곱은 4배. 평균을 내도 4배가 유지되어 분산이 4배.

풀이 전략: 자료 변환에서 평균은 일차식 그대로 따라가고, 분산은 (1) 곱한 수의 제곱만큼만 변하고 (2) 더한 수에는 무관하다는 원리를 즉시 떠올릴 수 있어야 한다. 표준편차로 묻는 변형도 자주 나오는데, 표준편차는 $|p| \cdot (\text{원표준편차})$.

💡 자료를 표준화 $\frac{x - \bar{x}}{\sigma}$ 하면 평균 0, 분산 1이 된다. 이는 위 원리를 활용한 대표 사례이다.

Q134 통계 심화

두 자료 집단 A와 B가 있다. A는 자료 수 6개, 평균 8, 분산 4. B는 자료 수 4개, 평균 13, 분산 9. 두 집단을 합친 자료 10개의 분산을 구하시오.

- ① ① 6
- ② ② 10
- ③ ③ 12
- ④ ④ 15

정답: ③

1단계: 합친 자료의 평균 $\bar{x} = \frac{6 \cdot 8 + 4 \cdot 13}{10} = \frac{48 + 52}{10} = 10$.

2단계: 분산 = '평균으로부터 편차 제곱의 합'을 자료 수로 나눈 값. A의 편차 제곱합 (각 자료를 8 기준): $6 \cdot 4 = 24$. 그러나 합친 평균은 10이므로 기준을 10으로 옮겨야 한다.

A의 자료 x에 대해 $(x - 10)^2 = (x - 8 + (8 - 10))^2 = (x - 8)^2 + 2(8 - 10)(x - 8) + (8 - 10)^2$. 6개를 더하면 $\sum_A (x - 10)^2 = 24 + 2(-2) \cdot 0 + 4 \cdot 6 = 24 + 24 = 48$. (편차 합은 0이므로 가운데 항 사라짐.)

3단계: 마찬가지로 B는 평균 13에서 합친 평균 10으로 이동. $\sum_B (y - 10)^2 = 4 \cdot 9 + (13 - 10)^2 \cdot 4 = 36 + 9 \cdot 4 = 36 + 36 = 72$.

4단계: 합친 분산 = $\frac{48 + 72}{10} = \frac{120}{10} = 12$.

풀이 전략: 두 집단 합치기 분산 공식: 각 집단의 분산을 합칠 때 단순 평균하면 안 되고, '집단 평균과 전체 평균의 차이' 때문에 추가 항이 생긴다. 일반식: $\sigma_{\text{전체}}^2 = \frac{n_A(\sigma_A^2 + (\bar{x}_A - \bar{x})^2) + n_B(\sigma_B^2 + (\bar{x}_B - \bar{x})^2)}{n_A + n_B}$. 이를 외우기보다, '제곱합'을 옮길 때 평균 이동에 의한 보정 항을 더한다는 원리로 풀면 일반화된다.

💡 이 공식을 통해 '집단 내 분산 + 집단 간 분산 = 전체 분산'(분산 분해)이라는 통계의 핵심 정리가 성립한다. 분산 분석(ANOVA)의 출발점이다.

Q135 경시 퍼즐·확률

서로 구별되는 주사위 3개를 동시에 던진다. 세 눈의 합이 7이 될 확률을 기약분수로 나타내시오.

- ① ① $\frac{1}{24}$
- ② ② $\frac{5}{72}$
- ③ ③ $\frac{1}{12}$
- ④ ④ $\frac{7}{108}$

정답: ②

1단계: 주사위 3개의 모든 경우의 수는 $6^3 = 216$.

2단계: 합이 7인 (a,b,c) 순서쌍을 첫 주사위 a 값으로 분류한다 (a=1~6, 각 b, c는 1~6).

- a=1: b+c=6, 가능 (b,c) = (1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1) → 5가지

- a=2: b+c=5, 가능 → 4가지

- a=3: b+c=4 → 3가지

- a=4: b+c=3 → 2가지

- a=5: b+c=2 → 1가지

- a=6: b+c=1 → 0가지

합계 5+4+3+2+1+0=15.

3단계: 확률 = $\frac{15}{216} = \frac{5}{72}$.

풀이 전략: 여러 주사위의 합 문제는 (1) 표본공간 크기 6^n , (2) 합 조건을 만족하는 정수해의 개수, 두 부분으로 나뉜다. 주사위라는 점에서 각 변수가 1~6 사이로 제한되므로, 한 변수를 고정하고 나머지를 세는 방식이 가장 안전. 여기서는 각 a 값마다 b+c의 가능 가짓수가 자연스럽게 1~5로 나오는 패턴을 보여준다. 합을 14로 묻는 등으로 바꾸면 대칭 위치 (각 면 7-x)에서 같은 가짓수가 나온다.

세 주사위 합 확률분포는 합 10, 11에서 최대(각 $27/216=1/8$)이다. 이는 1623년 갈릴레이가 도박꾼들에게 받은 질문에서 다른 유명한 문제로, 합 9와 합 10의 확률이 다르다는 것이 결론이었다.

Q136 이차방정식 활용

두 이차방정식 $x^2+ax+12=0$ 과 $x^2+12x+a=0$ 이 오직 하나의 공통근만 가질 때, 상수 a의 값을 구하시오.

- ① ① a=-13
- ② ② a=-13 또는 a=12
- ③ ③ a=13
- ④ ④ a=-12

정답: ① a=-13

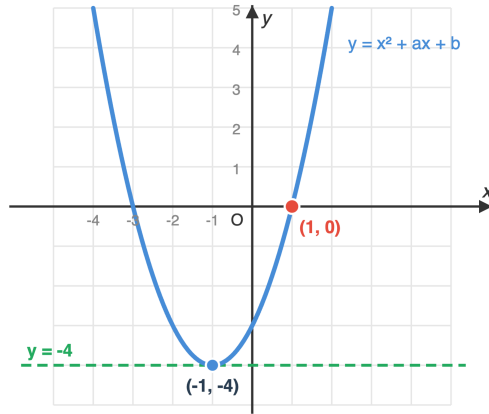
1단계: 두 식을 뺀다 $(x^2+ax+12) - (x^2+12x+a) = (a-12)x + (12-a) = (a-12)(x-1) = 0$. 2단계: 경우 분석. (i) a=12 이면 두 방정식이 동일해 두 근 모두 공통이 되므로 '오직 하나의 공통근'이 아니다. (ii) a≠12 이면 x=1 이 공통근이다. 3단계: x=1 을 첫 식에 대입하면 $1+a+12=0$, 따라서 a=-13. 검증: $x^2-13x+12=(x-1)(x-12)$, $x^2+12x-13=(x-1)(x+13)$. 공통근은 x=1 하나로 조건과 일치.

풀이 전략: 두 이차식의 차이를 이용해 차수를 떨어뜨리면 공통근 후보가 일차식으로 좁혀진다. 단, 두 식이 항등이 되는 a=12 의 경우는 공통근이 두 개가 되어 조건과 모순이므로 따로 배제한다.

두 다항식의 공통근을 찾을 때 차이를 빼서 차수를 줄이는 기법은 종결식(resultant)이라는 일반 이론으로 확장된다.

Q137 이차함수 심화

이차함수 $y=x^2+ax+b$ 의 그래프가 점 $(1, 0)$ 을 지나고 꼭짓점의 y 좌표가 -4 일 때, $a+b$ 의 값을 구하시오.



- ① ① -3
- ② ② -1
- ③ ③ 0
- ④ ④ 2

정답: ② -1

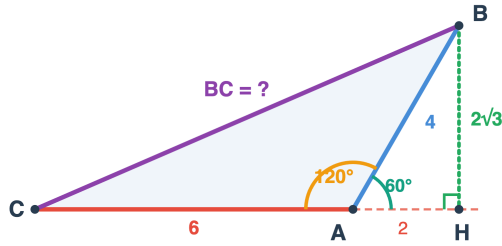
1단계: 점 $(1, 0)$ 을 지나므로 $1+a+b=0$, 즉 $b=-1-a$. **2단계:** 표준형 $y=(x+a/2)^2 + (b - a^2/4)$ 의 꼭짓점 y 좌표가 -4 이므로 $b - a^2/4 = -4$. **1단계 결과 대입:** $-1-a-a^2/4 = -4$, 양변에 4 곱하고 정리하면 $a^2+4a-12=0$. **3단계:** 인수분해 $(a+6)(a-2)=0$, 즉 $a=-6$ 또는 $a=2$. (i) $a=-6$ 이면 $b=5$, $a+b=-1$. (ii) $a=2$ 이면 $b=-3$, $a+b=-1$. 두 경우 모두 $a+b=-1$.

풀이 전략: 두 조건(점 지남, 꼭짓점 높이)으로 미지수 두 개를 결정. 한 조건에서 b 를 a 로 표현해 다른 조건에 대입하면 a 에 대한 이차 방정식이 되어 두 해를 얻는다. 두 해 모두 $a+b$ 값이 같은지 반드시 확인.

💡 이차함수의 꼭짓점 y 좌표는 $b - a^2/4 = -(\text{판별식})/4$ 이다. 판별식이 클수록 꼭짓점이 x 축에서 더 멀리 떨어진다.

Q138 삼각비 심화

삼각형 ABC 에서 $\angle A=120^\circ$, $AB=4$, $AC=6$ 이다. 이때 변 BC 의 길이를 구하시오.



- ① ① $2\sqrt{13}$
- ② ② $2\sqrt{19}$
- ③ ③ $4\sqrt{5}$
- ④ ④ $2\sqrt{21}$

정답: ② $2\sqrt{19}$

1단계: $\angle A=120^\circ$ 가 둔각이므로 A 에서 BC 쪽으로 직접 수선을 내릴 수 없다. 점 B 에서 변 CA 의 연장선에 수선의 발 H 를 내리면 $\angle BAH = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$. **2단계:** 직각삼각형 BAH 에서 $AH = AB \cdot \cos 60^\circ = 4 \cdot (1/2) = 2$, $BH = AB \cdot \sin 60^\circ = 4 \cdot (\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2\sqrt{3}$. **3단계:** 직각삼각형 BHC 에서 $CH = AC + AH = 6 + 2 = 8$. 피타고라스 정리에 따라 $BC^2 = BH^2 + CH^2 = (2\sqrt{3})^2 + 8^2 = 12 + 64 = 76$. 따라서 $BC = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}$.

풀이 전략: 둔각삼각형은 한 꼭짓점에서 반대 변까지 직접 수선을 그을 수 없는 경우가 있으므로 변의 연장선을 활용한다. 다른 꼭짓점에서 연장선으로 수선을 그으면 두 직각삼각형으로 분해되어 삼각비와 피타고라스 정리만으로 결론을 얻는다.

이 풀이는 사실상 코사인법칙 $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A$ 의 기하적 유도이다. $\cos 120^\circ = -1/2$ 를 대입하면 $16+36+24 = 76$ 으로 같은 결과를 얻는다.

Q139 통계 심화

5개의 자료 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 의 평균이 6, 분산이 4 이다. 여기에 새로운 자료 8 을 하나 추가하여 6개의 자료로 만들었을 때, 새 자료의 평균과 분산을 각각 구하시오.

- ① ① 평균 $19/3$, 분산 $35/9$
- ② ② 평균 7, 분산 4
- ③ ③ 평균 $19/3$, 분산 4
- ④ ④ 평균 7, 분산 $35/9$

정답: ① 평균 $19/3$, 분산 $35/9$

1단계: 새 평균 계산. 원래 5개의 합 = $5 \cdot 6 = 30$. 새 합 = $30 + 8 = 38$. 새 평균 = $38/6 = 19/3$. **2단계:** 원래 자료의 제곱합 구하기. 분산 = (제곱평균) - (평균)² 이므로 제곱평균 = $4 + 36 = 40$, 따라서 $\sum x_i^2 = 5 \cdot 40 = 200$. 새 제곱합 = $200 + 8^2 = 264$. **3단계:** 새 분산 = $(\sum y_i^2)/6 - (\text{새 평균})^2 = 264/6 - (19/3)^2 = 44 - 361/9 = (396-361)/9 = 35/9$. 따라서 새 평균은 $19/3$, 새 분산은 $35/9$.

풀이 전략: 자료 추가 문제는 합과 제곱합을 다시 구한 뒤 분산 = (제곱평균) - (평균)² 공식을 적용한다. 직접 $(x_i - \text{새 평균})^2$ 를 합산하지 않고 제곱평균을 활용하면 계산이 훨씬 간결해진다.

분산은 자료가 평균에서 얼마나 흩어져 있는지를 나타낸다. 추가하는 값이 새 평균과 가까우면 분산은 줄고, 멀어지면 늘어난다. 8 은 새 평균 $19/3$ 보다 위쪽에 있으므로 분산이 일정하게 유지되지 않는다.

Q140 이차방정식 활용

이차방정식 $x^2 - 2kx + k + 6 = 0$ 이 두 정수해를 가질 때, 가능한 모든 정수 k 의 값의 합을 구하시오.

- ① ① 2
- ② ② 4
- ③ ③ 7
- ④ ④ 10

정답: ① 2

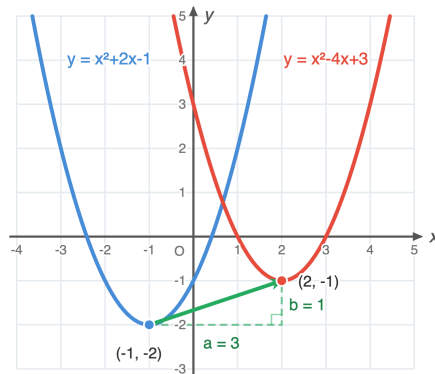
1단계: 근의 공식에서 $x = k \pm \sqrt{(k^2 - k - 6)}$. 두 근이 모두 정수이려면 $k^2 - k - 6 = n^2$ ($n \geq 0$ 인 정수) 가 완전제곱수여야 한다. 2단계: 양변에 4 를 곱하고 정리. $4k^2 - 4k - 24 = 4n^2 \rightarrow (2k-1)^2 - 25 = (2n)^2 \rightarrow (2k-1-2n)(2k-1+2n) = 25$. 3단계: 25 를 두 정수의 곱으로 표현하는 모든 경우를 열거. (1, 25): $2k-1=13, k=7$. (5, 5): $2k-1=5, k=3$. (-25, -1): $2k-1=-13, k=-6$. (-5, -5): $2k-1=-5, k=-2$. 검증: $k=7 \rightarrow (x-1)(x-13), k=3 \rightarrow (x-3)^2, k=-6 \rightarrow x(x+12), k=-2 \rightarrow (x+2)^2$. 모두 정수해. k 의 합 = $7 + 3 + (-6) + (-2) = 2$.

풀이 전략: 두 정수해 조건은 판별식이 완전제곱수여야 한다는 사실에서 출발한다. 판별식을 $(\text{정수})^2 - (\text{정수})^2$ 꼴로 변형해 인수분해하면 곱셈공식으로 정수 조합을 모두 열거할 수 있다.

💡 $(A-B)(A+B) = N$ 형태로 변형해 정수해를 찾는 기법은 정수론의 기본 도구로, 페르마의 무한강하법, 펠 방정식 풀이 등에서도 유사하게 활용된다.

Q141 이차함수 심화

이차함수 $y = x^2 + 2x - 1$ 의 그래프를 x 축 방향으로 a , y 축 방향으로 b 만큼 평행이동했더니 $y = x^2 - 4x + 3$ 의 그래프가 되었다. $a + b$ 의 값을 구하시오.



- ① ① 3
- ② ② 4
- ③ ③ 5
- ④ ④ 2

정답: ② 4

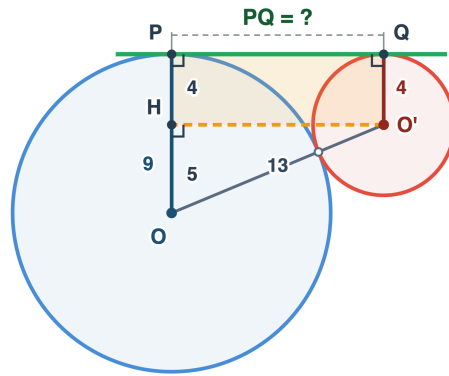
1단계: 두 식을 표준형으로 변형. $y = x^2 + 2x - 1 = (x+1)^2 - 2$, 꼭짓점 $(-1, -2)$. $y = x^2 - 4x + 3 = (x-2)^2 - 1$, 꼭짓점 $(2, -1)$. 2단계: 평행이동에서 그래프 모양은 같고 꼭짓점만 이동하므로 x 축 방향 이동량 $a = 2 - (-1) = 3$, y 축 방향 이동량 $b = -1 - (-2) = 1$. 3단계: $a + b = 3 + 1 = 4$.

풀이 전략: 이차함수의 평행이동은 꼭짓점의 평행이동과 정확히 일치한다. 일반형 $y = x^2 + bx + c$ 를 표준형 $y = (x-p)^2 + q$ 로 변환해 꼭짓점을 찾고, 두 꼭짓점의 좌표 차이가 곧 이동량이 된다.

💡 x^2 의 계수가 같은 두 이차함수는 합동인 포물선이므로 항상 평행이동만으로 일치시킬 수 있다. 계수가 다르면 합동이 아니어서 평행이동만으로는 일치시킬 수 없다.

Q142 원의 성질 증명

반지름이 각각 4, 9 인 두 원이 외접한다. 이 두 원의 한 외부 공통접선의 두 접점 사이의 거리를 구하시오.



- ① ① 10
- ② ② 12
- ③ ③ 13
- ④ ④ $6\sqrt{2}$

정답: ② 12

1단계: 두 원이 외접하므로 중심 거리 $OO' = 9 + 4 = 13$. 접선과 반지름은 수직이므로 $OP \perp PQ$, $O'Q \perp PQ$. 따라서 $OP \parallel O'Q$.
2단계: 작은 원 중심 O' 에서 OP 에 수선의 발 H 를 내리면 사각형 $PHO'Q$ 는 직사각형이 된다. 따라서 $PH = O'Q = 4$, $OH = OP - PH = 9 - 4 = 5$, $PQ = O'H$.
3단계: 직각삼각형 OHO' 에서 피타고라스 정리. $O'H^2 = OO'^2 - OH^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$. 따라서 $PQ = O'H = 12$. (일반화 결과: 외부 공통접선 길이 = $2\sqrt{(r_1 \cdot r_2)} = 2\sqrt{36} = 12$.)

풀이 전략: 두 원의 공통접선 문제는 두 중심을 잇는 선분과 두 반지름이 만드는 도형 구조를 분해하는 것이 핵심. 두 반지름이 모두 접선에 수직이라는 사실에서 직사각형이 만들어지고, 직사각형의 한 변 길이가 접선 길이와 같음을 이용한다.

외부 공통접선의 길이는 $2\sqrt{(r_1 \cdot r_2)}$ 로 두 반지름의 기하평균의 두 배이다. 내부 공통접선의 경우는 $\sqrt{(d^2 - (r_1 + r_2)^2)}$ 형태로 식이 다르다.

Q143 경시 퍼즐·확률

1, 2, 3, 4, 5 의 숫자가 적힌 카드 5장을 일렬로 배열할 때, 1이 적힌 카드와 2가 적힌 카드가 서로 이웃하지 않을 확률을 구하시오.

- ① ① $2/5$
- ② ② $1/2$
- ③ ③ $3/5$
- ④ ④ $7/10$

정답: ③ 3/5

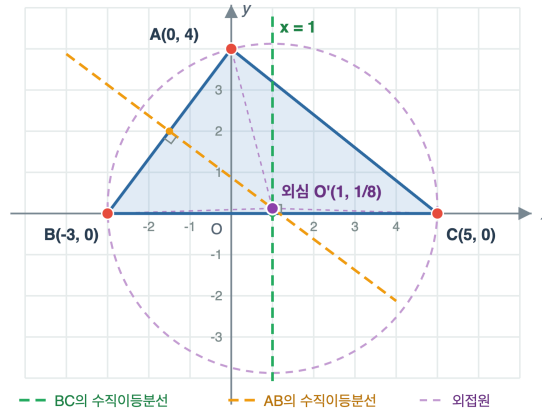
1단계: 전체 경우의 수 계산. 5장을 일렬로 배열하는 방법은 $5! = 120$ 가지. **2단계:** 여사건(1과 2가 이웃)의 경우의 수 계산. 1과 2 를 한 묶음으로 보면 4개의 묶음을 일렬로 배열하는 $4! = 24$ 가지. 묶음 내부에서 1, 2 의 순서가 두 가지이므로 $24 \times 2 = 48$ 가지. **3단계:** 여사건 확률 = $48/120 = 2/5$. 따라서 구하는 확률 = $1 - 2/5 = 3/5$.

풀이 전략: '이웃하지 않는다' 같은 부정 조건은 직접 세기 어려우므로 여사건('이웃한다')을 세고 1 에서 빼는 보충법이 빠르다. 이웃 조건은 두 대상을 한 묶음으로 처리한 뒤 묶음 내부 순서를 곱하는 묶음법이 표준 기법이다.

부정 조건의 경우의 수를 세는 보충법(complementary counting)은 포함배제 원리의 가장 단순한 형태로, 경시대회 확률 문제 풀이에서 가장 자주 쓰이는 발상이다.

Q144 도형 종합 추론

좌표평면 위의 세 점 $A(0, 4)$, $B(-3, 0)$, $C(5, 0)$ 을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC 의 외심의 좌표를 구하시오.



- ① ① (1, 0)
- ② ② (1, 1/8)
- ③ ③ (1, 1/4)
- ④ ④ (1/2, 1)

정답: ② (1, 1/8)

1단계: 외심은 세 변의 수직이등분선의 교점이다. 변 BC 의 중점은 $(1, 0)$ 이고 BC 가 x 축이므로 수직이등분선은 $x = 1$. 따라서 외심의 x 좌표는 1. **2단계:** 변 AB 의 중점은 $(-3/2, 2)$. AB 의 기울기는 $(4-0)/(0-(-3)) = 4/3$ 이므로 수직이등분선의 기울기는 $-3/4$. 수직이등분선의 식: $y - 2 = -3/4 \cdot (x + 3/2)$. **3단계:** $x = 1$ 을 대입. $y = 2 - 3/4 \cdot (1 + 3/2) = 2 - 3/4 \cdot 5/2 = 2 - 15/8 = 1/8$. 따라서 외심의 좌표는 $(1, 1/8)$. **검증:** $O'A^2 = 1^2 + (4-1/8)^2 = 1 + (31/8)^2 = 1025/64$, $O'B^2 = (1+3)^2 + (1/8)^2 = 16 + 1/64 = 1025/64$. 일치.

풀이 전략: 외심은 세 꼭짓점에서 등거리에 있는 점이며 어느 두 변의 수직이등분선 교점으로도 구할 수 있다. 한 변이 좌표축에 평행이면 그 변의 수직이등분선이 매우 단순해지므로 그 변을 먼저 활용한다.

외심의 위치는 삼각형 모양에 따라 달라진다. 예각삼각형이면 내부, 직각삼각형이면 빗변의 중점, 둔각삼각형이면 외부. 이 문제의 외심은 내부에 있으므로 삼각형 ABC 는 예각삼각형이다.

Q145 인수분해 심화

$x^4 + 4$ 를 두 이차식의 곱으로 인수분해하시오.

- ① ① $(x^2+2)^2$
- ② ② $(x^2+2)(x^2-2)$
- ③ ③ $(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$
- ④ ④ $(x+1)(x-1)(x^2+4)$

정답: ③ $(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$

1단계: $x^4 + 4$ 는 항이 두 개라 곧바로 인수분해가 어렵다. $4x^2$ 를 더하고 빼서 완전제곱식을 만든다. $x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2$. **2단계:** 앞 세 항 $x^4 + 4x^2 + 4 = (x^2 + 2)^2$ 이고 마지막 항은 $(2x)^2$. 따라서 $x^4 + 4 = (x^2+2)^2 - (2x)^2$. **3단계:** 두 제곱의 차 공식 $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$ 를 적용. $= (x^2+2-2x)(x^2+2+2x) = (x^2-2x+2)(x^2+2x+2)$. **검증:** $(x^2-2x+2)(x^2+2x+2) = ((x^2+2)-2x)((x^2+2)+2x) = (x^2+2)^2 - (2x)^2 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = x^4 + 4$. 일치.

풀이 전략: 항의 개수가 적어 직접 인수분해가 막힐 때는 같은 항을 더하고 빼는 식의 변형이 핵심. 가운데 항이 채워지도록 보충해 완전제곱을 만든 뒤, 보충한 항을 제곱의 차로 분리하면 두 제곱 차 공식이 작동한다.

이 인수분해는 소피 제르맹(Sophie Germain) 항등식이라 불린다. 일반형은 $a^4 + 4b^4 = (a^2+2ab+2b^2)(a^2-2ab+2b^2)$ 이며 페르마의 마지막 정리 일부 사례 증명에 활용되었다.

Q146 실수·근호 추론

이중근호 $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}}$ 를 간단한 꼴로 나타내시오.

- ① ① $\sqrt{5} + 2$
- ② ② $\sqrt{5} - 2$
- ③ ③ $2 - \sqrt{5}$
- ④ ④ $3 - \sqrt{5}$

정답: ② $\sqrt{5} - 2$

1단계: $9 - 4\sqrt{5}$ 를 $(a - b)^2$ 꼴로 표현하기 위해 $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ 와 비교. $a^2 + b^2 = 9$, $2ab = 4\sqrt{5}$ 즉 $ab = 2\sqrt{5}$. 2단계: 두 식을 동시에 만족하는 (a, b) 찾기. $a = \sqrt{5}$, $b = 2$ 라 두면 $(\sqrt{5})^2 + 2^2 = 5 + 4 = 9$ ✓, $\sqrt{5} \cdot 2 = 2\sqrt{5}$ ✓. 따라서 $9 - 4\sqrt{5} = (\sqrt{5} - 2)^2$. 3단계: $\sqrt{5} \approx 2.236$ 이므로 $\sqrt{5} - 2 > 0$. 근호의 결과는 항상 양수이므로 $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 2$ (양수 부호 채택). 음수 부호인 $2 - \sqrt{5}$ 는 음수가 되어 부적합.

풀이 전략: 이중근호 $\sqrt{(A \pm 2\sqrt{B})}$ 꼴은 $A = a + b$, $B = ab$ 인 두 양수 a, b 를 찾으면 $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ 로 풀린다. 풀린 결과는 양수가 되어야 하므로 큰 수에서 작은 수를 빼는 방향을 채택한다.

이중근호 풀이는 A 가 무리수일 때만 의미가 있다. A 가 유리수이면 단일 근호로도 표현되므로 풀 필요가 없다. 또한 풀리지 않는 이중근호도 많다($\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ 같은 경우는 풀리지만 $\sqrt{1 + \sqrt{2}}$ 는 더 간단해지지 않는다).

