📝 중2 수학 심화

총 40문제 · 문제와 정답·풀이 포함

Q1 유리수·순환소수 추론

분수 $\frac{n}{140}$이 유한소수로 나타내어지도록 하는 자연수 n의 최솟값은? (단, n은 1보다 크다.)

①) ① 3

②) ② 5

③) ③ 7

④) ④ 14

🎯 **정답: ③ 7**

📖 1단계: 140을 소인수분해하면 140 = 2^2 × 5 × 7이다.
2단계: 유한소수가 되려면 기약분수의 분모가 2와 5만을 소인수로 가져야 하므로, 분모의 7이 반드시 약분되어 없어져야 한다.
3단계: 따라서 분자 n은 7의 배수여야 한다. $n > 1$인 7의 배수 중 최솟값은 7이다. 확인: $\frac{7}{140} = \frac{1}{20} = 0.05$ (유한소수).

🧠 풀이 전략: 핵심은 '분모의 소인수에서 2,5 외의 인수를 분자가 약분해 없애야 한다'는 원리. 140=2^2·5·7에서 걸림돌은 7뿐이므로 n이 7을 포함해야 한다. 최솟값 조건에서 n=7.

💡 분모의 소인수가 2와 5뿐인 분수만 유한소수가 되는 이유는 우리가 사용하는 수 체계가 10진법(=2×5)이기 때문이다.

Q2 지수·식 계산 심화

$a + \frac{1}{a} = 3$일 때, $a^3 + \frac{1}{a^3}$의 값은? (단, $a > 0$)

①) ① 15

②) ② 18

③) ③ 21

④) ④ 24

🎯 **정답: ② 18**

📖 1단계: 양변을 제곱하면 $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = a^2 + 2 + \frac{1}{a^2} = 9$이므로 $a^2 + \frac{1}{a^2} = 7$.
2단계: 곱셈 공식 $(x+y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3$을 $x = a, y = \frac{1}{a}$에 적용하면 $a^3 + \frac{1}{a^3} = \left(a + \frac{1}{a}\right)\left(a^2 - 1 + \frac{1}{a^2}\right)$.
3단계: 대입하면 $3 \times (7 - 1) = 3 \times 6 = 18$.

🧠 풀이 전략: a를 직접 구하지 말고 대칭식의 성질을 이용한다. $a + \frac{1}{a}$ 꼴의 식은 제곱하면 $a^2 + \frac{1}{a^2}$ 형태가 자연스럽게 나오고, 세제곱 전개로 $a^3 + \frac{1}{a^3}$을 유도할 수 있다.

💡 $a + \frac{1}{a} = k$일 때 $a^n + \frac{1}{a^n}$은 점화식 $T_{n+1} = kT_n - T_{n-1}$로 계산할 수 있다.

Q3 부등식 활용 심화

연립부등식 $\begin{cases} 3x-1>x+5 \\ 2x-a\le 10 \end{cases}$ 을 만족하는 정수 x가 정확히 3개일 때, 상수 a의 값의 범위는?

①) ① $0\le a<2$

②) ② $-2\le a<0$

③) ③ $2\le a<4$

④) ④ $0<a\le 2$

🎯 **정답: ③** $2\le a<4$

📖 1단계: 첫째 부등식 $3x-1>x+5$에서 $2x>6$, 즉 $x>3$.

2단계: 둘째 부등식 $2x-a\le 10$에서 $x\le \frac{10+a}{2}$.

3단계: 따라서 해는 $3<x\le \frac{10+a}{2}$이고, 이를 만족하는 정수는 $4, 5, 6, \dots$ 꼴이다.

4단계: 정수해가 정확히 3개($4, 5, 6$)이려면 $6\le \frac{10+a}{2}<7$이어야 한다. 각 변에 2를 곱하면 $12\le 10+a<14$, 즉 $2\le a<4$이다.

따라서 상수 a의 값의 범위는 $2\le a<4$이다.

🧠 풀이 전략: 첫째 부등식에서 하한 x>3을 얻고, 정수해 3개가 4,5,6이 되려면 상한이 6 이상 7 미만이어야 한다. 경계에서 등호 포함 여부(≤, <)를 꼼꼼히 따져 a의 범위를 정한다.

💡 부등식에서 정수해 개수 문제는 '경계 포함 여부'가 핵심 함정이다.

Q4 연립방정식 심화 활용

강물이 일정한 속력으로 흐르는 강에서 배가 강을 따라 내려올 때는 24km를 2시간에, 거슬러 올라갈 때는 같은 거리를 3시간에 갔다. 정지한 물에서의 배의 속력은?

①) ① 8 km/h

②) ② 10 km/h

③) ③ 12 km/h

④) ④ 14 km/h

🎯 **정답: ② 10 km/h**

📖 1단계: 정지한 물에서 배의 속력을 x km/h, 강물의 속력을 y km/h라 하자. 내려올 때 속력은 $x+y$, 올라갈 때 속력은 $x-y$.

2단계: 거리=속력×시간이므로 $\begin{cases} (x+y)\times 2=24 \\ (x-y)\times 3=24 \end{cases}$, 즉 $\begin{cases} x+y=12 \\ x-y=8 \end{cases}$.

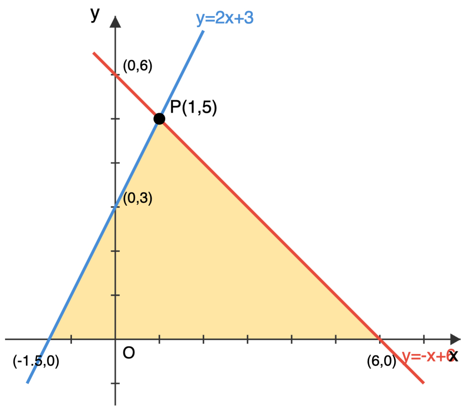
3단계: 두 식을 더하면 $2x=20$, $x=10$. 따라서 배의 속력은 10 km/h, 강물의 속력은 2 km/h.

🧠 풀이 전략: 강물 문제의 핵심은 '배의 실제 속력 = 배의 속력 ± 강물의 속력'. 내려올 때와 올라갈 때의 관계식 2개를 세워 연립한다.

💡 실제 항해에서는 '대지속도(ground speed)'와 '대수속도(water speed)'를 구분하는데, 이것이 바로 배와 강물의 속력 개념이다.

Q5 일차함수 응용

좌표평면에서 직선 $y=-x+6$과 $y=2x+3$의 교점을 P라 할 때, 두 직선과 x축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이는?



①) ① 15

②) ② 17.5

③) ③ 18.75

④) ④ 20

🎯 **정답: ③ 18.75**

📖 1단계: 교점 P를 구하자. $-x+6=2x+3$에서 $3x=3,\ x=1.\ y=-1+6=5.$ 따라서 P(1, 5).

2단계: 두 직선의 x절편을 구하자. $y=-x+6$의 x절편: $0=-x+6$에서 $x=6.\ y=2x+3$의 x절편: $0=2x+3$에서 $x=-\frac{3}{2}.$

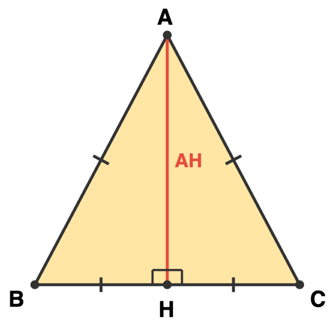
3단계: 삼각형의 밑변은 x축 위의 두 x절편 사이 거리 $=6-(-\frac{3}{2})=\frac{15}{2}$이고, 높이는 P의 y좌표 5이다. 넓이 $=\frac{1}{2}\times\frac{15}{2}\times5=\frac{75}{4}=18.75.$

🧠 풀이 전략: 두 직선과 x축이 만드는 삼각형의 꼭짓점은 (두 x절편, 교점). 밑변을 x축 위 선분으로 잡으면 높이는 교점의 y좌표이다.

💡 세 직선이 만드는 삼각형의 넓이는 행렬식(determinant)을 쓰면 한 번에 계산할 수 있다.

Q6 도형 성질 증명

이등변삼각형 ABC에서 AB=AC이고, 꼭짓점 A에서 밑변 BC에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 다음 중 항상 참이 아닌 것은?



①) ① BH = HC

②) ② ∠BAH = ∠CAH

③) ③ △ABH ≡ △ACH

④) ④ AH = BH

🎯 **정답: ④ AH = BH**

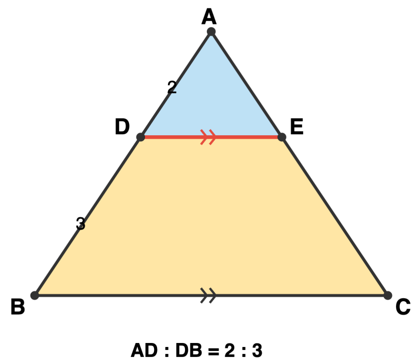
📖 1단계: 이등변삼각형에서 꼭짓각의 이등분선, 밑변의 수직이등분선, 밑변의 중선은 모두 일치한다(이등변삼각형의 성질).
2단계: 따라서 H는 BC의 중점이므로 BH=HC이고(①), ∠BAH=∠CAH이며(②), △ABH와 △ACH는 RHS 또는 SAS 합동이다(③).
3단계: 그러나 AH와 BH는 직각삼각형 ABH의 두 다리이므로 길이가 반드시 같을 이유가 없다. 예: AB=5, BH=3이면 AH=4로 서로 다르다.

🧠 풀이 전략: 이등변삼각형의 대칭성에서 오는 성질 3가지(①②③)를 확인하고, ④는 직각삼각형의 두 다리 관계로 일반적으로 성립하지 않음을 반례로 보인다.

💡 이등변삼각형의 대칭축은 밑변의 수직이등분선, 꼭짓각의 이등분선, 밑변 위 중선이 모두 한 직선이 되는 특별한 성질이 있다.

Q7 닮음 심화

삼각형 ABC에서 변 AB 위의 점 D와 변 AC 위의 점 E가 있고 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$이다. $\overline{AD}:\overline{DB} = 2:3$일 때, △ADE와 사각형 DBCE의 넓이의 비는?



①) ① 4:21

②) ② 2:5

③) ③ 4:25

④) ④ 2:23

🎯 **정답: ① 4:21**

📖 1단계: DE ∥ BC이므로 ∠ADE=∠ABC(동위각), ∠AED=∠ACB(동위각)이어서 △ADE ∽ △ABC (AA 닮음).
2단계: AD:AB = 2:(2+3) = 2:5이므로 닮음비는 2:5, 넓이비는 닮음비의 제곱인 4:25이다. 즉 △ADE의 넓이를 4k라 하면 △ABC의 넓이는 25k.
3단계: 사각형 DBCE의 넓이 = △ABC - △ADE = 25k - 4k = 21k. 따라서 △ADE : 사각형 DBCE = 4k : 21k = 4:21.

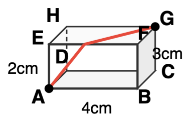
🧠 풀이 전략: 평행선 조건에서 AA 닮음을 끌어내고, 닮음비→넓이비 제곱 관계를 쓴다. 전체에서 작은 삼각형을 빼 사다리꼴 넓이를 역산하는 것이 핵심.

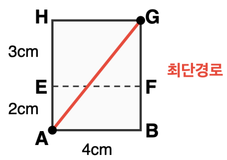
💡 닮음비가 k이면 길이의 비는 k, 넓이의 비는 k^2, 부피의 비는 k^3이다. 이를 '차원의 법칙'이라 한다.

Q8 피타고라스 활용

가로 4cm, 세로 3cm, 높이 2cm인 직육면체에서, 한 꼭짓점 A에서 대각선 방향의 반대쪽 꼭짓점 G까지 겉면을 따라 갈 때의 최단 경로의 길이는?

[전개도]





①) ① $\sqrt{41}$ cm
②) ② $\sqrt{45}$ cm
③) ③ 7 cm
④) ④ $\sqrt{61}$ cm
⑤) ⑤ $\sqrt{29}$ cm

🎯 **정답: ① $\sqrt{41}$ cm**

📖 1단계: 직육면체 겉면 최단경로는 전개도에서 직선 거리이다. 경로는 3가지 경우를 생각할 수 있다.
(i) 앞면+오른쪽 옆면: 펼치면 가로 4+2=6, 세로 3. 거리 $= \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45}$.
(ii) 앞면+윗면: 펼치면 가로 4, 세로 3+2=5. 거리 $= \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$.
(iii) 왼쪽 옆면+윗면: 펼치면 가로 3+4=7, 세로 2. 거리 $= \sqrt{7^2 + 2^2} = \sqrt{53}$.
2단계: 세 경우를 비교하면 $\sqrt{41} < \sqrt{45} < \sqrt{53}$.
3단계: 따라서 최단경로는 $\sqrt{41}$ cm이다.

🧠 풀이 전략: 공간 최단경로는 표면을 '전개도'로 펼쳐 평면 위 직선 거리로 환원한다. 전개 방향이 여러 가지이므로 모든 경우를 계산해 최소값을 찾는 것이 관건.

💡 이 문제는 일명 '개미 문제'. 상자 표면을 기어가는 개미가 최단 경로로 갈 때 실제로는 '꺾인 경로'처럼 보이지만 전개하면 직선이다.

Q9 경시 확률·퍼즐

1, 2, 3, 4, 5 다섯 개의 숫자를 한 번씩만 사용하여 다섯 자리 수를 만들 때, 34000보다 큰 수는 모두 몇 개인가?

①) ① 42

②) ② 48

③) ③ 54

④) ④ 60

🎯 **정답: ④ 60**

📖 1단계: 만의 자리가 4 또는 5인 경우, 수는 40000 이상이므로 항상 34000보다 크다. 만의 자리 2가지, 나머지 네 자리 배열 $4! = 24$가지로 $2 \times 24 = 48$개.

2단계: 만의 자리가 3인 경우, 34000보다 크려면 천의 자리가 4 또는 5여야 한다. 천의 자리가 4이면 34×××꼴(최솟값 34125)로 모두 34000보다 크고, 천의 자리가 5이면 35×××꼴로 모두 크다. 각 경우 나머지 세 자리 배열은 $3! = 6$가지이므로 $2 \times 6 = 12$개. (천의 자리가 1 또는 2이면 31×××, 32×××로 34000보다 작아 제외.)

3단계: 전체는 $48 + 12 = 60$개. 따라서 정답은 ④ 60.

🧠 풀이 전략: 만 자리부터 경우를 나누어 세는 사전식 나열. 만 자리가 4,5이면 무조건 조건 만족이고, 만 자리가 3이면 천 자리 제한으로 세분화한다.

💡 사전식 나열은 경시수학의 가장 기본 기법으로, 큰 문제를 작은 조건으로 쪼개 '경우의 수'를 체계적으로 계산한다.

Q10 유리수·순환소수 추론

기약분수 $\frac{a}{7}$을 소수로 나타냈을 때 순환마디의 길이는? (단, a는 1 이상 6 이하의 자연수)

①) ① 1

②) ② 3

③) ③ 6

④) ④ 7

🎯 **정답: ③ 6**

📖 1단계: $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$이다. 즉 순환마디는 142857로 길이가 6.

2단계: a가 1~6이면 $\frac{a}{7}$의 소수 표현은 모두 142857의 순환 배열이다. 예: $\frac{2}{7} = 0.\overline{285714}$, $\frac{3}{7} = 0.\overline{428571}$, ….

3단계: 따라서 순환마디의 길이는 모두 6이다. 이는 10의 7에 대한 위수(order)가 6이기 때문이다: $10^6 \equiv 1 \pmod 7$.

🧠 풀이 전략: 7로 나눈 나머지가 1→3→2→6→4→5→1 (길이 6 주기)로 순환하므로 마디 길이 6이 자동으로 결정된다. 소인수가 2,5가 아닌 소수 p에 대해, 마디 길이는 '10이 p에 대해 갖는 위수'로 정해진다.

💡 142857은 '순환수(cyclic number)'로 유명하다. ×2, ×3, ×4, ×5, ×6을 하면 숫자의 순서만 바뀐다: 142857×2=285714, ×3=428571.

Q11 지수·식 계산 심화

$2^x = 3^y = 6^z$이고 x, y, z가 모두 0이 아닐 때, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$의 값은?

①) ① $\frac{1}{z}$

②) ② $\frac{2}{z}$

③) ③ z

④) ④ $2z$

🎯 **정답: ① $\frac{1}{z}$**

📖 1단계: $2^x = 6^z$에서 양변에 log를 취하면 $x\log 2 = z\log 6$, 즉 $\frac{1}{x} = \frac{\log 2}{z\log 6}$.

2단계: 마찬가지로 $3^y = 6^z$에서 $\frac{1}{y} = \frac{\log 3}{z\log 6}$.

3단계: 더하면 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{\log 2 + \log 3}{z\log 6} = \frac{\log(2\times 3)}{z\log 6} = \frac{\log 6}{z\log 6} = \frac{1}{z}$.

🧠 풀이 전략: 서로 다른 밑을 가진 거듭제곱의 관계식은 로그로 바꾸어 지수를 평면화한다. $6 = 2\times 3$이라는 소인수분해가 핵심. $2^x = 6^z$를 $x\ln 2 = z\ln 6$처럼 바꿔 역수 꼴을 만든다.

💡 $a^x = b^y = c^z$이고 $c = ab$이면 항상 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$이 성립한다. 이는 '조화관계'로 알려진 대칭성의 예.

Q12 연립방정식 심화 활용

농도 8%인 소금물 200g과 농도 15%인 소금물 몇 g을 섞어 농도 12%인 소금물을 만들려고 한다. 농도 15%인 소금물을 몇 g 섞어야 하는가?

①) ① 240 g

②) ② 260 g

③) ③ 267 g

④) ④ 300 g

🎯 **정답: ③ 267 g**

📖 1단계: 농도 15%인 소금물을 x g 섞는다고 하자. 섞기 전 소금의 양: 8%×200 + 15%×x = 16 + 0.15x (g).

2단계: 섞은 후 소금물의 총량은 $(200 + x)$ g이고 농도가 12%이므로 소금의 양은 $0.12(200 + x) = 24 + 0.12x$ (g).

3단계: 소금의 양이 보존되므로 $16 + 0.15x = 24 + 0.12x$, $0.03x = 8$, $x = \frac{8}{0.03} = \frac{800}{3} \approx 266.67$. 따라서 약 267g.

🧠 풀이 전략: 농도 문제의 핵심은 '소금의 양 보존'. 섞기 전 양쪽 소금량의 합 = 섞은 후 전체 소금량. 퍼센트를 소수 또는 분수로 바꾸어 계산한다.

💡 농도 혼합 문제는 '지렛대의 원리'로도 풀 수 있다: 농도 차이의 비가 무게 역비와 같다. (15-12):(12-8)=3:4이므로 200×4/3≈267g.

Q13 부등식 활용 심화

실수 x에 대하여 |x-1| + |x-5|의 최솟값을 구하시오. (수직선에서의 거리로 해석해 보시오.)

①) ① 2

②) ② 4

③) ③ 6

④) ④ 8

🎯 **정답: ② 4**

📖 1단계: |x-1|은 수직선 위에서 x와 1 사이의 거리, |x-5|는 x와 5 사이의 거리를 나타낸다.

2단계: 따라서 |x-1| + |x-5|는 'x에서 1까지 거리와 x에서 5까지 거리의 합'이며, 이는 x가 1과 5 사이(1 ≤ x ≤ 5)에 있을 때 최소가 된다.

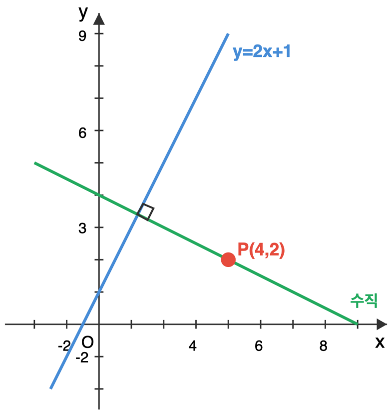
3단계: 1 ≤ x ≤ 5 구간에서 |x-1| + |x-5| = (x-1) + (5-x) = 4. 이때 값은 x와 무관하게 일정한 4이므로 최솟값은 4.

🧠 풀이 전략: 절댓값을 '거리'로 해석하면 구간을 여러 개로 나누어 일일이 계산하지 않고 기하적으로 최솟값을 찾을 수 있다. 두 점 사이 거리의 합은 관찰점이 두 점 사이에 있을 때 최소가 된다.

💡 절댓값의 거리 해석은 택시기하학과 물류 경로 최적화에서도 사용된다.

Q14 일차함수 응용

점 P(4, 2)를 지나고 직선 $y = 2x + 1$에 수직인 직선의 식은?



①) ① y = 2x - 6

②) ② y = -x/2 + 4

③) ③ y = -x/2 + 2

④) ④ y = -2x + 10

🎯 **정답: ② y = -x/2 + 4**

📖 1단계: 두 직선이 수직이면 기울기의 곱이 -1이다. 주어진 직선 y = 2x + 1의 기울기는 2이므로, 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$ 이다.
2단계: 기울기가 $-\frac{1}{2}$ 이고 점 (4, 2)를 지나는 직선의 식은 $y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 4)$.
3단계: 우변을 전개하면 $y = -\frac{x}{2} + 2 + 2 = -\frac{x}{2} + 4$. 점 (4, 2) 대입 시 $-2 + 4 = 2$로 성립.

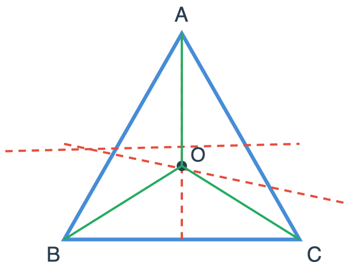
🧠 풀이 전략: 수직 조건에서는 기울기의 곱이 -1임을 이용한다. 먼저 기울기를 결정하고, 주어진 한 점의 좌표를 대입해 y절편을 확정하는 2단계 전략이다.

💡 수직 조건 '기울기 곱 = -1'은 훗날 벡터의 내적이 0이라는 더 일반적인 원리의 특수 사례로 일반화된다.

Q15 도형 성질 증명

삼각형 ABC의 세 변의 수직이등분선이 한 점에서 만나는 이유와, 그 점이 가지는 특별한 성질을 옳게 설명한 것은?

삼각형의 외심



OA = OB = OC
O는 삼각형의 ?

①) ① 무게중심: 세 중선을 꼭짓점에서 2:1로 나눈다
②) ② 내심: 세 변으로부터 같은 거리에 있다
③) ③ 외심: 세 꼭짓점으로부터 같은 거리에 있다
④) ④ 수심: 세 높이의 교점이다

🎯 **정답: ③ 외심: 세 꼭짓점으로부터 같은 거리에 있다**

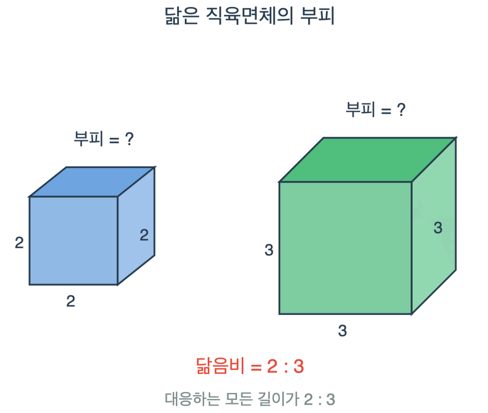
📖 1단계: 수직이등분선의 기본 성질에 의해, 선분의 수직이등분선 위의 모든 점은 그 선분의 양 끝점으로부터 거리가 같다.
2단계: 점 O가 변 AB의 수직이등분선 위에 있으므로 OA = OB. 동시에 O가 변 BC의 수직이등분선 위에 있으므로 OB = OC. 따라서 OA = OB = OC가 자동으로 성립한다.
3단계: OA = OC이므로 O는 변 CA의 수직이등분선 위에도 있어야 한다. 결국 세 수직이등분선은 반드시 한 점 O에서 만나며, O를 중심으로 하는 원이 세 꼭짓점을 모두 지나므로 O를 외심, 그 원을 외접원이라 한다.