Q147 통계 심화

5개의 자료 $a, b, 4, 6, 8$ 의 평균이 5, 분산이 4 이다. 이때 ab 의 값을 구하시오.

- ① ① 7
- ② ② 10
- ③ ③ 12
- ④ ④ 15

정답: ② 10

1단계: 평균 조건. $(a + b + 4 + 6 + 8)/5 = 5$ 에서 $a + b + 18 = 25$, 따라서 $a + b = 7$. 2단계: 분산 조건. $((a-5)^2 + (b-5)^2 + (4-5)^2 + (6-5)^2 + (8-5)^2)/5 = 4$ 에서 $(a-5)^2 + (b-5)^2 + 1 + 1 + 9 = 20$, 따라서 $(a-5)^2 + (b-5)^2 = 9$. 3단계: 두 식 결합. 좌변 전개: $a^2 - 10a + 25 + b^2 - 10b + 25 = 9 \rightarrow (a^2 + b^2) - 10(a+b) + 50 = 9$. $a + b = 7$ 대입하면 $(a^2+b^2) - 70 + 50 = 9$, 즉 $a^2 + b^2 = 29$. 곱셈공식 $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ 에서 $49 = 29 + 2ab$, 따라서 $ab = 10$.

풀이 전략: 평균과 분산이라는 두 조건은 두 미지수 a, b 를 결정한다. 합 $a+b$ 와 제곱합 a^2+b^2 를 각각 구한 뒤 곱셈공식 $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ 를 이용해 곱 ab 를 추출하는 것이 표준 기법.

두 수의 합과 곱을 알면 그 두 수는 이차방정식 $t^2 - (\text{합})t + (\text{곱}) = 0$ 의 두 근이 된다. 이 문제에서 a, b 는 $t^2 - 7t + 10 = (t-2)(t-5) = 0$ 의 두 근이므로 $\{2, 5\}$ 이다.

Q148 실수·근호 추론

$\sqrt{7+2\sqrt{10}}$ 을 간단히 한 값은?

- ① ① $\sqrt{5} + \sqrt{2}$
- ② ② $\sqrt{6} + 1$
- ③ ③ $\sqrt{7} + \sqrt{3}$
- ④ ④ $\sqrt{10} + 1$

☞ 정답: ① $\sqrt{5} + \sqrt{2}$

📖 1단계) 이중근호 $\sqrt{a+2\sqrt{b}}$ 꼴은 합이 a , 곱이 b 인 두 양수 p, q 를 찾으면 $\sqrt{(\sqrt{p} + \sqrt{q})^2} = \sqrt{p} + \sqrt{q}$ 로 풀린다. 2단계) $7+2\sqrt{10}$ 에서 합 = 7, 곱 = 10인 두 수는 5와 2이다 ($5+2=7, 5 \times 2=10$). 3단계) 따라서

$$\sqrt{7+2\sqrt{10}} = \sqrt{(\sqrt{5} + \sqrt{2})^2} = \sqrt{5} + \sqrt{2} . \text{검산: } (\sqrt{5} + \sqrt{2})^2 = 5 + 2 + 2\sqrt{10} = 7 + 2\sqrt{10} \checkmark$$

🧠 풀이 전략: $a+2\sqrt{b}$ 꼴인지 확인하고, 합 a 와 곱 b 를 만족하는 두 양수를 떠올린다. 두 수가 정수쌍이면 깔끔히 풀린다.

💡 이중근호의 단순화는 16세기 이탈리아 수학자들이 삼차방정식 해법을 다루며 발전시킨 기법 중 하나다.

Q149 인수분해 심화

다항식 $x^4 + x^2 + 1$ 을 인수분해한 결과는?

- ① ① $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$
- ② ② $(x^2 + 1)^2$
- ③ ③ $(x^2 - x - 1)(x^2 + x + 1)$
- ④ ④ $(x + 1)^2(x - 1)^2$

☞ 정답: ① $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$

📖 1단계) 직접 인수분해되지 않으므로 항을 더하고 빼서 변형한다: $x^4 + x^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - x^2$. 2단계)

$$x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 \text{이므로 식은 } (x^2 + 1)^2 - x^2 \text{의 제곱차 형태. 3단계) } A^2 - B^2 = (A + B)(A - B) \text{로:}$$

$$(x^2 + 1 + x)(x^2 + 1 - x) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1). \text{검산: 두 인수의 곱은 } x^4 + x^2 + 1 \text{로 일치한다.}$$

🧠 풀이 전략: 사차식이 직접 인수분해되지 않을 때는 적절한 항을 더하고 빼서 완전제곱식 빼기 제곱차 형태(제곱차)로 만든다. 이는 인수분해 표준 기법.

💡 이 형태의 식은 원분다항식(Φ_n) 이론과 연결되며, $x^6 - 1$ 의 인수분해와도 관련이 있다.

Q150 이차방정식 활용

이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 과 $x^2 + bx + a = 0$ 이 공통근을 갖고 $a \neq b$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

- ① ① -2
- ② ② -1
- ③ ③ 0
- ④ ④ 1

☞ 정답: ② -1

📖 1단계) 공통근을 $x = t$ 라 하면 $t^2 + at + b = 0$ ㉠, $t^2 + bt + a = 0$ ㉡이 동시에 성립. 2단계) ㉠ - ㉡:

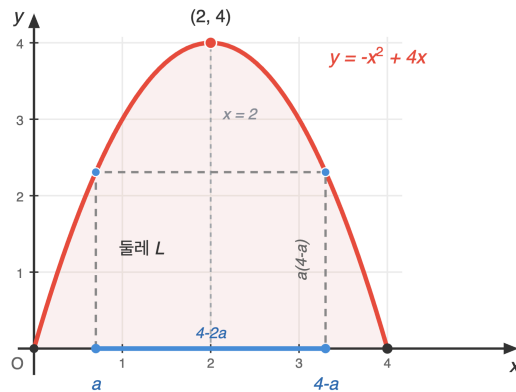
$$(a - b)t + (b - a) = 0 \Rightarrow (a - b)(t - 1) = 0. a \neq b \text{이므로 } t = 1. \text{3단계) } t = 1 \text{을 ㉠에 대입: } 1 + a + b = 0. \text{따라서 } a + b = -1$$

🧠 풀이 전략: 두 이차식이 공통근을 가지면 두 식을 빼서 차수가 한 단계 낮은 일차식을 얻는 것이 정석. $a \neq b$ 조건은 인자 분리에 핵심적으로 쓰인다.

💡 두 다항식의 공통근 존재 여부는 '결과식(resultant)'이라는 양이 0인지로 일반적으로 판정한다.

Q151 이차함수 심화

이차함수 $y = -x^2 + 4x$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 영역에 한 변이 x 축 위에 있도록 직사각형을 내접시킨다. 직사각형 둘레의 최댓값은?



- ① ① 8
- ② ② 9
- ③ ③ 10
- ④ ④ 12

정답: ③ 10

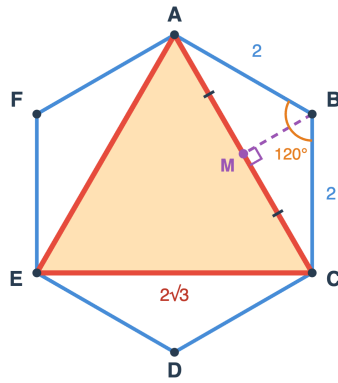
1단계) $y = -x^2 + 4x = -x(x - 4)$ 이므로 x 축과는 $x = 0, x = 4$ 에서 만나고 꼭짓점은 $(2, 4)$. **2단계)** 좌우대칭이므로 직사각형의 한 변을 $(a, 0), (4 - a, 0)$ ($0 < a < 2$)로 잡으면 가로 = $4 - 2a$, 세로 = $-a^2 + 4a = a(4 - a)$. **3단계)** 둘레 $L = 2(4 - 2a) + 2 \cdot a(4 - a) = -2a^2 + 4a + 8 = -2(a - 1)^2 + 10$. $a = 1$ 일 때 최댓값 $L = 10$ (이때 가로 = 2, 세로 = 3).

풀이 전략: 좌우대칭으로 변수를 1개로 줄이고 둘레를 한 변수의 이차식으로 표현한 뒤, 꼭짓점에서 최댓값을 읽는다. '둘레 최대'와 '넓이 최대'는 일반적으로 다른 점이 흥미롭다.

💡 같은 영역에 내접하는 직사각형 중 넓이가 최대인 경우와 둘레가 최대인 경우는 일반적으로 서로 다른 비율에서 나타난다.

Q152 삼각비 심화

한 변의 길이가 2인 정육각형 $ABCDEF$ 에서 세 꼭짓점 A, C, E 를 이은 $\triangle ACE$ 의 넓이는?



- ① ① $2\sqrt{3}$
- ② ② $3\sqrt{3}$
- ③ ③ $4\sqrt{3}$
- ④ ④ $6\sqrt{3}$

☞ 정답: ② $3\sqrt{3}$

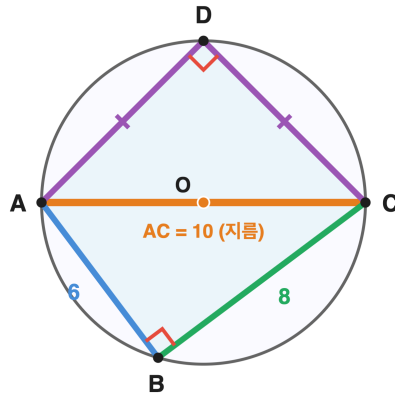
📖 1단계) 정육각형의 한 내각은 120° . $\triangle ABC$ 에서 $AB = BC = 2, \angle ABC = 120^\circ$ 인 이등변삼각형. 2단계) B 에서 AC 에 수선의 발 M 을 내리면 M 은 AC 의 중점이고 $\angle ABM = 60^\circ$. $AM = AB\sin 60^\circ = \sqrt{3}$. 따라서 $AC = 2AM = 2\sqrt{3}$. 3단계) 정육각형의 회전 대칭에 의해 $AC = CE = EA = 2\sqrt{3}$ 이므로 $\triangle ACE$ 는 정삼각형. 넓이 $= \frac{\sqrt{3}}{4} \times (2\sqrt{3})^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 12 = 3\sqrt{3}$.

🧠 풀이 전략: 정육각형의 회전 대칭으로 $\triangle ACE$ 가 정삼각형임을 먼저 파악하고, 한 변 AC 의 길이만 삼각비로 구하면 정삼각형 넓이 공식으로 끝난다.

💡 정육각형은 정삼각형 6개로 분할되며, 평면을 빈틈없이 덮는 정다각형 중 하나(정삼각형, 정사각형, 정육각형)이다.

Q153 원의 성질 증명

원 O 에 내접하는 사각형 $ABCD$ 에서 $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = 6$, $BC = 8$ 이고 $AD = CD$ 이다. AD 의 길이는?



- ① ① 5
- ② ② $5\sqrt{2}$
- ③ ③ 6
- ④ ④ 7

정답: ② $5\sqrt{2}$

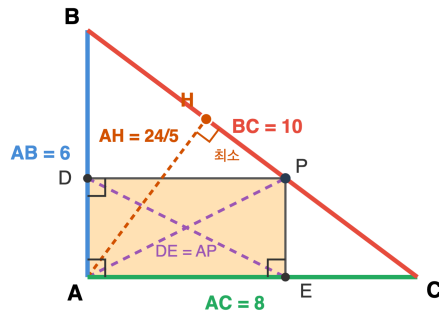
1단계) $\angle ABC = 90^\circ$ 는 호 ADC 에 대한 원주각이고 그 값이 직각이므로 원주각 정리에 의해 AC 는 원 O 의 지름이다. $\triangle ABC$ 에서 피타고라스: $AC = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$. 2단계) 원에 내접하는 사각형의 대각의 합은 180° 이므로 $\angle ADC = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$. 3단계) $\triangle ADC$ 에서 $\angle ADC = 90^\circ$, $AD = CD$ 이므로 직각이등변삼각형. $AD^2 + CD^2 = AC^2 \Rightarrow 2AD^2 = 100 \Rightarrow AD = 5\sqrt{2}$.

풀이 전략: '직각이 보이는 변은 지름'이라는 원주각 정리의 따름정리로 AC 를 지름으로 확정하고, 대각합 정리로 $\angle ADC$ 도 직각임을 이끌어 직각이등변삼각형으로 마무리한다.

고대 그리스의 탈레스(약 BC 600)는 '반원에 내접하는 각은 직각이다'라는 이 정리를 처음으로 증명한 인물로 전해진다.

Q154 도형 종합 추론

직각삼각형 ABC ($\angle A = 90^\circ$)에서 $AB = 6, AC = 8$ 이다. 빗변 BC 위의 점 P 에서 두 변 AB, AC 에 내린 수선의 발을 각각 D, E 라 할 때, 선분 DE 의 최솟값은?



- ① ① 4
- ② ② $\frac{24}{5}$
- ③ ③ 5
- ④ ④ 6

정답: ② $\frac{24}{5}$

1단계) 사각형 $ADPE$ 는 $\angle A = \angle ADP = \angle AEP = 90^\circ$ 이므로 직사각형이다. 2단계) 직사각형의 두 대각선은 같으므로 $DE = AP$. 따라서 DE 의 최솟값은 점 A 에서 직선 BC 까지의 거리, 즉 A 에서 빗변에 내린 수선의 길이와 같다. 3단계) $BC = \sqrt{36 + 64} = 10$. $\triangle ABC$ 의 넓이 $= \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24 = \frac{1}{2} \times BC \times h \Rightarrow h = \frac{2 \times 24}{10} = \frac{24}{5}$. 따라서 $DE_{\min} = \frac{24}{5}$.

풀이 전략: DE 를 직접 다루기 어려우므로 사각형 $ADPE$ 가 직사각형임을 발견해 $DE = AP$ 로 환원한다. 그러면 문제는 한 점에서 한 직선까지의 최단거리(= 수직거리) 문제로 바뀐다.

직각삼각형의 빗변에 내린 수선의 길이는 두 직각변의 곱을 빗변으로 나눈 값과 같다 ($h = \frac{ab}{c}$). 이 문제의 답이 그 공식과 정확히 일치한다.

Q155 통계 심화

자료 x_1, x_2, \dots, x_n 의 평균이 m , 분산이 V 이다. 자료 $y_i = 3x_i - 2$ 로 변환된 새 자료의 평균과 분산은?

- ① ① 평균 $3m - 2$, 분산 V
- ② ② 평균 $3m - 2$, 분산 $3V$
- ③ ③ 평균 $3m - 2$, 분산 $9V$
- ④ ④ 평균 $3m$, 분산 $9V$

정답: ③ 평균 $3m - 2$, 분산 $9V$

1단계) 평균: $y = \frac{1}{n} \sum (3x_i - 2) = 3 \cdot \frac{1}{n} \sum x_i - 2 = 3m - 2$. 2단계) 분산:

$V_y = \frac{1}{n} \sum (y_i - \bar{y})^2 = \frac{1}{n} \sum (3x_i - 2 - (3m - 2))^2 = \frac{1}{n} \sum 9(x_i - m)^2 = 9 \cdot \frac{1}{n} \sum (x_i - m)^2 = 9V$. 즉 평행이동(상수 -2)은 분산을 바꾸지 않고, 비례 상수 3은 분산을 $3^2 = 9$ 배로 만든다.

풀이 전략: 일차변환 $y = ax + b$ 의 일반 규칙: 평균은 $ax + b$ 로 그대로 변환되고, 분산은 a^2 배(표준편차는 $|a|$ 배), 상수 b 는 분산에 영향 없음. 이를 정의식에서 직접 유도한다.

분산은 단위가 제곱이라 직관적이지 않아 표준편차(분산의 양의 제곱근)를 자주 쓴다. 표준편차는 $|a|$ 배로 깔끔히 변한다.

Q156 경시 퍼즐·확률

좌표평면 위 점 (a, b) 에 대해 a, b 는 모두 $1 \leq a, b \leq 12$ 인 자연수이다. 원점에서 (a, b) 까지의 거리가 자연수인 점 (a, b) 의 개수는?

- ① ① 4
- ② ② 6
- ③ ③ 8
- ④ ④ 10

정답: ③ 8

1단계) 거리 $\sqrt{a^2 + b^2}$ 가 자연수 $\Leftrightarrow a^2 + b^2$ 이 완전제곱수 $\Leftrightarrow (a, b, c)$ 가 피타고라스 수($a^2 + b^2 = c^2$). 2단계) $1 \leq a, b \leq 12$ 안에서 가능한 피타고라스 수 (a, b) 를 모두 찾는다 (원시 및 배수). 원시: $(3, 4, 5), (5, 12, 13)$. 배수: $(6, 8, 10), (9, 12, 15)$. ($a = b$ 이면 $\sqrt{2} a$ 는 무리수이므로 제외.) 3단계) 정렬되지 않은 (a, b) 쌍 각각이 두 가지 순서를 가지므로: $(3, 4), (4, 3), (6, 8), (8, 6), (5, 12), (12, 5), (9, 12), (12, 9)$. 총 8개.

풀이 전략: 문제를 '한도 안의 피타고라스 수 열거'로 환원한다. 한도 12 이내에서 빠뜨리지 않으려면 원시 피타고라스 수와 그 정수배를 차례로 점검한다.

💡 피타고라스 수는 무한히 많고, $m > n > 0$ 인 자연수 쌍에 대해 $(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$ 공식으로 모두 생성할 수 있다.

Q157 이차방정식 활용

이차방정식 $x^2 + (a - 1)x + a + 5 = 0$ 의 두 근이 모두 정수가 되도록 하는 정수 a 의 값을 모두 구하면?

- ① ① $a = -5$
- ② ② $a = 11$
- ③ ③ $a = -5$ 또는 $a = 11$
- ④ ④ $a = 5$ 또는 $a = -11$

정답: ③ $a = -5$ 또는 $a = 11$

1단계) 두 정수근을 m, n 이라 하면 근과 계수의 관계로 $m + n = -(a - 1) = 1 - a, mn = a + 5$. 2단계) 두 식을 더해 a 를 소거: $mn + (m + n) = (a + 5) + (1 - a) = 6 \Rightarrow mn + m + n = 6$. 양변에 1을 더해 인수분해 가능 형태로: $(m + 1)(n + 1) = 7$. 3단계) 7은 소수이므로 정수 인수쌍 $(m + 1, n + 1) \in \{(1, 7), (7, 1), (-1, -7), (-7, -1)\}$. 각 경우

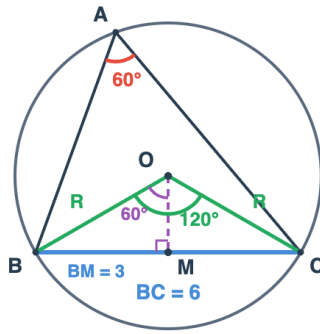
$(m, n) = (0, 6), (6, 0), (-2, -8), (-8, -2)$. 대응하는 $a = 1 - (m + n)$: $(0, 6) \rightarrow a = -5$; $(-2, -8) \rightarrow a = 11$. 검산: $a = -5$ 이면 $x^2 - 6x = 0 \rightarrow$ 근 $0, 6$ (정수). $a = 11$ 이면 $x^2 + 10x + 16 = 0 \rightarrow$ 근 $-2, -8$ (정수). 따라서 $a = -5$ 또는 $a = 11$.

풀이 전략: 두 근의 합과 곱을 모두 a 로 표현한 뒤 a 를 소거해 m, n 만의 디오판토스 식을 얻는다. 그 식을 인수분해 가능 형태(SFFT, 사이먼의 인수분해 묘기)로 변형해 정수 인수쌍을 모두 점검한다.

💡 $xy + ax + by = c$ 꼴을 $(x + b)(y + a) = c + ab$ 로 묶는 변형은 정수해 문제에서 매우 강력하다.

Q158 도형 종합 추론

원 O 에 내접하는 $\triangle ABC$ 에서 $\angle A = 60^\circ, BC = 6$ 이다. 원 O 의 반지름의 길이는?



- ① ① $\sqrt{3}$
- ② ② $2\sqrt{3}$
- ③ ③ $3\sqrt{3}$
- ④ ④ $4\sqrt{3}$

정답: ② $2\sqrt{3}$

1단계) $\angle A = 60^\circ$ 는 호 BC 에 대한 원주각이므로, 원주각 정리에 의해 같은 호에 대한 중심각은 그 두 배: $\angle BOC = 120^\circ$. **2단계)** $\triangle BOC$ 는 $OB = OC = R$ (반지름)인 이등변삼각형. O 에서 BC 에 내린 수선의 발 M 은 BC 의 중점이므로 $BM = 3$ 이고, 이등변이므로 $\angle BOM = \frac{1}{2}\angle BOC = 60^\circ$. **3단계)** 직각삼각형 OBM 에서 $\sin 60^\circ = \frac{BM}{OB} = \frac{3}{R} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{R} \Rightarrow R = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$.

풀이 전략: 원주각과 중심각의 2배 관계로 $\angle BOC$ 를 결정하고, '중심에서 현에 내린 수선은 현을 이등분한다' 라는 사실과 삼각비를 결합해 반지름을 구한다.

이는 고등학교에서 배우는 사인 법칙 $\frac{a}{\sin A} = 2R$ 의 특수한 형태이다. 즉 $\frac{6}{\sin 60^\circ} = 2R \Rightarrow R = 2\sqrt{3}$.

Q159 인수분해 심화

다항식 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ 를 인수분해한 결과는?

- ① ① $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$
- ② ② $(a - b - c)(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca)$
- ③ ③ $(a + b - c)(a^2 - b^2 + c^2)$
- ④ ④ $(a + b + c)^3$

정답: ① $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

1단계) 항등식 $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b + c)(ab + bc + ca) - 3abc$ 에서 정리하면 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)^3 - 3(a + b + c)(ab + bc + ca)$. **2단계)** 공통 인수 $(a + b + c)$ 를 묶어내면 $(a + b + c)\{(a + b + c)^2 - 3(ab + bc + ca)\}$. **3단계)** $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$ 이므로 종괄호 $= a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$. 따라서 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$. 검증: $a + b + c = 0$ 이면 좌변 $= a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$ 이 됨을 확인할 수 있어 $(a + b + c)$ 가 인수임이 자연스럽다.

풀이 전략: $(a + b + c)^3$ 전개식과 비교하거나, ' $a + b + c = 0$ 이면 $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ ' 라는 사실에서 $(a + b + c)$ 가 인수임을 추측한 뒤 묶어내어 마무리한다.

이 항등식은 산술-기하 평균 부등식의 증명, 행렬식 계산, 삼차 대칭식 이론 등 고등 수학 곳곳에서 등장하는 핵심 공식이다.

Q160 실수·근호 추론

이중근호 $\sqrt{8 - 2\sqrt{15}}$ 를 간단히 한 것은?

- ① $\sqrt{5} - \sqrt{3}$
- ② $\sqrt{6} - \sqrt{2}$
- ③ $\sqrt{15} - 1$
- ④ $\sqrt{7} - 1$

정답: ① $\sqrt{5} - \sqrt{3}$

1) 이중근호 $\sqrt{a + b - 2\sqrt{ab}}$ 는 합이 $a + b$, 곱이 ab 인 두 수를 찾아 $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$ 꼴로 변형한다. 2) 합이 8, 곱이 15인 두 수는 5와 3이므로 $8 - 2\sqrt{15} = (\sqrt{5})^2 - 2\sqrt{5} \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = (\sqrt{5} - \sqrt{3})^2$. 3) $\sqrt{5} > \sqrt{3}$ 이므로

$$\sqrt{(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2} = \sqrt{5} - \sqrt{3} \text{ (양수 부호 유지).}$$

풀이 전략: 이중근호 $\sqrt{a \pm 2\sqrt{b}}$ 형태는 합과 곱이 각각 a 와 b 인 두 양수를 찾아 완전제곱식 $(\sqrt{p} \pm \sqrt{q})^2$ 로 만드는 것이 핵심. 절댓값을 벗길 때 큰 쪽이 앞에 와야 양수가 됨에 주의.

이중근호 풀이는 16세기 카르다노가 삼차방정식의 해법을 발표하면서 본격적으로 연구되었다.



중3 수학 심화

총 40문제 · 문제와 정답·풀이 포함

Q161 인수분해 심화

$a^4 + 4$ 를 실수 범위에서 인수분해한 것은?

- ① $(a^2 - 2a + 2)(a^2 + 2a + 2)$
- ② $(a^2 + 2)^2$
- ③ $(a^2 - 2)(a^2 + 2)$
- ④ $(a - 1)^2(a + 1)^2$

정답: ① $(a^2 - 2a + 2)(a^2 + 2a + 2)$

1) $a^4 + 4$ 에 $4a^2$ 를 더하고 빼서 완전제곱을 만든다. $a^4 + 4 = a^4 + 4a^2 + 4 - 4a^2 = (a^2 + 2)^2 - (2a)^2$. 2) 합차공식 $X^2 - Y^2 = (X - Y)(X + Y)$ 를 적용: $(a^2 + 2 - 2a)(a^2 + 2 + 2a)$. 3) 정리하면 $(a^2 - 2a + 2)(a^2 + 2a + 2)$. 두 인수 모두 판별식 $D = 4 - 8 = -4 < 0$ 이므로 실수 범위에서는 더 이상 인수분해 불가.

풀이 전략: 직접 인수분해되지 않는 사차식은 적절한 항을 더하고 빼서 '제곱의 차' 꼴로 만드는 항 추가법이 강력한 도구. 더할 항은 곱과 완전제곱이 되도록 역추적해 결정한다.

이 항등식은 18세기 프랑스 수학자 소피 제르맹이 페르마의 마지막 정리 연구 중 발견하여 '소피 제르맹 항등식'으로 불린다.

Q162 통계 심화

다섯 개의 자료 $x, 8, 9, 7, 10$ 의 평균이 8일 때, 이 자료의 분산은?

- ① ①1
- ② ②2
- ③ ③ $\sqrt{2}$
- ④ ④4

정답: ②2

1) 평균이 8이므로 $x + 8 + 9 + 7 + 10 = 8 \times 5 = 40$, 따라서 $x = 6$. 2) 다섯 자료 6, 8, 9, 7, 10의 편차는 각각 $-2, 0, 1, -1, 2$. 3) 편차의 제곱의 합은 $4 + 0 + 1 + 1 + 4 = 10$ 이고 분산은 $\frac{10}{5} = 2$.

풀이 전략: 미지수가 포함된 자료의 분산 문제는 평균 조건으로 미지수를 먼저 결정한 후 편차 → 편차 제곱 → 합 → 평균의 순서로 분산을 계산한다.

Q163 이차방정식 활용

두 이차방정식 $x^2 - 5x + a = 0$ 과 $x^2 + ax - 5 = 0$ 이 단 하나의 공통근을 가진다. ($a \neq -5$) 이때 그 공통근의 값은?