🧠 풀이 전략: '수직이등분선 위의 점 = 두 끝점과 거리가 같다'는 본질적 성질에서 출발해, 두 수직이등분선이 만나는 점이 세 꼭짓점에서 같은 거리에 있음을 유도한다. 이 거리 동일성이 곧 세 번째 수직이등분선도 그 점을 지남을 보장한다.

💡 직각삼각형의 외심은 정확히 빗변의 중점이며, 이는 탈레스의 정리와 직접 연결된다.

Q16 닮음 심화

서로 닮음인 두 직육면체의 닮음비가 2 : 3일 때, 두 직육면체의 부피의 비는?



①) ① 2 : 3
②) ② 4 : 9
③) ③ 8 : 9
④) ④ 8 : 27

🎯 **정답: ④ 8 : 27**

📖 1단계: 닮음비 k : 1인 두 입체도형은 대응하는 모든 길이의 비가 k : 1이다. 따라서 닮음비 2 : 3이면 대응 길이가 2 : 3.
2단계: 직육면체의 부피는 (가로) × (세로) × (높이)이므로 세 개의 길이가 곱해진다. 각 길이가 2 : 3이면 부피의 비는 $2 \times 2 \times 2 : 3 \times 3 \times 3$
.
3단계: 따라서 부피의 비는 $2^3 : 3^3 = 8 : 27$.

🧠 풀이 전략: 차원별 닮음 법칙을 기억한다. 길이(1차원) 비는 k, 넓이(2차원) 비는 k^2, 부피(3차원) 비는 k^3. 부피는 세 길이의 곱이므로 세제곱 관계가 자연스럽게 나타난다.

💡 이 세제곱 법칙은 생물학에서 '왜 큰 동물은 상대적으로 표면적이 작아 체온 유지에 유리한가'를 설명하는 제곱-세제곱 법칙으로 이어진다.

Q17 유리수·순환소수 추론

순환소수 $1.2\dot{2}$ 를 기약분수 $\frac{a}{b}$ 로 나타낼 때, $a + b$ 의 값은? (단, a, b는 서로소인 자연수)

①) ① 18
②) ② 20
③) ③ 22
④) ④ 24

🎯 **정답: ② 20**

📖 1단계: $x = 1.2222\cdots$ 라 두자. 소수점 아래에서 반복되는 부분의 길이가 한 자리이므로 양변에 10을 곱해 $10x = 12.2222\cdots$ 를 만든다.
2단계: 두 식을 빼면 $10x - x = 12.222\cdots - 1.222\cdots = 11$. 즉 $9x = 11$.
3단계: $x = \frac{11}{9}$. 11과 9는 서로소이므로 기약분수이고, $a = 11$, $b = 9$. 따라서 $a + b = 20$.

🧠 풀이 전략: 반복되는 자릿수만큼 10의 거듭제곱을 곱해 '같은 반복 부분'을 만든 뒤 원래 식과 뺀다. 이 한 수 연산으로 무한히 반복되는 소수를 유한한 일차방정식으로 바꿀 수 있다.

💡 모든 순환소수가 분수로 표현된다는 사실은 실수 체계 안에서 유리수를 특징짓는 핵심 정리다.

Q18 지수·식 계산 심화

$x^2 - 3x + 1 = 0$ 일 때, $x^2 + \frac{1}{x^2}$ 의 값은? (단, $x \neq 0$)

①) ① 5
②) ② 7
③) ③ 9
④) ④ 11

🎯 **정답: ② 7**

📖 1단계: $x \neq 0$ 이므로 주어진 식 양변을 x 로 나누면 $x - 3 + \frac{1}{x} = 0$, 즉 $x + \frac{1}{x} = 3$.

2단계: 양변을 제곱하면 $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = 9$.

3단계: 따라서 $x^2 + \frac{1}{x^2} = 9 - 2 = 7$.

🧠 풀이 전략: x 값을 직접 구하지 않고 $x + \frac{1}{x}$ 라는 '중간값'을 매개로 활용한다. 이차방정식을 x 로 나눠 역수 꼴을 만드는 아이디어가 핵심이다.

💡 $x + \frac{1}{x}$ 꼴의 식은 물리의 진동 해석, 전기 회로의 전달함수 분석에서도 자주 등장한다.

Q19 연립방정식 심화 활용

세 실수 x, y, z 에 대하여 $x + y = 5$, $y + z = 8$, $z + x = 7$ 이 성립할 때, $x + y + z$ 의 값은?

①) ① 8
②) ② 10
③) ③ 12
④) ④ 15

🎯 **정답: ② 10**

📖 1단계: 각 변수를 하나씩 구하는 대신, 세 식을 모두 더하는 전략을 취한다.

2단계: $(x + y) + (y + z) + (z + x) = 5 + 8 + 7 = 20$. 좌변을 정리하면 각 변수가 정확히 두 번씩 등장하므로 $2x + 2y + 2z = 2(x + y + z)$.

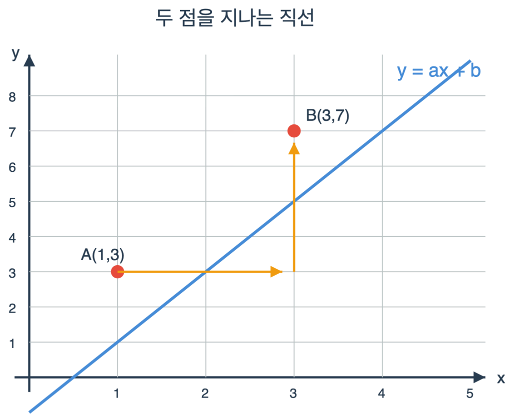
3단계: 따라서 $2(x + y + z) = 20$ 이고 $x + y + z = 10$. (참고로 이를 이용해 $x = 2, y = 3, z = 5$ 도 얻을 수 있지만 문제에서 요구한 것은 합이다.)

🧠 풀이 전략: 문제가 개별 변수가 아니라 '합'을 묻고 있다. 주어진 식들도 두 변수의 합으로 균형 있게 주어져 있으므로, 전부 더하면 각 변수가 동일한 횟수로 등장해 한 번에 합을 얻을 수 있다.

💡 이런 '대칭성 이용' 전략은 변수의 개수가 많아질수록 위력이 커져 경시대회 단골 기법이다.

Q20 일차함수 응용

일차함수 $y = ax + b$ 의 그래프가 두 점 (1, 3), (3, 7)을 지날 때, $a + b$ 의 값은?



①) ① 2
②) ② 3
③) ③ 4
④) ④ 5

🎯 **정답: ② 3**

📖 1단계: 기울기 $a = \frac{y\text{ 증가량}}{x\text{ 증가량}} = \frac{7-3}{3-1} = \frac{4}{2} = 2.$

2단계: 점 (1, 3)을 식 $y = 2x + b$ 에 대입하면 $3 = 2 \times 1 + b$ 이므로 $b = 1.$

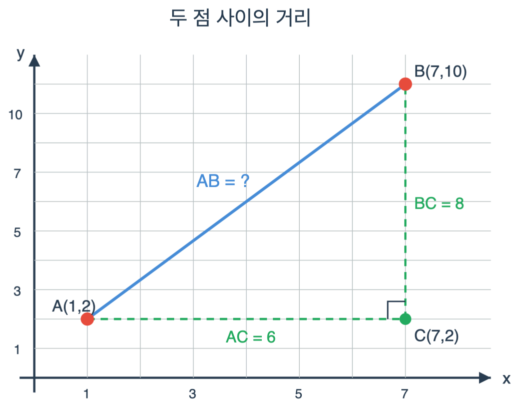
3단계: 따라서 $a + b = 2 + 1 = 3.$ (검산: 점 (3, 7)을 대입하면 $2 \times 3 + 1 = 7$ 로 일치.)

🧠 풀이 전략: 두 점이 주어진 직선은 '먼저 기울기 → 그 다음 y절편'의 순서가 표준이다. 기울기는 두 점의 y 차 대 x 차의 비, y절편은 한 점을 대입해 얻는다.

💡 두 점으로 직선을 결정하는 공식은 훗날 미분의 '평균변화율' 개념의 출발점이 된다.

Q21 피타고라스 활용

좌표평면 위의 두 점 A(1, 2)와 B(7, 10) 사이의 거리를 구하시오.



①) ① 6
②) ② 8
③) ③ 10
④) ④ 14

🎯 **정답: ③ 10**

📖 1단계: 두 점을 잇는 선분 AB를 빗변으로 하는 직각삼각형을 만들기 위해 보조점 C(7, 2)를 잡는다. 그러면 AC는 x축에 평행, BC는 y축에 평행이고 AC ⊥ BC.

2단계: $AC = |7 - 1| = 6$, $BC = |10 - 2| = 8$. 피타고라스 정리에 의해 $AB^2 = AC^2 + BC^2 = 36 + 64 = 100$.

3단계: 따라서 $AB = \sqrt{100} = 10$.

🧠 풀이 전략: 좌표평면의 두 점 사이 거리는 x좌표 차와 y좌표 차를 두 직각변으로 하는 삼각형의 빗변임을 시각화한다. 이것이 거리 공식 $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ 의 기하적 근거다.

💡 이 거리 공식은 3차원, n차원 공간으로 자연스럽게 확장되며 GPS 위치 계산, 머신러닝의 유클리드 거리로도 사용된다.

Q22 경시 확률·퍼즐

어두운 방 서랍 속에 빨간 양말 5짝과 파란 양말 7짝이 무작위로 섞여 있다. 불을 켤 수 없을 때, 같은 색 양말 한 쌍(2짝)을 반드시 얻기 위해 꺼내야 하는 양말의 최소 개수는?

①) ① 2짝
②) ② 3짝
③) ③ 5짝
④) ④ 7짝

🎯 **정답: ② 3짝**

📖 1단계: 2짝만 꺼내면 최악의 경우 '빨강 1 + 파랑 1' 조합이 나올 수 있어 같은 색 쌍을 '반드시'는 보장할 수 없다.

2단계: 3짝을 꺼내는 경우를 생각하자. 색은 빨강, 파랑 두 종류뿐이므로 3짝을 두 색에 나누어 넣으면 반드시 어느 한 색이 최소 2짝은 들어간다(비둘기집 원리).

3단계: 따라서 3짝이면 같은 색 한 쌍이 확실히 확보된다. 총 양말 개수(5와 7)는 이 최솟값에 영향을 주지 않는다. 최소 필요 개수는 3짝.

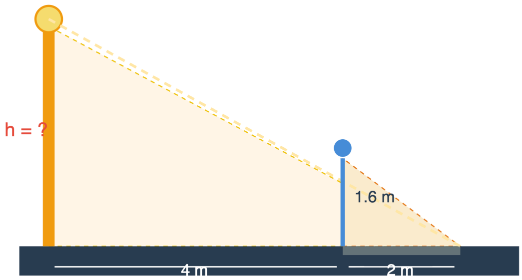
🧠 풀이 전략: 확률이 아닌 '반드시'를 묻고 있으므로 최악의 경우를 상정한다. 색의 종류가 n가지이면 n+1개를 꺼내는 순간 어느 한 색이 2개 이상이 되는 비둘기집 원리를 적용한다.

💡 비둘기집 원리는 19세기 수학자 디리클레가 체계화한 단순하지만 강력한 존재 증명 기법이다.

Q23 닮음 심화

키 1.6 m인 사람이 가로등 바로 아래 지점에서 수평으로 4 m 떨어진 자리에 서 있다. 그때 지면에 생긴 사람의 그림자 길이는 2 m였다. 가로등의 높이는 몇 m인가?

가로등과 그림자 (닮음)



①) ① 3.2 m

②) ② 4.0 m

③) ③ 4.8 m

④) ④ 5.4 m

🎯 **정답: ③ 4.8 m**

📖 1단계: 가로등 꼭대기에서 나온 광선이 사람의 머리 끝을 지나 그림자 끝에 도달한다. 이 광선과 지면은 '가로등~그림자 끝'의 큰 직각삼각형과 '사람~그림자 끝'의 작은 직각삼각형을 만든다. 두 삼각형은 같은 예각(광선이 지면과 이루는 각)과 직각을 공유하므로 AA 닮음이다.

2단계: 큰 삼각형의 밑변 = 가로등에서 그림자 끝까지 거리 = 4 + 2 = 6 m, 높이 = h. 작은 삼각형의 밑변 = 2 m, 높이 = 1.6 m. 대응변의 비율이 같으므로 $h : 1.6 = 6 : 2$.

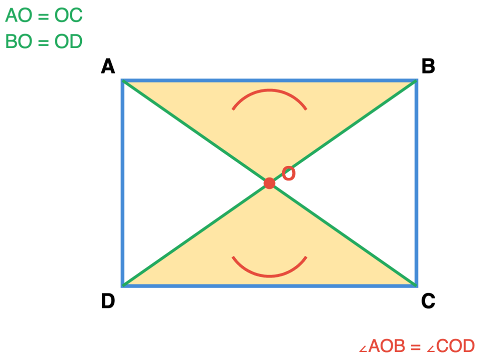
3단계: $h = \frac{1.6 \times 6}{2}$ = 4.8 m.

🧠 풀이 전략: 같은 광원에서 나온 광선이 만드는 '큰 닮은 직각삼각형'과 '작은 닮은 직각삼각형'을 찾아낸다. 이때 큰 삼각형의 밑변은 가로등에서 그림자 끝까지의 '전체 거리'(4 + 2)임을 놓치지 않는 것이 핵심이다.

💡 고대 그리스의 탈레스는 같은 원리로 자신의 키 그림자와 피라미드 그림자를 비교해 피라미드 높이를 측정했다고 전해진다.

Q24 도형 성질 증명

사각형 ABCD에서 두 대각선 AC와 BD의 교점을 O라 하자. $AO = OC$ 이고 $BO = OD$ 라는 조건만으로 사각형 ABCD가 평행사변형임을 설명할 때, 가장 핵심이 되는 논증은?



①) ① 원주각과 중심각의 관계로 네 변이 같아져 평행사변형이 된다

②) ② △AOB와 △COD에서 두 쌍의 변과 끼인 맞꼭지각이 같아 두 삼각형이 합동이고, 이로부터 엇각이 같아져 AB와 DC가 평행하고 길이가 같아진다

③) ③ 모든 내각의 크기가 90°가 되므로 직사각형이 되어 평행사변형이다

④) ④ 두 쌍의 대각의 크기만 같으면 평행사변형이라는 정의를 쓴다

🎯 **정답: ② △AOB와 △COD에서 두 쌍의 변과 끼인 맞꼭지각이 같아 두 삼각형이 합동이고, 이로부터 엇각이 같아져 AB와 DC가 평행하고 길이가 같아진다**

📖 1단계: △AOB와 △COD를 비교한다. 조건에서 AO = OC, BO = OD. 또한 ∠AOB와 ∠COD는 맞꼭지각이므로 크기가 같다. 2단계: 두 쌍의 변과 그 끼인 각이 같으므로 △AOB ≡ △COD (SAS). 합동이므로 대응변 AB = CD 이고 대응각 ∠OAB = ∠OCD. 3단계: ∠OAB와 ∠OCD는 직선 AC가 두 직선 AB, CD를 자를 때 생기는 엇각이다. 엇각이 같으므로 AB ∥ CD. 한 쌍의 대변이 '평행하면서 길이도 같다'는 평행사변형 판정 조건이 충족되어 ABCD는 평행사변형이다.

🧠 풀이 전략: '두 대각선이 서로를 이등분한다'는 조건을 평행사변형으로 연결하려면, 대각선을 공유하는 두 삼각형의 합동을 맞꼭지각으로 이어붙이고, 그 대응각을 엇각으로 재해석해 평행을 이끌어내는 3단 논법이 필요하다.

💡 평행사변형의 판정 조건은 '두 쌍 대변이 평행', '두 쌍 대변이 같음', '대각선이 서로 이등분' 등 여러 개가 있으며, 모두 서로 동치임을 증명할 수 있다.

Q25 유리수·순환소수 추론

분수 $\frac{7}{n}$이 유한소수로 나타내어지고, n이 30 이하의 자연수일 때, 가능한 n의 개수는? (단, n은 7의 배수가 아닌 경우도 포함하며, $\frac{7}{n}$은 기약분수가 아니어도 됨)

①) ① 8개

②) ② 10개

③) ③ 12개

④) ④ 14개

🎯 **정답: ③ 12개**

📖 1단계: 유한소수 조건은 '기약분수로 만든 후 분모의 소인수가 2와 5뿐'이어야 한다. 2단계: $\frac{7}{n}$에서 n이 7의 배수이면 약분 후 분자가 1이 되므로 $n = 7k$ 꼴일 때 k의 소인수가 2, 5뿐이어야 한다. 30 이하에서 $n = 7, 14, 28$ (즉 $k = 1, 2, 4$)의 3개. 3단계: n이 7의 배수가 아니면 $\frac{7}{n}$은 이미 기약분수. 이때 n의 소인수가 2, 5뿐이어야 한다. 30 이하에서 $n = 1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 25$로 9개. 4단계: 총 $3 + 9 = 12$개.

🧠 풀이 전략: '유한소수=기약분수 분모의 소인수가 2와 5뿐'이라는 핵심 조건을 인식한다. 분자 7이 있으므로 약분 가능성을 7의 배수와 아닌 경우로 나누어 체계적으로 세는 경우분석 전략을 쓴다.

💡 분모의 소인수가 2와 5뿐인 수를 '10의 약수형 수'라 부르며, 이것이 10진법에서 유한소수가 되는 이유입니다.

Q26 부등식 활용 심화

어느 공장에서 제품 A는 1개당 3000원의 이익, 제품 B는 1개당 5000원의 이익이 발생한다. 하루에 A와 B를 합쳐 총 100개 이하로 생산할 수 있고, B의 생산량은 A의 생산량의 2배를 넘을 수 없다. 하루 총 이익을 최대로 하려면 B를 몇 개 생산해야 하는가?

①) ① 50개

②) ② 60개

③) ③ 66개

④) ④ 70개

🎯 **정답: ③ 66개**

📖 1단계: A의 생산량을 a, B의 생산량을 b라 하자. 조건: $a + b \leq 100$, $b \leq 2a$ (즉 $a \geq \frac{b}{2}$), $a, b \geq 0$. 이익 $P = 3000a + 5000b$. 2단계: B가 이익이 더 크므로 b를 최대화하는 것이 유리. b를 크게 하려면 a는 조건 $a \geq \frac{b}{2}$의 경계에서 최소로 잡고, 총량 $a + b = 100$의 경계를 쓴다. 3단계: $a = \frac{b}{2}$와 $a + b = 100$을 연립하면 $\frac{b}{2} + b = 100$, $\frac{3b}{2} = 100$, $b = \frac{200}{3} \approx 66.67$. 정수 조건하에 $b = 66$, $a = 34$로 검증: $b \leq 2a = 68$ ✓, 이익 $= 3000 \cdot 34 + 5000 \cdot 66 = 102000 + 330000 = 432000$원. 4단계: $b = 67$이면 $a = 33$, $2a = 66 < 67$로 조건 위반. 따라서 $b = 66$개.

🧠 풀이 전략: 두 부등식의 경계에서 극값이 나타난다는 최적화 원리를 쓴다. 이익 계수가 큰 B를 키우되 제약의 경계를 동시에 만나는 점에서 최댓값을 찾고, 정수해 조건까지 확인한다.

💡 이런 문제는 '선형계획법'의 기초로, 고등학교·대학교에서 산업공학의 출발점입니다.

Q27 연립방정식 심화 활용

세 수 x, y, z가 $x + y = 5$, $y + z = 8$, $z + x = 7$을 만족할 때, $x^2 + y^2 + z^2$의 값은?

①) ① 18

②) ② 21

③) ③ 24

④) ④ 38

🎯 **정답: ④ 38**

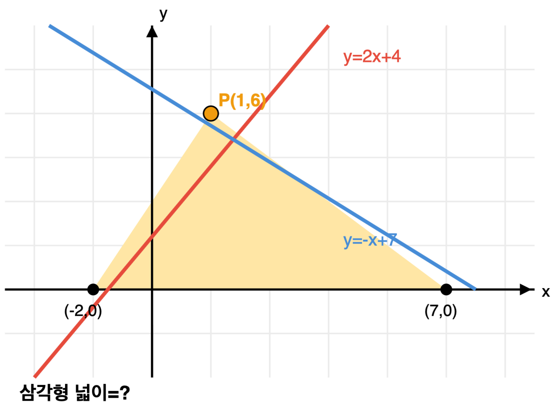
📖 1단계: 세 식을 모두 더하면 $2(x + y + z) = 5 + 8 + 7 = 20$, 즉 $x + y + z = 10$.
2단계: $x + y + z = 10$에서 각 식을 빼서 변수를 구한다. $y + z = 8$을 빼면 $x = 2$, $z + x = 7$을 빼면 $y = 3$, $x + y = 5$를 빼면 $z = 5$.
3단계: 검산: $x + y = 2 + 3 = 5$ ✓, $y + z = 3 + 5 = 8$ ✓, $z + x = 5 + 2 = 7$ ✓.
4단계: $x^2 + y^2 + z^2 = 2^2 + 3^2 + 5^2 = 4 + 9 + 25 = 38$. 따라서 정답은 ④ 38.

🧠 풀이 전략: 3원 연립에서 대칭적으로 세 식을 더하면 $x + y + z$가 나오고, 각 식을 빼면 개별 변수를 얻는 대칭성 전략을 쓴다.

💡 3원 연립방정식의 이러한 대칭적 풀이는 선형대수학의 가우스 소거법으로 일반화됩니다.

Q28 일차함수 응용

직선 $y = 2x + 4$와 직선 $y = -x + 7$, 그리고 x축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이는?



①) ① 24

②) ② 27

③) ③ 30

④) ④ 32

🎯 **정답: ② 27**

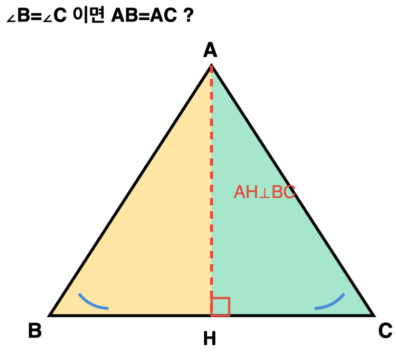
📖 1단계: 두 직선의 교점을 구한다. $2x + 4 = -x + 7$에서 $3x = 3$, $x = 1$, $y = 6$. 교점 $P(1, 6)$. 2단계: 두 직선이 x축과 만나는 점을 구한다. $y = 2x + 4$의 x절편: $0 = 2x + 4$, $x = -2$. $y = -x + 7$의 x절편: $0 = -x + 7$, $x = 7$. 3단계: 삼각형의 세 꼭짓점은 $(-2, 0)$, $(7, 0)$, $(1, 6)$. 밑변(x축 위)의 길이 $= 7 - (-2) = 9$, 높이는 교점의 y좌표 $= 6$. 4단계: 넓이 $= \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 6 = 27$.

🧠 풀이 전략: 두 직선의 교점과 각각의 x절편을 찾아 삼각형의 세 꼭짓점을 확정한다. 밑변은 x축 위 선분, 높이는 교점의 y좌표라는 좌표 기하의 기본 원리를 적용한다.