- ① ①-1
- ② ②0
- ③ ③1
- ④ ④5

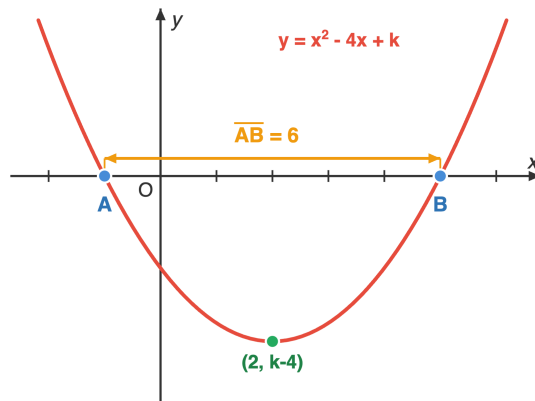
정답: ③1

1) 공통근을 α 라 하면 $\alpha^2 - 5\alpha + a = 0 \dots (가)$, $\alpha^2 + a\alpha - 5 = 0 \dots (나)$ 가 동시에 성립. 2) (나) - (가)를 계산하면 α^2 항이 소거되어 $(a + 5)\alpha - (a + 5) = 0$, 즉 $(a + 5)(\alpha - 1) = 0$. 3) 조건에서 $a \neq -5$ 이므로 $\alpha = 1$. (검산: $\alpha = 1$ 을 (가)에 대입하면 $a = 4$, (나)에 넣으면 $1 + 4 - 5 = 0$ 성립.)

풀이 전략: 두 이차방정식의 공통근 문제는 두 식을 빼서 이차항을 소거하고 일차식으로 환원하는 것이 핵심. 단순한 차감이 정보 추출의 결정적 단계가 된다.

Q164 이차함수 심화

이차함수 $y = x^2 - 4x + k$ 의 그래프가 x 축과 두 점 A, B에서 만나고 $\overline{AB} = 6$ 일 때, 상수 k 의 값을 구하시오.



- ① ①-5
- ② ②-3
- ③ ③3
- ④ ④5

정답: ①-5

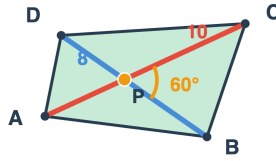
1) 두 교점의 x 좌표를 $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ 라 하면 두 점은 모두 x 축 위에 있으므로 $\overline{AB} = \beta - \alpha = |\alpha - \beta|$. 2) $x^2 - 4x + k = 0$ 의 두 근의 합은 $\alpha + \beta = 4$, 곱은 $\alpha\beta = k$. 따라서 $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 16 - 4k$. 3) $\overline{AB} = 6$ 이므로 $36 = 16 - 4k$, $k = -5$. 판별식 $D = 16 - 4k = 36 > 0$ 으로 두 실근이 실제 존재함도 확인된다.

풀이 전략: 두 근의 차이는 합과 곱만 알면 $\sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta}$ 로 계산 가능. 따라서 두 교점 사이 거리 조건은 미지의 상수에 대한 일차방정식으로 변환된다.

두 근 사이 거리는 판별식의 양의 제곱근을 이차항 계수의 절댓값으로 나눈 값과 같으며, 이는 고등학교 이차곡선의 길이 공식의 토대가 된다.

Q165 삼각비 심화

사각형 ABCD의 두 대각선 AC와 BD의 길이가 각각 10과 8이고, 두 대각선이 이루는 각이 60° 일 때, 사각형 ABCD의 넓이는?



- ① ①20
- ② ② $20\sqrt{2}$
- ③ ③ $20\sqrt{3}$
- ④ ④40

☞ 정답: ③ $20\sqrt{3}$

📖 1) 두 대각선의 교점을 P라 하자. $AP = p_1, CP = p_2, BP = q_1, DP = q_2$ 라 두면 $p_1 + p_2 = 10, q_1 + q_2 = 8$. 사각형은 네 삼각형 $\triangle APB, \triangle BPC, \triangle CPD, \triangle DPA$ 로 분할된다. 2) 교점에서 마주보는 각은 같고 이웃하는 각은 보각이므로 사인값은 모두 $\sin 60^\circ$ 로 같다. 네 삼각형 넓이의 합 $= \frac{1}{2} \sin 60^\circ (p_1 q_1 + q_1 p_2 + p_2 q_2 + q_2 p_1) = \frac{1}{2} \sin 60^\circ (p_1 + p_2)(q_1 + q_2)$. 3) 따라서 사각형 넓이

$$= \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3} .$$

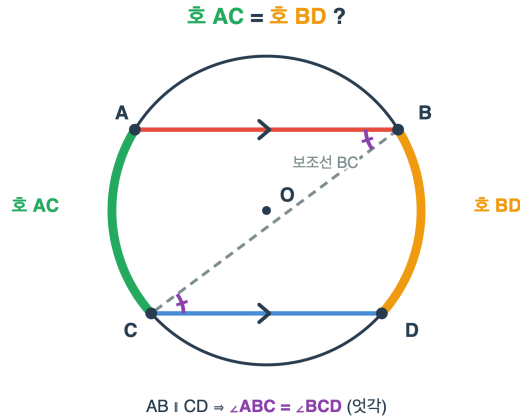
🧠 풀이 전략: 두 대각선이 만든 4개 삼각형 넓이를 모두 같은 사잇각의 사인값으로 묶어 인수분해하면, 임의의 사각형 넓이가 두 대각선의 곱과 사잇각의 사인값만으로 결정됨이 자연스럽게 도출된다.

💡 이 공식은 마름모, 직사각형, 연꼴 등 모든 형태의 사각형에 동일하게 적용되며, 마름모의 경우 사잇각이 90° 라 사인값이 1이 되어 흔히 보던 $\frac{1}{2}d_1 d_2$ 로 단순화된다.

Q166 원의 성질 증명

원 O에서 두 현 AB와 CD가 서로 평행할 때, 호 AC와 호 BD의 길이가 같음을 증명하려고 한다. (단, A, C는 직선 AB, CD의 같은 쪽에 위치) 이 증명에서 결정적으로 사용되는 두 가지 사실은?

- (가) 보조선 BC를 그어 평행선 $AB \parallel CD$ 에서 엇각 $\angle ABC = \angle BCD$ 임을 얻는다.
- (나) 원 안에서 같은 크기의 원주각이 가리키는 호의 길이는 같다.
- (다) 원의 두 반지름은 길이가 같다.
- (라) 접선과 반지름은 접점에서 수직이다.



- ① ①(가), (나)
- ② ②(가), (다)
- ③ ③(나), (라)
- ④ ④(가), (라)

정답: ①(가), (나)

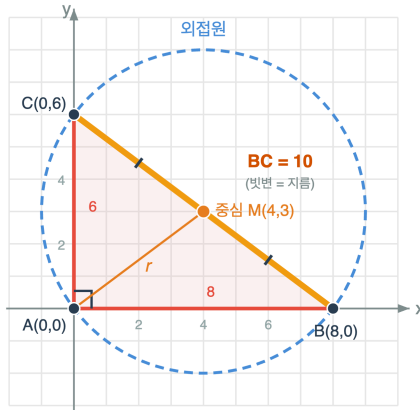
1) 보조선 BC를 그으면 직선 BC가 두 평행선 AB와 CD를 가로지르는 횡단선이 된다. $AB \parallel CD$ 이므로 엇각 정리로 $\angle ABC = \angle BCD$ ((가)). 2) $\angle ABC$ 는 호 AC에 대한 원주각, $\angle BCD$ 는 호 BD에 대한 원주각이다. 3) 두 원주각의 크기가 같으므로 ((나)에 의해) 두 원주각이 가리키는 호의 길이도 같다. 즉 호 AC = 호 BD. 반지름 길이나 접선 성질은 이 증명에 사용되지 않는다.

풀이 전략: 원과 평행선이 결합된 문제는 '평행선 → 엇각 → 같은 원주각 → 같은 호'의 사슬을 따른다. 어떤 보조선을 그어야 엇각이 보이는지 식별하는 것이 첫 번째 관문.

💡 평행한 두 현이 자르는 호의 길이가 같다는 사실은 거꾸로도 성립하여 '같은 호 → 평행한 현'을 보일 수 있고, 이는 원에 내접하는 등변 사다리꼴이 항상 가능함을 의미한다.

Q167 도형 종합 추론

좌표평면 위 세 점 $A(0, 0)$, $B(8, 0)$, $C(0, 6)$ 을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 외접원의 반지름을 구하시오.



- ① ①3
- ② ②4
- ③ ③5
- ④ ④10

정답: ③5

1) AB 는 x 축, AC 는 y 축 위에 있으므로 두 변은 점 A 에서 수직 $\rightarrow \angle BAC = 90^\circ$ 인 직각삼각형. 2) 직각이 그은 호는 반원이므로 (반원에 대한 원주각이 직각인 정리의 역), 직각의 마주변인 빗변 BC 가 외접원의 지름이 된다. 피타고라스 정리로 $BC = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10$. 3) 따라서 외접원의 지름은 10, 반지름은 $\frac{10}{2} = 5$. 외접원의 중심은 빗변 BC 의 중점 $(4, 3)$ 이다.

풀이 전략: 직각삼각형의 외접원은 빗변을 지름으로 한다는 핵심 성질을 활용하면, 길이 계산은 빗변 하나만 구하면 된다. 좌표 위 직각 식별 \rightarrow 피타고라스 \rightarrow 반지름의 단계적 추론.

직각삼각형의 빗변이 외접원의 지름이라는 사실의 역도 성립하며, 이는 '원의 지름에 대한 원주각은 항상 직각'이라는 탈레스의 정리로 알려져 있다.

Q168 통계 심화

어떤 자료의 평균이 m , 표준편차가 σ 이다. 자료의 모든 값에 상수 a 를 더한 후, 양수 b 를 곱하여 새 자료를 만들 때, 새 자료의 평균과 표준편차로 옳은 것은?

- ① ①평균 $m + a$, 표준편차 σ
- ② ②평균 $b(m + a)$, 표준편차 $b\sigma$
- ③ ③평균 $bm + a$, 표준편차 $b\sigma$
- ④ ④평균 $bm + a$, 표준편차 σ

정답: ②평균 $b(m + a)$, 표준편차 $b\sigma$

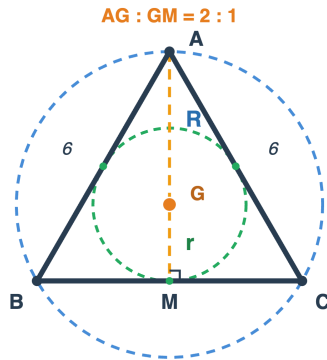
1) 자료 x_i 각각을 $y_i = b(x_i + a)$ 로 변환. 새 평균은 $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum b(x_i + a) = b\left(\frac{1}{n} \sum x_i + a\right) = b(m + a)$. 2) 새 편차는 $y_i - \bar{y} = b(x_i + a) - b(m + a) = b(x_i - m)$. 즉 모든 편차가 b 배 된다. 3) 새 분산은 $\frac{1}{n} \sum [b(x_i - m)]^2 = b^2 \sigma^2$ 이고, $b > 0$ 이므로 새 표준편차는 $b\sigma$.

풀이 전략: 자료에 상수를 더하는 것은 평균만 이동시키고 흩어짐(분산·표준편차)에는 영향이 없다. 자료에 상수배를 하는 것은 평균을 그 배수로, 분산을 그 제곱배로 만든다. 두 변환을 합성하면 평균은 $b(m + a)$, 표준편차는 $|b|\sigma$.

이 성질은 '단위 변환'에서 자주 활용된다. 예: 섭씨를 화씨로 바꿀 때 $F = \frac{9}{5}C + 32$, 표준편차는 $\frac{9}{5}$ 배만큼만 변한다.

Q169 도형 종합 추론

한 변의 길이가 6인 정삼각형의 외접원의 반지름과 내접원의 반지름의 비는?



G : 내심·외심·무게중심·수심이 한 점에서 일치
외접원 $R = 2\sqrt{3}$, 내접원 $r = \sqrt{3}$, $R : r = 2 : 1$

- ① ①1 : 1
- ② ②2 : 1
- ③ ③ $\sqrt{3}$: 1
- ④ ④3 : 1

정답: ②2 : 1

1) 정삼각형은 무게중심·내심·외심·수심이 한 점 G에서 모두 일치한다. 한 꼭짓점 A에서 대변 BC의 중점 M까지 그은 중선의 길이는 $AM = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = 3\sqrt{3}$ (피타고라스). 2) 무게중심은 중선을 꼭짓점 쪽:중점 쪽 = 2:1로 분할하므로 $AG = \frac{2}{3}AM = 2\sqrt{3}$, $GM = \frac{1}{3}AM = \sqrt{3}$. 3) G가 중심이므로 외접원 반지름 $R = AG = 2\sqrt{3}$, 내접원 반지름 $r = GM = \sqrt{3}$. 따라서 $R : r = 2\sqrt{3} : \sqrt{3} = 2 : 1$.

풀이 전략: 정삼각형의 모든 중심이 한 점이라는 강력한 대칭성과 무게중심이 중선을 2:1로 나누는 사실을 결합하면, 별도의 삼각비 계산 없이 두 반지름의 비가 곧바로 도출된다.

💡 정삼각형뿐 아니라 모든 삼각형에서 외심·무게중심·수심은 '오일러 직선'이라는 한 직선 위에 있으며, 무게중심이 외심과 수심 사이를 1:2로 나눈다.

Q170 경시 퍼즐·확률

임의로 모인 13명의 사람을 태어난 달(1월 ~ 12월)로 분류한다. '이 13명 중 같은 달에 태어난 두 사람이 반드시 존재한다'는 결론을 보장하는 수학 원리는?

- ① ①비둘기집 원리(서랍 원리)
- ② ②포함-배제 원리
- ③ ③극단의 원리
- ④ ④수학적 귀납법

정답: ①비둘기집 원리(서랍 원리)

1) 12개월을 12개의 서랍, 13명의 사람을 13개의 물건이라 보자. 2) 만약 어느 두 사람도 같은 달에 태어나지 않았다면, 각 달에 최대 한 명씩 들어가므로 총 인원은 12명을 넘을 수 없다. 3) 그러나 13명이 있으므로 모순. 따라서 적어도 한 달에는 두 명 이상이 함께 들어야 한다. 이것이 'n+1개의 물건을 n개의 서랍에 넣으면 적어도 한 서랍에는 두 개 이상이 들어간다'는 비둘기집 원리.

풀이 전략: 존재성을 보장하는 비구성적 증명. '구체적인 누가 같은 달인가'는 묻지 않고, '그런 사람이 있다'만 결론짓는다. 모순법(귀류법)과 결합되어 작동하는 점이 핵심.

💡 이 원리는 1834년 독일 수학자 디리클레가 정수론 연구에 처음 명시적으로 사용하여 '디리클레의 서랍 원리'로도 불린다. 단순해 보이지만 무리수성, 근삿값, 그래프 이론 등 깊은 정리들의 증명 도구로 활용된다.

Q171 경시 퍼즐·확률

한 학급 30명 중 수학을 좋아하는 학생이 18명, 영어를 좋아하는 학생이 15명이며, 수학과 영어를 모두 싫어하는 학생이 5명이다. 이때 수학과 영어를 모두 좋아하는 학생 수는?

- ① ①5명
- ② ②6명
- ③ ③8명
- ④ ④10명

정답: ③8명

1) 수학 또는 영어 중 적어도 하나를 좋아하는 학생은 전체에서 둘 다 싫어하는 학생을 뺀 수: $30 - 5 = 25$ 명. 즉 $|M \cup E| = 25$. 2) 포함-배제 원리에 의하면 $|M \cup E| = |M| + |E| - |M \cap E|$. 주어진 값 대입: $25 = 18 + 15 - |M \cap E|$. 3) $|M \cap E| = 33 - 25 = 8$. 따라서 두 과목 모두 좋아하는 학생은 8명.

풀이 전략: 두 집합의 합집합 크기는 단순히 두 집합 크기를 더하면 교집합이 두 번 세어지므로 한 번 빼야 한다. 전체 - 여집합으로 합집합을 먼저 구한 뒤 포함-배제 식으로 교집합을 뽑아낸다.

포함-배제 원리는 두 집합을 넘어 n 개 집합으로 일반화되며, 부호를 번갈아 더하고 빼는 형태로 확률, 정수론, 조합론에서 광범위하게 활용된다.

Q172 실수·근호 추론

$\sqrt{12 + 2\sqrt{35}}$ 를 간단한 꼴로 나타내면?

- ① ① $\sqrt{7} - \sqrt{5}$
- ② ② $\sqrt{7} + \sqrt{5}$
- ③ ③ $\sqrt{12} + \sqrt{35}$
- ④ ④ $2\sqrt{3}$

정답: ② $\sqrt{7} + \sqrt{5}$

1단계: $\sqrt{a + b + 2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ (단, $a, b \geq 0$)을 이용하기 위해 안쪽 12를 두 양수의 합, 35를 그 두 양수의 곱으로 분해한다. 2단계: $a + b = 12$, $ab = 35$ 를 만족하는 두 수는 $a = 7$, $b = 5$ 이다. 3단계: 따라서

$$\sqrt{12 + 2\sqrt{35}} = \sqrt{7 + 5 + 2\sqrt{7 \cdot 5}} = \sqrt{7} + \sqrt{5} .$$

풀이 전략: 이중근호의 안쪽 식을 $a + b + 2\sqrt{ab}$ 꼴로 만드는 것이 핵심. 합이 12, 곱이 35인 두 수를 찾기 위해 35의 약수쌍 (1,35), (5,7)을 검토하면 합이 12인 쌍은 (5,7)뿐이다.

이중근호 풀기는 16세기 카르다노가 삼차방정식의 해를 정리하면서 체계적으로 다루기 시작했다.

Q173 이차방정식 활용

두 이차방정식 $x^2 - 3x + a = 0$ 과 $x^2 + ax - 3 = 0$ 이 적어도 하나의 공통근을 가질 때, 가능한 모든 실수 a 의 값의 합은?

- ① ① -3
- ② ② -1
- ③ ③ 1
- ④ ④ 2

정답: ② -1

1단계: 두 식을 빼면 $-(a + 3)x + (a + 3) = 0$, 즉 $(a + 3)(1 - x) = 0$. 2단계: $a \neq -3$ 이면 공통근은 $x = 1$ 이고, 첫 번째 식에 대입하면 $1 - 3 + a = 0$ 이므로 $a = 2$. 3단계: $a = -3$ 이면 두 식이 모두 $x^2 - 3x - 3 = 0$ 로 동일해져 두 근이 모두 공통이므로 $a = -3$ 도 조건을 만족. 따라서 합은 $2 + (-3) = -1$.

풀이 전략: 두 식을 빼서 차수가 낮은 식을 얻고, 그 식의 해가 공통근의 후보가 됨을 이용. 단, 두 식이 항등적으로 같아지는 특수한 a 값을 놓치면 안 된다.

두 다항식의 공통근을 일반화한 개념이 종결식(resultant)이며, 고등학교 이후 대수학에서 중요한 도구로 발전한다.

Q174 인수분해 심화

실수 x 가 $x + \frac{1}{x} = 4$ 를 만족하고 $x > 1$ 일 때, $x^3 - \frac{1}{x^3}$ 의 값은?

- ① ① 18
- ② ② $30\sqrt{3}$
- ③ ③ 52
- ④ ④ $56\sqrt{3}$

정답: ② $30\sqrt{3}$

1단계: $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4 = 16 - 4 = 12$ 이고 $x > 1 > \frac{1}{x}$ 이므로 $x - \frac{1}{x} = 2\sqrt{3}$. 2단계:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 16 - 2 = 14. \text{ 3단계: } x^3 - \frac{1}{x^3} = \left(x - \frac{1}{x}\right)\left(x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}\right) = 2\sqrt{3} \cdot (14 + 1) = 30\sqrt{3}.$$

풀이 전략: 세제곱의 차 공식 $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ 를 $a = x, b = \frac{1}{x}$ 에 적용. 미리 $x - \frac{1}{x}$ 와 $x^2 + \frac{1}{x^2}$ 를 합·차 변환으로 구해두는 것이 관건. 부호 결정에서 $x > 1$ 조건을 반드시 활용.

💡 $x + \frac{1}{x}$ 와 $x - \frac{1}{x}$ 의 관계는 후에 쌍곡선함수의 합/차 공식으로 일반화된다.

Q175 이차방정식 활용

이차방정식 $x^2 + (k - 3)x + k = 0$ 의 두 근이 모두 정수가 되도록 하는 정수 k 의 개수는?

- ① ① 2
- ② ② 3
- ③ ③ 4
- ④ ④ 5

정답: ③ 4

1단계: 두 정수근의 합이 $-(k - 3) = 3 - k$, 곱이 k 이므로 k 는 정수. 두 근이 정수이려면 판별식

$$D = (k - 3)^2 - 4k = k^2 - 10k + 9 \text{가 완전제곱수여야 한다. 2단계: } D = m^2 \ (m \geq 0) \text{으로 놓으면 } (k - 5)^2 - m^2 = 16, \text{ 즉}$$

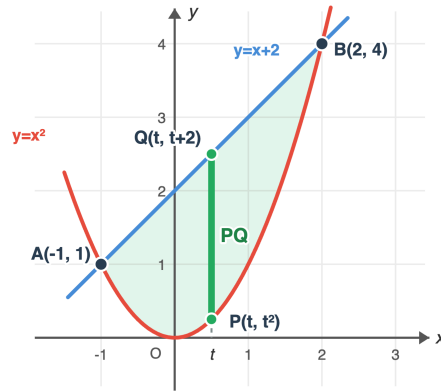
$(k - 5 - m)(k - 5 + m) = 16$. 두 인수의 합이 $2(k - 5)$ 로 짝수이므로 두 인수는 같은 홀짝성. 16을 두 짝수의 곱으로 분해하는 경우는 $(2, 8), (4, 4), (-8, -2), (-4, -4)$. 3단계: 각각 풀면 $k = 10, 9, 0, 1$. 직접 인수분해해 확인하면 $k = 10$: 근 $-2, -5, k = 9$: 중근 $-3, k = 0$: 근 $0, 3, k = 1$: 중근 1 로 모두 정수. 따라서 정수 k 는 4개.

풀이 전략: 두 근이 정수이면 합과 곱도 정수이므로 k 는 정수. 정수 계수 이차방정식이 정수근을 가질 필요충분조건은 판별식이 완전제곱수. $D = (k - 5)^2 - 16$ 꼴로 묶어 $A^2 - B^2 = 16$ 의 인수분해를 활용하면 유한개의 경우로 환원된다.

💡 정수해를 갖는 디오판토스 방정식 풀이의 가장 기본적 도구가 바로 '차의 곱' 인수분해이며, 페르마의 무한강하법의 출발점이기도 하다.

Q176 이차함수 심화

포물선 $y = x^2$ 위의 두 점 A(-1, 1), B(2, 4)를 잇는 직선과, A에서 B까지 가는 포물선의 곡선 부분 사이에 점 $P(t, t^2)$ ($-1 < t < 2$)가 있다. 점 P를 지나며 y축에 평행한 직선이 직선 AB와 만나는 점을 Q라 할 때, 선분 PQ의 길이의 최댓값은?



- ① ① $\frac{1}{2}$
- ② ② 2
- ③ ③ $\frac{9}{4}$
- ④ ④ 3

정답: ③ $\frac{9}{4}$

1단계: 직선 AB의 기울기는 $\frac{4-1}{2-(-1)} = 1$, 점 A를 지나므로 식은 $y = x + 2$. 2단계: $P(t, t^2)$ 에서 y축에 평행하게 올라가 만나는 직선 AB 위 점은 $Q(t, t+2)$. $-1 < t < 2$ 일 때 $t^2 < t+2$ 이므로 $PQ = (t+2) - t^2 = -t^2 + t + 2$. 3단계: 완전제곱식으로 변형하면 $-t^2 + t + 2 = -\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$. $t = \frac{1}{2}$ 일 때 최댓값 $\frac{9}{4}$. (이 값은 구간 $(-1, 2)$ 안에 있어 조건 만족.)

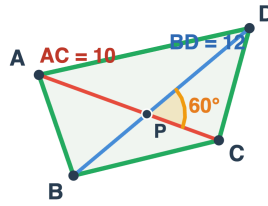
풀이 전략: 두 점이 정해진 직선과 포물선 사이의 수직 간격(y축 평행 간격)은 두 식의 차로 표현 가능. 결과적으로 이차식의 최댓값 문제로 환원되며, 완전제곱식 변형이 핵심 수단.

이 문제처럼 포물선과 현 사이의 간격이 최대가 되는 점은 후일 적분에서 포물선 활꼴 넓이를 두 부분으로 나누는 기준점으로 등장한다.

Q177 삼각비 심화

사각형 ABCD에서 두 대각선 AC, BD의 길이가 각각 10, 12이고 두 대각선이 이루는 예각이 60°일 때, 사각형 ABCD의 넓이는?
(단, ABCD는 볼록사각형이다.)

넓이 = ?



- ① ① $30\sqrt{2}$
- ② ② $30\sqrt{3}$
- ③ ③ 60
- ④ ④ $60\sqrt{3}$

정답: ② $30\sqrt{3}$

1단계: 두 대각선의 교점 P가 AC를 $a:(10-a)$ 로, BD를 $b:(12-b)$ 로 나눈다고 하자. 두 대각선이 만드는 4개의 삼각형 각각의 넓이는 두 변과 끼인각 60° (또는 보각 120°)의 사인값을 이용해 $\frac{1}{2} \cdot (\text{변}) \cdot (\text{변}) \cdot \sin 60^\circ$ 로 표현. 2단계: 4개를 모두 더하면

$$\frac{1}{2} \sin 60^\circ \cdot [a \cdot b + a(12-b) + (10-a)b + (10-a)(12-b)] = \frac{1}{2} \sin 60^\circ \cdot 10 \cdot 12. \text{ 3단계: 따라서 사각형 넓이}$$

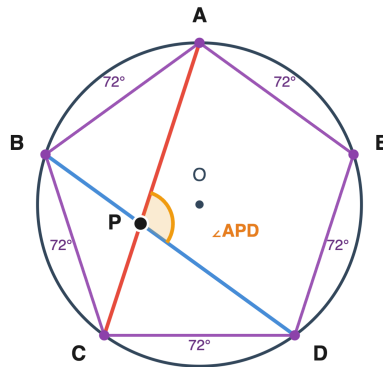
$$= \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 \cdot \sin 60^\circ = 60 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 30\sqrt{3}.$$

풀이 전략: 두 대각선이 교차하는 일반 볼록사각형은 4개의 삼각형으로 분할되며, 각 삼각형의 두 변은 대각선의 부분이고 끼인각은 60° 또는 120° (sin 값 동일). 합산을 인수분해하면 변의 분할에 무관하게 $\frac{1}{2}d_1d_2\sin\theta$ 로 정리됨이 핵심 통찰.