💡 이런 '일차함수 영역의 넓이' 문제는 적분(고3)을 배우기 전 넓이를 정확히 구할 수 있는 몇 안 되는 경우입니다.

Q29 도형 성질 증명

삼각형 ABC에서 $\angle B = \angle C$이면 $\overline{AB} = \overline{AC}$임을 증명하는 과정에서, 꼭짓점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 다음 중 합동 조건으로 옳은 것은?



①) ① SSS 합동

②) ② SAS 합동

③) ③ ASA 합동

④) ④ RHA 합동(직각삼각형 빗변과 한 예각)

🎯 **정답: ③ ASA 합동**

📖 1단계: 두 삼각형 ABH와 ACH를 비교한다. 수선의 발이므로 $\angle AHB = \angle AHC = 90°$이고 $\overline{AH}$는 공통변이며, 가정에서 $\angle B = \angle C$ (즉 $\angle ABH = \angle ACH$)이다.

2단계: 이때 $\overline{AH}$는 직각을 낀 변(leg)이고, 빗변 $\overline{AB}, \overline{AC}$가 같은지는 지금 증명하려는 결론이므로 아직 쓸 수 없다. 따라서 빗변이 같아야 성립하는 RHA(빗변과 한 예각)나 두 변 이상을 알아야 하는 SSS·SAS는 사용할 수 없다.

3단계: 두 직각삼각형에서 $\angle AHB = \angle AHC = 90°$와 $\angle B = \angle C$이므로 내각의 합에서 $\angle BAH = \angle CAH$가 유도된다. 그러면 공통변 $\overline{AH}$를 사이에 둔 두 각 $\angle BAH = \angle CAH$, $\angle AHB = \angle AHC$가 대응하므로 ASA 합동이다(가정 $\angle B = \angle C$를 그대로 쓰면 AAS이며 ASA와 동치).

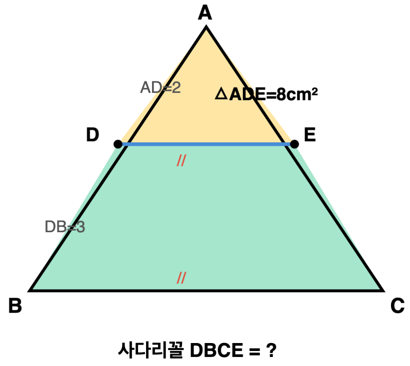
4단계: $\triangle ABH \equiv \triangle ACH$이므로 대응하는 빗변 $\overline{AB} = \overline{AC}$가 유도된다.

🧠 풀이 전략: 주어진 조건(각 두 개 일치)에서 '어떤' 합동 조건이 성립하는지 정확히 분류한다. 증명 전에 이미 알려진 변이 무엇인지(AH가 공통) 확인한 뒤, 빗변-예각 구조를 인식한다.

💡 '한 변과 양 끝 각이 같으면 합동(ASA)'을 응용한 것이 RHA 합동이며, 유클리드 원론의 정리 I-26에 해당합니다.

Q30 닮음 심화

삼각형 ABC에서 $\overline{BC}$에 평행한 직선이 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$를 각각 D, E에서 만난다. $\overline{AD}:\overline{DB} = 2:3$이고, 삼각형 ADE의 넓이가 8cm^2일 때, 사다리꼴 DBCE의 넓이는?



①) ① 32cm^2

②) ② 42cm^2

③) ③ 46cm^2

④) ④ 50cm^2

🎯 **정답: ② 42cm^2**

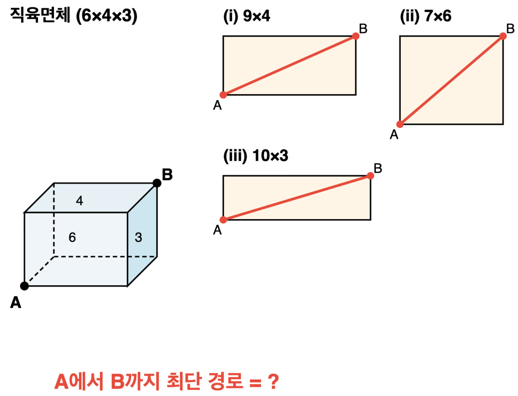
📖 1단계: $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$이므로 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ (AA 닮음). 닮음비 $= \overline{AD}:\overline{AB} = 2:(2+3) = 2:5$. 2단계: 닮음 도형의 넓이비는 닮음비의 제곱이므로 $\triangle ADE:\triangle ABC = 2^2:5^2 = 4:25$. 3단계: $\triangle ADE = 8\text{cm}^2$이므로 비례식 $4:25 = 8:S$에서 $\triangle ABC = \frac{25 \cdot 8}{4} = 50\text{cm}^2$. 4단계: 사다리꼴 DBCE $= \triangle ABC - \triangle ADE = 50 - 8 = 42\text{cm}^2$.

🧠 풀이 전략: 평행선으로 닮음 관계를 먼저 확보하고, '닮음비:넓이비=1:2 차원'이라는 제곱 법칙을 적용한다. 사다리꼴의 넓이는 직접 구하기 어려우므로 전체에서 작은 삼각형을 빼는 역발상을 쓴다.

💡 닮음비가 k이면 넓이비는 k^2, 부피비는 k^3입니다. 이는 길이·면적·부피의 차원이 1, 2, 3이기 때문입니다.

Q31 피타고라스 활용

가로 6cm, 세로 4cm, 높이 3cm인 직육면체의 한 꼭짓점 A에서 대각선 방향 반대쪽 꼭짓점 B까지 표면을 따라 이동할 때, 최단 거리는? (단, 모서리를 따라 가지 않고 면 위로 이동한다.)



①) ① $\sqrt{85}$ cm
②) ② $\sqrt{97}$ cm
③) ③ $\sqrt{109}$ cm
④) ④ $\sqrt{121} = 11$ cm

🎯 **정답: ① $\sqrt{85}$ cm**

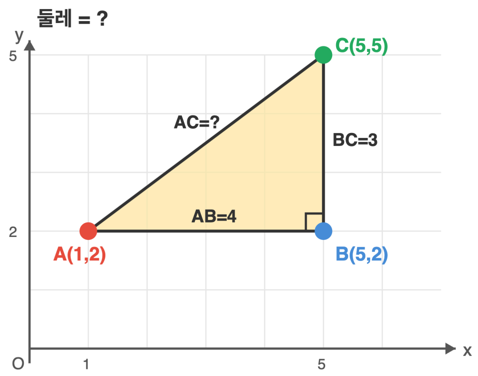
📖 1단계: 표면 최단 경로는 직육면체를 '펼쳐서' 두 점을 잇는 직선으로 구한다. 경로 경우에 따라 세 가지 전개도가 가능하다. 2단계: 경우 1 - 앞면+윗면 펼치면 직사각형 $(6+3)\times 4 = 9\times 4$, 대각선 $= \sqrt{9^2+4^2} = \sqrt{81+16} = \sqrt{97}$. 3단계: 경우 2 - 앞면+옆면 펼치면 직사각형 $(6+4)\times 3 = 10\times 3$, 대각선 $= \sqrt{100+9} = \sqrt{109}$. 경우 3 - 옆면+윗면 펼치면 직사각형 $(4+3)\times 6 = 7\times 6$, 대각선 $= \sqrt{49+36} = \sqrt{85}$. 4단계: 세 경우 중 최솟값은 $\sqrt{85}$ cm.

🧠 풀이 전략: 3차원 곡선 경로는 직접 다루기 어려우므로 '전개도로 펼쳐 평면화'한다. 어느 면을 거치느냐에 따라 경로가 달라지므로 모든 경우를 시도하고 최솟값을 선택하는 완전 탐색 전략을 쓴다.

💡 개미가 직육면체 위를 최단 경로로 이동하는 이 유형은 '개미 문제(Ant Problem)'로 알려진 고전 퍼즐입니다.

Q32 피타고라스 활용

좌표평면 위의 세 점 A(1, 2), B(5, 2), C(5, 5)에 대하여 삼각형 ABC의 둘레 길이는?



①) ① 10

②) ② 11

③) ③ 12

④) ④ 14

🎯 **정답: ③ 12**

📖 1단계: $\overline{AB}$는 수평선이므로 길이 = $|5-1| = 4$. $\overline{BC}$는 수직선이므로 길이 = $|5-2| = 3$. 2단계: $\angle B = 90°$이므로 삼각형 ABC는 직각삼각형. 피타고라스 정리에 의해 $\overline{AC} = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{25} = 5$. 3단계: 둘레 = $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 4+3+5 = 12$.

🧠 풀이 전략: 좌표 위 두 점 사이 거리는 수평·수직 성분을 분리해 계산하고, 직각삼각형이면 빗변에 피타고라스 정리를 적용한다. 3-4-5 피타고라스 쌍을 인식하는 것이 핵심.

💡 (3, 4, 5)는 가장 작은 피타고라스 쌍이며, 고대 이집트 건축가들이 직각을 만들 때 사용했습니다.

Q33 경시 확률·퍼즐

1, 2, 3, 4, 5의 숫자 카드가 각각 한 장씩 있다. 이 중 3장을 뽑아 세 자리 수를 만들 때, 만들 수 있는 세 자리 수들을 작은 수부터 순서대로 나열하면 55번째 수는 무엇인가?

①) ① 531

②) ② 532

③) ③ 541

④) ④ 542

🎯 **정답: ① 531**

📖 1단계: 서로 다른 5개의 카드 $1, 2, 3, 4, 5$에서 3장을 뽑아 만드는 세 자리 수는 모두 $5 \times 4 \times 3 = 60$개이다.
2단계: 작은 수부터 나열하면 백의 자리가 같은 수가 각각 $4 \times 3 = 12$개씩이다. 백의 자리가 1이면 1 - 12번째, 2이면 13 - 24번째, 3이면 25 - 36번째, 4이면 37 - 48번째, 5이면 49 - 60번째이다.
3단계: 55번째 수는 백의 자리가 5인 구간(49 - 60번째)에 있다. 이 구간에서 십의 자리가 같은 수는 3개씩이며, 51△는 49 - 51번째, 52△는 52 - 54번째, 53△는 55 - 57번째이다.
4단계: 따라서 55번째 수는 백의 자리 5, 십의 자리 3인 구간의 첫 번째 수이다. 남은 숫자 $\{1, 2, 4\}$ 중 가장 작은 1이 일의 자리이므로 531이다. 따라서 정답은 ① 531.

🧠 풀이 전략: 사전식(lexicographic) 나열 문제에서는 '백의 자리가 고정되면 나머지 경우의 수가 일정'이라는 성질을 이용해 '25번째, 50번째' 등으로 위치를 좁혀 나간다.

💡 사전식 나열은 컴퓨터 과학에서 '순열 인덱싱'이라 불리며, 암호학과 해시 함수에도 쓰입니다.

Q34 경시 확률·퍼즐

상자 안에 빨간 공 5개, 파란 공 7개, 노란 공 9개가 들어 있다. 색을 보지 않고 공을 꺼낼 때, 같은 색의 공이 4개 나올 때까지 최소 몇 개를 꺼내야 할까? (최악의 경우를 기준으로)

①) ① 9개
②) ② 10개
③) ③ 11개
④) ④ 12개

🎯 **정답: ② 10개**

📖 1단계: '최악의 경우 같은 색 4개를 반드시 얻는 최소 개수'는 비둘기집 원리의 응용이다. 각 색에서 최대 3개씩 꺼냈을 때(즉 아직 4개 모인 색이 없을 때)가 최악. 2단계: 세 가지 색에서 각각 3개씩 꺼내면 $3+3+3=9$개까지는 어떤 색도 4개에 도달하지 않을 수 있다(각 색 개수 5,7,9 모두 3 이상이므로 가능). 3단계: 9개 뽑은 다음 한 개를 더 뽑으면(10개째) 그 공은 반드시 기존 세 색 중 하나이므로 어떤 색이 4개가 된다. 4단계: 따라서 최소 $3\times3+1=10$개.

🧠 풀이 전략: 비둘기집 원리: 'k개 그룹에 각 최대 m개까지 넣으면 km개까지 안전, $km+1$개째는 반드시 어떤 그룹이 $m+1$개'. 본 문제는 $k=3, m=3$이므로 10개.

💡 비둘기집 원리(Pigeonhole Principle)는 '서울 시민 중 머리카락 수가 같은 사람이 반드시 있다'는 유명한 결과의 기반입니다.

Q35 유리수·순환소수 추론

분수 $\frac{1}{7}$을 소수로 나타내면 $0.\overline{142857}$이다. $\frac{1}{7}$의 소수점 아래 100번째 자리 숫자는?

①) ① 1
②) ② 2
③) ③ 4
④) ④ 8

🎯 **정답: ④ 8**

📖 1단계: $\frac{1}{7}=0.\overline{142857}$로 순환마디는 '142857'이고 길이는 6이다.
2단계: 소수점 아래 n번째 자리는 n을 6으로 나눈 나머지로 정해진다. $100=6\times16+4$이므로 나머지는 4이다.
3단계: 나머지가 4이므로 순환마디 '142857'의 4번째 숫자를 찾는다. 순서대로 1, 4, 2, 8, 5, 7이므로 4번째 숫자는 8이다.
4단계: 따라서 소수점 아래 100번째 자리 숫자는 8이고, 정답은 ④ 8이다.

🧠 풀이 전략: 순환소수의 n번째 자리를 구할 때는 '순환마디 길이로 나눈 나머지 → 순환마디 내 위치'라는 모듈러 전략을 쓴다.

💡 $\frac{1}{7}$의 순환마디 142857은 '순환수(cyclic number)'로, 2,3,4,5,6을 곱하면 같은 숫자들의 순환이 됩니다(예: 142857×2=285714).

Q36 지수·식 계산 심화

$2^x=3,\ 2^y=5$일 때, 2^{2x+y-1}의 값은?

①) ① 22.5
②) ② 45
③) ③ 30
④) ④ 15

🎯 **정답: ①**

📖 1단계: 지수법칙 $a^{m+n}=a^m\cdot a^n,\ a^{mn}=(a^m)^n$을 적용한다.
2단계: $2^{2x+y-1}=2^{2x}\cdot2^y\cdot2^{-1}=(2^x)^2\cdot2^y\cdot\frac{1}{2}$.
3단계: 값 대입: $3^2\cdot5\cdot\frac{1}{2}=9\cdot5\cdot\frac{1}{2}=\frac{45}{2}=22.5$.

🧠 풀이 전략: 지수 덧셈은 밑이 같은 거듭제곱의 곱으로, 지수 곱셈은 거듭제곱의 거듭제곱으로 분해한다. 주어진 조건 $2^x=3,\ 2^y=5$를 그대로 대입할 수 있는 형태로 식을 변형하는 것이 핵심.

💡 지수법칙을 이용하면 $\log_2 3$이나 $\log_2 5$ 같은 값을 몰라도 식의 값을 구할 수 있어!

Q37 부등식 활용 심화

연립부등식 $\begin{cases} 3x-2 \geq x+4 \\ 2x-1 < 5x+11 \end{cases}$ 을 만족하는 정수 x의 개수는?

①) ① 3개

②) ② 4개

③) ③ 5개

④) ④ 무수히 많다

🎯 **정답: ④**

📖 1단계: 첫 번째 부등식: $3x - x \geq 4 + 2$, $2x \geq 6$, $x \geq 3$.

2단계: 두 번째 부등식: $2x - 5x < 11 + 1$, $-3x < 12$, $x > -4$.

3단계: 공통 범위는 $x \geq 3$ ($\because x \geq 3$이면 자동으로 $x > -4$).

4단계: $x \geq 3$인 정수는 3, 4, 5, 6, ... 무수히 많다.

🧠 풀이 전략: 연립부등식의 해는 두 부등식의 공통 범위(교집합)이다. 한쪽이 상한 없이 열려 있으면 정수해도 무한하다. 함정 보기는 '유한개'라고 속이는 것.

💡 상한이 없는 부등식은 해가 무한히 많아. 연립부등식에서 '위쪽 경계'가 중요한 이유야.

Q38 부등식 활용 심화

어떤 상인이 사과를 개당 원가 500원에 사서 x원의 이윤을 붙여 팔려고 한다. 100개를 들여왔는데, 20%는 상해서 팔 수 없었다. 총이익이 20000원 이상이 되게 하는 x의 최솟값은?

①) ① 375원

②) ② 700원

③) ③ 750원

④) ④ 800원

🎯 **정답: ① 375원**

📖 1단계: 20%가 상했으므로 팔 수 있는 사과는 $100 \times 0.8 = 80$개이다.

2단계: 사과 한 개의 판매가는 (원가)+(이윤) $= 500 + x$원이므로 총수입은 $80(500 + x)$원이다.

3단계: 사과 100개를 모두 사들였으므로 총원가는 $100 \times 500 = 50000$원이다.

4단계: 총이익 $= 80(500 + x) - 50000 = 80x - 10000$.

5단계: $80x - 10000 \geq 20000$에서 $80x \geq 30000$, 즉 $x \geq 375$. 따라서 x의 최솟값은 375원이고 정답은 ① 375원이다.

🧠 풀이 전략: 이윤 문제는 (팔 수 있는 개수)×(판매가) - (전체 원가) ≥ 목표이익 공식을 세운다. 상한 손실(20%)을 반영해 실제 판매 가능 개수를 먼저 구한 후 일차부등식을 세운다.

💡 실제 상업에서는 로스율(손실률)을 감안해 마진을 붙이는데, 로스율이 높을수록 더 높은 마진이 필요해!

Q39 부등식 활용 심화

|2x-3| < 5를 만족하는 정수 x의 개수는?

①) ① 3개

②) ② 4개

③) ③ 5개

④) ④ 6개

🎯 **정답: ② 4개**

📖 1단계: $|A| < k$ $(k > 0)$는 $-k < A < k$와 동치이므로 $-5 < 2x - 3 < 5$이다.
2단계: 각 변에 3을 더하면 $-2 < 2x < 8$, 2로 나누면 $-1 < x < 4$.
3단계: 이 범위의 정수는 $0, 1, 2, 3$으로 모두 4개이다. (엄격한 부등호이므로 경계 $-1, 4$는 포함되지 않는다.)
4단계: 따라서 정답은 ② 4개이다.

🧠 풀이 전략: 절댓값 부등식 $|A| < k$는 '거리 해석'으로 풀이한다. 0으로부터 A까지의 거리가 k 미만이란 뜻이므로 $-k < A < k$. 엄격 부등호이므로 경계 -1, 4는 포함되지 않음에 주의.

💡 절댓값을 '수직선 위에서의 거리'로 보면 기하학적으로 한눈에 이해돼!

Q40 연립방정식 심화 활용

강물이 일정한 속력으로 흐른다. 배가 강을 거슬러 올라가는 데 3시간, 내려오는 데 2시간이 걸린다. 강을 따라 내려오는 거리가 60km일 때, 정지한 물에서의 배의 속력은?

①) ① 20 km/h

②) ② 22 km/h

③) ③ 25 km/h

④) ④ 30 km/h

🎯 **정답: ③**

📖 1단계: 배의 속력을 x km/h, 강물의 속력을 y km/h라 하자.
2단계: 내려올 때 속력은 (x+y), 올라갈 때는 (x-y)이며 거리는 60km로 같다.
3단계: 시간 × 속력 = 거리에서: $2(x + y) = 60$, $3(x - y) = 60$.
4단계: 정리: $x + y = 30$, $x - y = 20$. 두 식을 더하면 $2x = 50$, $x = 25$. 따라서 배의 속력은 25 km/h.

🧠 풀이 전략: 강물 문제의 핵심은 '상대속도'이다. 내려올 때는 배의 속력과 강물의 속력이 더해지고, 올라갈 때는 빠진다. 두 경우의 거리가 같다는 조건으로 연립방정식을 세운다.

💡 이 원리는 비행기가 맞바람/순풍을 맞을 때, 헤엄칠 때 등 자연 속 모든 '흐름이 있는 운동'에 적용돼!

📝 중2 수학 심화

총 40문제 · 문제와 정답·풀이 포함

Q41 연립방정식 심화 활용

$x + y + z = 10$, $x + 2y + 3z = 17$, $x + 4y + 9z = 37$일 때, x의 값은?

①) ① 3

②) ② 4

③) ③ 5

④) ④ 6

🎯 **정답: ④ 6**

📖 1단계: (2식)에서 (1식)을 빼면 $(x + 2y + 3z) - (x + y + z) = 17 - 10$에서 $y + 2z = 7$ ... (*)

2단계: (3식)에서 (2식)을 빼면 $(x + 4y + 9z) - (x + 2y + 3z) = 37 - 17$에서 $2y + 6z = 20$, 즉 $y + 3z = 10$ ... (**)

3단계: (**)에서 (*)를 빼면 $z = 3$. 이를 (*)에 대입하면 $y + 6 = 7$, $y = 1$.

4단계: (1식)에 대입하면 $x + 1 + 3 = 10$, $x = 6$.

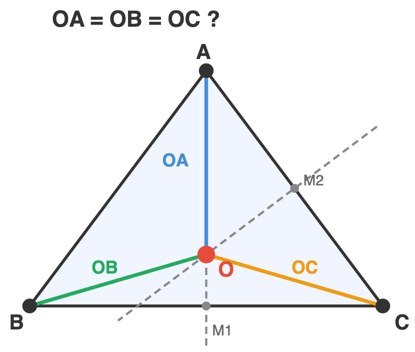
5단계: 검산: $6 + 1 + 3 = 10$ ✓, $6 + 2(1) + 3(3) = 17$ ✓, $6 + 4(1) + 9(3) = 37$ ✓. 따라서 정답은 ④ 6이다.

🧠 풀이 전략: 3원 연립은 변수를 하나씩 소거해 2원 → 1원으로 줄인다. 여기서는 x 계수가 모두 1이므로 x를 소거하는 것이 가장 쉽다. 식끼리의 뺄셈으로 x를 없앤 후 y, z에 대한 연립으로 축소한다.

💡 이 문제의 계수 (1,1,1), (1,2,3), (1,4,9)는 $(1, k, k^2)$ 꼴로 나타나는 '방데르몽드' 행렬의 일부야!

Q42 도형 성질 증명

삼각형 ABC에서 변 BC의 수직이등분선과 변 AC의 수직이등분선이 만나는 점을 O라 하자. O가 세 꼭짓점으로부터 같은 거리에 있음을 증명하는 과정의 근거로 가장 적절한 것은?



①) ① 수직이등분선 위의 한 점은 선분의 양 끝점으로부터 같은 거리에 있다

②) ② 삼각형의 내각의 합은 180°이다

③) ③ 평행선의 엇각은 같다

④) ④ 피타고라스 정리

🎯 **정답: ①**

📖 1단계: 핵심 정리: '선분의 수직이등분선 위의 임의의 점은 선분의 양 끝점으로부터 거리가 같다.'

2단계: O는 BC의 수직이등분선 위에 있으므로 OB = OC.

3단계: O는 AC의 수직이등분선 위에도 있으므로 OA = OC.

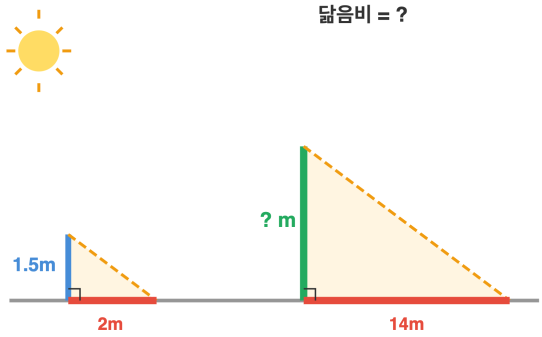
4단계: 따라서 OA = OB = OC. O는 세 꼭짓점에서 같은 거리에 있고, 이 점을 '외심'이라 한다. 외심은 삼각형에 외접하는 원의 중심이다.

🧠 풀이 전략: '수직이등분선 위 점 ↔ 양 끝점까지 거리가 같다'는 동치 관계를 두 번 적용한다. 두 수직이등분선의 교점이 세 점 모두에서 같은 거리라는 결론을 얻는 논리적 증명 구조.

💡 직각삼각형의 외심은 빗변의 중점에, 둔각삼각형의 외심은 삼각형 바깥에 있어. 외심의 위치로 삼각형의 종류를 알 수 있지!

Q43 닮음 심화

높이 1.5m인 막대기 끝의 그림자 길이가 2m일 때, 같은 시각 어떤 나무의 그림자 길이가 14m였다. 이 나무의 높이는? (태양광선은 평행하다)



①) ① 9.5m

②) ② 10m

③) ③ 10.5m

④) ④ 12m

🎯 **정답: ③**

📖 1단계: 태양광선이 평행하므로 막대기-그림자 삼각형과 나무-그림자 삼각형은 AA닮음(두 각이 같음)이다. 하나는 직각, 다른 하나는 같은 태양광선 각도.

2단계: 대응변 비례 관계: (막대기 높이):(막대기 그림자) = (나무 높이):(나무 그림자).

3단계: $1.5 : 2 = h : 14$.

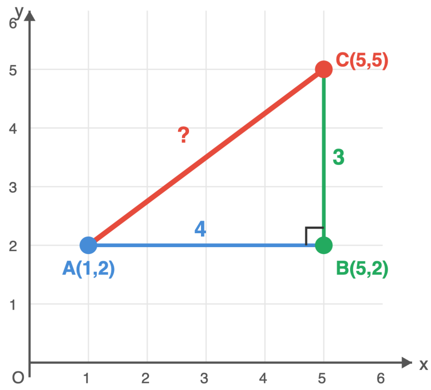
4단계: $2h = 1.5 \times 14 = 21$, $h = 10.5$ m.

🧠 풀이 전략: '태양광선은 평행하다'는 조건이 AA닮음을 보장하는 열쇠. 실물을 잴 수 없는 나무 높이도 막대기라는 '간접 측정 도구'로 닮음비를 이용해 구할 수 있다. 이것이 '간접 측정'의 원리.

💡 고대 이집트의 수학자 탈레스는 이 원리로 피라미드의 높이를 쟀어. 자기 키와 그림자 길이만으로 3000년 전 유물의 높이를 알아냈지!

Q44 피타고라스 활용

좌표평면 위의 세 점 A(1, 2), B(5, 2), C(5, 5)가 있다. 삼각형 ABC가 직각삼각형임을 이용하여 빗변 AC의 길이를 구하면?



①) ① 4

②) ② 5

③) ③ $\sqrt{7}$

④) ④ 7

🎯 **정답: ② 5**

📖 1단계: AB는 수평선분: $|5-1|=4$. BC는 수직선분: $|5-2|=3$. 두 선분은 B에서 수직으로 만나므로 각 B가 직각.

2단계: 피타고라스 정리 적용: $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

3단계: $AC^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$.

4단계: $AC = \sqrt{25} = 5$. 이는 유명한 3-4-5 직각삼각형의 예이다.

🧠 풀이 전략: 좌표평면에서 두 점 사이 거리는 수평·수직 차이를 두 변으로 하는 직각삼각형의 빗변. 수평·수직이면 좌표 차의 절댓값이 변의 길이. 직각 조건이 주어지면 피타고라스 정리를 바로 적용.

💡 3-4-5는 가장 유명한 '피타고라스 수'야. 5-12-13, 8-15-17도 있어. 고대 건축가들은 줄에 매듭을 12개(3+4+5) 묶어 직각을 만들었대!

Q45 유리수·순환소수 추론

$0.\dot{1}\dot{2} + 0.\dot{2}\dot{1}$의 값을 기약분수로 나타내면?

①) ① $\frac{1}{3}$

②) ② $\frac{1}{2}$

③) ③ $\frac{11}{33}$

④) ④ $\frac{33}{99}$

🎯 **정답: ① $\frac{1}{3}$**

📖 1단계: $0.\dot{1}\dot{2} = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}$ (순환마디 2자리이므로 분모는 99).

2단계: $0.\dot{2}\dot{1} = \frac{21}{99} = \frac{7}{33}$.

3단계: $\frac{4}{33} + \frac{7}{33} = \frac{11}{33} = \frac{1}{3}$. 기약분수로 약분해야 한다.

🧠 풀이 전략: 순환마디가 n자리이면 분모에 9를 n개 쓴다는 공식을 활용한다. 두 분수를 더한 뒤 반드시 기약분수로 줄이는지 확인. 함정: ③, ④는 같은 값이지만 기약분수가 아니다.

💡 순환마디의 길이가 같으면 더하거나 뺄 때 분모를 통일하기 쉽다.

Q46 지수·식 계산 심화

$x + \frac{1}{x} = 4$일 때, $x^3 + \frac{1}{x^3}$의 값을 구하시오. (단, $x \neq 0$)

①) ① 48

②) ② 52

③) ③ 56

④) ④ 64

🎯 **정답: ② 52**

📖 1단계: $(x + \frac{1}{x})^3 = x^3 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3} = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3(x + \frac{1}{x})$.

2단계: 이를 정리하면 $x^3 + \frac{1}{x^3} = (x + \frac{1}{x})^3 - 3(x + \frac{1}{x})$.

3단계: $x + \frac{1}{x} = 4$를 대입하면 $4^3 - 3 \times 4 = 64 - 12 = 52$.

🧠 풀이 전략: x 자체를 구하려 하면 이차방정식을 풀어 복잡해진다. 대신 세제곱 전개의 대칭성 $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$에서 $ab = x \cdot \frac{1}{x} = 1$임을 이용하면 조건식 하나로 끝난다.

💡 $x + \frac{1}{x}$ 꼴은 '대칭식'의 대표 예시로, 고등 경시에도 자주 등장한다.

Q47 부등식 활용 심화

연립부등식 $\begin{cases} -3 < 2x - 1 \leq 5 \\ x + 2 > 3 \end{cases}$ 을 만족하는 정수 x의 개수는?

①) ① 1개

②) ② 2개

③) ③ 3개

④) ④ 4개

🎯 **정답: ② 2개**

📖 1단계: 첫 번째 부등식 $-3 < 2x - 1 \leq 5$에서 $-2 < 2x \leq 6$, 즉 $-1 < x \leq 3$.

2단계: 두 번째 부등식 $x + 2 > 3$에서 $x > 1$.

3단계: 두 범위의 공통 부분은 $1 < x \leq 3$이고, 조건을 만족하는 정수는 2, 3으로 모두 2개.

🧠 풀이 전략: 각 부등식을 풀어 범위를 구한 뒤 수직선에서 겹치는 부분을 찾는다. 부등호의 방향($<$, $\leq$)에 따라 경계값 포함 여부가 달라지므로 끝점 처리가 핵심이다. 함정: $x = 1$은 $x > 1$에서 제외, $x = 3$은 $x \leq 3$에서 포함.

Q48 연립방정식 심화 활용

어떤 자연수를 5로 나누면 나머지가 3이고, 7로 나누면 나머지가 4이다. 이를 만족하는 자연수 중 가장 작은 두 자리 수는?

①) ① 18

②) ② 23

③) ③ 38

④) ④ 53

🎯 **정답: ① 18**

📖 1단계: 구하는 자연수를 N이라 하면 $N = 5a + 3 = 7b + 4$ (a, b는 0 이상 정수).

2단계: $5a + 3 = 7b + 4$에서 $5a - 7b = 1$. a에 1, 2, 3, ...을 대입해 자연수 b를 찾으면, $a = 3$일 때 $b = 2$가 되어 $N = 5 \times 3 + 3 = 18$.

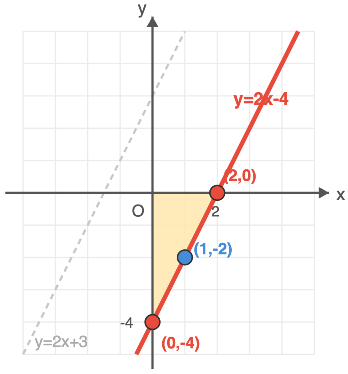
3단계: 검증 - $18 \div 5 = 3 \cdots 3$, $18 \div 7 = 2 \cdots 4$로 두 조건을 모두 만족하며, 두 자리 수 중 최솟값이다.

🧠 풀이 전략: 두 나눗셈 조건을 각각 식으로 바꾼 뒤 연립한다. 일반해는 $N = 35k + 18$ $(k \geq 0)$ 꼴이므로, $k = 0$일 때 18로 이미 두 자리 수이다.

💡 이런 문제는 '중국인의 나머지 정리'의 가장 기본 형태로, 약 1700년 전 중국 고대 수학서에 등장한다.

Q49 일차함수 응용

직선 $y = 2x + 3$과 평행하고 점 $(1, -2)$를 지나는 직선이 x축, y축과 이루는 삼각형의 넓이는?



삼각형의 넓이 = ?

①) ① 2

②) ② 3

③) ③ 4

④) ④ 6

🎯 **정답: ③ 4**

📖 1단계: 평행 조건에서 기울기는 같으므로 2. 점 $(1, -2)$를 지나는 직선은 $y-(-2) = 2(x-1)$, 즉 $y = 2x - 4$.

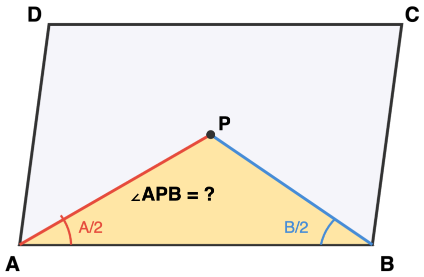
2단계: x절편은 $y = 0$ 대입하면 $x = 2$, y절편은 $x = 0$ 대입하면 $y = -4$.

3단계: 원점과 두 절편이 이루는 직각삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2} \times |2| \times |-4| = 4$.

🧠 풀이 전략: 평행한 두 직선은 기울기가 같다는 점을 먼저 인식. 점-기울기 형태로 식을 세운 뒤, 두 축과의 교점을 찾아 직각삼각형의 밑변과 높이로 본다. 절편의 부호와 무관하게 넓이는 항상 양수(절댓값 사용).

Q50 도형 성질 증명

평행사변형 ABCD에서 각 A의 이등분선과 각 B의 이등분선이 내부에서 만나는 점을 P라 할 때, $\angle APB$의 크기는? (단, 평행사변형은 직사각형이 아니다.)



①) ① 60°

②) ② 75°

③) ③ 90°

④) ④ $\angle A$에 따라 달라진다

🎯 **정답: ③ 90°**

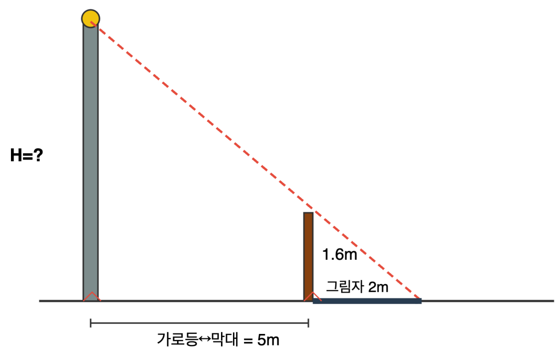
📖 1단계: 평행사변형에서 한 변을 공유하는 두 이웃각(동측내각)의 합은 180°이므로 $\angle A + \angle B = 180°$.
2단계: 이등분선이므로 $\angle PAB = \frac{1}{2}\angle A$이고 $\angle PBA = \frac{1}{2}\angle B$. 두 각의 합은 $\frac{1}{2}(\angle A + \angle B) = 90°$.
3단계: 삼각형 APB의 내각의 합은 180°이므로 $\angle APB = 180° - 90° = 90°$. 즉 구체적인 각도 없이도 항상 직각이다.

🧠 풀이 전략: 구체적인 각도를 주지 않았다는 것은 결과가 각도와 무관하게 성립한다는 힌트이다. 동측내각의 합이 180°라는 평행사변형의 성질을 이등분선에 적용하면 두 각의 합은 90°로 고정된다. 함정: ④처럼 '달라진다'로 낚는 선택지를 조심.

💡 이 성질 때문에 평행사변형 네 각의 이등분선이 이루는 도형은 언제나 직사각형이다.

Q51 닮음 심화

수직으로 서 있는 가로등에서 5m 떨어진 곳에 키(높이) 1.6m인 막대가 수직으로 서 있다. 이때 막대의 그림자 길이가 2m였다면 가로등의 높이는? (단, 그림자는 막대의 바깥쪽으로 생긴다.)



①) ① 4.0m

②) ② 4.8m

③) ③ 5.6m

④) ④ 6.4m

🎯 **정답: ③ 5.6m**

📖 1단계: 가로등 꼭대기, 막대 꼭대기, 그림자 끝이 한 빛 줄기 위에 있으므로 두 개의 직각삼각형이 만들어지며, 공통각(그림자 끝의 각)을 가지므로 AA 닮음이다.

2단계: 큰 삼각형의 밑변 = 가로등에서 그림자 끝까지 = $5 + 2 = 7$m, 높이 = H. 작은 삼각형의 밑변 = 2m, 높이 = 1.6m.

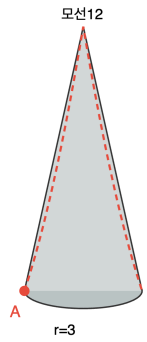
3단계: 닮음비에 의해 $\frac{H}{7} = \frac{1.6}{2}$이므로 $H = 7 \times 0.8 = 5.6$m.

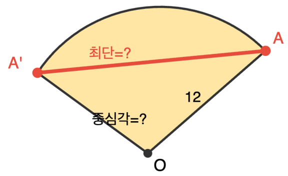
🧠 풀이 전략: 빛의 직진성 덕분에 '큰 삼각형 안에 작은 삼각형이 들어 있는' 구조가 생긴다. 공통 꼭짓점(그림자의 끝)을 기준으로 두 닮은 삼각형을 구분해 대응변 비례식을 세운다. 함정: 거리 5m만 쓰지 않고, 그림자 2m를 더한 7m가 큰 삼각형의 밑변임에 주의.

💡 고대 그리스의 탈레스는 이 방법으로 이집트 피라미드의 높이를 측정했다고 전해진다.

Q52 피타고라스 활용

밑면의 반지름이 3이고 모선의 길이가 12인 원뿔이 있다. 밑면 둘레 위의 한 점 A에서 출발해 옆면을 따라 한 바퀴 돌아 다시 A로 돌아오는 가장 짧은 경로의 길이는?





①) ① 12
②) ② $12\sqrt{2}$
③) ③ $6\sqrt{3}$
④) ④ 24

🎯 **정답: ② $12\sqrt{2}$**

📖 1단계: 원뿔 옆면을 펼치면 반지름 12인 부채꼴이 된다. 부채꼴의 호 길이 = 원뿔 밑면 둘레 = $2\pi \times 3 = 6\pi$.

2단계: 반지름 12인 원 전체의 둘레는 $2\pi \times 12 = 24\pi$이므로 부채꼴 중심각은 $\frac{6\pi}{24\pi} \times 360° = 90°$.

3단계: 전개도에서 A와 A'는 O에서 거리 12이고 사잇각 90°인 두 점이다. 피타고라스 정리에 의해 $AA' = \sqrt{12^2 + 12^2} = \sqrt{288} = 12\sqrt{2}$.

🧠 풀이 전략: 곡면 위의 최단경로 문제는 전개도로 펼쳐 '직선 거리'로 바꿔 푼다. 부채꼴 중심각 = (밑면 둘레)/(모선을 반지름으로 하는 원 둘레) × 360° 공식이 핵심. 중심각이 마침 90°가 나와 직각삼각형 빗변으로 바로 계산된다.

💡 개미가 원뿔 표면을 걸을 때 실제로 택하는 최단경로도 이 직선에 해당한다.

Q53 경시 확률·퍼즐

세 학생 A, B, C가 서로 다른 자연수 1, 2, 3을 한 개씩 나누어 가졌다. 다음 세 조건을 모두 만족할 때, A가 가진 수는?
(가) A가 가진 수는 B가 가진 수보다 작다.
(나) C가 가진 수는 짝수이다.
(다) A와 B가 가진 수의 합은 4이다.

①) ① 1
②) ② 2
③) ③ 3
④) ④ 주어진 조건으로는 결정할 수 없다

🎯 **정답: ① 1**

📖 1단계: 조건 (나) - 1, 2, 3 중 짝수는 2뿐이므로 $C = 2$.

2단계: A, B는 남은 수 1과 3을 나눠 갖는다. 이때 $A + B = 1 + 3 = 4$이므로 조건 (다)가 자동으로 만족된다.

3단계: 조건 (가) $A < B$에서 $A = 1, B = 3$. 따라서 A가 가진 수는 1.

🧠 풀이 전략: 제약이 가장 강한 조건(짝수는 2뿐)부터 적용해 미지수를 고정한다. 이어 남은 변수들에 대해 대소 조건을 적용하면 모든 변수가 유일하게 결정된다. 함정: ④처럼 '결정 불가'를 고르지 않도록 조건이 충분히 강한지 확인.

💡 이런 논리 퍼즐에서는 정보량이 큰 조건부터 처리하면 경우의 수가 빠르게 줄어든다.

Q54 유리수·순환소수 추론

순환소수 $0.\dot{3}\dot{6}$에 양의 유리수 k를 곱한 결과가 자연수가 되었다. 이러한 k 중 가장 작은 수를 기약분수로 나타낼 때, 분자와 분모의 합은?

①) ① 4
②) ② 11
③) ③ 15
④) ④ 36

🎯 **정답: ③ 15**

📖 1단계: $0.\dot{3}\dot{6} = \frac{36}{99} = \frac{4}{11}$ (11과 4는 서로소이므로 기약분수).
2단계: $\frac{4}{11} \times k$가 자연수가 되려면, k는 분모의 11을 소거하고 분자의 4와 곱해 자연수를 만들어야 한다. 즉 $k = \frac{11m}{4}$ (m은 자연수) 꼴. 가장 작은 양의 값은 $m = 1$일 때 $k = \frac{11}{4}$.
3단계: 검증 - $\frac{4}{11} \times \frac{11}{4} = 1$ (자연수). $\frac{11}{4}$은 이미 기약분수이므로 분자 + 분모 $= 11 + 4 = 15$.

🧠 풀이 전략: 순환소수를 먼저 기약분수로 바꾸는 것이 출발점. 그 뒤 '자연수가 되는 최소의 유리수 곱'은 기약분수의 역수 형태이다. 함정: ② 11은 11/1이 되어 자연수 × 자연수 문제가 되지만, $\frac{4}{11} \times 11 = 4$로 자연수가 되긴 해도 $\frac{11}{4}$이 더 작다($\frac{11}{4} = 2.75 < 11$).

💡 어떤 분수에 곱해 1(또는 자연수)을 만들려면 역수를 곱하면 된다 - 이게 역수의 정의이다.

Q55 지수·식 계산 심화

실수 a, b가 $a^2 + b^2 = 5$, $ab = 2$를 만족할 때, $a^4 + b^4$의 값은?

①) ① 13
②) ② 17
③) ③ 21
④) ④ 25

🎯 **정답: ② 17**

📖 1단계: 곱셈공식 $(a^2 + b^2)^2 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4$을 생각한다.
2단계: 이 식을 변형하면 $a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 = (a^2 + b^2)^2 - 2(ab)^2$.
3단계: 주어진 값을 대입하면 $5^2 - 2 \times 2^2 = 25 - 8 = 17$.

🧠 풀이 전략: a와 b의 값을 직접 구하려 하면 이차방정식 풀이로 번거로워진다. 대신 대칭식의 성질을 이용해 '$a^4 + b^4$을 주어진 두 조건식만의 조합으로 표현'한다. 핵심은 $a^2b^2 = (ab)^2$라는 지수의 성질.

💡 $a + b$, $a - b$, ab를 알면 $a^n + b^n$은 점화식으로 계속 계산할 수 있다.

Q56 경시 확률·퍼즐

주머니에 빨간 공 3개, 파란 공 2개, 노란 공 1개가 들어 있다. 이 주머니에서 공 2개를 동시에 꺼낼 때, 두 공의 색이 서로 다를 확률은?

①) ① $\frac{3}{5}$
②) ② $\frac{2}{3}$
③) ③ $\frac{11}{15}$
④) ④ $\frac{4}{5}$

🎯 **정답: ③ $\frac{11}{15}$**

📖 1단계: 전체 6개 공에서 2개를 꺼내는 경우의 수는 ${}_6C_2 = \frac{6 \times 5}{2} = 15.$

2단계: 여사건 '같은 색 2개'의 경우의 수 - 빨간끼리 ${}_3C_2 = 3$, 파란끼리 ${}_2C_2 = 1$, 노란은 1개뿐이므로 0. 합계 $3 + 1 + 0 = 4.$

3단계: 서로 다른 색일 확률 = $1 - \frac{4}{15} = \frac{11}{15}.$

🧠 풀이 전략: '서로 다른 색'의 경우를 직접 세면 (빨·파), (빨·노), (파·노)로 나뉘어 번거롭다. 여사건(같은 색)이 훨씬 경우가 적으므로 전체에서 빼는 전략이 효율적. 노란 공처럼 개수가 1개인 경우는 같은 색 쌍을 만들 수 없다는 점에 주의.

💡 여사건을 활용하면 '적어도 1개', '서로 다른', '모두 다른' 같은 표현의 확률을 훨씬 빠르게 풀 수 있다.

Q57 유리수·순환소수 추론

분수 $\frac{7}{2^a \times 5^b \times 3}$이 유한소수가 되려면 분자에 어떤 수를 곱해야 하는가? 단, a, b는 자연수이고, 곱하는 최소 자연수를 구하시오.

①) ① 2
②) ② 3
③) ③ 6
④) ④ 9

🎯 **정답: ② 3**

📖 1단계: 유한소수가 되는 조건은 기약분수의 분모가 2와 5만의 곱으로 이루어져야 한다.

2단계: 분모 $2^a \times 5^b \times 3$에는 3이 포함되어 있으므로, 이 3을 없애야 한다.

3단계: 분자 7에 3을 곱하면 분자는 21=3×7이 되고, 분모의 3과 약분되어 분모가 $2^a \times 5^b$만 남아 유한소수가 된다. 따라서 곱해야 할 최소 자연수는 3이다.

🧠 풀이 전략: 유한소수 조건을 떠올리고, 분모에서 2와 5가 아닌 인수를 찾아 그것을 분자에 곱해 약분으로 제거하는 전략을 세운다.

💡 분수가 유한소수인지 순환소수인지는 기약분수의 분모의 소인수만으로 결정된다!

Q58 부등식 활용 심화

연립부등식 $\begin{cases} 3x - 2 \geq x + 4 \\ 2x - a < 10 \end{cases}$ 의 해가 $3 \leq x < 5$일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

①) ① -1
②) ② 0
③) ③ 1
④) ④ 2

🎯 **정답: ② 0**

📖 1단계: 첫 번째 부등식 $3x - 2 \geq x + 4$에서 $2x \geq 6$이므로 $x \geq 3$. 이것이 해 $3 \leq x < 5$의 왼쪽 조건과 일치한다.

2단계: 두 번째 부등식 $2x - a < 10$에서 $2x < 10 + a$이므로 $x < \frac{10 + a}{2}$.

3단계: 이 값이 5와 같아야 하므로 $\frac{10 + a}{2} = 5$, 즉 $10 + a = 10$, 따라서 $a = 0$.

🧠 풀이 전략: 연립부등식의 해를 통해 거꾸로 미지의 상수를 찾는 역추론 문제. 각 부등식이 해의 어느 경계를 담당하는지 매칭하는 것이 핵심이다.