이 공식은 볼록·오목 여부와 상관없이 두 대각선이 만나는 모든 사각형에 일반화되며, 마름모와 정사각형 넓이 공식이 모두 그 특수한 경우다.

Q178 원의 성질 증명

원 O 에 차례로 내접하는 정오각형 $ABCDE$ 의 두 대각선 AC 와 BD 의 교점을 P 라 할 때, $\angle APD$ 의 크기는?



- ① ① 72°
- ② ② 90°
- ③ ③ 108°
- ④ ④ 120°

정답: ③ 108°

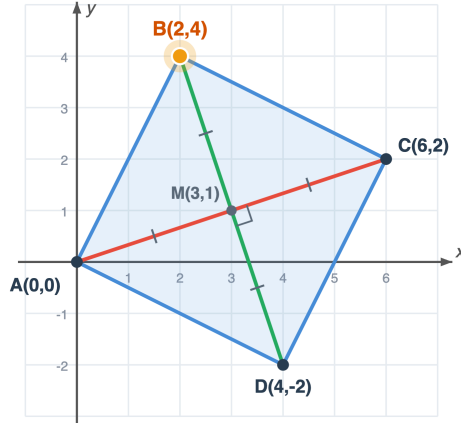
1단계: 정오각형이 원에 내접하므로 다섯 호의 길이가 모두 같고 각각의 중심각은 $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$. **2단계:** 두 현 AC, BD 가 원 내부 점 P 에서 만나므로 $\angle APD = \frac{1}{2}(\text{호 } AD + \text{호 } BC)$. 단 호 AD 는 점 B, C 를 포함하지 않는 쪽(호 AED). **3단계:** 호 $AED = \text{호 } AE + \text{호 } ED = 72^\circ + 72^\circ = 144^\circ$, 호 $BC = 72^\circ$ 이므로 $\angle APD = \frac{144^\circ + 72^\circ}{2} = 108^\circ$.

풀이 전략: 두 현이 원 내부에서 교차해 만드는 각은 양 끝의 두 호 합的一半이라는 정리(원주각 정리의 따름정리)를 적용. 어느 호를 더해야 하는지 정확히 식별하는 것이 핵심: 각 $\angle APD$ 는 점 A 와 D 를 잇는 호 중 점 B, C 를 포함하지 않는 호와, 다른 끝점 B, C 사이의 호를 더해야 한다.

💡 정오각형의 한 내각이 108° 인 것과 정확히 일치한다. 정오각형 대각선이 만들어내는 비율은 황금비 $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ 이다.

Q179 도형 종합 추론

좌표평면 위 정사각형 ABCD에서 마주 보는 두 꼭짓점 A(0, 0), C(6, 2)이다. 점 B의 좌표는? (단, B는 직선 AC를 기준으로 D보다 위쪽에 있다.)



- ① ① (1, 5)
- ② ② (2, 4)
- ③ ③ (4, -2)
- ④ ④ (5, 1)

정답: ② (2, 4)

1단계: 정사각형의 두 대각선은 서로를 수직 이등분한다. AC의 중점 $M = \left(\frac{0+6}{2}, \frac{0+2}{2}\right) = (3, 1)$ 이 곧 BD의 중점. 2단계: 대각선

AC의 방향벡터는 (6, 2)이고 길이는 $|AC| = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$. 이에 수직이고 위쪽을 향하는 단위벡터는 $\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$. 3단계:

$|BD| = |AC| = 2\sqrt{10}$ 이므로 B는 M에서 위쪽 방향으로 $\sqrt{10}$ 만큼 이동한 점:

$$B = (3, 1) + \sqrt{10} \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right) = (3 - 1, 1 + 3) = (2, 4).$$

풀이 전략: 정사각형 두 대각선의 핵심 성질(서로 수직, 같은 길이, 서로 이등분)을 좌표로 풀어내는 문제. AC 방향에 수직인 단위벡터를 구하고, 그 방향으로 대각선의 절반 길이만큼 중점에서 떨어진 점이 B와 D. B는 위쪽 조건으로 부호 결정.

이 풀이의 '90도 회전' 아이디어는 복소수 곱 i 의 기하학적 의미와 같다. 점 $C - A$ 를 90° 회전하면 $i(C - A)$ 가 되고, 그 절반을 중점에 더한 점이 B이다.

Q180 통계 심화

5개의 변량 2, 4, 6, 8, 10의 평균은 6, 분산은 8이다. 이 자료에 변량 6 하나를 추가한 6개 변량 자료의 분산은?

- ① ① $\frac{20}{3}$
- ② ② $\frac{40}{7}$
- ③ ③ 8
- ④ ④ $\frac{38}{3}$

정답: ① $\frac{20}{3}$

1단계: 원래 자료의 편차 제곱합 = (자료 수) × (분산) = $5 \times 8 = 40$. **2단계:** 새로 추가하는 변량 6이 원래 평균과 같으므로 새 평균도 그대로 6. 추가된 변량의 편차는 0이므로 편차 제곱합은 변하지 않고 그대로 40. **3단계:** 자료 수만 6개로 늘었으므로 새 분산 = $\frac{40}{6} = \frac{20}{3}$.

풀이 전략: 평균과 같은 값을 자료에 추가하면 평균은 그대로, 편차 제곱합도 그대로 유지된다. 따라서 분산은 자료 수 비율만큼만 줄어든다. 분산의 정의(편차 제곱의 평균)로 거슬러 올라가 분자와 분모의 변화를 따로 추적하는 것이 핵심.

표본 수가 늘면서도 평균이 보존되도록 자료를 추가하면 분산은 항상 감소한다. 통계학에서 '평균에 가까운 관측을 더 많이 모으면 산포도가 줄어든다'는 직관과 정확히 일치.

Q181 경시 퍼즐·확률

50명의 학생을 대상으로 수학(M), 영어(E), 과학(S) 선호도를 조사했다. 수학 선호 30명, 영어 선호 25명, 과학 선호 20명이고, 둘씩 동시에 선호하는 학생은 수학·영어 15명, 영어·과학 10명, 수학·과학 12명이며, 세 과목 모두 선호하는 학생은 5명이다. 세 과목 중 어느 것도 선호하지 않는 학생 수는?

- ① ① 5
- ② ② 7
- ③ ③ 10
- ④ ④ 13

정답: ② 7

1단계: 포함-배제 원리에 따라 $|M \cup E \cup S| = |M| + |E| + |S| - |M \cap E| - |E \cap S| - |M \cap S| + |M \cap E \cap S|$. **2단계:** 대입하면 $30 + 25 + 20 - 15 - 10 - 12 + 5 = 75 - 37 + 5 = 43$. **3단계:** 어느 과목도 선호하지 않는 학생 수 = 전체 - 합집합 = $50 - 43 = 7$.

풀이 전략: 세 집합의 합집합 크기를 직접 세는 대신, 각각의 집합 크기를 더하고 둘씩 겹친 부분을 빼며 셋이 동시에 겹친 부분이 한 번 더 빠져 사라진 만큼 다시 더해 보정한다. 보정 항의 부호가 교대로 바뀌는 패턴이 포함-배제 원리의 본질.

포함-배제 원리는 세 집합을 넘어 일반적인 n 개의 집합으로 확장되며, 부호 교대 패턴은 이항계수 $(-1)^k \binom{n}{k}$ 에 자연스럽게 대응한다.

Q182 실수·근호 추론

$\sqrt{3}$ 이 무리수임을 귀류법으로 증명하기 위해 $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$ (p, q 는 서로소인 양의 정수)라 가정한 후 양변을 제곱하여 $p^2 = 3q^2$ 을 얻었다. 이로부터 모순을 이끌어내는 핵심 단계로 가장 적절한 것은?

- ① ① p^2 이 짝수이므로 p 가 짝수이고, 그러면 q 도 짝수가 되어 p, q 가 서로소라는 가정에 모순이다.
- ② ② p^2 이 3의 배수이므로 p 가 3의 배수이다. $p = 3p'$ 이라 두면 $9p'^2 = 3q^2$, 즉 $q^2 = 3p'^2$ 이므로 q 도 3의 배수가 되어 p, q 가 서로소라는 가정에 모순이다.
- ③ ③ p^2 이 3의 배수이므로 q 가 3의 배수이고, 따라서 p 도 3의 배수이다.
- ④ ④ p 가 정수이므로 p^2 도 정수이고, $3q^2$ 이 정수이므로 양변이 정수가 되어 모순이다.

정답: ② p^2 이 3의 배수이므로 p 가 3의 배수이다. $p = 3p'$ 이라 두면 $9p'^2 = 3q^2$, 즉 $q^2 = 3p'^2$ 이므로 q 도 3의 배수가 되어 p, q 가 서로소라는 가정에 모순이다.

1단계: $p^2 = 3q^2$ 의 좌변이 3의 배수이고, 3은 소수이므로 ' p^2 이 3의 배수이면 p 도 3의 배수'라는 정수론적 사실을 이용한다(이는 ①의 짝수 논법 대신 3의 배수에 대한 논법으로 바꿔야 함을 보여 준다). **2단계:** $p = 3p'$ 로 놓고 식에 대입하면 $9p'^2 = 3q^2$, 양변을 3으로 나누면 $q^2 = 3p'^2$ 이므로 같은 논리로 q 도 3의 배수. **3단계:** p, q 가 모두 3의 배수가 되어 서로소라는 가정에 모순. 따라서 $\sqrt{3}$ 은 유리수가 아니다.

풀이 전략: 귀류법은 결론의 부정을 가정해 모순을 끌어내는 기법. $\sqrt{3}$ 이 유리수라 가정하면 기약분수 $\frac{p}{q}$ 로 쓸 수 있고, 양변 제곱해 $p^2 = 3q^2$. 핵심은 '소수 r 에 대해 $r \mid p^2 \Rightarrow r \mid p$ '로, $r = 2$ 가 아닌 $r = 3$ 에 대해서도 적용된다는 점. 한쪽(p)에서만 약수가 나오면 안 되고, 양쪽 모두 같은 약수 3을 가져 서로소 가정을 깨야 비로소 모순이다.

같은 논법으로 임의의 소수 r 에 대해 \sqrt{r} 이 무리수임을 증명할 수 있고, 더 일반적으로 \sqrt{n} 이 유리수일 필요충분조건은 n 이 완전제곱수임을 보일 수 있다.

Q183 경시 퍼즐·확률

한 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 $\frac{1}{3}$ 이다. 이 시행을 5번 독립적으로 반복할 때, 사건 A가 정확히 2번 일어날 확률은?

- ① ① $\frac{40}{243}$
- ② ② $\frac{80}{243}$
- ③ ③ $\frac{20}{81}$
- ④ ④ $\frac{2}{5}$

정답: ② $\frac{80}{243}$

1단계: 5번 시행 중 사건 A가 일어나는 시행 두 번을 고르는 경우의 수는 $\binom{5}{2} = 10$. **2단계:** 고른 두 번의 시행에서는 A가 일어나야 하므로 $\left(\frac{1}{3}\right)^2$, 나머지 세 번의 시행에서는 A가 일어나지 않아야 하므로 $\left(\frac{2}{3}\right)^3$. 한 가지 경우의 확률은 $\frac{1}{9} \cdot \frac{8}{27} = \frac{8}{243}$. **3단계:** 전체 확률 = $10 \cdot \frac{8}{243} = \frac{80}{243}$.

풀이 전략: 독립시행에서 사건 A가 정확히 k 번 일어날 확률은 $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. 시행이 독립이므로 각 시행의 확률을 곱하고, 어느 시행에서 일어나는지 위치를 고르는 경우의 수를 곱해 더해 준다.

이 식은 이항분포의 핵심 공식이며, n 을 키우고 p 를 적절히 줄이면 푸아송 분포로, n 이 매우 크고 p 가 $\frac{1}{2}$ 부근이면 정규분포로 수렴한다.

Q184 실수·근호 추론

$\sqrt{12}$ 의 소수부분을 a 라 할 때, $a^2 + 6a$ 의 값을 구하시오.

- ① ① 1
- ② ② 3
- ③ ③ 5
- ④ ④ 9

정답: ② 3

1단계: $\sqrt{12} = 2\sqrt{3} \approx 3.46$ 이므로 정수부분은 3, 소수부분은 $a = 2\sqrt{3} - 3$.

2단계: $a + 3 = 2\sqrt{3}$ 이므로 양변을 제곱하면 $(a + 3)^2 = 12$.

3단계: $a^2 + 6a + 9 = 12$ 이므로 $a^2 + 6a = 3$.

풀이 전략: 소수부분 a 를 직접 제곱·곱셈으로 풀기보다 ' $a + 3 = 2\sqrt{3}$ '으로 정리하여 양변을 제곱하면 무리수항이 사라진다. 식을 정수꼴로 만드는 변형이 핵심.

이런 식 변형은 고등학교에서 분모 유리화·켈레쌍을 다룰 때 자주 등장한다.

Q185 인수분해 심화

$x^4 + 4y^4$ 를 정수 계수인 두 이차식의 곱으로 인수분해하시오.

- ① ① $(x^2 + 2y^2)^2$
- ② ② $(x^2 + 2xy + 2y^2)(x^2 - 2xy + 2y^2)$
- ③ ③ $(x^2 + y^2)(x^2 + 4y^2)$
- ④ ④ $(x^2 + 2y^2)(x^2 - 2y^2)$

정답: ② $(x^2 + 2xy + 2y^2)(x^2 - 2xy + 2y^2)$

1단계: $x^4 + 4y^4$ 그대로는 인수분해가 어려우므로 보조항 $4x^2y^2$ 을 더하고 빼서 변형한다.

2단계: $x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4 - 4x^2y^2 = (x^2 + 2y^2)^2 - (2xy)^2$.

3단계: 차의 제곱 공식 $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$ 를 적용하면

$(x^2 + 2y^2 + 2xy)(x^2 + 2y^2 - 2xy) = (x^2 + 2xy + 2y^2)(x^2 - 2xy + 2y^2)$.

풀이 전략: 직접 인수분해가 안 되는 4차식은 '완전제곱식 + 차의 제곱' 꼴로 보정 항을 추가하여 분해한다. $A^2 - B^2$ 모양을 만들 보조항을 찾는 것이 핵심 전략이다.

이 항등식은 19세기 수학자 소피 제르맹의 이름을 딴 형태로 알려져 있다. 실제로 $4y^4$ 자리에 임의의 $4b^4$ 을 두어도 같은 방식으로 분해된다.

Q186 이차방정식 활용

이차방정식 $x^2 - (a + 1)x + a = 0$ 의 두 근의 제곱의 합이 5일 때, 모든 실수 a 의 값의 합은?

- ① ① -2
- ② ② 0
- ③ ③ 2
- ④ ④ 4

정답: ② 0

1단계: 두 근을 α, β 라 하면 비에타 관계식에서 $\alpha + \beta = a + 1, \alpha\beta = a$.

2단계: $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (a + 1)^2 - 2a = a^2 + 1$.

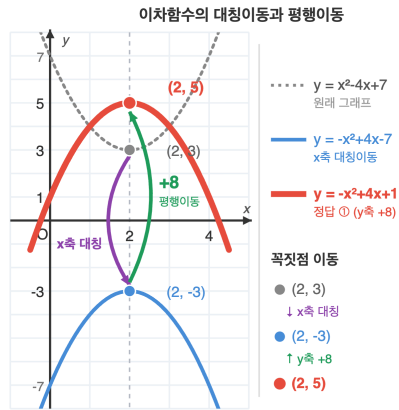
3단계: 조건 $a^2 + 1 = 5$ 에서 $a^2 = 4, a = \pm 2$. 판별식 $D = (a + 1)^2 - 4a = (a - 1)^2 \geq 0$ 이므로 두 값 모두 실근 조건을 만족하고, 합 = $2 + (-2) = 0$.

풀이 전략: 두 근의 제곱의 합은 두 근의 합과 곱만으로 표현할 수 있는 대표적 변형식이다. 합·곱을 a 의 식으로 두고 조건식을 세우면 a 에 대한 이차식이 나오며, 실근 조건도 빼먹지 말 것.

$\alpha^n + \beta^n$ 꼴의 식은 합·곱만으로 점화식 형태로 표현할 수 있어, 수능과 경시에서 단골 도구로 쓰인다.

Q187 이차함수 심화

이차함수 $y = x^2 - 4x + 7$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후, 다시 y 축 방향으로 8만큼 평행이동한 그래프의 식은?



- ① ① $y = -x^2 + 4x + 1$
- ② ② $y = -x^2 + 4x - 1$
- ③ ③ $y = x^2 - 4x + 15$
- ④ ④ $y = -x^2 - 4x + 1$

정답: ① $y = -x^2 + 4x + 1$

1단계: 원래 식을 표준형으로 정리하면 $y = (x - 2)^2 + 3$, 꼭짓점 (2, 3).

2단계: x 축 대칭이동은 $y \rightarrow -y$ 이므로 식은 $y = -(x - 2)^2 - 3 = -x^2 + 4x - 7$, 꼭짓점 (2, -3).

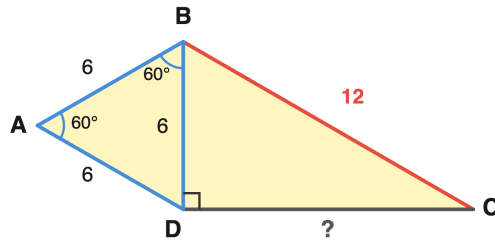
3단계: y 축 방향으로 +8 평행이동하면 식의 상수항에 +8. $y = -x^2 + 4x - 7 + 8 = -x^2 + 4x + 1$, 꼭짓점 (2, 5).

풀이 전략: 그래프 이동 합성은 표준형 꼭짓점 추적이 가장 빠르다. x 축 대칭은 꼭짓점 y 좌표 부호 반전 + 그래프 위아래 뒤집기, 평행 이동은 좌표 가산. 마지막에 일반형으로 환원한다.

💡 두 변환을 거꾸로 적용해도 결과가 같지는 않다. 대칭과 평행이동은 일반적으로 비가환적이라 순서가 답을 바꾼다.

Q188 삼각비 심화

사각형 ABCD에서 $\triangle ABD$ 는 한 변의 길이가 6인 정삼각형이고, $\angle BDC = 90^\circ$, $BC = 12$ 이다. 사각형 ABCD의 넓이를 구하시오.



- ① $18\sqrt{3}$
- ② $24\sqrt{3}$
- ③ $27\sqrt{3}$
- ④ $36\sqrt{3}$

정답: ③ $27\sqrt{3}$

1단계: $\triangle ABD$ 는 한 변 6의 정삼각형이므로 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 6^2 = 9\sqrt{3}$. 또한 $BD = 6$.

2단계: $\triangle BCD$ 는 $\angle BDC = 90^\circ$ 인 직각삼각형. $BD = 6$, 빗변 $BC = 12$ 이므로 피타고라스 정리에 의해

$$CD = \sqrt{144 - 36} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}.$$

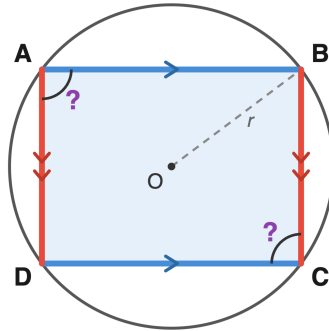
3단계: $\triangle BCD$ 의 넓이 $= \frac{1}{2} \cdot BD \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$. 따라서 사각형 ABCD의 넓이 $= 9\sqrt{3} + 18\sqrt{3} = 27\sqrt{3}$.

풀이 전략: 공통 변(여기서는 BD)을 매개로 두 삼각형으로 나눠 각각 넓이를 구한 뒤 합산한다. 한쪽은 정삼각형 넓이 공식, 다른 쪽은 피타고라스로 다리 길이를 찾고 직각삼각형 넓이 공식을 쓴다.

💡 $BD:BC = 1:2$ 인 직각삼각형은 $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ 비율을 가지므로 $CD:BD = \sqrt{3}:1$ 이 자동으로 성립한다.

Q189 원의 성질 증명

원 O 에 내접하는 평행사변형 $ABCD$ 가 있다. $\angle A$ 의 크기를 구하고, 사각형 $ABCD$ 가 직사각형임을 보이시오.



- ① ① 60°
- ② ② 75°
- ③ ③ 90°
- ④ ④ 120°

정답: ③ 90°

1단계: 사각형 $ABCD$ 가 원에 내접하면 마주보는 두 각의 합은 180° . 즉 $\angle A + \angle C = 180^\circ$.

2단계: $ABCD$ 가 평행사변형이므로 마주보는 두 각은 같다. 즉 $\angle A = \angle C$.

3단계: 두 식을 합치면 $2\angle A = 180^\circ$ 이므로 $\angle A = 90^\circ$. 같은 논리로 $\angle B = \angle D = 90^\circ$. 네 각이 모두 직각이므로 평행사변형 $ABCD$ 는 직사각형이다.

풀이 전략: 원에 내접하는 사각형의 '대각의 합 = 180° '와 평행사변형의 '대각이 같다' 두 성질을 결합한다. 두 조건을 동시에 만족하려면 모든 각이 90° 가 될 수밖에 없다는 결론에 이른다.

마름모는 평행사변형이지만 원에 내접하려면 정사각형이어야 한다. 이는 마름모의 한 각이 90° 일 때만 가능함을 의미한다.

Q190 통계 심화

다섯 개의 변량 a, b, c, d, e 의 평균이 6, 표준편차가 2이다. 각 변량을 $y_i = 3x_i + 1$ 로 변환했을 때 새 자료의 평균과 분산을 각각 구하시오.

- ① ① 평균 19, 분산 36
- ② ② 평균 19, 분산 12
- ③ ③ 평균 18, 분산 36
- ④ ④ 평균 7, 분산 4

정답: ① 평균 19, 분산 36

1단계: 자료에 일정 상수 a 를 곱하고 b 를 더하는 일차변환 $y_i = ax_i + b$ 에서 새 평균은 원래 평균에 같은 변환을 적용한 값이다.

$$y = 3x + 1 = 3 \cdot 6 + 1 = 19.$$

2단계: 분산은 평행이동(상수항 b)에 영향을 받지 않고 곱셈 상수의 제곱배가 된다. 원 분산 = $2^2 = 4$ 이므로 새 분산 = $3^2 \cdot 4 = 36$.

3단계: 따라서 새 자료의 평균은 19, 분산은 36이다.

풀이 전략: 일차변환 $aX + b$ 에서 평균과 분산은 다음과 같이 변한다: '평균은 같은 변환', '분산은 a^2 배, b 무관'. 표준편차는 분산의 양의 제곱근이라 $|a|$ 배로 변한다.

마름모는 평행이동에 영향받지 않는 이유는 '편차'(평균에서 떨어진 거리)가 평균과 같이 움직이기 때문이다.

Q191 경시 퍼즐·확률

1부터 200까지의 자연수 중에서 2의 배수도 3의 배수도 5의 배수도 아닌 자연수의 개수는?

- ① ① 49
- ② ② 53
- ③ ③ 54
- ④ ④ 60

정답: ③ 54

1단계: 200 이하의 각 배수 개수: 2의 배수 100개, 3의 배수 66개, 5의 배수 40개.

2단계: 두 수의 공배수: 6의 배수 33개, 10의 배수 20개, 15의 배수 13개. 세 수 공배수: 30의 배수 6개.

3단계: 포함-배제 원리에 의해 2 또는 3 또는 5의 배수의 개수 = $100 + 66 + 40 - 33 - 20 - 13 + 6 = 146$. 따라서 어느 것의 배수도 아닌 수의 개수 = $200 - 146 = 54$.

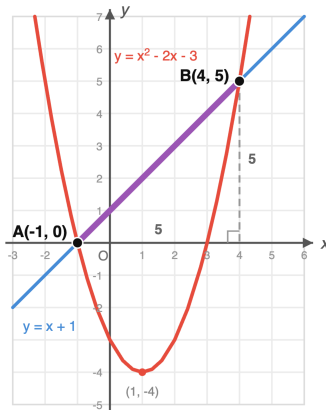
풀이 전략: 여러 조건의 합집합 크기는 단순 덧셈이 안 된다. 포함-배제 공식

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|$ 를 그대로 적용하고, 마지막에 전체에서 빼면 여집합의 크기.

오일러 토션트 함수 $\phi(n)$ 도 같은 원리에서 유도된다. 예를 들어 $\phi(30) = 30 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = 8$.

Q192 이차함수 심화

이차함수 $y = x^2 - 2x - 3$ 의 그래프와 직선 $y = x + 1$ 이 두 점 A, B에서 만난다. 선분 AB의 길이를 구하시오.



- ① ① 5
- ② ② $\sqrt{34}$
- ③ ③ $5\sqrt{2}$
- ④ ④ 7

정답: ③ $5\sqrt{2}$

1단계: 두 그래프의 교점에서 $x^2 - 2x - 3 = x + 1$ 이므로 $x^2 - 3x - 4 = 0$. 인수분해하면 $(x - 4)(x + 1) = 0$ 이므로 $x = -1$ 또는 $x = 4$.

2단계: 직선 $y = x + 1$ 에 대입하면 $x = -1$ 일 때 $y = 0$, $x = 4$ 일 때 $y = 5$. 따라서 $A(-1, 0)$, $B(4, 5)$.

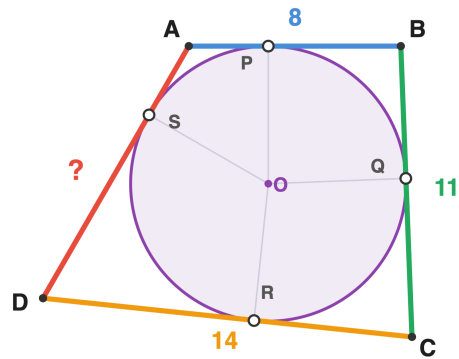
3단계: 두 점 사이 거리 $AB = \sqrt{(4 - (-1))^2 + (5 - 0)^2} = \sqrt{25 + 25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

풀이 전략: 직선과 곡선의 교점은 두 식을 연립한 이차방정식의 해 x 좌표로 잡힌다. 그 뒤 직선 식에 대입해 y 값을 얻고 두 점 거리 공식으로 길이를 쟀다. 답은 가장 간단한 형태로 정리.

기울기 1인 직선 위 두 점의 거리는 $|x_2 - x_1|\sqrt{2}$ 로 즉시 계산할 수 있다. 여기서도 $|4 - (-1)|\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$.

Q193 원의 성질 증명

사각형 $ABCD$ 가 원에 외접한다. $AB = 8$, $BC = 11$, $CD = 14$ 일 때, 변 DA 의 길이를 구하시오.