💡 연립부등식의 해는 각 부등식 해의 '교집합'! 마치 두 원이 겹치는 부분을 찾는 것과 같다.

Q59 연립방정식 심화 활용

정지한 물에서의 속력이 일정한 배가 강을 따라 24 km를 내려가는 데 2시간, 거슬러 올라가는 데 3시간이 걸렸다. 배의 정지 속력과 강물의 속력을 각각 구하시오.

①) ① 배 9 km/h, 강물 3 km/h
②) ② 배 10 km/h, 강물 2 km/h
③) ③ 배 11 km/h, 강물 1 km/h
④) ④ 배 12 km/h, 강물 4 km/h

🎯 **정답: ② 배 10 km/h, 강물 2 km/h**

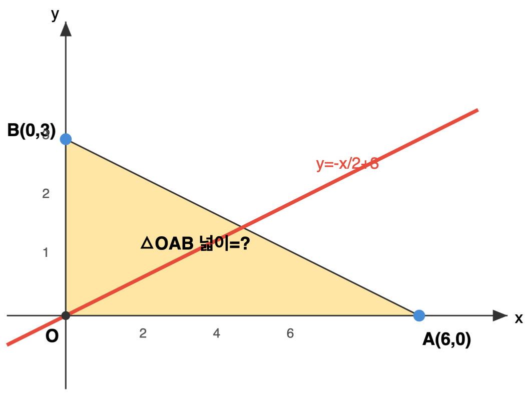
📖 1단계: 배의 정지 속력을 x km/h, 강물의 속력을 y km/h라 하면, 내려갈 때 속력은 $x+y$, 올라갈 때 속력은 $x-y$이다.
2단계: 내려갈 때 $(x+y)\times 2=24$이므로 $x+y=12$. 올라갈 때 $(x-y)\times 3=24$이므로 $x-y=8$.
3단계: 두 식을 더하면 $2x=20$이므로 $x=10$, $y=2$. 따라서 배의 정지 속력은 10 km/h, 강물의 속력은 2 km/h.

🧠 풀이 전략: 강물 문제의 핵심은 '내려갈 때 속력=배+강물', '올라갈 때 속력=배-강물'이라는 물리적 원리에서 두 식을 세우는 것.

💡 강물 문제는 상대 속도 개념의 기초로, 나중에 물리에서 배우는 '상대 운동'으로 이어진다!

Q60 일차함수 응용

직선 $y=-\frac{1}{2}x+3$이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 삼각형 OAB의 넓이를 구하시오. (O는 원점)



①) ① 6
②) ② 9
③) ③ 12
④) ④ 18

🎯 **정답: ② 9**

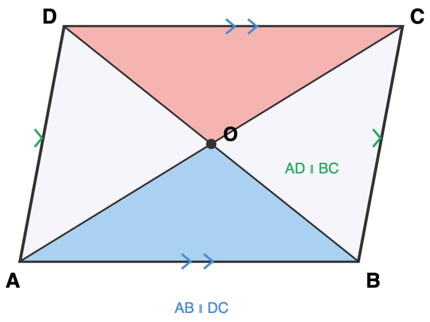
📖 1단계: y=0을 대입하면 $0=-\frac{1}{2}x+3$, $x=6$이므로 x축 절편 A(6, 0).
2단계: x=0을 대입하면 $y=3$이므로 y축 절편 B(0, 3).
3단계: 삼각형 OAB는 직각삼각형이며 밑변 OA=6, 높이 OB=3이다. 따라서 넓이는 $\frac{1}{2}\times 6\times 3=9$.

🧠 풀이 전략: 직선과 좌표축이 이루는 삼각형은 항상 원점에서 직각을 이룸을 이용. x절편과 y절편이 밑변과 높이가 된다.

💡 일차함수 $y=ax+b$가 좌표축과 이루는 삼각형의 넓이는 항상 $\frac{b^2}{2|a|}$ 공식으로 계산할 수 있다!

Q61 도형 성질 증명

평행사변형 ABCD에서 대각선 AC, BD의 교점을 O라 할 때, 삼각형 AOB와 삼각형 COD가 합동임을 보이는 합동 조건은 무엇인가?



①) ① SSS 합동

②) ② SAS 합동

③) ③ ASA 합동

④) ④ RHS 합동

🎯 **정답: ② SAS 합동**

📖 1단계: 평행사변형의 성질에서 대각선은 서로 다른 것을 이등분한다. 따라서 AO=CO, BO=DO (대응하는 두 변).

2단계: 각 AOB와 각 COD는 맞꼭지각이므로 서로 같다 (끼인각이 같음).

3단계: 두 변의 길이가 같고 그 끼인각이 같으므로 SAS 합동 조건을 만족한다.

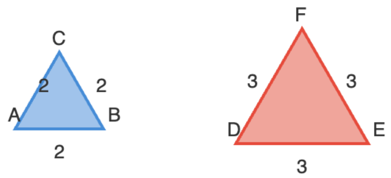
🧠 풀이 전략: 평행사변형의 핵심 성질(대각선이 서로를 이등분)과 맞꼭지각의 성질을 결합한다. 합동 조건 중 '두 변과 끼인각' 형태가 SAS임을 확인.

💡 평행사변형의 대각선이 서로를 이등분한다는 성질 덕분에, 두 대각선이 만드는 4개의 삼각형은 모두 넓이가 같다!

Q62 닮음 심화

두 닮은 도형의 닮음비가 2:3일 때, 넓이의 비는 얼마인가?

닮은 삼각형



넓이의 비 = ?

①) ① 2:3

②) ② 4:9

③) ③ 8:27

④) ④ 2:9

🎯 **정답: ② 4:9**

📖 1단계: 닮은 도형에서 길이의 비(닮음비)가 $m: n$이면, 넓이의 비는 $m^2: n^2$이다.

2단계: 닮음비가 2:3이므로 넓이의 비는 $2^2: 3^2 = 4: 9$.

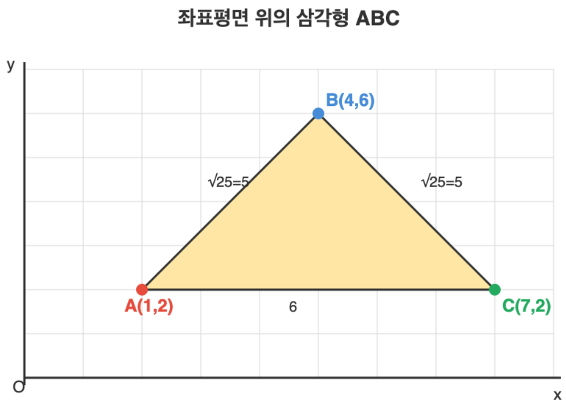
3단계: 참고로 부피의 비는 $m^3: n^3 = 8: 27$이 된다. 이 문제에서는 넓이이므로 4:9가 답이다.

🧠 풀이 전략: 닮음비→넓이비는 제곱, 부피비는 세제곱이라는 핵심 원리를 적용. 함정 보기에 세제곱 형태(8:27)도 포함되어 있음에 주의.

💡 이 비례 관계 덕분에 피자 지름이 2배가 되면 가격은 4배가 되어야 같은 양이 된다!

Q63 피타고라스 활용

좌표평면 위의 세 점 A(1, 2), B(4, 6), C(7, 2)에 대하여, 삼각형 ABC가 어떤 삼각형인지 판별하시오.



①) ① 정삼각형

②) ② 이등변삼각형

③) ③ 직각삼각형

④) ④ 직각이등변삼각형

🎯 **정답: ② 이등변삼각형**

📖 1단계: 피타고라스의 정리로 각 변 길이 계산. $AB = \sqrt{(4-1)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{9+16} = 5$.

2단계: $BC = \sqrt{(7-4)^2 + (2-6)^2} = \sqrt{9+16} = 5$. $AC = \sqrt{(7-1)^2 + (2-2)^2} = 6$.

3단계: AB=BC=5, AC=6이므로 두 변의 길이가 같은 이등변삼각형. 직각 여부는 $5^2 + 5^2 = 50 \neq 36 = 6^2$이므로 직각이 아니다. 따라서 이등변삼각형.

🧠 풀이 전략: 좌표평면 위의 삼각형 판별은 (1) 세 변 길이 계산 (2) 같은 변 개수로 이등변/정삼각 판단 (3) 피타고라스 역정리로 직각 여부 확인의 3단계.

💡 세 변 길이가 모두 같으면 정삼각형, 두 변만 같으면 이등변, $a^2 + b^2 = c^2$이면 직각! 하나씩 체크해보자.

Q64 경시 확률·퍼즐

1부터 9까지의 숫자가 하나씩 쓰인 9장의 카드에서 3장을 뽑아 세 자리 자연수를 만들 때, 그 수가 홀수이면서 3의 배수일 확률을 구하시오. (3장 모두 서로 다른 숫자, 각 자리 순서대로 만든 수)

①) ① $\frac{5}{36}$
②) ② $\frac{1}{6}$
③) ③ $\frac{25}{126}$
④) ④ $\frac{1}{3}$

🎯 **정답: ③ $\frac{25}{126}$**

📖 1단계: 전체 경우의 수는 9장에서 3장을 순서대로 뽑으므로 $9 \times 8 \times 7 = 504$이다.
2단계: 3의 배수 조건은 세 숫자의 합이 3의 배수인 것이다. 1부터 9까지를 3으로 나눈 나머지로 분류하면 나머지 0: $\{3, 6, 9\}$, 나머지 1: $\{1, 4, 7\}$, 나머지 2: $\{2, 5, 8\}$이다.
3단계: 세 수의 합이 3의 배수가 되는 (순서 무시) 조합은 모두 같은 나머지인 $(0, 0, 0), (1, 1, 1), (2, 2, 2)$ 각 1가지와 세 나머지를 하나씩 고르는 $(0, 1, 2)$의 $3 \times 3 \times 3 = 27$가지로, 합 $1 + 1 + 1 + 27 = 30$가지이다.
4단계: 각 조합에서 홀수(일의 자리가 홀수)인 배열의 수는 (조합 속 홀수의 개수) $\times 2!$이다. 홀수는 $1, 3, 5, 7, 9$이므로 $\{3, 6, 9\}$에 2개, $\{1, 4, 7\}$에 2개, $\{2, 5, 8\}$에 1개가 들어 있어 같은 나머지 세 조합의 홀수 배열 수는 $2 \times 2 + 2 \times 2 + 1 \times 2 = 10$이다.
5단계: $(0, 1, 2)$형 27개 조합에서 홀수 개수의 총합은 나머지 0칸 2×9, 나머지 1칸 2×9, 나머지 2칸 1×9로 $18 + 18 + 9 = 45$이고, 홀수 배열 수는 $45 \times 2 = 90$이다.
6단계: 홀수이면서 3의 배수인 경우의 수는 $10 + 90 = 100$이다. 따라서 확률은 $\frac{100}{504} = \frac{25}{126}$이다.

🧠 풀이 전략: (1) 3의 배수 판정법: 각 자리 숫자 합이 3의 배수. (2) 1~9를 3으로 나눈 나머지로 분류. (3) 홀수 조건은 일의 자리가 홀수. 체계적 나열로 경우 분석.

💡 3의 배수는 각 자리 숫자의 합이 3의 배수! 이 성질은 9의 배수에도 적용된다.

Q65 지수·식 계산 심화

$2^{10} \times 5^{13}$을 십진법으로 나타낼 때, 몇 자리 자연수인가?

①) ① 13자리
②) ② 14자리
③) ③ 15자리
④) ④ 16자리

🎯 **정답: ① 13자리**

📖 1단계: $2^{10} \times 5^{13} = 5^3 \times (2^{10} \times 5^{10}) = 125 \times 10^{10}$이다.
2단계: 125×10^{10}은 125 뒤에 0이 10개 붙은 수 1250000000000이므로 자릿수는 $3 + 10 = 13$자리이다.
3단계: 지수로도 확인하면 $125 \times 10^{10} = 1.25 \times 10^{12}$인데, 10^{12}이 13자리수이고 1.25×10^{12}은 10^{12}과 10^{13} 사이의 수이므로 13자리이다. 따라서 정답은 ① 13자리이다.

🧠 풀이 전략: 지수 법칙을 사용해 10^n 꼴로 만드는 전략. $2^a \times 5^b$에서 작은 쪽만큼 $10^{\min(a,b)}$을 뽑고 나머지를 계산한다.

💡 $2^a \times 5^b$의 자릿수는 항상 '남은 인수의 자릿수+min(a,b)'로 빠르게 계산할 수 있다!

Q66 연립방정식 심화 활용

3%의 소금물과 8%의 소금물을 섞어서 5%의 소금물 500g을 만들려고 한다. 각각 몇 g씩 섞어야 하는가?

①) ① 3% 200g, 8% 300g

②) ② 3% 250g, 8% 250g

③) ③ 3% 300g, 8% 200g

④) ④ 3% 350g, 8% 150g

🎯 **정답: ③ 3% 300g, 8% 200g**

📖 1단계: 3% 소금물을 xg, 8% 소금물을 yg이라 하면, 총량 조건: $x + y = 500$.
2단계: 소금의 양 조건: $\frac{3}{100}x + \frac{8}{100}y = \frac{5}{100} \times 500$, 즉 $3x + 8y = 2500$.
3단계: 첫 식에서 $x = 500 - y$. 이를 두 번째 식에 대입: $3(500 - y) + 8y = 2500$, $1500 + 5y = 2500$, $5y = 1000$, $y = 200$. 따라서 $x = 300$. 즉 3% 소금물 300g, 8% 소금물 200g.

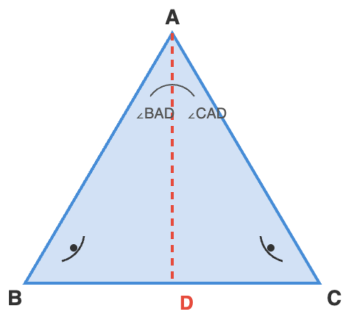
🧠 풀이 전략: 농도 혼합 문제는 (1) 전체 양 식 (2) 소금(용질) 양 식 두 개를 세워 연립한다. '전체농도 × 전체양 = 각 농도 × 각 양의 합' 원칙을 기억.

💡 섞는 양의 비는 농도차의 역비! (8-5):(5-3)=3:2, 즉 3% 소금물:8% 소금물=3:2=300:200.

Q67 도형 성질 증명

삼각형 ABC에서 ∠B = ∠C일 때, 변 AB=AC임을 증명하고자 한다. 다음 중 증명에 사용되는 보조선으로 가장 적절한 것은?

이등변삼각형의 성질 증명



AB=AC 증명에 필요한 보조선?

①) ① ∠A의 이등분선 AD

②) ② 변 BC의 수직이등분선

③) ③ 점 A를 지나는 BC의 평행선

④) ④ 꼭짓점 B에서 AC에 내린 수선

🎯 **정답: ① ∠A의 이등분선 AD**

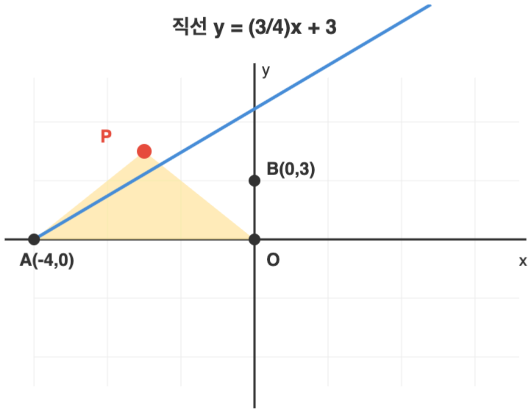
📖 1단계: ∠A의 이등분선 AD를 그으면 ∠BAD=∠CAD (이등분선의 정의).
2단계: 삼각형 ABD와 ACD에서 AD는 공통, ∠BAD=∠CAD, 그리고 가정에서 ∠B=∠C이다. 따라서 나머지 각 ∠ADB=∠ADC(삼각형 내각의 합=180°).
3단계: ASA 합동 조건(∠BAD, AD, ∠ADB = ∠CAD, AD, ∠ADC)에 의해 삼각형 ABD ≡ ACD. 대응변으로 AB=AC이다.

🧠 풀이 전략: 이등변삼각형 역정리 증명. 각 이등분선을 그으면 두 삼각형을 만들어 ASA 합동을 사용할 수 있다. 변의 중점을 이으면 SSS를 쓸 수 없으므로 각 이등분선이 적절.

💡 이 정리는 유클리드 '원론' 제1권 명제 6의 내용! 2500년 전부터 연구된 고전적 증명이다.

Q68 일차함수 응용

좌표평면에서 직선 $y = \frac{3}{4}x + 3$이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 원점을 O라 하자. 점 P는 선분 AB 위를 움직이는데, 삼각형 OAP의 넓이가 삼각형 OAB 넓이의 $\frac{2}{3}$가 되는 점 P의 좌표를 구하시오. (단, P는 A와 다르다.)



△OAP의 넓이

①) ① $(-\frac{4}{3}, 2)$
②) ② $(-\frac{8}{3}, 1)$
③) ③ $(-2, \frac{3}{2})$
④) ④ $(-\frac{4}{3}, 1)$

🎯 **정답: ①**

📖 1단계: 직선의 x절편과 y절편을 구한다. y=0일 때 x=-4이므로 A(-4,0), x=0일 때 y=3이므로 B(0,3). 삼각형 OAB의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6$.
2단계: 삼각형 OAP의 넓이는 6의 $\frac{2}{3}$인 4가 되어야 한다. 점 P의 좌표를 (p, q)라 하면, 밑변을 OA(길이 4)로 보았을 때 높이는 P의 y좌표 q이다. 따라서 $\frac{1}{2} \times 4 \times q = 4$, q=2.
3단계: P는 직선 위의 점이므로 $2 = \frac{3}{4}p + 3$에서 $\frac{3}{4}p = -1$, $p = -\frac{4}{3}$. 따라서 $P(-\frac{4}{3}, 2)$.

🧠 풀이 전략: 넓이 비율 조건에서 높이(y좌표)를 역산한 뒤, 점이 직선 위에 있다는 조건으로 x좌표를 찾는 2단계 전략이다.

💡 삼각형의 한 변을 공유하는 두 삼각형의 넓이비는 높이의 비와 같다. 이것이 '등적변형'의 기초다.

Q69 지수·식 계산 심화

$x^2 - 3x + 1 = 0$을 만족하는 실수 x에 대하여 $x^3 + \frac{1}{x^3}$의 값은?

①) ① 15
②) ② 18
③) ③ 21
④) ④ 24

🎯 **정답: ②**

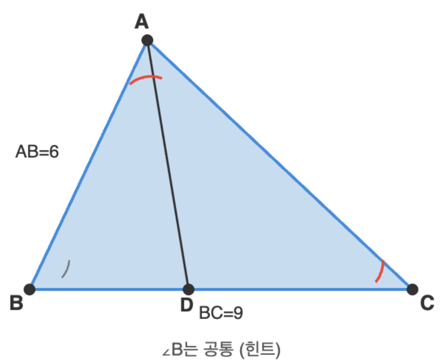
📖 1단계: $x^2 - 3x + 1 = 0$의 양변을 x로 나눈다(x≠0). $x - 3 + \frac{1}{x} = 0$이므로 $x + \frac{1}{x} = 3$.
2단계: $(x + \frac{1}{x})^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = 9$에서 $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$.
3단계: $x^3 + \frac{1}{x^3} = (x + \frac{1}{x})(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2}) = 3 \times (7 - 1) = 3 \times 6 = 18$.

🧠 풀이 전략: 방정식을 x로 나눠 대칭식 $x + \frac{1}{x}$ 꼴을 만든 뒤, 세제곱합 공식 $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$을 적용한다.

💡 $x + \frac{1}{x} = k$이면 $x^n + \frac{1}{x^n}$은 점화식 $a_{n+1} = k \cdot a_n - a_{n-1}$로 차례차례 구할 수 있다.

Q70 닮음 심화

삼각형 ABC에서 변 BC 위에 점 D가 있고, ∠BAD = ∠ACB이다. AB = 6, BC = 9일 때, BD의 길이는?



①) ① 3

②) ② 4

③) ③ 5

④) ④ 6

🎯 **정답: ②**

📖 1단계: 삼각형 ABD와 삼각형 CBA를 비교한다. ∠B는 공통이고, ∠BAD = ∠BCA(조건)이므로 AA 닮음에 의해 △ABD ∽ △CBA 이다.

2단계: 대응변의 비를 세운다. AB:CB = BD:BA이므로 $\frac{AB}{CB} = \frac{BD}{BA}$, 즉 $\frac{6}{9} = \frac{BD}{6}$.

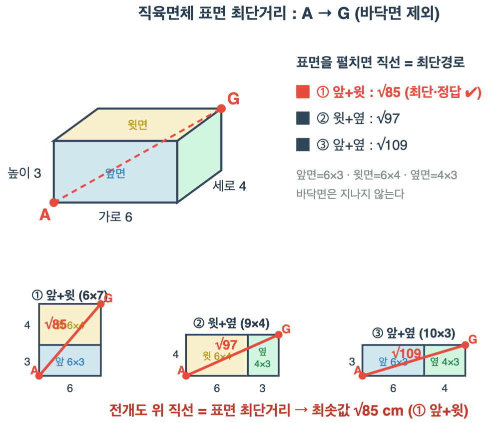
3단계: BD = $\frac{6 \times 6}{9}$ = 4.

🧠 풀이 전략: '∠BAD=∠ACB' 조건이 주어지면 한 각이 공통(∠B)인 두 삼각형의 닮음을 의심한다. 이 닮음은 $AB^2 = BD \times BC$라는 유명한 관계식을 낳는다.

💡 이 문제의 관계식 $AB^2 = BD \times BC$는 원에서 접선과 할선의 길이 관계(방멱의 원리)와 본질적으로 같다.

Q71 피타고라스 활용

가로 6cm, 세로 4cm, 높이 3cm인 직육면체의 한 꼭짓점 A에서 대각선 반대쪽 꼭짓점 G까지 겉면(표면)을 따라 이동하는 최단 거리는? (단, 바닥면은 지나지 않는다.)



①) ① $\sqrt{85}$ cm

②) ② $\sqrt{97}$ cm

③) ③ $\sqrt{109}$ cm

④) ④ $\sqrt{117}$ cm

🎯 **정답: ① $\sqrt{85}$ cm**

📖 1단계: 직육면체 표면을 따라가는 최단경로는 두 면을 펼친 전개도 위에서의 직선거리와 같다. A는 앞면 왼쪽 아래, G는 뒷면 오른쪽 위 꼭짓점이며, 바닥면을 지나지 않는 전개를 찾는다.

2단계: 바닥을 지나지 않는 전개는 다음 세 가지다.

- 앞면+윗면 펼치기: 가로 6, 세로 $(3+4)=7$인 직사각형의 대각선 $=\sqrt{6^2+7^2}=\sqrt{85}$.
- 윗면+옆면 펼치기: $\sqrt{(6+3)^2+4^2}=\sqrt{97}$.
- 앞면+옆면 펼치기: $\sqrt{(6+4)^2+3^2}=\sqrt{109}$.

3단계: 세 값 중 최솟값은 $\sqrt{85}$ 이고, 이 앞면+윗면 경로의 직선은 바닥면을 전혀 지나지 않는다. 따라서 최단거리는 $\sqrt{85}$ cm이다.

🧠 풀이 전략: 직육면체 표면 최단경로는 반드시 전개도로 펼쳐야 한다. 여러 전개 방식을 모두 시도해서 최솟값을 선택하고, 제약조건(바닥 제외)으로 유효 경로를 걸러낸다.

💡 개미가 정육면체 반대 꼭짓점까지 가는 최단경로는 한 변이 1일 때 $\sqrt{5}$ 로, 공간대각선 $\sqrt{3}$ 보다 길다. 개미는 표면만 기어서다.

Q72 연립방정식 심화 활용

어느 강의 상류 A지점에서 하류 B지점까지 거리는 24km이다. 배가 A→B로 강물을 따라 내려갈 때 3시간, B→A로 거슬러 올라갈 때 4시간이 걸렸다. 이 배의 정지된 물에서의 속력(km/시)은?

①) ① 6

②) ② 7

③) ③ 8

④) ④ 9

🎯 **정답: ②**

📖 1단계: 배의 정지수 속력을 x, 강물 속력을 y라 하자. 내려갈 때 속력은 x+y, 올라갈 때는 x-y이다.

2단계: 거리=속력×시간 관계에서 $24=3(x+y)$, $24=4(x-y)$. 정리하면 $x+y=8$, $x-y=6$.

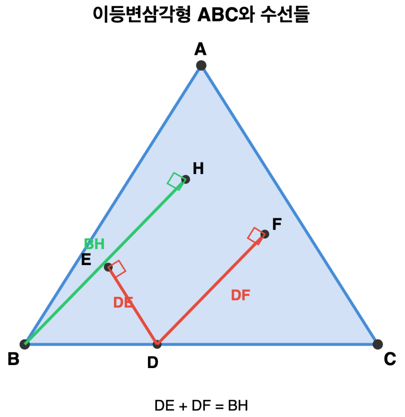
3단계: 두 식을 더하면 $2x=14$, x=7. 따라서 배의 정지수 속력은 7 km/시.

🧠 풀이 전략: 상대속도 문제의 정석: 미지수를 '배의 속력'과 '강물의 속력' 두 개로 놓고 왕복 조건에서 두 식을 세운다. 더하면 y가 소거된다.

💡 같은 원리로 비행기가 맞바람과 뒷바람을 받을 때의 실제 속력을 계산한다. GPS 없이 지상속도를 구하던 고전 항법술이다.

Q73 도형 성질 증명

이등변삼각형 ABC에서 AB=AC이고, 밑변 BC 위의 한 점 D에서 두 등변 AB, AC에 내린 수선의 발을 각각 E, F라 하자. 또한 꼭짓점 B에서 AC에 내린 수선의 발을 H라 하자. 이때 DE+DF의 값은?



①) ① BH와 항상 같다

②) ② BH의 2배

③) ③ BH의 절반

④) ④ D의 위치에 따라 다르다

🎯 **정답: ①**

📖 1단계: 삼각형 ABC의 넓이를 두 가지 방법으로 표현한다. 방법1은 밑변 AC와 높이 BH를 이용: $S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BH$.
2단계: 방법2로 점 D에서 두 등변을 분할. 삼각형 ABD의 넓이는 $\frac{1}{2} \cdot AB \cdot DE$, 삼각형 ACD의 넓이는 $\frac{1}{2} \cdot AC \cdot DF$. 합은 $S = \frac{1}{2}(AB \cdot DE + AC \cdot DF)$.
3단계: AB=AC이므로 $S = \frac{1}{2}AC(DE + DF)$. 1단계와 등치하면 $AC \cdot BH = AC(DE + DF)$, 따라서 $DE + DF = BH$. 이는 D의 위치와 무관한 상수이다.

🧠 풀이 전략: 한 도형의 넓이를 서로 다른 방법으로 두 번 표현해 등식을 세우는 '넓이 방법'(area argument)이다. 이등변 조건 AB=AC가 핵심으로 작용한다.

💡 이 정리는 비비아니(Viviani)의 정리라 불리며, 정삼각형의 경우 '내부 임의의 점에서 세 변까지 거리의 합은 높이와 같다'로 일반화된다.

Q74 경시 확률·퍼즐

어떤 상자에 빨강, 파랑, 노랑, 초록 공이 각각 7개씩 들어있다. 눈을 감고 공을 하나씩 꺼낼 때, '같은 색 공 4개'가 반드시 확보되도록 하려면 최소 몇 개를 꺼내야 하는가?

①) ① 13개

②) ② 14개

③) ③ 15개

④) ④ 16개

🎯 **정답: ①**

📖 1단계: 비둘기집 원리의 '최악의 경우'를 생각한다. 같은 색 4개가 확보되지 않는 최악의 경우는 각 색마다 최대 3개씩만 뽑힌 상태이다.
2단계: 각 색에서 3개씩 뽑히면 총 $3 \times 4 = 12$개까지는 같은 색 4개가 없을 수 있다.
3단계: 12개까지 뽑아 각 색이 정확히 3개씩인 상태에서, 13번째 공을 뽑으면 이는 어떤 색이든 그 색의 4번째 공이 된다. 따라서 최소 13개를 꺼내야 한다.

🧠 풀이 전략: '반드시 확보'를 위한 문제는 최악의 경우를 구성한다. (원하는 것이 생기지 않는 최대 수)+1이 정답이다.

💡 비둘기집 원리는 1834년 디리클레가 정리한 이래 정수론과 조합론의 핵심 도구가 됐다. 서울에 머리카락 수가 같은 사람이 반드시 있다는 것도 이 원리로 증명된다.

Q75 유리수·순환소수 추론

분수 $\frac{n}{120}$이 유한소수가 되도록 하는 자연수 n의 조건은? (단, 분수는 약분된 후 유한소수 판정을 한다.)

①) ① n이 3의 배수일 때

②) ② n이 15의 배수일 때

③) ③ n이 5의 배수일 때

④) ④ n이 4의 배수일 때

🎯 **정답:** ①

📖 1단계: 분모를 소인수분해한다. $120 = 2^3 \times 3 \times 5$. 유한소수 조건은 기약분수의 분모가 2와 5만의 곱이어야 한다. 따라서 분모에서 3이 약분되어 사라져야 한다.
2단계: 3을 약분해 없애려면 분자 n이 3의 배수여야 한다. 즉 n=3k이면 $\frac{3k}{120} = \frac{k}{40}$이고, $40 = 2^3 \times 5$는 2와 5만의 곱이다.
3단계: n이 3의 배수일 때만 유한소수가 된다. (15의 배수면 충분조건이지만 필요조건이 아님: n=3,6,9도 유한소수.)

🧠 풀이 전략: 유한소수 판정은 '기약분수 상태의 분모'를 봐야 한다. 분모의 '2,5 이외 소인수'를 분자가 약분으로 없앨 수 있는지 따진다.

💡 10진법에서 유한소수가 되려면 분모가 2^a5^b 꼴이어야 한다. 12진법이라면 2^a3^b 꼴이어야 한다. 진법이 분수 표현을 결정한다.

Q76 부등식 활용 심화

연립부등식 $\begin{cases} 2x-1<3x+a \\ 4x-5 \le 2x+3 \end{cases}$ 의 해에 속하는 정수가 정확히 5개일 때, 상수 a의 값의 범위는?

①) ① $-2 \le a < -1$

②) ② $-3 \le a < -2$

③) ③ $-1 < a \le 0$

④) ④ $-4 < a \le -3$

🎯 **정답:** ③ $-1 < a \le 0$

📖 1단계: 각 부등식을 정리한다. 첫째 $2x-1<3x+a \Rightarrow -1-a<x$, 즉 $x>-1-a$. 둘째 $4x-5 \le 2x+3 \Rightarrow 2x \le 8 \Rightarrow x \le 4$.
2단계: 공통해는 $-1-a<x \le 4$이다. 이 구간에 속하는 정수가 정확히 5개가 되려면 가장 큰 정수가 4이므로 그 5개는 $0, 1, 2, 3, 4$이어야 한다.
3단계: 정수 0은 포함되고 -1은 제외되어야 하므로 경계 $-1-a$가 $-1 \le -1-a<0$을 만족해야 한다. $-1-a<0$에서 $a>-1$이고, $-1-a \ge -1$에서 $a \le 0$이다. 따라서 $-1<a \le 0$, 정답 ③.

🧠 풀이 전략: 연립부등식의 공통해를 구한 뒤, 경계값의 위치로 정수해의 개수를 조절한다. 경계가 등호/부등호인지 주의해야 한다.

💡 부등식의 해집합에서 정수해 개수를 세는 문제는 디오판토스 문제의 초급 형태다. 정수해 조건은 연속 실수해 조건보다 훨씬 까다롭다.

Q77 일차함수 응용

두 직선 $y=2x+3$과 $y=-x+6$이 만나는 점을 P라 할 때, 점 P를 지나고 기울기가 -2인 직선의 방정식은?

①) ① $y=-2x+7$

②) ② $y=-2x+9$

③) ③ $y=-2x+11$

④) ④ $y=-2x+13$

🎯 **정답:** ① $y=-2x+7$

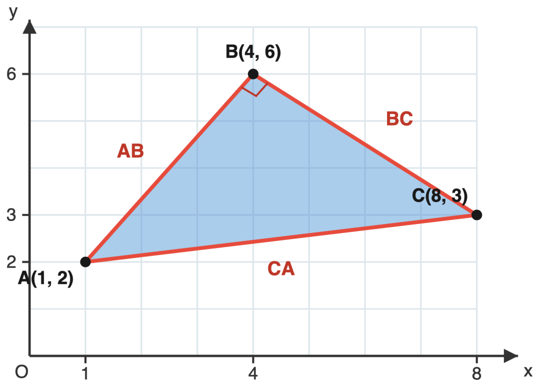
📖 1단계: 두 직선의 교점 P를 구한다. $2x+3=-x+6$에서 $3x=3$, $x=1$이고 $y=2\times1+3=5$이므로 P$(1,5)$이다.
2단계: 기울기가 -2인 직선은 $y=-2x+b$ 꼴이다.
3단계: P$(1,5)$를 대입하면 $5=-2\times1+b$에서 $b=7$이다. 따라서 직선의 방정식은 $y=-2x+7$, 정답 ①이다.

🧠 풀이 전략: 교점을 먼저 구하고, 조건(기울기)에 맞는 직선식 형태에 교점을 대입한다. 기본기를 확실히 하는 문제.

💡 두 직선의 교점은 두 선형방정식의 공통해다. 연립방정식과 일차함수 그래프는 같은 것의 다른 표현이다.

Q78 피타고라스 활용

좌표평면 위의 세 점 A(1, 2), B(4, 6), C(8, 3)을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 둘레의 길이는?



①) ① 15
②) ② 16
③) ③ $10 + 5\sqrt{2}$
④) ④ 18

🎯 **정답:** ③ $10 + 5\sqrt{2}$

📖 1단계: 두 점 사이 거리 공식 $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ 로 각 변의 길이를 구한다.

2단계: $AB = \sqrt{(4-1)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$. $BC = \sqrt{(8-4)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$.

$CA = \sqrt{(8-1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{49+1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

3단계: 둘레 $= 5 + 5 + 5\sqrt{2} = 10 + 5\sqrt{2}$ (약 17.07). 따라서 정답은 $10 + 5\sqrt{2}$ 이다.

(참고: B에서 두 변이 수직이라 B가 직각인 직각이등변삼각형이며, 빗변 $CA = 5\sqrt{2}$ 이다.)

🧠 풀이 전략: 좌표 거리 공식은 피타고라스 정리 그 자체이다. 두 점의 가로차·세로차를 직각삼각형의 두 변으로 보면 된다.

💡 (3,4,5)는 가장 유명한 피타고라스 수다. 이 문제의 AB, BC가 모두 3-4-5 직각삼각형의 빗변이다.

Q79 닮음 심화

서로 닮음인 두 원뿔 P, Q가 있다. 원뿔 P의 겉넓이가 49π, 원뿔 Q의 겉넓이가 100π일 때, 두 원뿔의 부피의 비 P:Q는?

①) ① 7:10
②) ② 49:100
③) ③ 343:1000
④) ④ 2401:10000

🎯 **정답:** ③

📖 1단계: 닮음인 입체도형에서 길이비가 m:n이면 넓이비는 $m^2 : n^2$, 부피비는 $m^3 : n^3$이다.

2단계: 겉넓이 비가 $49\pi : 100\pi = 49 : 100 = 7^2 : 10^2$이므로 길이비는 7:10이다.

3단계: 부피비는 길이비의 세제곱인 $7^3 : 10^3 = 343 : 1000$이다.

🧠 풀이 전략: 닮음비의 핵심 공식: 길이 m:n → 넓이 $m^2 : n^2$ → 부피 $m^3 : n^3$. 주어진 비에서 역으로 길이비를 찾아 세제곱한다.

💡 이 원리 때문에 코끼리는 생쥐처럼 높이 뛸 수 없다. 몸무게(부피)는 길이의 3제곱으로 늘지만, 다리뼈 단면적(근력)은 2제곱으로만 늘기 때문이다. 생물학의 '갈릴레이 제곱세제곱 법칙'.

Q80 유리수·순환소수 추론

자연수 n에 대하여 $\frac{1}{12}+\frac{n}{30}$을 계산한 결과가 유한소수가 되도록 하는 n의 값 중 1 이상 30 이하의 자연수는 모두 몇 개인가?

①) ① 5개

②) ② 8개

③) ③ 10개

④) ④ 12개

🎯 **정답: ③ 10개**

📖 1단계: 두 분수를 통분하면 $\frac{1}{12}+\frac{n}{30}=\frac{5}{60}+\frac{2n}{60}=\frac{5+2n}{60}$.

2단계: $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$이므로, 유한소수가 되려면 분자 (5+2n)이 분모의 인수 3을 포함하여 약분으로 제거해야 한다. 즉 5+2n이 3의 배수여야 한다.

3단계: $5+2n \equiv 0 \pmod 3 \Longleftrightarrow 2+2n \equiv 0 \pmod 3 \Longleftrightarrow n \equiv 2 \pmod 3$.

4단계: $1 \le n \le 30$에서 n = 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29의 총 10개.

🧠 풀이 전략: 유한소수 판정을 '분모의 인수'만 보는 대신, 통분 후 분자가 문제의 소인수를 약분으로 얼마나 흡수하는지를 본다는 관점이 핵심이다. 분모에 남는 인수(2, 5 이외)를 분자가 상쇄해야 한다는 조건을 mod로 정리해 n의 잔류계를 찾는다.

💡 이처럼 '분자가 분모의 인수를 소거'하는 원리는 후에 유리식의 기약 판정으로 확장된다.

📝 중2 수학 심화

총 40문제 · 문제와 정답·풀이 포함

Q81 지수·식 계산 심화

이차방정식 $x^2 - 3x + 1 = 0$의 한 근을 a라 할 때, $a^3 + \frac{1}{a^3}$ 의 값은?

①) ① 15
②) ② 18
③) ③ 21
④) ④ 27

🎯 **정답: ② 18**

📖 1단계: a는 $x^2 - 3x + 1 = 0$의 근이므로 $a^2 - 3a + 1 = 0$. 양변을 a로 나누면 $a - 3 + \frac{1}{a} = 0$, 즉 $a + \frac{1}{a} = 3$.
2단계: 세제곱 전개식 이용. $(a + \frac{1}{a})^3 = a^3 + 3a^2 \cdot \frac{1}{a} + 3a \cdot \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} = a^3 + \frac{1}{a^3} + 3(a + \frac{1}{a})$.
3단계: $3^3 = a^3 + \frac{1}{a^3} + 3 \cdot 3$, 27 = $a^3 + \frac{1}{a^3}$ + 9.
4단계: 따라서 $a^3 + \frac{1}{a^3} = 18$.

🧠 풀이 전략: 근 자체를 구하지 않고, 근의 성질(계수와 근의 관계)에서 대칭식 $a + \frac{1}{a}$의 값을 먼저 얻는다. 그 후 세제곱 전개의 대칭 구조를 이용해 직접 대입 없이 답을 계산한다.

💡 $a + \frac{1}{a} = k$가 주어지면 $a^n + \frac{1}{a^n}$은 모든 정수 n에 대해 정수가 된다(체비셰프 점화식).

Q82 지수·식 계산 심화

자연수 n에 대하여 $\frac{4^{n+1} - 4^n}{4^n + 4^{n-1}}$의 값은?

①) ① $\frac{3}{5}$
②) ② $\frac{4}{5}$
③) ③ $\frac{12}{5}$
④) ④ 3

🎯 **정답: ③ $\frac{12}{5}$**

📖 1단계: 분자에서 4^n을 공통인수로 묶는다. $4^{n+1} - 4^n = 4^n(4 - 1) = 3 \cdot 4^n$.
2단계: 분모에서 4^{n-1}을 공통인수로 묶는다. $4^n + 4^{n-1} = 4^{n-1}(4 + 1) = 5 \cdot 4^{n-1}$.
3단계: $\frac{3 \cdot 4^n}{5 \cdot 4^{n-1}} = \frac{3}{5} \cdot 4 = \frac{12}{5}$.

🧠 풀이 전략: 지수식은 '가장 작은 지수'를 공통인수로 뽑아내면 깔끔해진다. 분자·분모 모두 같은 밑수이므로 각각에서 공통지수를 뽑아 상수 계수만 남긴 뒤 약분한다.

💡 이 테크닉은 '지수 스케일 정렬'이라 부르며, 고등수학의 수열 극한 계산에서도 동일하게 쓰인다.

Q83 부등식 활용 심화

어느 공장이 A 제품과 B 제품을 만든다. A는 1개당 이익 1500원, B는 1개당 이익 2000원이다. 하루에 만들 수 있는 제품의 총 개수는 50개 이하이고, A의 개수는 B의 개수의 2배 이상이어야 한다. 하루에 만들 수 있는 최대 이익은? (단, A, B의 개수는 0 이상의 정수)

①) ① 75000원
②) ② 80000원
③) ③ 83000원
④) ④ 87500원

🎯 **정답: ③ 83000원**

📖 1단계: A, B의 개수를 각각 a, b로 놓으면 조건은 $a + b \leq 50$, $a \geq 2b$, a,b는 0 이상의 정수. 이익 $P = 1500a + 2000b$.
2단계: B 1개당 이익이 더 크므로 b를 최대한 키우는 것이 유리. 그러나 $a \geq 2b$ 제약이 있으므로 무한정 키울 수 없다. 또 총개수 제한 때문에 a+b=50 경계에서 최적을 찾는다(a 줄이고 b를 늘릴수록 유리).
3단계: a = 50 - b를 $a \geq 2b$에 대입: $50 - b \geq 2b$, $b \leq \frac{50}{3}$. 정수이므로 b ≤ 16.
4단계: b = 16일 때 a = 34, 이익 = 1500·34 + 2000·16 = 51000 + 32000 = 83000원. (a = 2b = 32 조건 34 ≥ 32 만족.)

🧠 풀이 전략: 두 부등식 제약 하에서 일차식의 최댓값을 찾는 문제. 경계선 위에서 최적이 발생한다는 선형계획 직관을 사용한다. '어느 쪽 이익이 더 크냐'로 최적 방향을 잡고, 두 경계가 만나는 꼭짓점을 확인한다.

💡 이 아이디어는 고등학교 수학II에서 배우는 '선형계획법'의 가장 기초적인 예시이다.

Q84 연립방정식 심화 활용

세 실수 x, y, z가 $x + y = 9$, $y + z = 11$, $x + z = 10$을 동시에 만족할 때, xyz의 값은?

①) ① 60
②) ② 80
③) ③ 100
④) ④ 120

🎯 **정답: ④ 120**

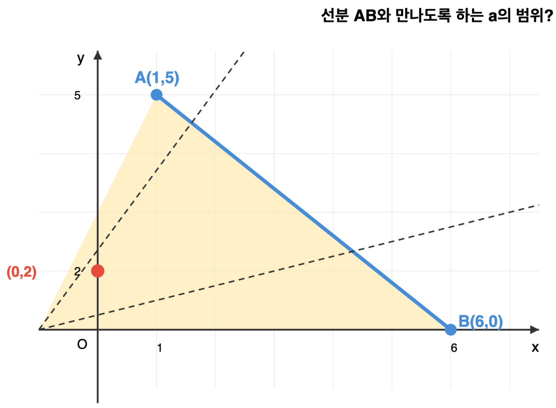
📖 1단계: 세 식을 모두 더하면 $(x + y) + (y + z) + (x + z) = 2(x + y + z) = 9 + 11 + 10 = 30$, 즉 $x + y + z = 15$.
2단계: 전체합에서 한 식씩 빼서 개별값을 분리.
z = 15 - (x+y) = 15 - 9 = 6.
x = 15 - (y+z) = 15 - 11 = 4.
y = 15 - (x+z) = 15 - 10 = 5.
3단계: 곱 $xyz = 4 \cdot 5 \cdot 6 = 120$.

🧠 풀이 전략: 세 식을 정공법으로 소거하지 않고, '대칭성'을 이용해 전체합을 먼저 구한 뒤 각 변수를 일괄 분리한다. 합 형태의 연립은 '전체합 - 해당 식'이 빠진 변수의 값이 된다.

💡 이 '모두 더해서 반으로 나누기' 아이디어는 정수론의 Gauss 1+2+...+n 기법과 같은 합 대칭성 원리이다.

Q85 일차함수 응용

좌표평면에서 직선 $y = ax + 2$ 가 두 점 A(1, 5)와 B(6, 0)을 잇는 선분 AB와 (끝점 포함하여) 만나도록 하는 실수 a의 값의 범위는?



①) ① $-\frac{1}{3} \leq a \leq 3$
②) ② $-3 \leq a \leq \frac{1}{3}$
③) ③ $0 \leq a \leq 3$
④) ④ $a \geq -\frac{1}{3}$

🎯 **정답:** ① $-\frac{1}{3} \leq a \leq 3$

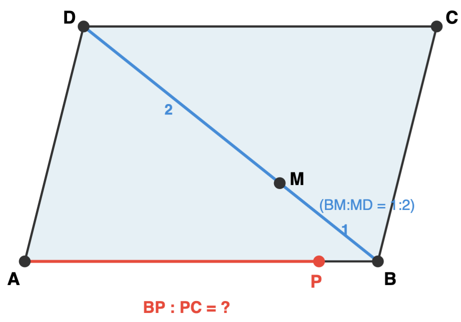
📖 1단계: 직선 $y = ax + 2$는 a 값과 무관하게 항상 고정점 (0, 2)를 지난다(y절편 2로 일정).
2단계: 따라서 이 직선은 (0, 2)를 축으로 회전하는 직선군이다. 선분 AB와 만나려면, 회전 범위가 A에서 B를 쓸고 지나가는 구간에 있어야 한다.
3단계: A(1, 5) 대입: $5 = a \cdot 1 + 2$, $a = 3$. B(6, 0) 대입: $0 = 6a + 2$, $a = -\frac{1}{3}$.
4단계: 고정점 (0, 2)에서 본 선분 AB를 회전으로 쓸려면 a는 두 경계 사이 값. $-\frac{1}{3} \leq a \leq 3$.

🧠 풀이 전략: 'y절편이 일정한 직선군'이라는 구조를 먼저 간파하고, 가변 인수 a를 '회전각'처럼 해석한다. 선분의 양 끝을 지나는 두 극단 기울기를 구하면 그 사이 값이 모두 교차를 만든다.

💡 이 아이디어는 고등학교의 '정점을 지나는 직선족' 개념으로 이어지며, 원·원뿔곡선에서도 일반화된다.

Q86 도형 성질 증명

평행사변형 ABCD의 대각선 BD 위에 점 M이 $BM : MD = 1 : 2$가 되도록 있다. 반직선 AM이 변 BC와 만나는 점을 P라 할 때, $BP : PC$의 값은?



①) ① 1 : 1

②) ② 1 : 2

③) ③ 2 : 1

④) ④ 2 : 3

🎯 **정답: ① 1 : 1**

📖 1단계: 좌표 설정. 일반성을 잃지 않고 A(0, 0), B(b, 0), D(d, h), C(b+d, h)로 두자(b, h > 0).