- ① ① 8
- ② ② 9
- ③ ③ 11
- ④ ④ 13

정답: ③ 11

1단계: 한 점에서 원에 그은 두 접선의 길이는 같다. 접점을 $P(AB$ 위), $Q(BC)$, $R(CD)$, $S(DA)$ 라 하면 $AP = AS$, $BP = BQ$, $CQ = CR$, $DR = DS$.

2단계: 위 등식을 사용해

$$AB + CD = (AP + PB) + (CR + RD) = (AS + BQ) + (CQ + DS) = (AS + DS) + (BQ + CQ) = AD + BC.$$

3단계: 즉 외접 사각형에서 $AB + CD = BC + DA$ 가 성립한다. $8 + 14 = 11 + DA$ 이므로 $DA = 11$.

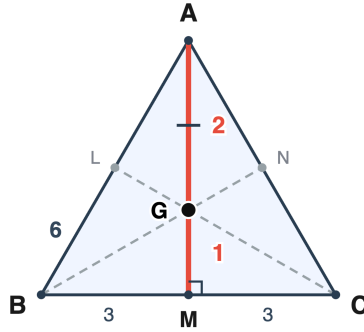
풀이 전략: 원에 외접하는 사각형의 핵심 성질은 ' 마주보는 변의 합이 같다'. 이는 한 점에서 원에 그은 두 접선의 길이가 같다는 사실에서 바로 따른다. 증명 흐름을 떠올리며 공식을 적용한다.

이 성질은 모든 외접 다각형으로 일반화되지는 않는다. 외접 육각형에서는 '한 칸 건너뛴 변의 합이 같다'는 형태로 변형된다.

Q194 삼각비 심화

한 변의 길이가 6인 정삼각형 ABC 의 무게중심을 G 라 할 때, 선분 AG 의 길이를 구하시오.

$AG : GM = 2 : 1$



- ① ① $\sqrt{3}$
- ② ② $2\sqrt{3}$
- ③ ③ $3\sqrt{3}$
- ④ ④ $4\sqrt{3}$

정답: ② $2\sqrt{3}$

1단계: A 에서 BC 의 중점 M 으로 그은 중선 AM 의 길이를 구한다. 정삼각형에서 중선은 BC 에 수직이므로 $\triangle ABM$ 은 $\angle AMB = 90^\circ$, $BM = 3$, $AB = 6$. 피타고라스로 $AM = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$.

2단계: 무게중심 G 는 각 중선을 꼭짓점에서 2:1로 분할한다. 즉 $AG : GM = 2 : 1$.

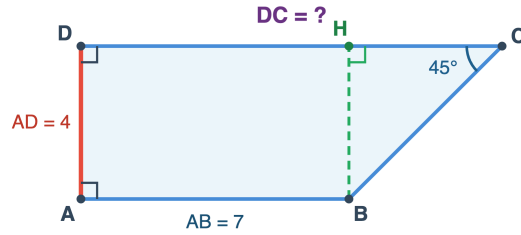
3단계: 따라서 $AG = \frac{2}{3} \cdot AM = \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$.

풀이 전략: 정삼각형의 중선은 수선·각이등분선·수직이등분선과 일치하므로 피타고라스로 길이를 바로 계산할 수 있다. 그 다음 무게중심의 2:1 분할 성질로 꼭짓점-무게중심 거리를 구한다.

정삼각형의 무게중심은 외심·내심·수심과 모두 일치하는 유일한 삼각형이다. 그래서 한 점이 모든 중심 역할을 한다.

Q195 삼각비 심화

사다리꼴 ABCD에서 $AB \parallel DC$ 이고 $\angle DAB = \angle ADC = 90^\circ$ 이다. $AB = 7$, $AD = 4$, $\angle BCD = 45^\circ$ 일 때, DC의 길이를 구하시오.



- ① ① 9
- ② ② 10
- ③ ③ 11
- ④ ④ 12

정답: ③ 11

1단계: 점 B에서 변 DC에 수선의 발 H를 내리면 사각형 ABHD는 모든 각이 직각이고 마주보는 변이 같아 직사각형이 된다. 따라서 $BH = AD = 4$, $DH = AB = 7$.

2단계: 직각삼각형 BHC에서 $\angle BHC = 90^\circ$, $\angle BCH = 45^\circ$ 이므로 $\angle HBC = 45^\circ$. 즉 직각이등변삼각형이 되어 $HC = BH = 4$.

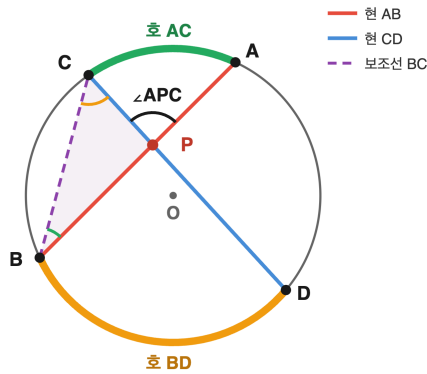
3단계: $DC = DH + HC = 7 + 4 = 11$.

풀이 전략: 직각사다리꼴은 한 꼭짓점에서 평행한 반대 변으로 수선을 내려 '직사각형 + 직각삼각형' 구조로 분리하는 것이 핵심 전략이다. 45° 가 주어지면 등변관계가 만들어져 삼각비 계산이 거의 즉답으로 줄어든다.

직각사다리꼴에 45° 가 끼어들면 '돌출구간 = 높이' 공식이 성립해, 이를 모르면 풀이가 길어지지만 보면 1줄로 끝난다.

Q196 원의 성질 증명

원 O 안에서 두 현 AB와 CD가 점 P에서 만난다. 이때 $\angle APC$ 를 호 AC와 호 BD를 이용하여 어떻게 표현할 수 있는지 증명을 통해 구하시오. (단, 호 AC와 호 BD는 P가 만든 같은 영역 쪽의 호)



BC를 그려 삼각형 BPC 관찰

- ① ① $\angle APC = (\text{호AC} + \text{호BD})/2$
- ② ② $\angle APC = (\text{호AC} - \text{호BD})/2$
- ③ ③ $\angle APC = \text{호AC} + \text{호BD}$
- ④ ④ $\angle APC = (\text{호AC} \times \text{호BD})/180^\circ$

정답: ① $\angle APC = (\text{호AC} + \text{호BD})/2$

1단계: 보조선 BC를 그으면 삼각형 BPC가 만들어진다. 삼각형의 외각 정리에 의해 $\angle APC = \angle PBC + \angle PCB$.

2단계: $\angle PBC$ 는 점 B에서 호 AC를 보는 원주각이므로 $\angle PBC = (\text{호AC})/2$. 마찬가지로 $\angle PCB$ 는 점 C에서 호 BD를 보는 원주각이므로 $\angle PCB = (\text{호BD})/2$.

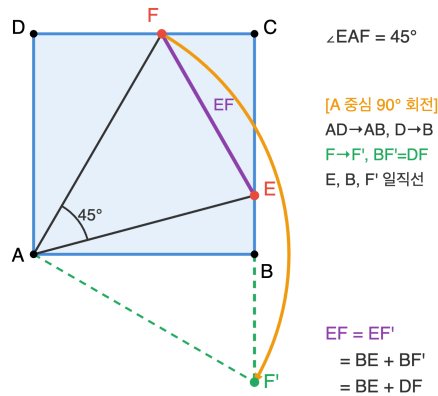
3단계: 따라서 $\angle APC = (\text{호AC})/2 + (\text{호BD})/2 = (\text{호AC} + \text{호BD})/2$. ■

풀이 전략: 원 내부 두 현의 교각 문제는 직접 다루기보다 '한 변을 잘라 삼각형을 만들고 외각 정리를 적용'하는 패턴이 가장 강력하다. 이때 두 변이 모두 원의 현이므로 양 끝각이 모두 원주각으로 변환되는 점이 핵심이다.

이 정리는 '내각공식'이라 불리며, 점 P가 원 밖에 있을 때는 같은 논리로 $(\text{호AC} - \text{호BD})/2$ 가 되어 두 공식이 대칭을 이룬다.

Q197 도형 종합 추론

정사각형 ABCD의 변 BC 위에 점 E, 변 CD 위에 점 F가 있고 $\angle EAF = 45^\circ$ 이다. $EF = BE + DF$ 가 성립함을 증명하시오.



- ① ① $EF = BE + DF$
- ② ② $EF^2 = BE^2 + DF^2$
- ③ ③ $EF = \sqrt{2} \cdot (BE + DF)$
- ④ ④ $EF = (BE + DF)/2$

정답: ① $EF = BE + DF$

1단계: 점 A를 중심으로 변 AD를 시계방향으로 90° 회전한다. 그러면 변 AD가 변 AB와 겹쳐 점 D는 점 B로 가고, 점 F는 변 CB(BC)를 점 B 너머로 연장한 직선 위의 점 F'으로 옮겨진다. 회전이므로 $AF = AF'$, $DF = BF'$. 이때 점 E, B, F'은 한 직선(변 BC의 연장) 위에 놓인다.

2단계: $\angle EAF' = \angle BAE + \angle BAF' = \angle BAE + \angle DAF$. 정사각형이므로 $\angle BAE + \angle EAF + \angle FAD = 90^\circ$ 이고 $\angle EAF = 45^\circ$ 이므로 $\angle BAE + \angle FAD = 45^\circ = \angle EAF$.

3단계: 삼각형 AEF와 삼각형 AEF'에서 AE는 공통, $AF = AF'$, $\angle EAF = \angle EAF' = 45^\circ$ 이므로 SAS 합동. 따라서 $EF = EF' = BE + BF' = BE + DF$. ■

풀이 전략: 정사각형 안의 '45° 끼임각' 문제는 한 변을 90° 회전시켜 두 조각을 일직선으로 합치는 회전 합동 기법이 표준이다. 이렇게 하면 분리된 두 선분(BE, DF)이 한 직선 위에 놓여 합으로 처리된다.

이 결과는 '정사각형 45° 회전 보조선' 정리로, 일본 중학교 입시와 한국 경시대회 단골 출제 유형이다.

Q198 통계 심화

5개의 자료 a, b, c, d, e의 평균이 10, 분산이 5이다. 이 자료를 모두 2배 한 후 3을 뺀 새로운 자료 $2a-3, 2b-3, 2c-3, 2d-3, 2e-3$ 의 평균과 분산을 차례로 구하면?

- ① ① 평균 17, 분산 10
- ② ② 평균 17, 분산 20
- ③ ③ 평균 20, 분산 10
- ④ ④ 평균 23, 분산 20

정답: ② 평균 17, 분산 20

1단계: 새 자료의 평균은 $(2a-3 + 2b-3 + \dots + 2e-3)/5 = 2 \cdot (a+b+c+d+e)/5 - 3 = 2 \cdot 10 - 3 = 17$.

2단계: 새 자료의 각 편차는 $(2x_i - 3) - 17 = 2x_i - 20 = 2(x_i - 10) = 2 \cdot (\text{원래 편차})$.

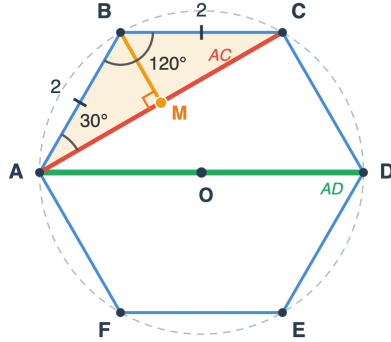
3단계: 분산은 편차의 제곱평균이므로 새 분산 = 평균($(2 \cdot \text{편차})^2$) = $4 \cdot (\text{원래 분산}) = 4 \cdot 5 = 20$. 즉 상수 더하기는 분산에 영향 없고, 배수만 제곱 배가 된다.

풀이 전략: 자료의 일차변환 $y = ax + b$ 에 대해 평균은 a·평균 + b, 분산은 $a^2 \cdot \text{분산}$ 이라는 일반 법칙을 이용하면 일일이 계산 없이 결과를 얻을 수 있다. 평행이동(b)은 분산을 바꾸지 않는다는 직관이 핵심.

이 성질 때문에 평균이 0이 되도록 자료를 평행이동한 후 분산을 구하는 '편차자료법' 기법이 통계 계산에서 자주 쓰인다.

Q199 삼각비 심화

한 변의 길이가 2인 정육각형 ABCDEF에서 짧은 대각선 AC와 가장 긴 대각선 AD의 길이의 비 AC : AD를 가장 간단한 형태로 구하시오.



- ① ① 1 : 2
- ② ② $\sqrt{3} : 2$
- ③ ③ $\sqrt{2} : 2$
- ④ ④ 2 : $\sqrt{3}$

정답: ② $\sqrt{3} : 2$

1단계: 가장 긴 대각선 AD는 정육각형의 마주보는 두 꼭짓점을 잇는 선분으로 외접원의 지름과 같다. 정육각형은 변과 외접원 반지름이 같으므로 $AD = 2 \cdot 2 = 4$.

2단계: 짧은 대각선 AC는 삼각형 ABC에서 $AB = BC = 2$, $\angle ABC = 120^\circ$ (정육각형 한 내각). B에서 AC에 수선의 발 M을 내리면 삼각형 ABM은 직각삼각형이고 $\angle BAM = 30^\circ$.

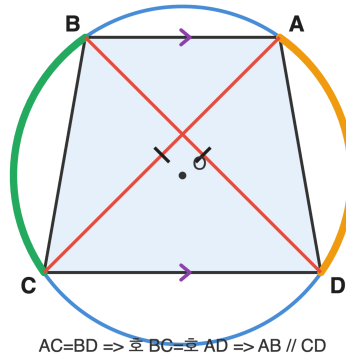
3단계: $AM = AB \cdot \cos 30^\circ = 2 \cdot (\sqrt{3}/2) = \sqrt{3}$. 이등변삼각형이므로 $AC = 2 \cdot AM = 2\sqrt{3}$. 따라서 $AC : AD = 2\sqrt{3} : 4 = \sqrt{3} : 2$.

풀이 전략: 정육각형의 핵심 성질: 한 변 = 외접원 반지름. 가장 긴 대각선 = 지름 = 변의 2배. 짧은 대각선은 두 변과 한 내각이 끼는 이등변삼각형이고 내각이 120° 이므로 수선을 내려 30° - 60° - 90° 직각삼각형으로 환원한다.

💡 정육각형의 세 종류 거리(변 : 짧은 대각선 : 긴 대각선) = 1 : $\sqrt{3}$: 2 비율은 30° - 60° - 90° 직각삼각형의 변 비율과 정확히 일치한다.

Q200 원의 성질 증명

원 O에 내접하는 사각형 ABCD에서 두 대각선 AC와 BD의 길이가 같다. 이때 사각형 ABCD는 어떤 사각형이 되는지 가장 정확하게 표현하고 그 이유를 보이시오. (꼭짓점은 원 위에 A, B, C, D 순서)



- ① ① 평행사변형
- ② ② 등변사다리꼴 또는 직사각형
- ③ ③ 마름모
- ④ ④ 일반 사각형(특정 종류 없음)

정답: ② 등변사다리꼴 또는 직사각형

1단계: 한 원에서 길이가 같은 두 현은 같은 크기의 호에 대응한다. 대각선 AC는 호 ABC(=호 AB+호 BC)에, 대각선 BD는 호 BAD(=호 AB+호 AD)에 대응한다. $AC=BD$ 이므로 호 ABC=호 BAD이고, 공통인 호 AB를 빼면 호 BC=호 AD를 얻는다. (현의 다른 쪽 호를 잡으면 호 AB=호 CD가 되는 대칭적인 경우이며 결론은 같다.)

2단계: 호 BC=호 AD이면 같은 크기의 호에 대한 원주각이 같으므로 $\angle BAC = \angle DCA$ 이다. 직선 AC를 횡단선으로 보면 엇각이 같다는 뜻이므로 $AB \parallel CD$ 이다. 즉 ABCD는 한 쌍의 대변 AB, CD가 평행한 사다리꼴이다.

3단계: 원에 내접하는 사다리꼴은 항상 등변사다리꼴이다. 실제로 $AB \parallel CD$ 이면 동측내각의 합 $\angle DAB + \angle ADC = 180^\circ$ 와 내접사각형 대각의 합 $\angle DAB + \angle BCD = 180^\circ$ 에서 $\angle ADC = \angle BCD$ 가 되어 밑변 CD에 대한 두 밑각이 같아지기 때문이다(또한 호 BC=호 AD에서 다리 $BC=AD$). 따라서 ABCD는 등변사다리꼴이며, 두 대각선이 모두 지름이 되는 특수한 경우(평행사변형이 되어)에는 직사각형이 된다. 그러므로 가장 정확한 답은 등변사다리꼴(특수한 경우 직사각형)이다. ■

풀이 전략: 원에 내접한 사각형의 대각선 조건은 '현의 길이 \leftrightarrow 호의 길이' 동치성으로 호 길이 비교 문제로 환원한다. 호가 같으면 원주각이 같고, 원주각이 같으면 평행이라는 연쇄 추론이 표준 흐름이다.

원 내접사각형이 등변사다리꼴이 되는 동치조건은 '대각선 길이 같음', '한 쌍 대각의 합이 180° 이면서 한 쌍 대변 평행' 등 여러 가지가 있어 입시 단골이다.



중3 수학 심화

총 40문제 · 문제와 정답·풀이 포함

Q201 경시 퍼즐·확률

1, 2, 3, ..., 100 중에서 서로 다른 51개의 수를 임의로 선택했다. 선택된 수 중에는 반드시 합이 101이 되는 두 수가 존재함을 증명하시오.

- ① ① 항상 존재한다
- ② ② 50개 이상 선택 시에만 존재한다
- ③ ③ 합이 101인 쌍이 존재하지 않는 51개 선택이 가능하다
- ④ ④ 합이 100인 쌍은 항상 존재하지만 101은 아니다

정답: ① 항상 존재한다

1단계: 1부터 100까지의 수를 합이 101이 되는 두 수끼리 짝지어 묶는다. (1, 100), (2, 99), (3, 98), ..., (50, 51)의 50개의 쌍이만 들어지고, 모든 100개의 수가 정확히 한 쌍에만 속한다.

2단계: 51개의 수를 선택할 때, 각 수는 50개 쌍 중 하나에 속한다. 51개의 수를 50개의 쌍에 분배하면 어떤 분배 방식을 쓰더라도 적어도 하나의 쌍에는 두 수가 모두 선택된다(짜짓기 원리, $51 > 50$).

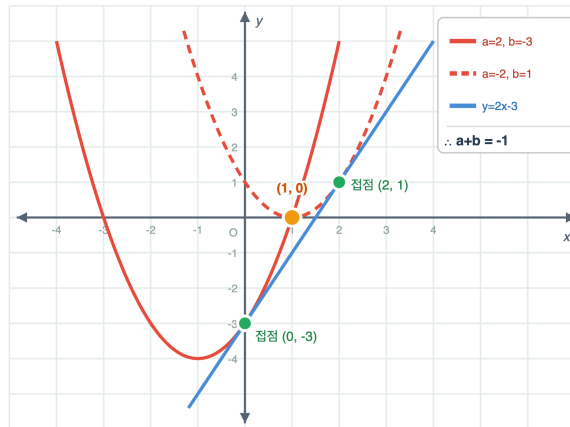
3단계: 두 수가 모두 선택된 그 쌍의 두 원소의 합은 정의에 의해 101. 따라서 선택된 51개 수 중 반드시 합이 101인 두 수가 존재한다. ■

풀이 전략: '반드시 ~가 존재한다' 형태의 경시 문제는 적절한 분류(쌍짓기, 영역 나누기, 잉여류) 후 선택 개수가 분류 개수를 초과함을 보여 강제적으로 같은 분류에 두 원소가 들어감을 보이는 것이 표준 방법이다. 핵심은 '101 = 1+100 = 2+99 = ... = 50+51'이라는 대칭 쌍 50개를 발견하는 것.

50개의 짝을 만들 수 있는 이유는 1~100이 짝수 개이고 101이 홀수라 자기 자신과 짝이 되는 수가 없기 때문이다. 만약 합 조건이 100이라면 50은 자기 자신과 짝이 되어 분석이 달라진다.

Q202 이차함수 심화

이차함수 $y = x^2 + ax + b$ 의 그래프가 점 $(1, 0)$ 을 지나고, 직선 $y = 2x - 3$ 과 한 점에서만 만난다. 상수 a, b 의 가능한 값 모두에 대하여 $a + b$ 의 값을 구하시오.



- ① ① -3
- ② ② -2
- ③ ③ -1
- ④ ④ 0

정답: ③ -1

1단계: 점 $(1, 0)$ 을 지나는 조건에서 $0 = 1 + a + b$ 이므로 $b = -1 - a$.

2단계: $x^2 + ax + b = 2x - 3$, 즉 $x^2 + (a-2)x + (b+3) = 0$ 이 한 점에서 접하려면 판별식 $= 0$. $(a-2)^2 - 4(b+3) = 0$. $b = -1 - a$ 를 대입하면 $(a-2)^2 - 4(-1 - a + 3) = (a-2)^2 - 4(2-a) = 0$.

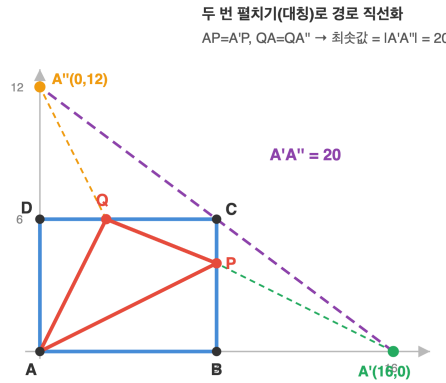
3단계: 전개하면 $a^2 - 4a + 4 - 8 + 4a = a^2 - 4 = 0$, $a = \pm 2$. $a = 2$ 이면 $b = -3$ 이라 $a + b = -1$. $a = -2$ 이면 $b = 1$ 이라 $a + b = -1$. 두 경우 모두 $a + b = -1$.

풀이 전략: 두 조건(점 통과, 접함)을 각각 식으로 옮긴 뒤 연립한다. 한 변수를 소거해 한 변수 방정식으로 만들고, 두 해를 모두 검토하는 것이 안전하다. 두 해가 같은 $a+b$ 를 주는 것은 우연이 아니라 $a + b = a + (-1-a) = -1$ 로 항상 같음에서 나오는 구조적 결과이다.

💡 $a + b = -1$ 은 사실 '점 $(1, 0)$ 통과' 조건만으로 이미 결정된다($0 = 1 + a + b \Rightarrow a + b = -1$). 접함 조건은 a, b 를 각각 정해주지만 합 $a+b$ 에는 영향을 주지 않는다.

Q203 도형 종합 추론

좌표평면 위에 직사각형 ABCD가 A(0, 0), B(8, 0), C(8, 6), D(0, 6)으로 주어진다. 점 P가 변 BC 위, 점 Q가 변 CD 위를 움직일 때 AP + PQ + QA의 최솟값을 구하시오.



- ① ① 16
- ② ② 18
- ③ ③ 20
- ④ ④ 24

정답: ③ 20

1단계: 점 A를 변 BC(직선 $x = 8$)에 대해 대칭이동하면 $A' = (16, 0)$. $AP = A'P$ 이므로 $AP + PQ$ 는 $A'P + PQ$ 로 바뀐다.
 2단계: 점 A를 변 CD(직선 $y = 6$)에 대해 대칭이동하면 $A'' = (0, 12)$. $QA = QA''$ 이므로 $PQ + QA$ 는 $PQ + QA''$ 로 바뀐다.
 3단계: 따라서 $AP + PQ + QA = A'P + PQ + QA''$. 이 값은 P, Q가 선분 $A'A''$ 위에 있을 때 최소가 되며, 최솟값은 $|A'A''| = \sqrt{(16-0)^2 + (0-12)^2} = \sqrt{256 + 144} = \sqrt{400} = 20$. (P, Q가 각각 변 BC, CD 위에 실제로 놓이는지 확인하면 직선 $A'A''$ 은 두 변과 모두 만나므로 도달 가능.)

풀이 전략: 여러 직선을 거쳐 출발점으로 돌아오는 최단경로 문제는 '거치는 직선마다 한 번씩 대칭이동(펼치기)'을 적용해 꺾인 경로를 직선으로 만드는 거울 반사 기법이 표준이다. 단, 펼친 후 직선이 실제로 해당 변들을 지나는지 가능성 점검이 필수.
 이 기법은 페르마-스넬 빛 반사 원리와 같은 수학적 기반을 갖는다. 빛이 두 거울에 반사되어 출발점으로 돌아오는 최단 경로 문제와 동치이다.

Q204 실수·근호 추론

$\sqrt{7}$ 의 정수부분을 a, 소수부분을 b라 할 때, $a + 1/b$ 의 값을 구하시오.

- ① ① $(4 + \sqrt{7})/3$
- ② ② $(8 + \sqrt{7})/3$
- ③ ③ $(6 + \sqrt{7})/3$
- ④ ④ $2 + \sqrt{7}$

정답: ② $(8 + \sqrt{7})/3$

1단계: $4 < 7 < 9$ 이므로 $2 < \sqrt{7} < 3$. 따라서 $\sqrt{7}$ 의 정수부분 $a = 2$ 이고 소수부분 $b = \sqrt{7} - 2$.
 2단계: $1/b = 1/(\sqrt{7} - 2)$. 분모를 유리화하기 위해 분자, 분모에 $(\sqrt{7} + 2)$ 를 곱하면 $1/b = (\sqrt{7} + 2)/((\sqrt{7})^2 - 2^2) = (\sqrt{7} + 2)/(7 - 4) = (\sqrt{7} + 2)/3$.
 3단계: 따라서 $a + 1/b = 2 + (\sqrt{7} + 2)/3 = (6 + \sqrt{7} + 2)/3 = (8 + \sqrt{7})/3$.

풀이 전략: 무리수의 정수부분과 소수부분 분리 문제는 두 단계로 진행된다. (1) 인접 완전제곱수로 정수부분을 결정, (2) 소수부분을 무리수 - 정수 형태로 표현 후 분모 유리화. 분모에 (a-b) 꼴이 있으면 (a+b)를 곱해 차의 곱 공식으로 정리하는 것이 핵심.
 이런 형태의 문제는 \sqrt{n} 의 연분수 전개와 깊이 연관되어 있어, 무리수의 무한 연분수 표현으로 일반화된다.

Q205 인수분해 심화

다항식 $x^4 + 4$ 를 실수 범위에서 두 이차식의 곱으로 인수분해하시오.

- ① ① $(x^2 + 2)(x^2 - 2)$
- ② ② $(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$
- ③ ③ $(x^2 + 4)(x^2 - 4)$
- ④ ④ 실수 범위에서는 인수분해되지 않는다

정답: ② $(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$

1단계: $x^4 + 4$ 를 직접 인수분해하기 어려우므로, 완전제곱식이 되도록 $4x^2$ 를 더했다 빼는 식 변형을 시도한다. $x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2$.

2단계: $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$ 형태에 적용하면 $(x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = (x^2 + 2 + 2x)(x^2 + 2 - 2x) = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$.

3단계: 검산: $(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2) = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = x^4 + 4$. 일치 확인. 두 이차식 $x^2 \pm 2x + 2$ 의 판별식은 $4 - 8 = -4 < 0$ 이므로 실수 범위에서 더 이상 분해되지 않는다.

풀이 전략: $x^4 + 4$ 상수 곱은 표면상 인수분해 불가로 보이지만, 적절한 항을 더했다 빼서 완전제곱식 - (다른 제곱식) 형태를 만드는 'Sophie Germain 항등식' 기법이 정답이다. $4 = 2^2$ 인 점에 착안해 $2 \cdot x^2 \cdot 2 = 4x^2$ 를 끼워넣는 것이 핵심 직관.

이 인수분해는 18세기 수학자 소피 제르맹이 페르마의 마지막 정리 연구 중 사용해 'Sophie Germain 항등식'으로 불린다. 일반화: $a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2ab + 2b^2)(a^2 - 2ab + 2b^2)$.

Q206 이차방정식 활용

이차방정식 $x^2 - mx + 12 = 0$ 이 두 정수 해만을 가지도록 하는 정수 m 이 존재한다. 그러한 정수 m 의 값을 모두 구하고 그 합을 구하시오.

- ① ① -13
- ② ② 0
- ③ ③ 13
- ④ ④ 26

정답: ② 0

1단계: 두 정수 해를 p, q 라 하면 근의 곱 $pq = 12$, 근의 합 $p + q = m$. p 와 q 는 모두 정수이므로 곱이 12가 되는 정수쌍을 찾는다.

2단계: 가능한 쌍 (p, q) 는 $(1, 12), (2, 6), (3, 4), (-1, -12), (-2, -6), (-3, -4)$ (순서 무시). 각 쌍에 대해 $m = p + q$ 는 차례로 13, 8, 7, -13, -8, -7.

3단계: m 의 모든 값들의 합 = $13 + 8 + 7 + (-13) + (-8) + (-7) = 0$. (양수 쌍과 음수 쌍이 정확히 부호 대칭을 이루기 때문에 합이 0이 된다.)

풀이 전략: 두 근이 모두 정수가 되려면 근의 곱이 정수여야 함은 자명하지만 더 강한 조건이 필요한 경우도 있다. 여기서 곱과 합이 모두 정수가 되도록 제약하면 정수 약수쌍 모두 살펴보면 된다. 구조적 대칭(부호 반전 쌍이 짝을 이룸)을 알아채면 합 계산을 직접 하지 않아도 0임을 즉시 알 수 있다.

근의 곱이 정해진 이차방정식에서 정수해를 만드는 m 값들은 항상 부호 대칭으로 분포해, 합이 자동으로 0이 되는 미적인 성질이 있다.

Q207 실수·근호 추론

자연수 m, n 에 대하여 $\sqrt{m} + \sqrt{n} = q$ (q 는 0이 아닌 유리수)일 때, $\sqrt{m} - \sqrt{n}$ 의 값으로 가장 옳은 설명은? 또한 이 사실로부터 m 과 n 이 모두 완전제곱수를 증명할 수 있다.

- ① ① 항상 무리수이다
- ② ② $\frac{m-n}{q}$ 이고 유리수이다
- ③ ③ 항상 0이다
- ④ ④ q 와 항상 같다

정답: ②

1단계: 곱셈공식 $(\sqrt{m} + \sqrt{n})(\sqrt{m} - \sqrt{n}) = m - n$ 을 이용. 따라서 $\sqrt{m} - \sqrt{n} = \frac{m-n}{\sqrt{m} + \sqrt{n}} = \frac{m-n}{q}$. m, n, q 가 모두 유리수이므로 이 값도 유리수.

2단계: 두 식 $\sqrt{m} + \sqrt{n} = q$ 와 $\sqrt{m} - \sqrt{n} = \frac{m-n}{q}$ 를 더하면 $2\sqrt{m} = q + \frac{m-n}{q}$. 우변은 유리수이므로 \sqrt{m} 도 유리수.

3단계: 자연수 m 의 제곱근이 유리수이라면 m 이 완전제곱수여야 한다. 같은 논리로 \sqrt{n} 도 유리수이고 n 도 완전제곱수. 따라서 두 자연수의 제곱근의 합이 유리수이라면 두 자연수가 모두 완전제곱수여야 함이 증명된다.

풀이 전략: 두 무리수의 합이 유리수가 되려면 둘 사이에 강한 제약이 필요하다. 곱셈공식으로 차도 유리수임을 보이고, 합과 차로부터 각각도 유리수임을 끌어낸다.

이 결과로 $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ 이 무리수임이 즉시 따라온다(2와 3 모두 완전제곱수가 아니므로).

Q208 인수분해 심화

$x^4 + x^2 + 1$ 을 실수 범위에서 인수분해한 결과로 옳은 것은?

- ① ① $(x^2 + 1)^2$
- ② ② $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$
- ③ ③ $(x^2 + 1)(x^2 - 1)$
- ④ ④ $(x^2 + x - 1)(x^2 - x - 1)$

정답: ②

1단계: 직접적인 인수가 보이지 않으므로 같은 항을 더하고 빼서 완전제곱을 만드는 항보충 기법을 사용.

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2.$$

2단계: 앞부분을 묶으면 $x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2$. 따라서 식은 $(x^2 + 1)^2 - x^2$.

3단계: 차의 제곱 공식 $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$ 적용. $(x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 + 1 + x)(x^2 + 1 - x) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$.

검증: 두 인수의 곱을 전개하면 $x^4 - x^3 + x^2 + x^3 - x^2 + x + x^2 - x + 1 = x^4 + x^2 + 1$. 일치.

풀이 전략: 중간항 x^2 만 있고 x^3, x 항이 없는 사차식은 항보충으로 완전제곱을 만든 뒤 차의 제곱 공식을 쓰는 것이 표준 전략. 두 인수가 모두 판별식이 음수라 더 이상 분해되지 않는다.

이 분해는 1의 6제곱근(원시근) 성질에서도 자연스럽게 나오며, 정육각형 분할과도 연결된다.

Q209 인수분해 심화

실수 x 가 $x + \frac{1}{x} = 3$ 을 만족할 때, $x^3 + \frac{1}{x^3}$ 의 값은?

- ① ① 9
- ② ② 18
- ③ ③ 21
- ④ ④ 27

정답: ②

1단계: 세제곱 전개 항등식 $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$ 에서 $a = x, b = \frac{1}{x}$ 로 두면 $ab = 1$.

2단계: $(x + \frac{1}{x})^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3 \cdot 1 \cdot (x + \frac{1}{x})$.

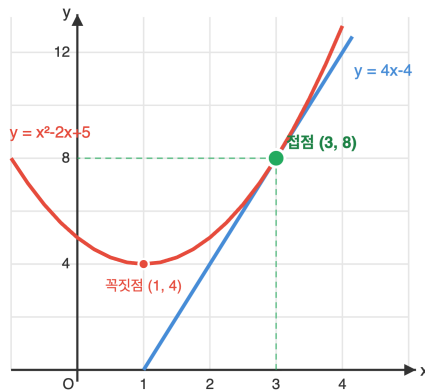
3단계: 주어진 조건 $x + \frac{1}{x} = 3$ 을 양변에 대입. $3^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3 \cdot 3$, 즉 $27 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 9$. 따라서 $x^3 + \frac{1}{x^3} = 18$.

풀이 전략: x 와 $\frac{1}{x}$ 의 곱이 1이라는 점을 이용해 세제곱 전개 항등식을 그대로 적용. 식의 값 추론에서 자주 등장하는 표준 패턴.

같은 방식으로 $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7, x^4 + \frac{1}{x^4} = 47$ 과 같은 값들도 차례로 구할 수 있다.

Q210 이차함수 심화

이차함수 $y = x^2 - 2x + 5$ 의 그래프와 직선 $y = 4x + k$ 가 한 점에서만 만나도록 하는 상수 k 의 값과 그때의 접점 좌표를 모두 옳게 짝지은 것은?



- ① ① $k = -4$, 접점 (3, 8)
- ② ② $k = 4$, 접점 (3, 8)
- ③ ③ $k = -4$, 접점 (1, 4)
- ④ ④ $k = 8$, 접점 (3, 4)

정답: ①

1단계: 두 식을 연립한다. $x^2 - 2x + 5 = 4x + k$, 정리하면 $x^2 - 6x + (5 - k) = 0$.

2단계: '한 점에서만 만난다'는 이 이차방정식이 중근을 갖는 조건과 같다. 판별식 $\frac{D}{4} = (-3)^2 - (5 - k) = 9 - 5 + k = 4 + k$ 가 0.

따라서 $k = -4$.

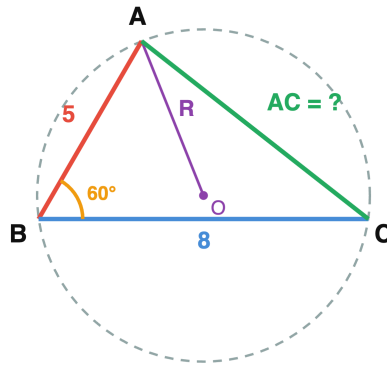
3단계: $k = -4$ 를 대입하면 $x^2 - 6x + 9 = 0$, 즉 $(x - 3)^2 = 0$ 이므로 $x = 3$ (중근). 접점의 y좌표는 $y = 4 \cdot 3 - 4 = 8$. 접점 (3, 8).

풀이 전략: 포물선과 직선이 한 점에서만 만나는 것은 기하학적으로 '접한다'는 의미. 대수적으로는 연립한 이차방정식이 중근을 갖는 조건이므로 판별식을 0으로 두고 푼다.

고등학교 미적분의 '접선의 기울기'(미분계수 $2x - 2$ 가 4가 되는 $x = 3$)와 정확히 같은 결과가 나온다.

Q211 삼각비 심화

삼각형 ABC에서 $AB = 5$, $BC = 8$, $\angle B = 60^\circ$ 이다. 변 AC의 길이와 삼각형 ABC의 외접원의 반지름 R을 모두 옳게 구한 것은?



- ① ① $AC = 7, R = \frac{7\sqrt{3}}{3}$
- ② ② $AC = 7, R = \frac{14\sqrt{3}}{3}$
- ③ ③ $AC = \sqrt{89}, R = \frac{\sqrt{89}}{2}$
- ④ ④ $AC = 9, R = 3\sqrt{3}$

☞ 정답: ①

📖 1단계: 두 변과 끼인각이 주어졌으므로 코사인 법칙으로 AC를 구한다.

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos B = 25 + 64 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos 60^\circ.$$

2단계: $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ 대입. $AC^2 = 89 - 80 \cdot \frac{1}{2} = 89 - 40 = 49$. 따라서 $AC = 7$.

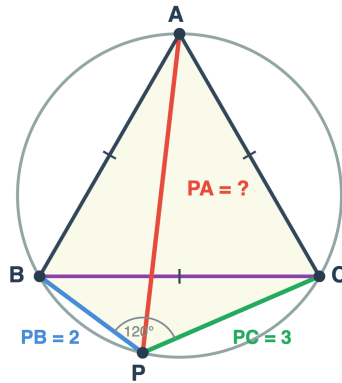
3단계: 외접원 반지름은 사인 법칙 $\frac{AC}{\sin B} = 2R$ 로 구한다. $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 이므로 $2R = \frac{7}{\sqrt{3}/2} = \frac{14}{\sqrt{3}} = \frac{14\sqrt{3}}{3}$. 따라서 $R = \frac{7\sqrt{3}}{3}$.

🧠 풀이 전략: 두 변과 끼인각이 주어진 상태에서 나머지 변은 코사인 법칙. 외접원 반지름은 한 변과 그 대각의 사인비를 사인 법칙으로 연결해 얻는다.

💡 대각이 60° 인 모든 삼각형에서 그 변의 길이는 외접원 반지름 R의 $\sqrt{3}$ 배가 된다는 깔끔한 관계가 있다.

Q212 원의 성질 증명

정삼각형 ABC가 원에 내접한다. 점 A를 포함하지 않는 호 BC 위의 한 점 P에 대해 $PB = 2$, $PC = 3$ 일 때, PA의 길이는? (힌트: 원에 내접하는 사각형 ABPC에 프톨레미 정리를 적용하라.)



- ① ① 4
- ② ② 5
- ③ ③ 6
- ④ ④ $\sqrt{13}$

정답: ②

1단계: 네 점 A, B, P, C가 한 원 위에 있고 사각형 ABPC가 원에 내접한다. 프톨레미 정리: 원에 내접하는 사각형에서 두 대각선의 곱은 마주보는 두 변의 곱의 합과 같다.

2단계: 사각형 ABPC의 두 대각선은 AP와 BC, 마주보는 변쌍은 (AB, PC) 와 (BP, CA). 따라서 $AP \cdot BC = AB \cdot PC + BP \cdot CA$.

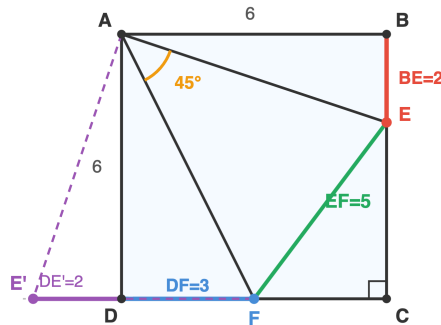
3단계: 정삼각형이므로 $AB = BC = CA$ 이다. 이 공통 길이를 s 라 하면 $AP \cdot s = s \cdot 3 + 2 \cdot s = 5s$ 이고, 양변을 s 로 나누면 $AP = 5$. 변의 길이에 관계없이 약분되므로, 호 BC 위 점 P에 대해 $PA = PB + PC$ 가 항상 성립함을 알 수 있다.

풀이 전략: 정삼각형 + 외접원 + 호 위 점 구도에서 거리의 합 관계는 프톨레미 정리로 깔끔하게 풀린다. 정삼각형의 변이 모두 같다는 조건 덕분에 식이 간단히 줄어든다.

💡 이 관계 $PA = PB + PC$ 는 프톨레미 부등식의 등호 성립 조건(네 점이 한 원 위)을 보여주는 대표 예이다.

Q213 도형 종합 추론

한 변의 길이가 6인 정사각형 ABCD에서, 변 BC 위 점 E와 변 CD 위 점 F가 $\angle EAF = 45^\circ$ 를 만족한다. $BE = 2$, $DF = 3$ 일 때, EF의 길이를 구하고 일반적으로 $EF = BE + DF$ 가 성립함을 증명할 수 있다.



- ① ① 4
- ② ② 5
- ③ ③ $\sqrt{13}$
- ④ ④ $\sqrt{29}$

정답: ②

1단계: 직접 계산으로 검증한다. 점 C에서 $CE = BC - BE = 6 - 2 = 4$, $CF = CD - DF = 6 - 3 = 3$. 직각삼각형 CEF ($\angle C = 90^\circ$)에서 $EF^2 = 4^2 + 3^2 = 25$. 따라서 $EF = 5$.

2단계: 일반 증명을 위해 $\triangle ABE$ 를 점 A를 중심으로 90° 회전시켜 B를 D로 보낸다. E의 상을 E' 라 하면 E' 는 변 CD의 D 바깥쪽 연장선 위에 있고, $DE' = BE$, $AE' = AE$, $\angle EAE' = 90^\circ$.

3단계: $\angle EAF = 45^\circ$ 이므로 $\angle FAE' = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ = \angle FAE$. 또 $AE = AE'$, AF 공통이므로 SAS에 의해 $\triangle AEF \equiv \triangle AE'F$. 따라서 $EF = E'F = DE' + DF = BE + DF = 2 + 3 = 5$. 직접 계산과 일치.

풀이 전략: $45^\circ = 90^\circ$ 의 절반이라는 점에서 '90° 회전' 보조 작도가 자연스러운 단서. 회전으로 BE를 한 직선 위 DE'로 옮기면 두 길이가 한 선분에 합쳐지고, 합동으로 EF와 같음을 보인다.

이 회전 트릭은 정사각형 안 45° 각도 문제의 대표 풀이법으로, 동아시아 수학 올림피아드에서도 자주 등장한다.

Q214 통계 심화

5개의 자료 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 의 평균이 7, 분산이 4이다. 새로운 자료 $y_i = -2x_i + 5$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$)에 대해 y의 평균과 분산은?

- ① ① 평균 -9, 분산 -8
- ② ② 평균 -9, 분산 8
- ③ ③ 평균 -9, 분산 16
- ④ ④ 평균 9, 분산 16

정답: ③

1단계: 자료 변환 $y_i = ax_i + b$ (a, b 는 상수)에서 평균은 $\bar{y} = a\bar{x} + b$. 여기서 $a = -2$, $b = 5$, $\bar{x} = 7$. 따라서 $\bar{y} = -2 \cdot 7 + 5 = -9$.

2단계: 분산 공식 $V(y) = a^2V(x)$. 상수항 b는 모든 자료를 똑같이 평행이동만 시키므로 분산에 영향 없음. 계수 a는 편차를 a배 늘리므로 분산은 a^2 배.

3단계: $V(y) = (-2)^2 \cdot 4 = 4 \cdot 4 = 16$. 따라서 평균 -9, 분산 16. 분산은 항상 0 이상이므로 ①(분산 -8)은 즉시 배제 가능하다.

풀이 전략: 자료 변환 $y = ax + b$ 의 평균/분산 변환 규칙을 적용. 핵심은 분산은 절대 음수가 될 수 없고, 부호(a의 음양)는 분산에는 영향을 주지 않는다는 것.

표준편차로는 $\sigma_y = |a|\sigma_x = 2 \cdot 2 = 4$ 가 되어 음의 부호가 사라진다.

Q215 경시 퍼즐·확률

두 개의 주사위를 동시에 던졌다. 두 눈의 합이 짝수임을 알았을 때, 두 눈의 차의 절댓값이 2 이하일 조건부 확률은?

- ① ① $\frac{1}{3}$
- ② ② $\frac{4}{9}$
- ③ ③ $\frac{7}{9}$
- ④ ④ $\frac{14}{36}$

정답: ③

1단계: '두 눈의 합이 짝수'는 '두 눈의 짝/홀이 같음'과 동치. 둘 다 짝수: $\{2, 4, 6\}^2$ 에서 9가지. 둘 다 홀수: $\{1, 3, 5\}^2$ 에서 9가지. 합쳐서 18가지가 조건이 정의하는 표본공간.

2단계: 이 18가지 중에서 차의 절댓값 ≤ 2 인 경우를 센다. 둘 다 짝수에서: 차 0은 (2,2),(4,4),(6,6) 3가지, 차 2는 (2,4),(4,2),(4,6),(6,4) 4가지, 합쳐 7가지. 둘 다 홀수에서도 같은 대칭으로 7가지.

3단계: 만족 사건 총 14가지이므로 조건부 확률 $= \frac{14}{18} = \frac{7}{9}$. ④의 $\frac{14}{36}$ 은 조건을 무시하고 전체 36가지로 나눈 무조건 확률이라 함정.

풀이 전략: 조건부 확률은 '조건' 안으로 표본공간을 좁힌 뒤 그 안에서 사건을 센다. 짝/홀의 대칭성을 활용하면 한쪽만 세고 두 배해서 빠르게 답에 이른다.

💡 두 주사위를 (합, 차)로 좌표화하면 36가지 결과가 일대일 대응되어 평면 위 격자점으로 시각화할 수 있다.

Q216 실수·근호 추론

양수 x 가 $x = \sqrt{12 + \sqrt{12 + \sqrt{12 + \sqrt{12 + \dots}}}}$ (오른쪽으로 무한히 중첩됨)을 만족할 때, x 의 값은?

- ① ① 3
- ② ② $2\sqrt{3}$
- ③ ③ 4
- ④ ④ $\sqrt{12}$

정답: ③

1단계: 무한 중첩의 자기 참조 구조에 주목. 가장 바깥 근호 안의 식 '12 + (무한 중첩)' 에서 안쪽 무한 중첩 부분은 다시 x 와 같다. 즉 $x = \sqrt{12 + x}$.

2단계: 양변을 제곱한다 (양수 x 에 한해 동치). $x^2 = 12 + x$, 즉 $x^2 - x - 12 = 0$.

3단계: 인수분해 $(x - 4)(x + 3) = 0$ 이므로 $x = 4$ 또는 $x = -3$. x 가 양수라는 조건에서 $x = 4$. 검증: $\sqrt{12 + 4} = \sqrt{16} = 4$. 일관됨.

풀이 전략: 무한 중첩의 '자기 닮음(self-similarity)'을 식으로 표현하는 것이 핵심. 식 안의 식이 전체와 같다는 통찰로 이차방정식으로 환원하고, 양수 조건으로 단 하나의 답을 고른다.

💡 같은 방식으로 $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}} = 2$, $\sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots}} = 3$ 등 자연수 답이 나오는 무한 근호 식이 무수히 많다.

Q217 인수분해 심화

양의 실수 a, b, c 가 $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ 이고 $a + b + c \neq 0$ 을 만족할 때, 다음 중 항상 참인 것은?

- ① ① $a + b + c = 0$
- ② ② $a = b = c$
- ③ ③ $abc = 0$
- ④ ④ $a^2 + b^2 + c^2 = 0$

정답: ②

1단계: 항등식 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$ 를 사용 (직접 전개로 확인 가능).

2단계: 주어진 식 $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ 는 좌변 = 0 이라는 뜻. 그런데 $a + b + c \neq 0$ 이므로 두 번째 인수가 0이어야 한다. 즉 $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$.

3단계: 이 식의 양변에 2를 곱해 변형하면 $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0$. 실수 제곱들의 합이 0이므로 각 항이 0. 따라서 $a = b, b = c, c = a$, 즉 $a = b = c$. ①은 가정에서 배제, ③, ④는 양의 실수에서 불가능.

풀이 전략: 세 변수 대칭식의 핵심은 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ 의 인수분해 항등식. 한 인수가 0이 아니면 다른 인수가 0이어야 하고, 그 인수는 제곱들의 합 형태로 환원되어 등식 조건으로 귀결된다.

이 항등식은 순환 행렬 $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ 의 행렬식 전개와도 정확히 일치한다(고등학교 이후 학습).

Q218 통계 심화

10개의 자료의 평균이 12, 표준편차가 5이다. 모든 자료에 상수 k 를 더한 뒤 다시 그 결과를 2배 했더니 새 자료의 평균이 20이 되었다. 이때 k 의 값과 새 자료의 표준편차 σ 는?

- ① ① $k = -2, \sigma = 5$
- ② ② $k = -2, \sigma = 10$
- ③ ③ $k = 4, \sigma = 10$
- ④ ④ $k = -4, \sigma = 5$

정답: ②

1단계: 합성 변환 식을 정확히 쓴다. '먼저 k 를 더하고 그 결과를 2배'이므로 $y_i = 2(x_i + k) = 2x_i + 2k$. 변환 계수 $a = 2$, 상수항 $b = 2k$.

2단계: 평균 변환 공식 $\bar{y} = a\bar{x} + b$. $\bar{y} = 2 \cdot 12 + 2k = 24 + 2k$. 새 평균이 20이므로 $24 + 2k = 20$, 따라서 $k = -2$.

3단계: 표준편차 변환 공식 $\sigma_y = |a|\sigma_x$. 상수항은 모든 자료를 똑같이 평행이동만 시키므로 편차에 영향 없음. $\sigma_y = |2| \cdot 5 = 10$. 따라서 $k = -2, \sigma = 10$.

풀이 전략: 순서가 중요하다. '먼저 k 덧셈, 그 다음 2배'라는 절차를 합성하면 $y = 2(x + k)$. 평균에는 상수항이 영향을 주지만 표준편차에는 계수의 절댓값만 영향을 준다는 점을 분리해서 적용.

순서를 바꿔 '먼저 2배 후 k 를 더하면' $y = 2x + k$ 가 되어 평균 식은 달라지지만 표준편차는 똑같이 10이 된다.

Q219 실수·근호 추론

$\sqrt{7}$ 의 정수부분을 a , 소수부분을 b 라 할 때, $a + \frac{1}{b}$ 의 값은?

- ① $\frac{8+\sqrt{7}}{3}$
- ② $\frac{\sqrt{7}+2}{3}$
- ③ $2 + \sqrt{7}$
- ④ $\frac{\sqrt{7}-2}{3}$

정답: ①

1단계: $4 < 7 < 9$ 이므로 $2 < \sqrt{7} < 3$. 따라서 정수부분 $a = 2$, 소수부분 $b = \sqrt{7} - 2$. **2단계:** $\frac{1}{b} = \frac{1}{\sqrt{7}-2}$ 의 분모를 켈레무리수로 유리화하면 $\frac{\sqrt{7}+2}{(\sqrt{7})^2-2^2} = \frac{\sqrt{7}+2}{3}$. **3단계:** $a + \frac{1}{b} = 2 + \frac{\sqrt{7}+2}{3} = \frac{6+\sqrt{7}+2}{3} = \frac{8+\sqrt{7}}{3}$.

풀이 전략: 근호 값의 정수부분을 알기 위해서는 어떤 두 완전제곱수 사이에 있는지 찾는다. 소수부분은 (값) 빼기 (정수부분)으로 표현되며, 분모에 무리수가 있을 때는 켈레무리수를 곱해 유리화하는 것이 표준이다.

💡 피타고라스 학파는 무리수 발견에 큰 충격을 받았으며, 발견자를 추방했다는 전설이 전해진다.

Q220 인수분해 심화

다항식 $(x^2 + 3x + 1)(x^2 + 3x - 3) - 5$ 를 인수분해하시오.

- ① $(x-1)(x+1)(x+2)(x+4)$
- ② $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$
- ③ $(x^2+3x-4)(x^2+3x+2)$
- ④ $(x-2)(x+1)(x+2)(x-1)$

정답: ①

1단계: 공통 부분 $x^2 + 3x$ 를 t 로 치환하면 식은 $(t+1)(t-3) - 5$ 가 된다. **2단계:** 전개하면 $t^2 - 2t - 3 - 5 = t^2 - 2t - 8 = (t-4)(t+2)$. **3단계:** t 를 되돌리면 $(x^2 + 3x - 4)(x^2 + 3x + 2)$. **4단계:** 각 이차식을 더 인수분해하면 $x^2 + 3x - 4 = (x+4)(x-1)$, $x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$. 따라서 최종 인수분해는 $(x-1)(x+1)(x+2)(x+4)$.