2단계: M은 BD를 1 : 2로 내분. $M = \frac{2B+D}{3} = \left(\frac{2b+d}{3}, \frac{h}{3}\right)$.

3단계: 직선 AM은 원점에서 M을 지나므로 매개변수 t로 $(x, y) = \left(t \cdot \frac{2b+d}{3}, t \cdot \frac{h}{3}\right)$. 변 BC 위의 점은 $(b + sd, sh)$, $0 \le s \le 1$.

4단계: y좌표 비교 $t \cdot \frac{h}{3} = sh \to s = \frac{t}{3}$. x좌표 비교 $t \cdot \frac{2b+d}{3} = b + sd = b + \frac{t}{3}d \to \frac{2tb}{3} = b \to t = \frac{3}{2}$.

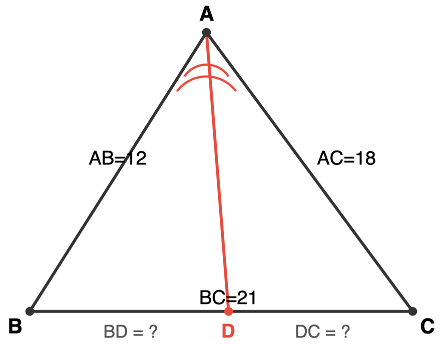
5단계: $s = \frac{1}{2}$이므로 P는 BC의 중점. 따라서 $BP : PC = 1 : 1$.

🧠 풀이 전략: 평행사변형의 자유도를 일반 좌표로 잡고, 변수 b와 d가 답에서 사라지는 것(즉 평행사변형 모양에 무관)을 확인한다. M의 분점 좌표와 직선 AM을 매개변수화한 뒤 변 BC 조건을 대입하면 s값이 바로 BP:PC 비가 된다.

💡 이 성질은 '평행사변형의 대각선과 변을 가르는 분할'의 일반식으로, BM:MD = m:n이면 BP:PC = m:(n-m) (n > m일 때) 꼴로 확장된다.

Q87 닮음 심화

삼각형 ABC에서 $AB = 12$, $AC = 18$, $BC = 21$이다. 각 A의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D라 할 때, BD의 길이는?



①) ① 7

②) ② $\frac{42}{5}$

③) ③ 9

④) ④ $\frac{21}{2}$

🎯 **정답: ② $\frac{42}{5}$**

📖 1단계: 각의 이등분선 정리: 삼각형 ABC에서 각 A의 이등분선이 대변 BC와 만나는 점을 D라 하면, $BD : DC = AB : AC$.

2단계: 증명 개요(닮음으로): 점 C에서 선분 AD와 평행한 직선이 변 AB의 연장선과 만나는 점을 E라 하자. $\angle BAD = \angle AEC$(동위각), $\angle DAC = \angle ACE$(엇각)이고 $\angle BAD = \angle DAC$이므로 $\angle AEC = \angle ACE$, 삼각형 AEC는 이등변이 되어 $AE = AC$. 그리고 $\triangle BAD \sim \triangle BEC$에서 $BD : DC = AB : AE = AB : AC$.

3단계: 비 대입. $BD : DC = 12 : 18 = 2 : 3$.

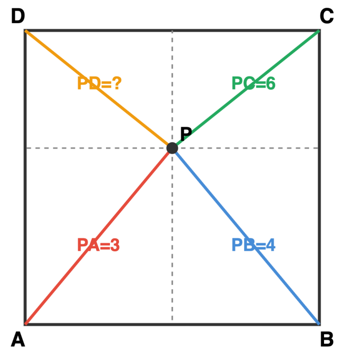
4단계: $BD = BC \cdot \frac{2}{2+3} = 21 \cdot \frac{2}{5} = \frac{42}{5}$.

🧠 풀이 전략: 각이등분선은 '대변을 두 인접변의 비로 내분'한다는 강력한 정리를 기억한다. 증명은 평행선 보조선을 그어 닮음과 이등변 구조를 만들어 가져오는 전형적 닮음 응용이다.

💡 이 각이등분선 정리는 유클리드 원론 제VI권에 이미 등장하며, 아폴로니우스 원의 기원이기도 하다.

Q88 피타고라스 활용

정사각형 ABCD의 내부에 점 P가 있다. $PA = 3$, $PB = 4$, $PC = 6$일 때, PD의 값은?



①) ① $\sqrt{21}$
②) ② $\sqrt{25}$
③) ③ $\sqrt{29}$
④) ④ $\sqrt{37}$

🎯 **정답:** ③ $\sqrt{29}$

📖 1단계: '영국국기 정리(British Flag Theorem)'에 의해, 정사각형 ABCD 내부(또는 위)의 임의의 점 P에 대하여 $PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$가 성립한다. (대각으로 마주보는 두 꼭짓점까지의 거리 제곱합이 서로 같다.)
2단계: 증명 개요: 점 P에서 네 변에 수선의 발을 내리면, 정사각형은 P를 중심으로 4개의 작은 직사각형으로 분할되고, 피타고라스 정리를 네 꼭짓점 각각에 적용해 양변 비교로 위 식이 얻어진다.
3단계: 대입. $3^2 + 6^2 = 4^2 + PD^2$, 즉 $9 + 36 = 16 + PD^2$.
4단계: $PD^2 = 45 - 16 = 29$, $PD = \sqrt{29}$.

🧠 풀이 전략: 일반 위치의 P에 대해 네 거리를 직접 구하는 것은 어렵지만, 대각 방향의 거리 제곱합에 대칭성이 있음을 이용하면 세 길이에서 네 번째 길이를 즉시 얻는다. 정사각형의 각 변에 P에서 수선을 내려 분할하는 아이디어가 증명의 핵심.

💡 이 정리는 정사각형뿐 아니라 임의의 직사각형에서도 성립한다. 이름의 '영국 국기'는 정사각형 안에 네 선분이 유니언잭처럼 보이는 데서 유래했다.

Q89 경시 확률·퍼즐

1부터 10까지의 자연수 중에서 서로 다른 두 수를 임의로 뽑을 때, 두 수의 곱이 짝수일 확률은?

①) ① $\frac{5}{9}$
②) ② $\frac{2}{3}$
③) ③ $\frac{7}{9}$
④) ④ $\frac{4}{5}$

🎯 **정답:** ③ $\frac{7}{9}$

📖 1단계: 전체 경우의 수는 10개 중 서로 다른 2개를 고르는 조합 $\binom{10}{2} = 45$.
2단계: '곱이 짝수'의 여사건은 '곱이 홀수'이고, 두 수의 곱이 홀수가 되려면 두 수 모두 홀수여야 한다.
3단계: 1~10 중 홀수는 {1, 3, 5, 7, 9}로 5개. 여기서 2개를 뽑는 경우의 수는 $\binom{5}{2} = 10$.
4단계: 여사건 확률 $\frac{10}{45} = \frac{2}{9}$, 따라서 구하는 확률은 $1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$.

🧠 풀이 전략: '짝수 포함' 조건은 포함-배제나 직접 헤아림 대신 여사건('둘 다 홀수')으로 뒤집는 것이 간결하다. 조합 선택 모형으로 분모를 맞추고, 홀수 집합 안에서의 조합으로 분자를 구한다.

💡 이 문제의 일반화: 1~2n 중 두 수를 뽑을 때 곱이 짝수일 확률은 $\frac{3(n-1)}{2(2n-1)} + \frac{n}{2n-1}$ 꼴로 단정식화된다.

Q90 경시 확률·퍼즐

네 명의 학생 A, B, C, D 중 정확히 한 명만이 시험에서 만점을 받았다. 네 학생은 다음과 같이 주장했다.
A: "만점자는 C이다."
B: "나는 만점을 받지 않았다."
C: "A는 거짓말을 하고 있다."
D: "B가 한 말은 진실이다."
네 명 중 정확히 한 명만이 참을 말했다고 할 때, 만점을 받은 사람은 누구인가?

①) ① A
②) ② B
③) ③ C
④) ④ D

🎯 **정답: ② B**
📖 1단계: 진술 간 구조 파악. D는 'B가 참'이라 했으므로 B와 D는 항상 같은 진리값을 가진다(둘 다 참 또는 둘 다 거짓). C는 'A는 거짓'이라 했으므로 A와 C는 항상 반대 진리값(정확히 한쪽만 참).
2단계: 참이 정확히 1명이려면 (A, C) 조에서 1명 참 + (B, D) 조에서 0명 참 이어야 한다(다른 배분은 총 개수가 2 이상). 즉 B와 D는 모두 거짓.
3단계: B가 거짓 $\Longleftrightarrow$ 'B는 만점을 받지 않았다'가 거짓 $\Longleftrightarrow$ B가 만점.
4단계: B가 만점인지 확인. A('만점자는 C')는 거짓 ✓. C('A는 거짓')는 참 ✓. D('B는 참')은 거짓 ✓. 참은 C 한 명뿐이므로 조건 만족. 답은 B.
🧠 풀이 전략: 진술을 개별적으로 참/거짓 조합을 모두 시도하기 전에, 진술들 사이의 '논리적 연쇄'(D는 B의 거울, C는 A의 반대)를 먼저 발견한다. 그러면 '참 1명' 제약이 각 조 내 참의 개수 분배로 바로 환원되어 경우의 수가 급격히 줄어든다.
💡 이렇게 '진술이 다른 진술의 진리값을 언급'하는 퍼즐은 스머라리언(Raymond Smullyan)의 기사/악당 퍼즐의 기본 구조이다.

Q91 지수·식 계산 심화

$\dfrac{5^{10} \cdot 2^7}{10^7 \cdot 5^3}$의 값은?

①) ① 1
②) ② 5
③) ③ 10
④) ④ 25

🎯 **정답: ① 1**
📖 1단계: $10^7 = (2 \cdot 5)^7 = 2^7 \cdot 5^7$ 로 소인수 분해.
2단계: 식에 대입하면 $\dfrac{5^{10} \cdot 2^7}{2^7 \cdot 5^7 \cdot 5^3} = \dfrac{5^{10} \cdot 2^7}{2^7 \cdot 5^{10}}$.
3단계: 같은 밑수끼리 약분하면 2^7과 5^{10}이 모두 완전히 소거되어 값은 1.
🧠 풀이 전략: 10^n은 항상 $2^n \cdot 5^n$으로 풀 수 있다. 이렇게 풀어서 밑수를 통일하면 분자·분모의 지수 비교가 명확해져 약분이 바로 보인다.
💡 10^n을 $2^n \cdot 5^n$으로 분리하는 아이디어는 '10진수 표현에서 맨 뒤 0의 개수 구하기'(예: n! 의 끝 0 개수 계산)에도 똑같이 쓰인다.

Q92 유리수·순환소수 추론

순환소수의 합 $0.\dot{4} + 0.\dot{1}\dot{2}$를 기약분수 a/b (a, b는 서로소인 양의 정수)로 나타낼 때, a+b의 값은?

①) ① 145

②) ② 150

③) ③ 155

④) ④ 160

🎯 **정답: ③ 155**

📖 1단계: $0.\dot{4}$ = 4/9로 나타낸다. (순환마디 1자리이므로 분모는 9)

2단계: $0.\dot{1}\dot{2}$ = 12/99로 나타낸 후 약분하면 4/33. (순환마디 2자리이므로 분모는 99)

3단계: 4/9와 4/33을 통분한다. $9=3^2$, 33=3·11이므로 최소공배수는 99. 4/9 = 44/99, 4/33 = 12/99.

4단계: 합은 44/99 + 12/99 = 56/99.

5단계: $56=2^3\cdot 7$, $99=3^2\cdot 11$이므로 공통 소인수가 없어 기약분수이다. 따라서 a=56, b=99이고 a+b = 155.

🧠 풀이 전략: 순환소수를 분수로 바꿀 때 순환마디의 자릿수가 분모를 이루는 9의 개수를 결정한다. 합을 구한 뒤 분자와 분모의 소인수분해로 '기약' 조건을 반드시 확인해야 정답을 놓치지 않는다.

💡 분수의 기약형에서 분모가 2와 5 이외의 소인수를 가지면 반드시 순환소수가 된다. 56/99의 분모 $99=3^2\cdot 11$에는 3과 11이 있어 필연적으로 순환한다.

Q93 지수·식 계산 심화

양수 x가 $x - \frac{1}{x} = \sqrt{5}$ 를 만족할 때, $x^2 + \frac{1}{x^2}$의 값은?

①) ① 5

②) ② 6

③) ③ 7

④) ④ 9

🎯 **정답: ③ 7**

📖 1단계: 주어진 식의 양변을 제곱한다. $(x - \frac{1}{x})^2 = (\sqrt{5}\,)^2 = 5.$

2단계: 좌변을 전개하면 $x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}.$

3단계: 따라서 $x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 = 5.$

4단계: 양변에 2를 더하면 $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7.$

5단계: 함정: 묻는 식은 $x^2 + \frac{1}{x^2}$이지 $x + \frac{1}{x}$가 아님에 주의. 부호가 달라도 제곱이 같아 결과가 같은 구조이다.

🧠 풀이 전략: 역수를 포함한 식의 값은 '제곱전개 시 중간항 $2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} = 2$가 상수로 떨어진다'는 구조를 이용한다. 구하려는 식의 형태를 보고 주어진 식을 몇 제곱해야 할지 먼저 판단한다.

💡 $x + \frac{1}{x} = a$이면 $x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 - 2$, $x - \frac{1}{x} = b$이면 $x^2 + \frac{1}{x^2} = b^2 + 2$. 부호 하나 차이로 결과가 4만큼 달라진다.

Q94 부등식 활용 심화

부등식 |2x - 1| < 7을 만족하는 모든 정수 x의 합은?

①) ① 0

②) ② 3

③) ③ 6

④) ④ 9

🎯 **정답: ② 3**

📖 1단계: 절댓값 부등식 |A| < k (k>0)는 -k < A < k와 동치이다. 따라서 -7 < 2x - 1 < 7.

2단계: 세 변에 1을 더하면 -6 < 2x < 8.

3단계: 세 변을 2로 나누면 -3 < x < 4.

4단계: 부등호가 모두 <(등호 없음)이므로 -3과 4는 포함하지 않는다. 범위를 만족하는 정수는 -2, -1, 0, 1, 2, 3 (총 6개).

5단계: 합은 (-2)+(-1)+0+1+2+3 = 3.

🧠 풀이 전략: 절댓값 부등식은 '수직선 위의 거리' 개념으로 이해하면 명확하다. 등호의 유무(<, ≤)에 따라 끝값 포함 여부가 달라져 정수해의 개수가 바뀌므로 항상 확인해야 한다.

💡 |2x-1| < 7은 '점 $x = \frac{1}{2}$로부터 거리가 $\frac{7}{2}$ 미만인 x'를 뜻한다. 중심과 반지름의 관점으로 보면 절댓값 부등식은 구간의 언어이다.

Q95 연립방정식 심화 활용

두 자리 자연수가 있다. 각 자리 숫자의 합은 11이고, 십의 자리 숫자와 일의 자리 숫자를 서로 바꾼 수는 원래 수보다 27만큼 크다. 원래의 두 자리 수는?

①) ① 38

②) ② 47

③) ③ 56

④) ④ 65

🎯 **정답: ② 47**

📖 1단계: 원래 수의 십의 자리 숫자를 a, 일의 자리 숫자를 b라 하면 원래 수 = 10a+b, 자리를 바꾼 수 = 10b+a.

2단계: 조건 '자릿수 합이 11'에서 a+b = 11 ... (식1).

3단계: 조건 '바꾼 수가 27 큼'에서 (10b+a) - (10a+b) = 27, 정리하면 9b - 9a = 27, 즉 b - a = 3 ... (식2).

4단계: (식1)과 (식2)를 더하면 2b = 14, b = 7. (식1)에서 a = 4.

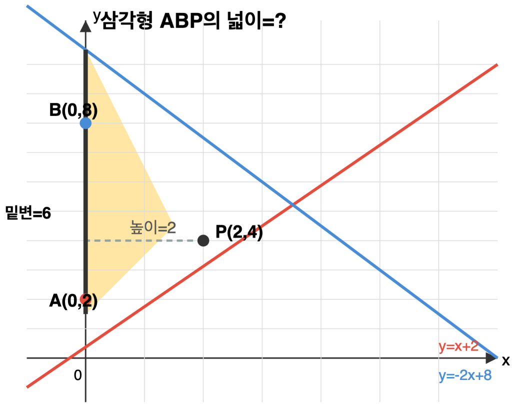
5단계: 원래 수 = 10×4 + 7 = 47. 검산: 4+7=11 (O), 74-47=27 (O).

🧠 풀이 전략: 두 자리 수 문제는 반드시 '10×(십의 자리)+(일의 자리)' 표현으로 시작한다. 자리를 바꾼 수와 원래 수의 차는 언제나 9의 배수가 되는 구조가 나타나므로 이 사실을 알고 있으면 풀이 속도가 빨라진다.

💡 두 자리 수에서 자리를 바꾼 수와 원래 수의 차는 항상 9×(두 숫자의 차)이다. 세 자리 수에서 맨 앞과 맨 끝을 바꾸면 99의 배수 차이가 생긴다.

Q96 일차함수 응용

좌표평면 위의 두 직선 $y = x + 2$와 $y = -2x + 8$이 각각 y축과 만나는 점을 A, B라 하고, 두 직선이 서로 만나는 교점을 P라 한다. 삼각형 ABP의 넓이는?



①) ① 4

②) ② 6

③) ③ 8

④) ④ 10

🎯 **정답: ② 6**

📖 1단계: 각 직선의 y축과의 교점을 구한다. y=x+2에 x=0 대입: y=2, A(0, 2). y=-2x+8에 x=0 대입: y=8, B(0, 8).

2단계: 두 직선의 교점 P를 구한다. $x + 2 = -2x + 8$, $3x = 6$, $x = 2$. $y = 2+2 = 4$. 따라서 P(2, 4).

3단계: 밑변 AB는 y축 위의 선분이므로 그 길이는 $|8 - 2| = 6$.

4단계: 밑변이 y축 위에 있을 때 높이는 남은 꼭짓점의 x좌표의 절댓값이다. 점 P의 x좌표가 2이므로 높이 = 2.

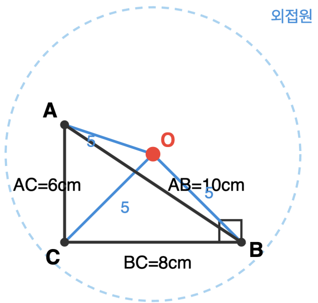
5단계: 삼각형의 넓이 $= \frac{1}{2} \times$ 밑변 $\times$ 높이 $= \frac{1}{2} \times 6 \times 2 = 6$.

🧠 풀이 전략: 좌표평면 위의 삼각형 넓이는 '밑변을 좌표축 위에 두는 전략'을 쓰면 쉽다. y축을 밑변으로 택하면 나머지 점의 x좌표가 즉시 높이가 되어 계산이 간결해진다.

💡 두 직선의 y절편 차이와 교점의 x좌표만 알면 삼각형의 넓이를 바로 쓸 수 있다. 넓이 = (y절편 차)×(교점 x좌표)÷2.

Q97 도형 성질 증명

직각삼각형 ABC에서 ∠C = 90°, AC = 6cm, BC = 8cm이다. 이 삼각형의 외심을 O라 할 때, 선분 AO의 길이는 몇 cm인가? (힌트: 직각삼각형의 외심은 어디에 있는가?)



①) ① 3cm

②) ② 4cm

③) ③ 5cm

④) ④ 6cm

🎯 **정답: ③ 5cm**

📖 1단계: 원주각 정리에 따르면 '반원에 대한 원주각은 90°'이다. 그 역도 성립하므로 한 각이 90°인 삼각형의 그 각에 대한 대변(빗변)은 외접원의 지름이 된다.

2단계: 따라서 직각삼각형 ABC에서 빗변 AB는 외접원의 지름이며, 그 중점이 외심 O이다.

3단계: 피타고라스 정리로 빗변 AB의 길이를 구한다. $AB^2 = AC^2 + BC^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$, 따라서 AB = 10cm.

4단계: O는 AB의 중점이므로 AO = AB ÷ 2 = 10 ÷ 2 = 5cm.

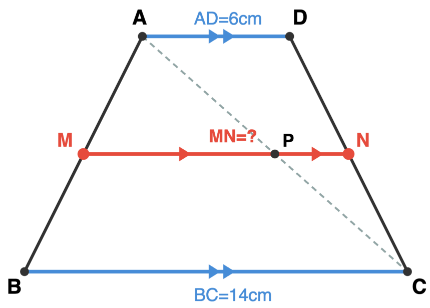
5단계: 확인: OA = OB = OC = 5cm (외심은 세 꼭짓점에서 거리가 같으므로 이것이 외심의 정의와 일치).

🧠 풀이 전략: 직각삼각형에서 외심의 위치는 '빗변의 중점'이라는 것을 기억하면 거의 즉시 풀린다. 이 사실은 '반원의 원주각=90°'의 역으로부터 나오므로, 증명 문제에서도 자주 쓰인다.

💡 직각삼각형의 외접원 반지름은 빗변의 절반과 같다. 이 때문에 '세 변이 3, 4, 5인 삼각형은 외접원 반지름이 2.5'라는 사실만 보고도 직각삼각형임을 판별할 수 있다.

Q98 닮음 심화

사다리꼴 ABCD에서 AD ∥ BC이고 AD = 6cm, BC = 14cm이다. 변 AB의 중점을 M, 변 CD의 중점을 N이라 할 때, 선분 MN의 길이는 몇 cm인가?



①) ① 8cm

②) ② 10cm

③) ③ 11cm

④) ④ 12cm

🎯 **정답: ② 10cm**

📖 1단계: 대각선 AC를 긋고 그 중점을 P라 하자.

2단계: 삼각형 ABC에서 M은 AB의 중점, P는 AC의 중점이다. 중점연결정리에 의해 $MP \parallel BC$이고 $MP = \frac{1}{2}BC = \frac{14}{2}$ = 7cm.

3단계: 삼각형 ACD에서 P는 AC의 중점, N은 CD의 중점이다. 중점연결정리에 의해 $PN \parallel AD$이고 $PN = \frac{1}{2}AD = \frac{6}{2}$ = 3cm.

4단계: $AD \parallel BC$이므로 MP와 PN은 모두 같은 방향의 평행선이다. 따라서 세 점 M, P, N은 같은 직선 위에 있다.

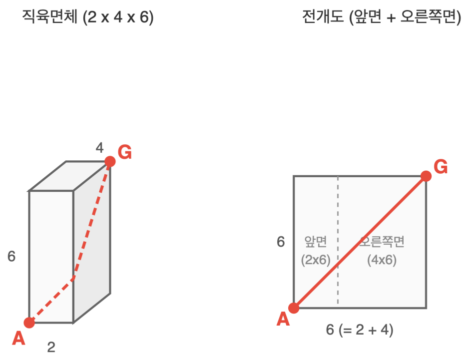
5단계: MN = MP + PN = 7 + 3 = 10cm. 일반화: 사다리꼴 중점선 공식 $MN = \frac{AD + BC}{2} = \frac{6 + 14}{2} = 10.$

🧠 풀이 전략: 사다리꼴의 중점선 공식을 단순 암기하지 말고 대각선으로 두 삼각형으로 쪼개어 각각에 중점연결정리를 적용하는 과정을 이해해야 한다. 두 평행변의 '산술평균'이 나오는 구조가 선명해진다.

💡 사다리꼴 중점선 길이는 두 평행변의 평균이다. 이것은 사다리꼴의 넓이 공식 $\frac{(\text{윗변} + \text{아랫변})}{2} \times$ 높이에서 '중점선×높이'로 바꿔 쓸 수 있음을 뜻한다.