풀이 전략: 두 이차식이 공통 부분 $x^2 + 3x$ 를 가진다는 점을 포착해 치환한다. 치환으로 차수가 낮아진 식을 인수분해하고, 각 인수에서 다시 이차식 인수분해를 반복하여 일차식의 곱까지 완전히 분해한다.

💡 고차 다항식 인수분해의 핵심 도구인 치환은 17세기 비에타가 체계화한 변수 표기법 덕분에 일반화되었다.

Q221 이차방정식 활용

어떤 직각삼각형의 둘레가 30이고 넓이가 30일 때, 빗변의 길이를 구하시오.

- ① 11
- ② 12
- ③ 13
- ④ 15

정답: ③

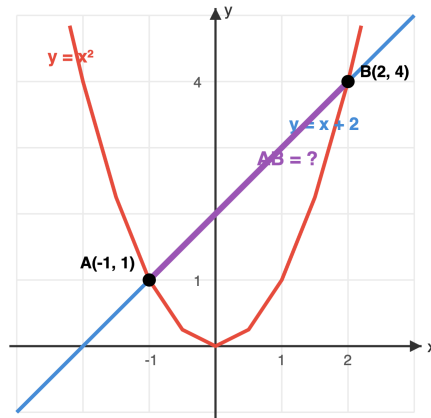
1단계: 두 직각변을 a, b , 빗변을 c 라 하면 $a + b + c = 30$, $\frac{1}{2}ab = 30$, 즉 $ab = 60$. **2단계:** 피타고라스 정리에 의해 $a^2 + b^2 = c^2$. 또한 $a + b = 30 - c$. **3단계:** $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 120$ 이므로 $(30 - c)^2 = c^2 + 120$. **4단계:** 전개하면 $900 - 60c + c^2 = c^2 + 120$ 이고 $60c = 780$, 따라서 $c = 13$. (검산: $a + b = 17$, $ab = 60$ 이므로 $a, b = 5, 12$ 이고 $5^2 + 12^2 = 169 = 13^2$ ✓)

풀이 전략: 세 변 사이에 둘레, 넓이, 피타고라스 정리라는 세 관계식이 동시에 성립한다. 빗변 c 만 남기는 방향으로 식을 합성하면 일차방정식으로 귀결되어 c 를 직접 풀 수 있다.

💡 5-12-13 직각삼각형은 3-4-5에 이어 두 번째로 작은 정수 변 직각삼각형으로, 피타고라스 수의 대표적 예시이다.

Q222 이차함수 심화

좌표평면 위에서 직선 $y = x + 2$ 와 포물선 $y = x^2$ 의 두 교점 사이의 거리는?



- ① ① $\sqrt{2}$
- ② ② $2\sqrt{2}$
- ③ ③ $3\sqrt{2}$
- ④ ④ $\sqrt{18} + 1$

정답: ③

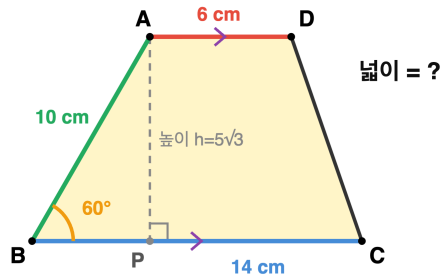
1단계: 두 교점은 $x^2 = x + 2$ 를 만족한다. $x^2 - x - 2 = 0, (x - 2)(x + 1) = 0$. 따라서 $x = 2$ 또는 $x = -1$. 2단계: 교점은 $A(-1, 1), B(2, 4)$ 이다. 3단계: 두 점 사이의 거리는 $\sqrt{(2 - (-1))^2 + (4 - 1)^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

풀이 전략: 교점은 두 그래프의 식을 연립한 방정식의 해이다. 이차방정식의 두 근에서 x 좌표를 구한 뒤, 각각의 y 좌표는 두 식 중 어느 식에 대입해도 같다. 두 점 사이 거리는 두 좌표 차의 제곱을 합한 후 제곱근을 취해 구한다.

포물선과 직선이 정확히 두 점에서 만나려면 판별식이 양수여야 하며, 한 점에서만 만나면 직선이 접선이 된다.

Q223 삼각비 심화

오른쪽 그림의 사다리꼴 ABCD는 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ 이고 $\overline{AD} = 6\text{cm}$, $\overline{BC} = 14\text{cm}$, $\overline{AB} = 10\text{cm}$, $\angle B = 60^\circ$ 이다. 이 사다리꼴의 넓이를 구하시오.



- ① $40\sqrt{3} \text{ cm}^2$
- ② $50\sqrt{3} \text{ cm}^2$
- ③ $60\sqrt{3} \text{ cm}^2$
- ④ 50 cm^2

정답: ②

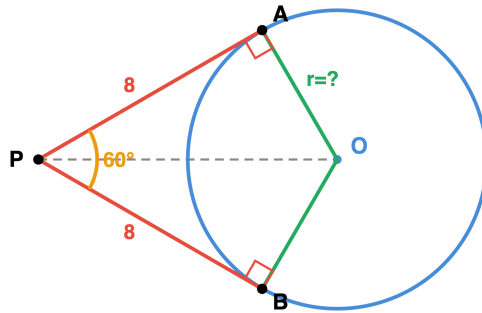
1단계: A에서 변 BC에 수선의 발 P를 내린다. 그러면 $\triangle ABP$ 는 $\angle P = 90^\circ$, $\angle B = 60^\circ$ 인 직각삼각형이다. 2단계: 삼각비를 이용하면 사다리꼴의 높이 $AP = AB \cdot \sin 60^\circ = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3} \text{ cm}$. 3단계: 사다리꼴 넓이 공식에 의해 $S = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot h = \frac{1}{2}(6 + 14)(5\sqrt{3}) = 10 \cdot 5\sqrt{3} = 50\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

풀이 전략: 비스듬한 변과 끼인각이 주어진 도형은 직각삼각형 분리가 핵심이다. 위쪽 꼭짓점에서 밑변에 수선을 내려 만든 직각삼각형에 삼각비를 적용해 높이를 추출한 후, 사다리꼴 표준 공식으로 마무리한다.

이집트의 피라미드 측량에서도 빗면과 밑변이 이루는 각으로부터 높이를 추정하는 동일한 발상이 쓰였다.

Q224 원의 성질 증명

원 O 밖의 한 점 P에서 그은 두 접선의 접점을 각각 A, B라 한다. $\overline{PA} = \overline{PB} = 8$ 이고 $\angle APB = 60^\circ$ 일 때, 원 O의 반지름을 구하시오.



- ① ① 4
- ② ② $\frac{4\sqrt{3}}{3}$
- ③ ③ $\frac{8\sqrt{3}}{3}$
- ④ ④ $4\sqrt{3}$

정답: ③

1단계: 접선과 그 접점에서 그은 반지름은 수직이므로 $\angle OAP = \angle OBP = 90^\circ$ 이다. 2단계: 사각형 OAPB의 네 각의 합은 360° 이므로 $\angle AOB = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 120^\circ$. 3단계: 두 접선의 길이가 같으므로 $\triangle OAP \cong \triangle OBP$ 이고 OP가 $\angle APB$ 를 이등분한다. 즉 $\angle APO = 30^\circ$. 4단계: 직각삼각형 OAP에서 $\angle PAO = 90^\circ$, $\angle APO = 30^\circ$, $\overline{AP} = 8$ 이므로 $\tan 30^\circ = \frac{r}{8}$. 따라서

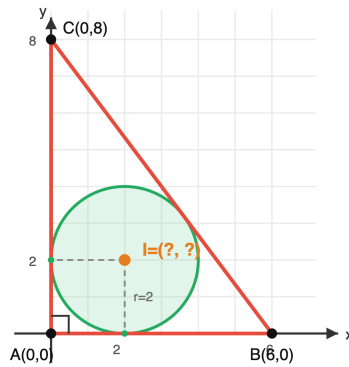
$$r = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{8\sqrt{3}}{3}.$$

풀이 전략: 접선의 접점과 중심을 이으면 반드시 직각이라는 사실에서 출발한다. 외부점, 두 접점, 중심으로 만든 사각형은 두 직각을 가지므로 나머지 두 각의 합으로 중심각을 얻을 수 있다. 그 후 직각삼각형 하나에 삼각비를 적용한다.

원 외부 점에서 그은 두 접선의 길이가 같다는 성질은 자전거 체인에서 풀리(도르래) 두 개를 잇는 외부공통접선 설계에 그대로 활용된다.

Q225 도형 종합 추론

좌표평면 위의 세 점 $A(0, 0)$, $B(6, 0)$, $C(0, 8)$ 이 직각삼각형의 꼭짓점일 때, 이 삼각형의 내접원의 중심 좌표는?



- ① ① (1, 1)
- ② ② (2, 2)
- ③ ③ (3, 3)
- ④ ④ (2, 3)

정답: ②

1단계: 빗변의 길이는 $BC = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$ 이다. 2단계: 직각삼각형의 내접원 반지름 공식 $r = \frac{a+b-c}{2}$ 를 적용하면 $r = \frac{6+8-10}{2} = 2$. (이는 넓이 $S = \frac{1}{2}r(a+b+c)$ 즉 $24 = \frac{1}{2}r \cdot 24$ 로도 확인된다.) 3단계: 직각이 원점 A에 있고 두 직각변이 좌표축 위에 놓이므로, 내접원은 x축과 y축 모두에 접한다. 중심은 두 축에서 모두 r만큼 떨어진 점, 즉 $I(r, r) = (2, 2)$ 이다.

풀이 전략: 좌표축이 도형의 변과 일치하면 그 축으로부터의 거리가 곧 좌표가 된다는 점이 핵심이다. 직각삼각형 내접원 반지름은 두 직각변과 빗변의 합/차로 간단히 표현되는 특수 공식을 활용한다.

직각삼각형의 넓이를 두 가지 방식($\frac{1}{2}ab$ 와 $\frac{1}{2}r \cdot \text{둘레}$)으로 표현하는 발상은 모든 다각형의 내접원 반지름 공식의 출발점이다.

Q226 통계 심화

5개의 변량 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 의 평균이 6, 분산이 4이다. 이 변량을 모두 2배한 후 5씩 더한 새 변량의 평균과 분산은?

- ① ① 평균 17, 분산 16
- ② ② 평균 17, 분산 4
- ③ ③ 평균 12, 분산 16
- ④ ④ 평균 17, 분산 8

정답: ①

1단계: 새 변량을 $y_i = 2x_i + 5$ 라 하자. 평균은 합의 평균이므로 $\bar{y} = 2\bar{x} + 5 = 2 \cdot 6 + 5 = 17$. 2단계: 분산은 편차의 제곱의 평균이다. 새 편차 $y_i - \bar{y} = (2x_i + 5) - (2\bar{x} + 5) = 2(x_i - \bar{x})$. 즉 편차가 2배가 된다. 3단계: 편차가 2배가 되면 그 제곱은 4배가 되므로, 새 분산은 $2^2 \cdot 4 = 16$. 상수 5는 모든 자료에 같은 양만큼 더해졌으므로 분산에 영향을 주지 않는다.

풀이 전략: 자료를 $aX + b$ 로 변환하면 평균은 그대로 $a\bar{X} + b$ 가 되지만, 분산은 b에 영향을 받지 않고 오직 a^2 배가 된다는 사실을 적용한다. 편차 정의로 돌아가 직접 유도하면 명확하다.


기상청에서 화씨를 섭씨로 환산할 때 $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ 를 쓰는데, 이때 평균은 변환되지만 분산은 $(\frac{5}{9})^2$ 만큼 곱해진다.


Q227 경시 퍼즐·확률

두 개의 서로 다른 주사위를 동시에 던졌을 때, '두 눈의 합이 7'이라는 조건 하에 '한 주사위의 눈이 3일' 확률은?

- ① ① $\frac{1}{6}$
- ② ② $\frac{1}{4}$
- ③ ③ $\frac{1}{3}$
- ④ ④ $\frac{1}{2}$

 **정답: ③**

 1단계: '두 눈의 합이 7'인 경우의 수를 모두 나열한다. (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1) → 총 6가지. 2단계: 그 중 '한 눈이 3'인 경우는 (3,4)와 (4,3) 두 가지이다. 3단계: 조건이 성립하는 표본공간 6가지 중 사건이 일어나는 경우는 2가지이므로 구하는 확률은 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

 풀이 전략: 조건부 확률은 '조건이 성립하는 경우의 수'를 새로운 표본공간으로 삼는다. 즉, 전체 36가지가 아닌 합이 7인 6가지만 살피면 된다. 모호함을 줄이기 위해 사건을 직접 나열하는 것이 안전하다.


 확률에서 '주어진 정보를 반영해 확률을 갱신'하는 발상은 베이즈가 18세기에 정립한 베이즈 정리의 출발점이다.


Q228 이차방정식 활용


이차방정식 $x^2 - (k + 3)x + 3k = 0$ 의 한 근이 다른 근의 2배일 때, 가능한 상수 k 의 값을 모두 구하시오.

- ① ① $k = 3$ 또는 $k = 6$
- ② ② $k = \frac{3}{2}$ 또는 $k = 6$
- ③ ③ $k = \frac{3}{2}$ 또는 $k = 3$
- ④ ④ $k = 6$ 만 가능

 **정답: ②**

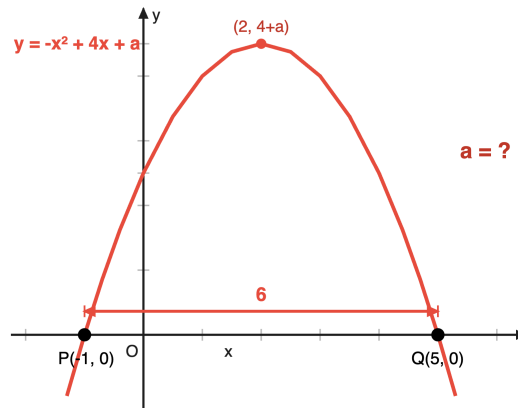
 1단계: 두 근을 $\alpha, 2\alpha$ 로 놓자. 합과 곱의 관계에 의해 $\alpha + 2\alpha = k + 3$, $\alpha \cdot 2\alpha = 3k$. 즉 $3\alpha = k + 3$ 이고 $2\alpha^2 = 3k$. 2단계: 첫 식에서 $\alpha = \frac{k+3}{3}$. 둘째 식에 대입하면 $2 \cdot \frac{(k+3)^2}{9} = 3k$, 양변에 9를 곱하면 $2(k+3)^2 = 27k$. 3단계: 전개하면 $2k^2 + 12k + 18 = 27k$, 정리하여 $2k^2 - 15k + 18 = 0$. 4단계: 인수분해하면 $(2k - 3)(k - 6) = 0$, 따라서 $k = \frac{3}{2}$ 또는 $k = 6$. (검산: $k = 6$ 일 때 $x^2 - 9x + 18 = (x - 3)(x - 6) = 0$, 두 근 3과 6이고 $6 = 2 \cdot 3 \checkmark / k = \frac{3}{2}$ 일 때 $2x^2 - 9x + 9 = (2x - 3)(x - 3) = 0$, 두 근 $\frac{3}{2}$ 와 3이고 $3 = 2 \cdot \frac{3}{2} \checkmark$)

 풀이 전략: 두 근에 비율 조건이 있을 때는 한 변수로 두 근을 표현해 미지수를 줄인다. 합과 곱의 관계로 두 식을 만든 뒤 한 미지수를 소거하면 k 에 대한 이차방정식이 되어 두 해 모두를 얻을 수 있다.

 두 근에 일정한 관계가 있는 이차방정식은 고등 수학에서 다항함수의 중근, 대칭, 비례성 분석으로 자연스럽게 확장된다.

Q229 이차함수 심화

이차함수 $y = -x^2 + 4x + a$ 의 그래프가 x 축과 두 점에서 만나고, 그 두 점 사이의 거리가 6일 때 상수 a 의 값은?



- ① ① $a = 3$
- ② ② $a = 4$
- ③ ③ $a = 5$
- ④ ④ $a = 6$

정답: ③

1단계: x 축과 만나는 점은 $y = 0$, 즉 $-x^2 + 4x + a = 0$ 의 해이다. 양변에 -1 을 곱하면 $x^2 - 4x - a = 0$. 2단계: 두 근을 α, β 라 하면 합과 곱의 관계에 의해 $\alpha + \beta = 4, \alpha\beta = -a$. 3단계: 두 근의 차의 제곱은 $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 16 + 4a$. 두 점 사이의 거리가 6이므로 $|\alpha - \beta| = 6$ 이고 $(\alpha - \beta)^2 = 36$. 4단계: $16 + 4a = 36$, 따라서 $4a = 20, a = 5$. (검산:

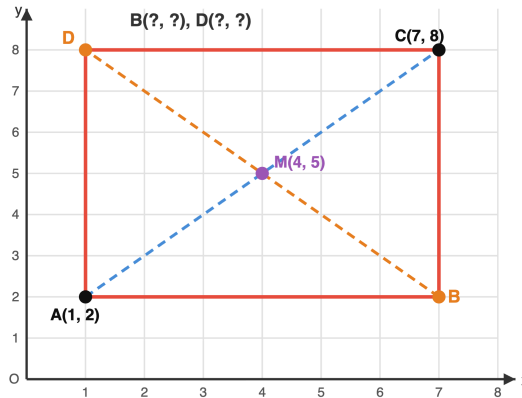
$-x^2 + 4x + 5 = -(x - 5)(x + 1)$, 교점 $x = -1, 5$, 거리 $|5 - (-1)| = 6$ ✓)

풀이 전략: 이차함수 그래프와 x 축의 교점은 곧 이차방정식의 두 실근이다. 두 근 사이 거리는 두 근의 차의 절댓값과 같고, 이는 $(\text{합})^2 - 4(\text{곱})$ 으로 곧장 표현된다. 따라서 a 에 대한 일차식만 풀면 된다.

두 근의 차이는 $\frac{\sqrt{D}}{|a|}$ (D 는 판별식)와 같으며, 이는 근의 공식의 $\pm\sqrt{D}$ 부분이 만들어내는 간격이다.

Q230 도형 종합 추론

좌표평면 위 정사각형 ABCD의 마주보는 두 꼭짓점의 좌표가 A(1, 2), C(7, 8)이다. 다른 두 꼭짓점 B, D의 좌표는? (단, 점 B의 x좌표가 점 D의 x좌표보다 크다.)



- ① ① B(7, 2), D(1, 8)
- ② ② B(1, 8), D(7, 2)
- ③ ③ B(4, 8), D(4, 2)
- ④ ④ B(2, 7), D(8, 1)

정답: ①

1단계: 정사각형의 두 대각선은 서로 수직이고 길이가 같으며, 한 점(중점)에서 만난다. 대각선 AC의 중점은

$$M = \left(\frac{1+7}{2}, \frac{2+8}{2} \right) = (4, 5) \text{이고, 이는 BD의 중점이기도 하다. 2단계: 대각선 AC의 길이는 } \sqrt{(7-1)^2 + (8-2)^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2} .$$

AC의 방향벡터는 (6, 6), 즉 단위방향 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$. 3단계: BD는 AC에 수직이므로 단위방향 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ 이고, 길이도 $6\sqrt{2}$ 이므로 중점 M으로부터 양쪽으로 각각 $3\sqrt{2}$ 만큼 떨어진다. 4단계: 한 꼭짓점 = $M + 3\sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = (4+3, 5-3) = (7, 2)$. 다른 꼭짓점은 반대쪽 $(4-3, 5+3) = (1, 8)$. 조건상 x좌표가 큰 점이 B이므로 B(7, 2), D(1, 8).

풀이 전략: 정사각형의 두 대각선이 '수직, 등길이, 같은 중점'이라는 세 성질을 동시에 만족한다는 점에서 출발한다. 한 대각선의 방향과 길이를 알면 그것에 수직이고 길이가 같은 다른 대각선이 자동으로 결정된다.

마름모, 직사각형, 정사각형은 대각선 성질로 구분된다. 정사각형은 마름모와 직사각형의 모든 대각선 성질을 동시에 만족하는 유일한 사각형이다.

Q231 실수·근호 추론

$\sqrt{8+2\sqrt{15}}$ 의 값을 가장 간단한 꼴로 나타내면?

- ① ① $\sqrt{3} + \sqrt{5}$
- ② ② $2\sqrt{2} + \sqrt{3}$
- ③ ③ $1 + \sqrt{15}$
- ④ ④ $\sqrt{8} + \sqrt{15}$

정답: ① $\sqrt{3} + \sqrt{5}$

1단계: $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ 꼴로 가정하면 $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{ab}$.

2단계: 주어진 식과 비교하면 $a + b = 8, ab = 15$.

3단계: 합 8, 곱 15인 두 양수는 3과 5 (이차방정식 $t^2 - 8t + 15 = 0$ 의 근).

4단계: 따라서 $\sqrt{8+2\sqrt{15}} = \sqrt{3} + \sqrt{5}$ (양의 부호 채택).

풀이 전략: 이중근호를 풀려면 $\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ 꼴로 변형. $2\sqrt{ab}$ 의 안쪽 수에서 ab 값을, 상수항에서 a + b 값을 읽어 두 수를 추측한다.

이중근호는 16세기 이탈리아 수학자 봄벨리가 삼차방정식 풀이 과정에서 처음 체계적으로 다루었다.

Q232 인수분해 심화

$n \geq 2$ 인 자연수 n 에 대하여 $n^4 + 4$ 가 항상 합성수임을 보이려고 한다. $n^4 + 4$ 를 두 정수계수 다항식의 곱으로 인수분해한 것은?

- ① $(n^2 + 2)(n^2 + 2)$
- ② $(n^2 + 2n + 2)(n^2 - 2n + 2)$
- ③ $(n^2 + 2n)(n^2 - 2n + 2)$
- ④ $(n^2 + 1)(n^2 + 4)$

정답: ② $(n^2 + 2n + 2)(n^2 - 2n + 2)$

1단계: $n^4 + 4 = n^4 + 4n^2 + 4 - 4n^2 = (n^2 + 2)^2 - (2n)^2$ ($4n^2$ 를 더하고 빼는 트릭으로 차의 제곱 꼴).

2단계: 차의 제곱 공식 $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$ 적용: $(n^2 + 2 + 2n)(n^2 + 2 - 2n)$.

3단계: 정리하면 $(n^2 + 2n + 2)(n^2 - 2n + 2)$.

4단계: $n \geq 2$ 이면 $n^2 - 2n + 2 = (n - 1)^2 + 1 \geq 2$, $n^2 + 2n + 2 \geq 10$ 이므로 두 인수가 모두 1보다 커 합성수.

풀이 전략: $n^4 + 4$ 는 단순 인수분해가 안 되므로 $A^2 - B^2$ 꼴로 만드는 트릭이 필요. 가운데 항 $4n^2$ 를 더하고 빼서 완전제곱식 $(n^2 + 2)^2$ 과 $(2n)^2$ 의 차로 변형한다.

이 항등식은 18세기 프랑스 여성 수학자 소피 제르맹(Sophie Germain)의 이름을 따 '소피 제르맹 항등식'이라 불린다.

Q233 이차방정식 활용

지면에서 초속 30 m/s로 똑바로 위로 쏘아 올린 물체의 t 초 후 지면으로부터의 높이는 $h = 30t - 5t^2$ (m)이다. 이 물체가 처음으로 높이 25 m에 도달하는 시각과 다시 25 m 지점을 통과하여 떨어지는 시각의 차를 구하시오.

- ① ①2초
- ② ②3초
- ③ ③4초
- ④ ④5초

정답: ③4초

1단계: $h = 25$ 일 때 $30t - 5t^2 = 25$ 이므로 $5t^2 - 30t + 25 = 0$.

2단계: 양변을 5로 나누면 $t^2 - 6t + 5 = 0$ 이고, 인수분해하면 $(t - 1)(t - 5) = 0$.

3단계: $t = 1$ 초 (올라가는 길에 처음 도달), $t = 5$ 초 (내려오는 길에 다시 통과).

4단계: 두 시각의 차 $5 - 1 = 4$ 초.

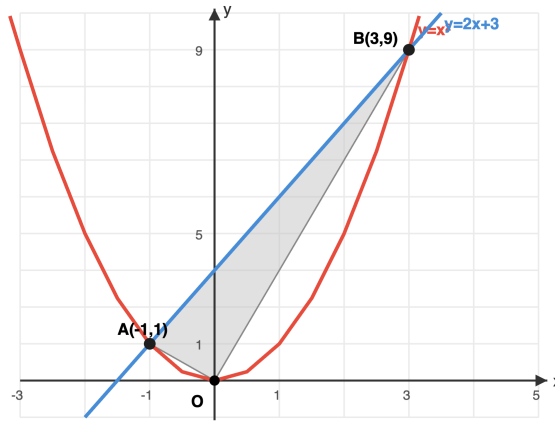
풀이 전략: 포물선 운동에서 같은 높이를 두 번 지나는 시각은 이차방정식의 두 실근에 해당. 두 근의 차는

$$\sqrt{(t_1 + t_2)^2 - 4t_1t_2} = \sqrt{36 - 20} = 4 \text{로도 확인할 수 있다.}$$

공기 저항을 무시한 포물선 운동에서 두 근의 평균 $\frac{t_1 + t_2}{2} = 3$ 초가 정확히 최고점 도달 시각이다 (포물선 대칭성).

Q234 이차함수 심화

이차함수 $y = x^2$ 의 그래프와 직선 $y = 2x + 3$ 의 두 교점을 A, B라 할 때, 삼각형 OAB의 넓이를 구하시오. (단, O는 원점)



- ① ①4
- ② ②6
- ③ ③8
- ④ ④12

🎯 정답: ②6

📖 1단계: 교점 좌표 구하기. $x^2 = 2x + 3$ 이므로 $x^2 - 2x - 3 = 0$, $(x - 3)(x + 1) = 0$, $x = 3$ 또는 $x = -1$.

2단계: 두 교점은 A(-1, 1), B(3, 9).

3단계: 원점을 한 꼭짓점인 삼각형의 넓이 공식 (외적 형태): $S = \frac{1}{2}|x_A y_B - x_B y_A| = \frac{1}{2}|(-1) \cdot 9 - 3 \cdot 1|$.

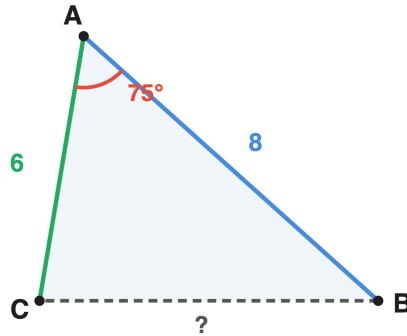
4단계: $S = \frac{1}{2}|-9 - 3| = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6$.

🧠 풀이 전략: 원점을 한 꼭짓점으로 갖는 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}|x_1 y_2 - x_2 y_1|$ 공식이 가장 빠르다. 또는 직선 $y = 2x + 3$ 과 원점 사이 거리를 높이로, $|AB|$ 를 밑변으로 잡아도 동일한 결과.

💡 이 외적 넓이 공식은 벡터 \vec{OA} 와 \vec{OB} 가 만드는 평행사변형 넓이의 절반이며, 고등학교에서 행렬식(2×2 determinant) 형태로 다시 만난다.

Q235 삼각비 심화

삼각형 ABC에서 $AB = 8$, $AC = 6$, $\angle A = 75^\circ$ 이다. 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오. (단, $\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$)



- ① $6(\sqrt{6} + \sqrt{2})$
- ② $3(\sqrt{6} + \sqrt{2})$
- ③ $12\sqrt{2}$
- ④ 24

정답: ① $6(\sqrt{6} + \sqrt{2})$

1단계: 두 변과 끼인각을 알 때 삼각형의 넓이는 $S = \frac{1}{2}ab\sin C$ 공식 적용.

2단계: $S = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 \cdot \sin 75^\circ = 24\sin 75^\circ$.

3단계: $\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ 대입.

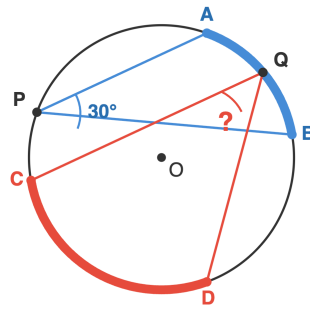
4단계: $S = 24 \cdot \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = 6(\sqrt{6} + \sqrt{2})$.

풀이 전략: 끼인각 공식 $\frac{1}{2}ab\sin\theta$ 는 삼각형의 넓이를 두 변과 그 사이 각만으로 구할 수 있게 한다. 75° 는 특수각이 아니지만 $45^\circ + 30^\circ$ 의 합으로 표현되어 사인 합 공식으로 정확한 값이 유도된다.

$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ$. 이 합 공식은 고등학교 삼각함수의 합·차 공식의 기초이다.

Q236 원의 성질 증명

원 O에서 호 AB의 길이와 호 CD의 길이의 비가 3:5이고, 호 AB에 대한 원주각의 크기가 30°일 때, 호 CD에 대한 원주각의 크기를 구하시오.



호AB : 호CD = 3 : 5

- ① ①36°
- ② ②45°
- ③ ③50°
- ④ ④60°

정답: ③50°

1단계: 원주각 정리의 따름정리 - 한 원에서 원주각의 크기는 그 원주각이 끼고 있는 호의 길이에 비례한다 (중심각이 호 길이에 비례하고, 원주각은 중심각의 절반이기 때문).

2단계: 호 AB의 원주각 30°, 호 CD의 원주각을 x 라 하면 $30^\circ : x = 3 : 5$.

3단계: $3x = 30^\circ \cdot 5 = 150^\circ$.

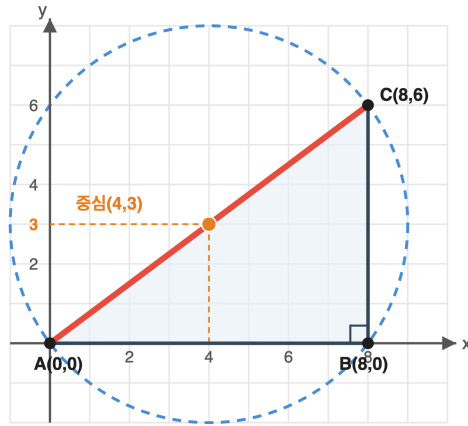
4단계: $x = 50^\circ$.

풀이 전략: 원주각 정리의 핵심 따름정리를 사용. 호 길이의 비를 그대로 원주각의 비로 옮긴다는 점이 비둘기집보다 강력하다. 호 길이는 중심각에 비례, 중심각은 원주각의 두 배라는 두 사실의 결합.

💡 호의 길이는 (반지름)×(중심각, 라디안)으로 정의된다. 따라서 같은 원에서 호 길이는 중심각에 정확히 비례하고, 원주각은 그 절반이므로 결국 호와 원주각도 비례한다.

Q237 도형 종합 추론

좌표평면 위 세 점 $A(0, 0)$, $B(8, 0)$, $C(8, 6)$ 을 지나는 원의 중심의 좌표를 구하시오.



- ① ①(4, 3)
- ② ②(4, 2)
- ③ ③(5, 3)
- ④ ④(8, 3)

☞ 정답: ①(4, 3)

📖 1단계: 세 점이 만드는 삼각형 분석. AB 는 x 축 방향, BC 는 y 축 방향이므로 두 변이 수직. 즉 각 $B = 90^\circ$ 인 직각삼각형.

2단계: 직각삼각형의 외접원 중심은 빗변의 중점이고, 빗변이 곧 지름이다 (탈레스 정리의 역).

3단계: 빗변 AC 의 중점 = $\left(\frac{0+8}{2}, \frac{0+6}{2}\right) = (4, 3)$.

4단계: 검증 - 중심에서 세 점까지 거리: $\sqrt{16+9} = 5$, $\sqrt{16+9} = 5$, $\sqrt{16+9} = 5$. 모두 같으므로 옳다.

🧠 풀이 전략: 세 점이 직각을 이루는지 먼저 점검. 직각이 있다면 외접원의 지름이 빗변임을 이용 (원주각이 90° 이면 마주보는 호는 반원). 외심 = 빗변의 중점.

💡 탈레스 정리 (기원전 6세기)는 '반원 위 임의의 점에서 지름 양 끝을 보는 각은 직각'이라는 정리로, 가장 오래된 기하 정리 중 하나이다. 그 역도 성립한다.

Q238 통계 심화

10개의 변량 x_1, x_2, \dots, x_{10} 의 평균이 5, 분산이 4이다. 새 변량 $y_i = 3x_i - 2$ ($i = 1, \dots, 10$)의 평균을 m , 분산을 V 라 할 때 $m + V$ 의 값은?

- ① ①29
- ② ②37
- ③ ③45
- ④ ④49

☞ 정답: ④49

📖 1단계: 자료 변환 $y = ax + b$ 의 평균은 $y = ax + b$. 따라서 $m = 3 \cdot 5 - 2 = 15 - 2 = 13$.

2단계: 분산은 평행이동 b 의 영향을 받지 않고 배율 a 의 제곱만큼만 변함: $V = a^2 \cdot \sigma_x^2$.

3단계: $V = 3^2 \cdot 4 = 9 \cdot 4 = 36$.

4단계: $m + V = 13 + 36 = 49$.

🧠 풀이 전략: 자료 변환 규칙 두 개를 동시에 적용: 평균은 일차식 그대로 변환되고, 분산은 상수항이 사라지고 계수가 제곱된다. 분산이 평행이동에 불변인 이유는 모든 자료가 동일하게 이동하면 편차(자료-평균)가 변하지 않기 때문.

💡 이 규칙은 통계의 표준화(standardization) $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$ 에서 평균 0, 분산 1을 만들어내는 핵심 원리이다.

Q239 경시 퍼즐·확률

어느 학교 학생 100명에게 영어와 수학을 좋아하는지 조사하였다. 영어를 좋아하는 학생은 60명, 수학을 좋아하는 학생은 45명, 두 과목 모두 좋아하는 학생은 25명이었다. 두 과목 중 어느 것도 좋아하지 않는 학생 수를 구하시오.

- ① ①15명
- ② ②20명
- ③ ③25명
- ④ ④30명

정답: ②20명

1단계: 영어를 좋아하는 학생 집합을 E , 수학을 좋아하는 학생 집합을 M 이라 하자. $|E| = 60, |M| = 45, |E \cap M| = 25$.

2단계: 포함-배제 원리: $|E \cup M| = |E| + |M| - |E \cap M| = 60 + 45 - 25 = 80$.

3단계: 영어 또는 수학 중 적어도 하나를 좋아하는 학생은 80명.

4단계: 둘 다 좋아하지 않는 학생 = 전체 - $|E \cup M| = 100 - 80 = 20$ 명.

풀이 전략: 두 집합의 합집합 크기는 단순히 더하면 교집합이 두 번 세어지므로 한 번 빼야 함 (포함-배제 원리). 보집합 크기는 전체에서 합집합을 뺀다.

포함-배제 원리는 세 집합 이상으로 확장하면 부호가 교대하는 형태로 나타난다:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Q240 경시 퍼즐·확률

주사위를 두 번 던질 때, 두 눈의 합이 7인 사건을 A , 두 눈의 곱이 짝수인 사건을 B 라 한다. $P(A) + P(B)$ 의 값은?

- ① ① $\frac{5}{6}$
- ② ② $\frac{11}{12}$
- ③ ③ $\frac{7}{12}$
- ④ ④ $\frac{8}{9}$

정답: ② $\frac{11}{12}$

1단계: $P(A)$ 계산. 두 눈의 합이 7인 경우: (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)로 6가지. 전체 36가지 중 $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

2단계: $P(B)$ 계산은 여사건이 빠르다. 곱이 홀수 \Leftrightarrow 두 눈 모두 홀수 \Leftrightarrow 각각 {1, 3, 5}에서 선택. 경우의 수 $3 \times 3 = 9$, $P(B^c) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$.

3단계: $P(B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

4단계: $P(A) + P(B) = \frac{1}{6} + \frac{3}{4} = \frac{2}{12} + \frac{9}{12} = \frac{11}{12}$.

풀이 전략: 곱이 짝수일 확률은 직접 세면 27가지로 복잡. 여사건 '둘 다 홀수' ($3 \times 3 = 9$ 가지)가 훨씬 빠르다. 합이 7인 경우는 두 주사위 합 분포에서 가장 빈번한 경우 (6가지).

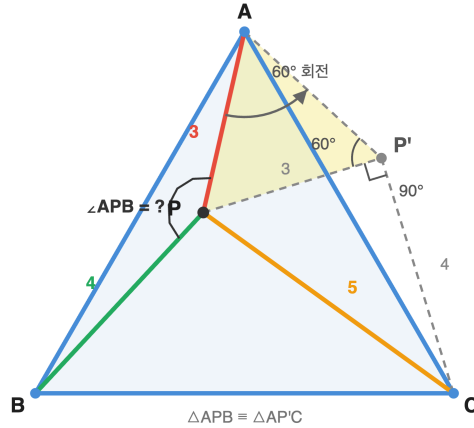
두 주사위의 합이 7일 확률 $\frac{1}{6}$ 은 가능한 모든 합 중 최댓값이다. 합 분포가 7을 중심으로 좌우대칭이기 때문.

중3 수학 심화

총 10문제 · 문제와 정답·풀이 포함

Q241 도형 종합 추론

정삼각형 ABC의 내부에 점 P가 있어 $PA = 3$, $PB = 4$, $PC = 5$ 이다. $\angle APB$ 의 크기를 구하시오.



- ① ①120°
- ② ②135°
- ③ ③150°
- ④ ④165°

정답: ③150°

1단계: 회전 보조 작도. 점 P를 점 A 중심으로 시계방향(또는 반시계) 60° 회전한 점을 P'라 하자. 회전이므로 $AP=AP'=3$ 이고 $\angle PAP' = 60^\circ$, 따라서 삼각형 APP'은 한 변 3인 정삼각형이고 $PP'=3$, $\angle AP'P = 60^\circ$.

2단계: 정삼각형이므로 $AB=AC$, $\angle BAC = 60^\circ$. 즉 점 B를 A 중심으로 60° 회전하면 점 C와 일치. 회전은 거리를 보존하므로 회전 후 BP는 CP'에 대응하여 $CP'=BP=4$.

3단계: 삼각형 PP'C에서 $PP'=3$, $P'C=4$, $PC=5$. $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$ 이므로 직각삼각형이고, 빗변 PC에 대응하여 $\angle PP'C = 90^\circ$ (직각은 두 다리 사이).

4단계: 회전 합동에 의해 $\angle APB = \angle AP'C$. 점 P가 삼각형 AP'C 내부 배치에서 $\angle AP'C = \angle AP'P + \angle PP'C = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$.

풀이 전략: 정삼각형 내부의 PA, PB, PC가 (3,4,5) 같은 특수한 길이일 때, 한 꼭짓점을 중심으로 60° 회전시키는 것이 정석 풀이. 회전된 점이 자연스럽게 (3,4,5) 직각삼각형을 만들어 각도를 분리할 수 있게 해 준다.

이 회전 트릭은 17세기 이탈리아 수학자 토리첼리가 페르마 점 문제를 풀면서 처음 사용한 기법이다. 정삼각형의 60° 회전은 거리 정보를 보존하면서 새로운 삼각형을 만들어낸다.

Q242 인수분해 심화

다항식 $x^4 + x^2 + 1$ 을 두 이차식의 곱으로 인수분해하시오.

- ① ① $(x^2 + 1)(x^2 + 1)$
- ② ② $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$
- ③ ③ $(x^2 + x - 1)(x^2 - x - 1)$
- ④ ④ $(x^2 + 2x + 1)(x^2 - 2x + 1)$

정답: ② $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$

1단계: x^2 항을 더하고 빼서 완전제곱식을 만든다. $x^4 + x^2 + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2$.

2단계: 차의 제곱 공식 $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$ 에서 $A = x^2 + 1, B = x$.

3단계: $(x^2 + 1 + x)(x^2 + 1 - x) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$.

풀이 전략: 가운데 항이 어색할 때 \pm 같은 항을 추가해 완전제곱 - 제곱 형태를 만들면 인수분해가 가능해진다.

$x^4 + x^2 + 1$ 은 1의 6제곱근 중 일부를 근으로 갖는, 원분다항식과 닮은 식이다.

Q243 이차방정식 활용

이차방정식 $x^2 - kx + 12 = 0$ 의 두 근이 모두 자연수가 되는 자연수 k 의 값을 모두 구하고, 그 합을 구하시오.

- ① ① 13
- ② ② 20
- ③ ③ 28
- ④ ④ 35

정답: ③ 28

1단계: 두 자연수 근을 α, β 라 하면 근과 계수의 관계로 $\alpha\beta = 12, \alpha + \beta = k$.

2단계: 곱이 12인 자연수 쌍은 (1, 12), (2, 6), (3, 4) 이고 각 경우 k 값은 13, 8, 7.

3단계: 가능한 k 들의 합은 $13 + 8 + 7 = 28$.

풀이 전략: 두 근의 곱이 작은 정수일 때는 가능한 자연수 쌍을 빠짐없이 나열하고 합을 계산한다.

이런 정수해 분석은 고대 알렉산드리아의 디오판토스가 다룬 정수론 문제의 기초이다.

Q244 통계 심화

A반 학생 5명의 점수의 합은 400, 점수의 제곱의 합은 32100이다. B반 학생 5명의 점수의 합은 350, 점수의 제곱의 합은 24550이다. 두 반 학생 10명을 합친 자료의 분산을 구하시오.

- ① ① 25
- ② ② 36
- ③ ③ 40
- ④ ④ 50

정답: ③ 40

1단계: 합친 자료의 평균 $\bar{x} = \frac{400 + 350}{10} = 75$.

2단계: 합친 자료의 점수의 제곱의 평균 $\overline{x^2} = \frac{32100 + 24550}{10} = 5665$.

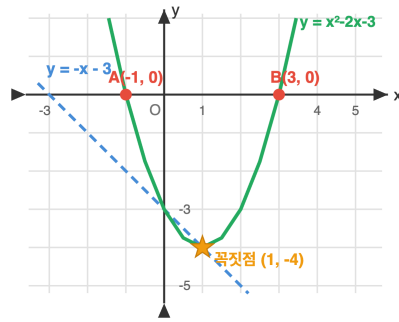
3단계: 분산 $V = \overline{x^2} - \bar{x}^2 = 5665 - 75^2 = 5665 - 5625 = 40$.

풀이 전략: 두 자료를 합칠 때는 합과 제곱의 합을 더해서 새로운 평균과 새로운 제곱 평균을 따로 구한 뒤 분산 공식을 적용한다.

분산은 18세기 가우스가 천체 관측 오차를 분석하면서 그 중요성을 처음 강조한 통계량이다.

Q245 이차함수 심화

좌표평면에서 두 점 $A(-1, 0)$, $B(3, 0)$ 을 지나고 꼭짓점이 직선 $y = -x - 3$ 위에 있는 이차함수의 식을 구하시오.



- ① ① $y = x^2 - 2x - 3$
- ② ② $y = -x^2 + 2x + 3$
- ③ ③ $y = 2x^2 - 4x - 6$
- ④ ④ $y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$

🎯 정답: ① $y = x^2 - 2x - 3$

📖 1단계: 두 근이 $-1, 3$ 이므로 이차함수를 $y = a(x + 1)(x - 3) = a(x^2 - 2x - 3)$ 으로 놓는다.

2단계: 꼭짓점의 x 좌표는 두 근의 평균 $\frac{-1 + 3}{2} = 1$ 이고, y 좌표는 $a(1 - 2 - 3) = -4a$.

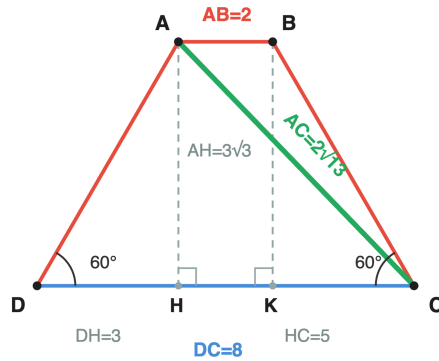
3단계: 꼭짓점 $(1, -4a)$ 가 직선 $y = -x - 3$ 위에 있으므로 $-4a = -1 - 3 = -4$, 즉 $a = 1$. 따라서 $y = x^2 - 2x - 3$.

🧠 풀이 전략: 두 x 절편을 이용해 인수곱 형태로 식을 잡고, 꼭짓점이 직선 위에 있다는 추가 조건으로 미정계수 a 를 결정한다.

💡 포물선의 꼭짓점은 항상 두 x 절편의 정중앙에 위치하며, 이 사실은 함수의 대칭성에서 곧장 따라온다.

Q246 삼각비 심화

등변사다리꼴 ABCD에서 $AB \parallel DC$, $AB=2$, $DC=8$ 이고 두 밑각 $\angle ADC = \angle BCD = 60^\circ$ 이다. 대각선 AC의 길이를 구하시오.



- ① ① $\sqrt{43}$
- ② ② $2\sqrt{13}$
- ③ ③ 7
- ④ ④ $4\sqrt{3}$

정답: ② $2\sqrt{13}$

1단계: A에서 DC에 수선의 발을 H라 하면 등변사다리꼴 대칭성에 의해 $DH = \frac{DC - AB}{2} = \frac{8 - 2}{2} = 3$.

2단계: 직각삼각형 ADH에서 $\angle ADH = 60^\circ$ 이므로 $AH = DH \cdot \tan 60^\circ = 3\sqrt{3}$.

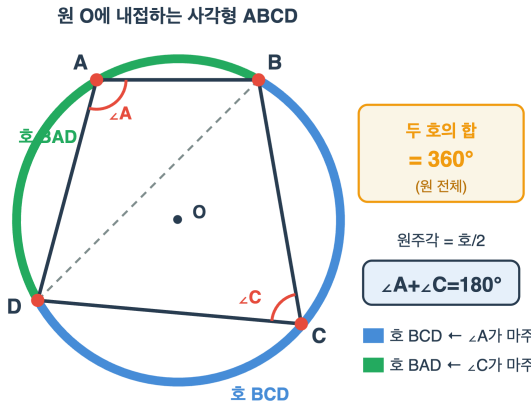
3단계: $HC = DC - DH = 8 - 3 = 5$. 직각삼각형 AHC에서 $AC^2 = AH^2 + HC^2 = 27 + 25 = 52$, $AC = 2\sqrt{13}$.

풀이 전략: 윗변의 두 끝에서 아랫변에 수선을 내려 사다리꼴을 직사각형과 두 직각삼각형으로 분해하면 삼각비와 피타고라스를 자연스럽게 결합할 수 있다.

등변사다리꼴은 사다리꼴 중 유일하게 항상 한 원에 내접할 수 있는 도형이다.

Q247 원의 성질 증명

원 O에 내접하는 사각형 ABCD에서 $\angle A + \angle C = 180^\circ$ 가 성립함을 원주각 정리를 이용해 증명할 때, 다음 중 증명의 핵심 근거로 가장 적절한 것은?



- ① ① 마주 보는 두 각이 각각 어떤 호의 원주각이며, 그 두 호의 길이의 합이 원 둘레 전체와 같으므로 두 원주각의 합은 180° 이다.
- ② ② 두 호의 길이의 합이 반원의 길이와 같으므로 그 원주각의 합은 90° 이다.
- ③ ③ 두 대각선이 같은 원에 내접하므로 항상 같은 길이이다.
- ④ ④ 사각형의 네 내각의 합이 360° 이기 때문에 자동으로 성립한다.

정답: ①

1단계: 원주각 정리에 의해 $\angle A$ 는 점 A가 보지 않는 쪽 호 BCD에 대한 원주각이고, $\angle C$ 는 호 BAD의 원주각이다.

2단계: 두 호 BCD와 BAD는 원의 호를 두 부분으로 나누는 것이므로 그 길이(또는 중심각)의 합은 원 전체 360° 이다.

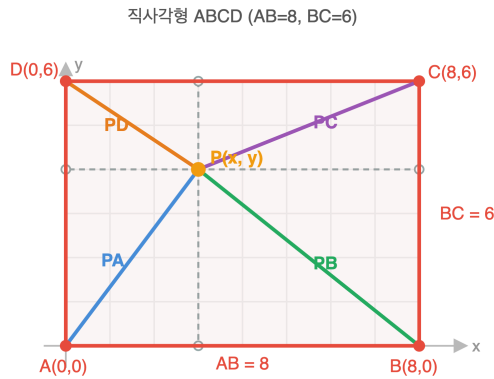
3단계: 원주각은 같은 호에 대한 중심각의 절반이므로 $\angle A + \angle C = (\text{호 BCD} + \text{호 BAD})/2 = 360^\circ/2 = 180^\circ$. 따라서 마주 보는 두 각의 합은 180° 이다.

풀이 전략: 내접사각형의 마주 보는 두 각이 각각 어느 호의 원주각인지 정확히 식별하면, 두 호의 합이 원 전체라는 사실에서 결론이 나온다.

이 명제의 역도 성립해서, 마주 보는 두 각의 합이 180° 인 사각형은 반드시 한 원 위에 놓인다.

Q248 도형 종합 추론

직사각형 ABCD에서 AB=8, BC=6 이다. 직사각형 내부의 임의의 한 점 P에 대해 $PA^2 + PC^2$ 와 $PB^2 + PD^2$ 의 관계로 항상 옳은 것은?



- ① ① $PA^2 + PC^2 > PB^2 + PD^2$ 가 항상 성립
- ② ② $PA^2 + PC^2 < PB^2 + PD^2$ 가 항상 성립
- ③ ③ $PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$ 가 항상 성립
- ④ ④ 점 P의 위치에 따라 대소가 달라진다

정답: ③ $PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$ 가 항상 성립

1단계: 좌표를 도입해 A(0,0), B(8,0), C(8,6), D(0,6), P(x, y) 로 둔다.

2단계: $PA^2 + PC^2 = (x^2 + y^2) + ((x - 8)^2 + (y - 6)^2) = 2x^2 - 16x + 64 + 2y^2 - 12y + 36$.

3단계: $PB^2 + PD^2 = ((x - 8)^2 + y^2) + (x^2 + (y - 6)^2) = 2x^2 - 16x + 64 + 2y^2 - 12y + 36$. 두 식이 항등적으로 같다. 따라서 P의 위치와 관계없이 $PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$.

풀이 전략: 좌표평면에 도형을 올리고 거리의 제곱을 직접 계산하면 항등식이 드러난다. 직사각형의 대칭성이 두 합을 같게 만든다.

이 결과는 영국 국기(Union Jack)의 X자 무늬를 닮아서 'British Flag Theorem(영국 깃발 정리)'이라고 불린다.

Q249 경시 퍼즐·확률

어느 학교 학생 100명 중 수학을 좋아하는 학생은 60명, 영어를 좋아하는 학생은 50명이다. 두 과목을 모두 좋아하는 학생 수의 가능한 최솟값을 m , 최댓값을 M 이라 할 때 $M - m$ 의 값을 구하시오.

- ① ① 30
- ② ② 40
- ③ ③ 50
- ④ ④ 60

정답: ② 40

1단계: 두 과목 모두 좋아하는 학생 수를 x 라 하면, 합집합의 크기는 $60 + 50 - x$ 이고 이는 전체 100명을 넘을 수 없다. 즉 $60 + 50 - x \leq 100$ 에서 $x \geq 10$, 따라서 $m = 10$.

2단계: 또한 x 는 영어를 좋아하는 학생 수 50을 넘을 수 없으므로 $x \leq 50$, 따라서 $M = 50$.

3단계: $M - m = 50 - 10 = 40$.

풀이 전략: 교집합의 크기는 (작은 집합 크기) 이하이고, 합집합의 크기가 전체를 넘지 못한다는 두 부등식을 결합해 범위를 결정한다.

포함-배제 원리는 $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ 라는 단순한 식에서 출발해 조합수학 전반으로 확장되는 핵심 도구이다.

Q250 이차방정식 활용

이차방정식 $x^2 - (k + 1)x + 2k - 2 = 0$ 의 두 실근의 비가 $1 : 2$ 일 때, 가능한 모든 실수 k 의 값의 합을 구하시오.

- ① ① 5
- ② ② 7
- ③ ③ 8
- ④ ④ 9

🎯 정답: ② 7

📖 1단계: 두 근을 $\alpha, 2\alpha$ 로 놓으면 근과 계수의 관계로 $\alpha + 2\alpha = 3\alpha = k + 1, \alpha \cdot 2\alpha = 2\alpha^2 = 2k - 2$.

2단계: 첫 식에서 $\alpha = \frac{k + 1}{3}$, 두 번째 식에서 $\alpha^2 = k - 1$. 두 식을 결합하면 $\frac{(k + 1)^2}{9} = k - 1$, 즉 $(k + 1)^2 = 9(k - 1)$.

3단계: 전개하면 $k^2 + 2k + 1 = 9k - 9$, 곧 $k^2 - 7k + 10 = 0$ 이고 $(k - 2)(k - 5) = 0$. 따라서 $k = 2$ 또는 $k = 5$, 합은 7. (검산: $k = 2 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$, 근 1, 2; $k = 5 \Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0$, 근 2, 4.)

🧠 풀이 전략: 두 근의 비가 정해진 경우 한 변수(α)로 두 근을 모두 표현해 근과 계수의 관계 두 식을 만들고, 변수 소거로 k 를 구한다.

💡 두 근의 비는 일반적으로 '근과 계수의 관계' 만으로 깔끔하게 결정된다. 비가 정해지면 자유도가 1만큼 줄기 때문이다.