Q99 피타고라스 활용

가로 2cm, 세로 4cm, 높이 6cm인 직육면체가 있다. 꼭짓점 A에서 출발하여 대각선 방향으로 마주보는 꼭짓점 G까지 직육면체의 겉면(표면)을 따라 실을 팽팽히 감을 때, 실의 최소 길이는?



대각선 = √(6² + 6²) = 6√2

①) ① 8cm

②) ② $6\sqrt{2}$ cm

③) ③ $\sqrt{104}$ cm

④) ④ 10cm

🎯 **정답: ② $6\sqrt{2}$ cm**

📖 1단계: 직육면체 표면 위의 최단경로는 입체를 두 면으로 펼친 전개도 위의 '직선 거리'와 같다.

2단계: A와 G를 잇는 경로는 서로 다른 세 쌍의 면 조합으로 펼칠 수 있다.

경우(가) 앞면(2×6)+오른쪽면(4×6)을 펼침: 전체 가로 2+4=6, 세로 6. 대각선 = $\sqrt{6^2+6^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$.

경우(나) 앞면(2×6)+윗면(2×4)을 펼침: 가로 2, 세로 6+4=10. 대각선 = $\sqrt{2^2+10^2} = \sqrt{104}$.

경우(다) 바닥면(2×4)+오른쪽면(4×6)을 펼침: 가로 2+6=8, 세로 4. 대각선 = $\sqrt{8^2+4^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$.

3단계: 세 값의 대소를 비교한다. $6\sqrt{2} = \sqrt{72}$, $4\sqrt{5} = \sqrt{80}$, $\sqrt{104}$. 72 < 80 < 104이므로 가장 짧은 것은 $\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$.

4단계: 따라서 실의 최소 길이는 $6\sqrt{2}$ cm (≈ 8.49cm).

🧠 풀이 전략: 입체 표면의 최단경로 문제는 반드시 '펼친 평면 위의 직선'으로 환원해야 한다. 펼침 방향이 여러 가지이므로 모든 경우를 계산해 비교해야 함정을 피할 수 있다.

💡 직육면체 표면 최단경로 문제는 '개미가 설탕에 가는 길' 문제로도 유명하다. 입체 내부의 공간 대각선($\sqrt{2^2+4^2+6^2} = \sqrt{56}$)보다 항상 더 길다(개미는 뚫고 갈 수 없으므로).

Q100 경시 확률·퍼즐

서랍 안에 빨간색 양말 5짝, 파란색 양말 5짝, 노란색 양말 5짝이 마구 섞여 있다. 어두운 방에서 눈을 감고 양말을 꺼낼 때, 같은 색 양말 2짝(한 켤레)을 반드시 얻기 위해 최소 몇 짝을 꺼내야 하는가?

①) ① 3짝
②) ② 4짝
③) ③ 5짝
④) ④ 6짝

🎯 **정답: ② 4짝**

📖 1단계: '반드시'라는 조건은 가장 운이 나쁜(최악의) 경우에도 성립해야 한다는 뜻이다.
2단계: 최악의 경우는 꺼낸 양말들이 되도록 서로 다른 색이 되는 경우이다. 색이 3가지(빨, 파, 노)이므로 3짝까지는 모두 다른 색일 수 있다(예: 빨 1, 파 1, 노 1).
3단계: 이때는 어느 색도 2짝이 아니므로 같은 색 한 켤레가 없다.
4단계: 그러나 4번째 양말을 꺼내는 순간, 색이 3가지뿐이므로 그 양말의 색은 반드시 이미 꺼낸 3가지 색 중 하나와 같다(비둘기집 원리).
5단계: 그 순간 같은 색이 2짝이 되어 한 켤레가 완성된다. 따라서 최소 4짝을 꺼내야 한다.

🧠 풀이 전략: '반드시'라는 단어가 나오면 바로 '최악의 경우 시나리오'를 설계해야 한다. 비둘기집 원리 'n+1개 물건을 n개 상자에 넣으면 어떤 상자에는 반드시 2개 이상'이 핵심 도구다.

💡 비둘기집 원리는 1834년 수학자 디리클레가 정리로 공식화했다. 단순해 보이지만 수론, 조합론, 그래프 이론에서 놀라울 정도로 강력한 증명 도구로 활용된다.

Q101 유리수·순환소수 추론

분수 $\frac{7}{2^a \times 5^b \times 3}$ 이 유한소수가 되도록 하는 자연수 a, b의 값에 관계없이 항상 성립하는 조건을 고르시오. (단, 7과 분모는 서로소가 아닐 수도 있다는 가정 없이, 분자 7은 분모와 약분되지 않는다.)

①) ① 분자 7이 3의 배수이면 유한소수가 된다
②) ② 어떤 자연수 a, b를 택해도 항상 유한소수가 된다
③) ③ 분모에 3이 있으므로 a, b 값에 관계없이 유한소수가 될 수 없다
④) ④ a=b일 때만 유한소수가 된다

🎯 **정답: ③**

📖 1단계: 유한소수가 되려면 기약분수의 분모가 2와 5만의 곱으로 표현되어야 한다.
2단계: 분자 7은 3의 배수가 아니고, 7과 3은 서로소이므로 분모의 3과 약분되지 않는다.
3단계: 따라서 기약분수로 만들어도 분모에 3이 남아있으므로, a, b 값에 관계없이 유한소수가 될 수 없다. 정답은 ③.

🧠 풀이 전략: 유한소수의 핵심은 '기약분수의 분모'가 2와 5로만 이루어져야 한다는 것. 분자가 분모의 3과 약분 가능한지 먼저 확인.

💡 3, 7, 11, 13처럼 2와 5가 아닌 소수가 분모에 남으면 무한히 순환하는 소수가 된다.

Q102 유리수·순환소수 추론

$\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$ 이다. 이 순환마디 '142857'을 한 자리씩 왼쪽으로 회전(cyclic shift)시킨 수들 142857, 428571, 285714, 857142, 571428, 714285는 모두 142857의 정수배(1배~6배)와 일치한다. 그렇다면 $\frac{4}{7}$ 의 순환마디 첫 자리는 무엇인가?

①) ① 1

②) ② 4

③) ③ 5

④) ④ 8

🎯 **정답: ③**

📖 1단계: $\frac{1}{7}$의 순환마디가 142857이고, $\frac{k}{7}$ $(k = 1 \sim 6)$의 순환마디는 142857의 회전된 형태다.
2단계: $\frac{4}{7}$ = 4 × $\frac{1}{7}$ = 0.571428571428... 을 직접 계산하면 4 ÷ 7 = 0.571428...
3단계: 또는 142857 × 4 = 571428 이므로 $\frac{4}{7}$의 순환마디는 571428이고 첫 자리는 5. 정답은 ③.

🧠 풀이 전략: 순환소수 142857은 'cyclic number'로 유명. k/7은 142857을 적절히 회전시킨 값. 142857×4를 계산하거나 4÷7을 직접 나누어 첫 자리를 확인.

💡 142857은 '순환수(cyclic number)'로, 1~6과 곱하면 모두 같은 숫자들의 순열이 나오는 신비한 수다.

Q103 지수·식 계산 심화

실수 x가 $x + \frac{1}{x} = 4$ 를 만족할 때, $x^3 + \frac{1}{x^3}$ 의 값을 구하시오.

①) ① 48

②) ② 52

③) ③ 56

④) ④ 64

🎯 **정답: ②**

📖 1단계: $(x + \frac{1}{x})^3 = x^3 + 3x \cdot \frac{1}{x}(x + \frac{1}{x}) + \frac{1}{x^3} = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3(x + \frac{1}{x})$.
2단계: 따라서 $x^3 + \frac{1}{x^3} = (x + \frac{1}{x})^3 - 3(x + \frac{1}{x})$.
3단계: 값을 대입하면 $4^3 - 3 \times 4 = 64 - 12 = 52$. 정답은 ②.

🧠 풀이 전략: x를 직접 구하지 않고 곱셈공식 $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$를 활용. $x \cdot \frac{1}{x} = 1$이라는 점이 핵심.

💡 이런 대칭식은 모든 차수에서 점화식 $S_{n+1} = 4S_n - S_{n-1}$ 형태로 계산할 수 있다.

Q104 부등식 활용 심화

한 학급 학생들에게 사탕을 나누어주는데, 한 명에게 5개씩 주면 8개가 남고, 한 명에게 6개씩 주면 마지막 한 명은 사탕을 하나도 받지 못하거나 1개 이상 5개 이하만 받게 된다. 이 학급의 학생 수로 가능한 값을 모두 합하면?

①) ① 40
②) ② 50
③) ③ 69
④) ④ 81

🎯 **정답: ③ 69**

📖 1단계: 학생 수를 n이라 하면 사탕은 5개씩 주고 8개가 남으므로 모두 $5n + 8$개이다.
2단계: 6개씩 주면 앞의 $n - 1$명이 6개씩 받고 마지막 한 명이 나머지 r개를 받는다. $5n + 8 = 6(n - 1) + r$에서 $r = 14 - n$이다.
3단계: 마지막 한 명이 하나도 받지 못하거나($r = 0$) 1개 이상 5개 이하를 받으므로 $0 \le r \le 5$, 즉 $0 \le 14 - n \le 5$이다. 이를 풀면 $9 \le n \le 14$.
4단계: 가능한 학생 수는 $n = 9, 10, 11, 12, 13, 14$이고 그 합은 $9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 = 69$이다. (검산: 각 경우 마지막 학생이 $5, 4, 3, 2, 1, 0$개를 받는다.) 정답 ③.

🧠 풀이 전략: '마지막 한 명이 1~5개 받는다'는 조건을 부등식으로: $6(n - 1) < 5n + 8 < 6n$. 양쪽 부등식을 풀어 정수 n 범위 결정 후 합산.

💡 이런 문제를 '나머지 부등식 활용'이라 하며, 합동식과 부등식이 만나는 영역이다.

Q105 부등식 활용 심화

어느 공장에서 제품 A는 1개당 이익 3만원, 제품 B는 1개당 이익 5만원이다. 제품 A 한 개를 만드는 데 재료 2kg과 시간 1시간이 들고, 제품 B 한 개에는 재료 3kg과 시간 4시간이 든다. 하루 사용 가능한 재료는 18kg, 시간은 16시간이다. 두 제품 모두 0개 이상의 정수만 만들 때, 하루 최대 이익은?

①) ① 26만원
②) ② 28만원
③) ③ 30만원
④) ④ 32만원

🎯 **정답: ②**

📖 1단계: A를 x개, B를 y개라 하면 $2x + 3y \le 18$, $x + 4y \le 16$, $x, y \ge 0$ 정수. 이익 $P = 3x + 5y$ 최대.
2단계: 경계값 후보: 두 직선 교점 풀이. $2x + 3y = 18$, $x + 4y = 16$ 연립 $\to$ $x = 16 - 4y$ 대입 $\to$
$2(16 - 4y) + 3y = 18 \Rightarrow 32 - 8y + 3y = 18 \Rightarrow 5y = 14 \Rightarrow y = 2.8$. 정수가 아니므로 근방 정수해 검사.
3단계: $(x, y) = (6, 2)$: 재료 18, 시간 14 ○, P=28. $(x, y) = (4, 3)$: 재료 17, 시간 16 ○, P=27. $(x, y) = (8, 0)$: P=24. $(x, y) = (0, 4)$: P=20. $(x, y) = (7, 1)$: 재료 17, 시간 11, P=26. 최대는 (6,2)일 때 28만원. 정답은 ②.

🧠 풀이 전략: 선형계획법(LP) 기초. 제약식 두 개의 교점을 구한 후, 정수해는 근처 격자점을 모두 검사해야 한다 (LP 해는 보통 꼭짓점이지만 정수계획에서는 근방 검사 필수).

💡 실제 산업에서 자원 배분 최적화에 사용되는 '선형계획법(Linear Programming)'의 정수 변형이다.

Q106 연립방정식 심화 활용

강을 거슬러 올라갈 때 시속 6km, 강을 따라 내려올 때 시속 14km로 운항하는 배가 있다. 이 배가 정지된 호수에서의 속력과 강물의 속력을 각각 v_b, v_w라 할 때, $v_b - v_w$ 의 값은? (단, 강 위에서는 배의 호수 속력에 강물 속력이 더해지거나 빼진다.)

①) ① 4km/h

②) ② 6km/h

③) ③ 8km/h

④) ④ 10km/h

🎯 **정답: ②**

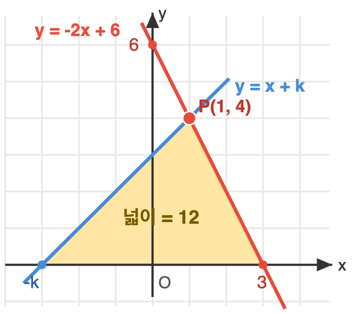
📖 1단계: 강을 거슬러 올라갈 때(상류) 속력은 $v_b - v_w = 6$, 따라 내려올 때(하류) 속력은 $v_b + v_w = 14$.
2단계: 두 식을 더하면 $2v_b = 20 \Rightarrow v_b = 10$. 빼면 $2v_w = 8 \Rightarrow v_w = 4$.
3단계: 따라서 $v_b - v_w = 10 - 4 = 6$. 정답은 ②. (또한 거슬러 올라갈 때의 속력 자체가 $v_b - v_w$ 이므로 6km/h.)

🧠 풀이 전략: 상대 속도 개념. 강물 방향과 배의 진행 방향이 같으면 더해지고, 반대면 빼진다. 두 식의 합과 차로 미지수 두 개를 분리.

💡 이를 '갈릴레오의 상대성 원리'라 한다. 같은 원리가 비행기와 바람의 관계에도 적용된다.

Q107 일차함수 응용

좌표평면 위에 직선 $y = -2x + 6$ 과 직선 $y = x + k$ 가 제1사분면에서 만나고, 두 직선과 x축이 만들어내는 삼각형의 넓이가 12가 되도록 하는 k의 값은? (단, $k > 0$)



①) ① 1

②) ② 2

③) ③ 3

④) ④ 4

🎯 **정답: ③ 3**

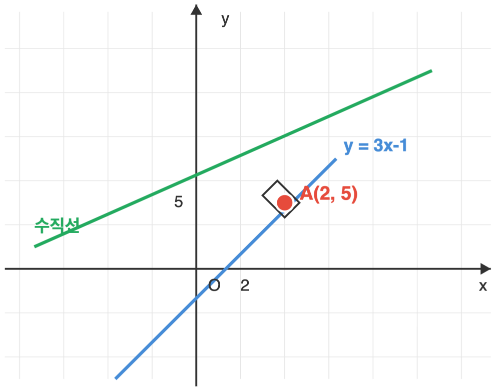
📖 1단계: 직선 $y = -2x + 6$의 x절편은 $(3, 0)$, 직선 $y = x + k$의 x절편은 $(-k, 0)$이다. 두 x절편 사이의 거리가 삼각형의 밑변이므로 밑변 $= 3 - (-k) = 3 + k$.
2단계: 두 직선의 교점은 $-2x + 6 = x + k$에서 $x = \frac{6-k}{3}$, $y = \frac{6+2k}{3}$. 교점이 제1사분면에 있으려면 $0 < k < 6$. 삼각형의 높이는 교점의 y좌표 $\frac{6+2k}{3}$이다.
3단계: 넓이 $= \frac{1}{2}(3+k) \cdot \frac{6+2k}{3} = \frac{(3+k)\cdot 2(3+k)}{6} = \frac{(3+k)^2}{3}$.
4단계: $\frac{(3+k)^2}{3} = 12$에서 $(3+k)^2 = 36$, $3 + k = 6$ $(k > 0)$, 따라서 $k = 3$.
검산: $k = 3$이면 교점 $(1, 4)$, 밑변 6, 높이 4, 넓이 $\frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12$. ✓

🧠 풀이 전략: 두 직선과 x축이 만든 삼각형의 꼭짓점은 두 x절편과 교점. 밑변(x절편 차이)과 높이(교점의 y좌표)를 각각 k에 관한 식으로 두고 넓이 공식 적용.

💡 두 직선과 한 축이 만드는 삼각형 넓이 문제는 '좌표기하 최적화'의 입문 문제로, 수능 빈출 유형이다.

Q108 일차함수 응용

좌표평면에서 점 A(2, 5)를 지나고 직선 $y = 3x - 1$ 에 수직인 직선의 방정식을 구하시오.



①) ① $y = -3x + 11$
②) ② $y = -\frac{1}{3}x + \frac{17}{3}$
③) ③ $y = \frac{1}{3}x + \frac{13}{3}$
④) ④ $y = 3x - 1$

🎯 **정답: ②**

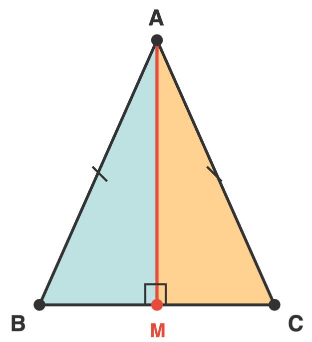
📖 1단계: 두 직선이 수직이려면 기울기의 곱이 -1. $y = 3x - 1$의 기울기는 3이므로 수직 직선의 기울기는 $-\frac{1}{3}$.
2단계: 점 A(2, 5)를 지나므로 $y - 5 = -\frac{1}{3}(x - 2)$.
3단계: 정리하면 $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3} + 5 = -\frac{1}{3}x + \frac{17}{3}$. 정답은 ②.

🧠 풀이 전략: 수직 조건 '기울기 곱 = -1'을 적용해 새 기울기 결정 후, 점 한 개와 기울기로 직선의 방정식 (점-기울기 형태) 작성.

💡 두 직선이 수직일 때 기울기의 곱이 -1인 이유는 $\tan\theta \cdot \tan(90° - \theta) = -1$이기 때문이다.

Q109 도형 성질 증명

이등변삼각형 ABC ($\overline{AB} = \overline{AC}$)에서 변 BC의 중점을 M이라 하자. AM이 BC와 수직임을 증명하는 데 가장 적합한 합동 조건은?



①) ① SAS (두 변과 그 사이 끼인각)

②) ② SSS (세 변)

③) ③ ASA (두 각과 끼인변)

④) ④ AA (두 각)

🎯 **정답: ②**

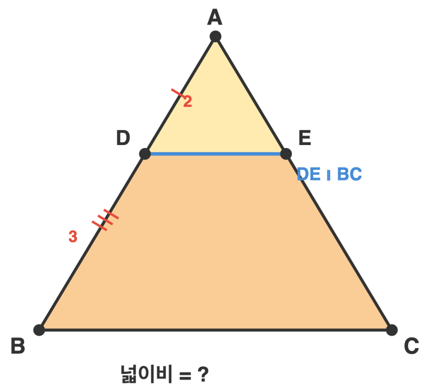
📖 1단계: 두 삼각형 ABM과 ACM에서 AB = AC (이등변삼각형 조건), BM = CM (M이 BC의 중점), AM = AM (공통변).
2단계: 따라서 세 변의 길이가 모두 같으므로 SSS 합동.
3단계: △ABM ≡ △ACM이므로 ∠AMB = ∠AMC. 두 각의 합이 180°(평각)이므로 각각 90°. 따라서 AM ⊥ BC. 정답은 ②.

🧠 풀이 전략: 세 쌍의 변(AB=AC, BM=CM, AM 공통)이 명백히 같으므로 SSS가 가장 자연스러움. SAS도 가능하지만 두 변 사이의 끼인각이 같다는 보장이 직접 없으므로 SSS가 제일 직접적.

💡 이등변삼각형의 '꼭지각 이등분선 = 밑변 수직이등분선 = 밑변 중선'이 모두 일치하는 것이 SSS로 증명된다.

Q110 닮음 심화

삼각형 ABC에서 점 D는 변 AB 위에, 점 E는 변 AC 위에 있고 DE ∥ BC 이다. AD : DB = 2 : 3 일 때, 삼각형 ADE의 넓이와 사다리꼴 DBCE의 넓이의 비는?



①) ① 4 : 21

②) ② 4 : 25

③) ③ 2 : 5

④) ④ 4 : 9

🎯 **정답: ①**

📖 1단계: DE ∥ BC이고 AD:AB = 2:5이므로 △ADE ∽ △ABC (AA 닮음), 닮음비 = 2:5.

2단계: 닮음비가 2:5이면 넓이비는 $2^2 : 5^2 = 4 : 25$. 즉 △ABC의 넓이를 25라 하면 △ADE의 넓이는 4.

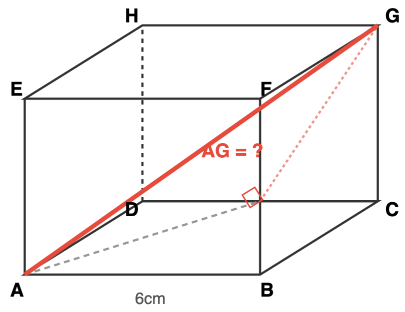
3단계: 사다리꼴 DBCE의 넓이 = △ABC의 넓이 - △ADE의 넓이 = 25 - 4 = 21. 따라서 △ADE : 사다리꼴 DBCE = 4 : 21. 정답은 ①.

🧠 풀이 전략: 평행선 → 닮음 → 닮음비. 함정: AD:DB=2:3을 그대로 닮음비로 쓰면 안 되고, AD:AB=2:5로 바꿔야 함. 넓이비는 닮음비의 제곱.

💡 넓이비가 닮음비의 제곱인 이유는 길이가 k배 되면 면적은 k×k=k²배가 되기 때문이다.

Q111 피타고라스 활용

한 변의 길이가 6cm인 정육면체의 한 꼭짓점 A에서 마주 보는 꼭짓점 G까지의 공간 대각선의 길이를 구하시오.



①) ① $6\sqrt{2}$ cm
②) ② $6\sqrt{3}$ cm
③) ③ $9\sqrt{2}$ cm
④) ④ 12 cm

🎯 **정답: ②**

📖 1단계: 정육면체 한 변이 6cm. 밑면 정사각형 ABCD의 대각선 AC = $\sqrt{6^2+6^2} = 6\sqrt{2}$ cm (피타고라스).
2단계: 공간대각선 AG는 직각삼각형 ACG (C에서 직각, AC와 CG 수직)에서, CG = 6cm (높이).
3단계: $AG = \sqrt{AC^2 + CG^2} = \sqrt{(6\sqrt{2})^2 + 6^2} = \sqrt{72+36} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$ cm. 정답은 ②.

🧠 풀이 전략: 공간 대각선은 피타고라스 정리를 두 번 적용. 1) 밑면 대각선 → 2) 그 대각선과 높이로 만든 직각삼각형의 빗변. 일반 공식: 한 변 a인 정육면체 공간대각선 = $a\sqrt{3}$.

💡 한 변 a인 정육면체의 면대각선은 $a\sqrt{2}$, 공간대각선은 $a\sqrt{3}$. $1, \sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ 의 아름다운 관계.

Q112 경시 확률·퍼즐

5명의 학생 A, B, C, D, E가 일렬로 줄을 서는데, A는 반드시 B보다 앞에 서고, C는 반드시 D보다 앞에 서야 한다. 가능한 줄 서는 방법의 수는?

①) ① 24
②) ② 30
③) ③ 60
④) ④ 120

🎯 **정답: ②**

📖 1단계: 5명을 자유롭게 줄 세우는 방법은 5! = 120가지.
2단계: A와 B의 순서는 (A 앞 / B 앞) 두 가지가 정확히 절반씩이므로, 'A가 B보다 앞에' 조건을 만족하는 비율은 1/2. 마찬가지로 C, D 조건도 1/2.
3단계: 두 조건은 서로 독립이므로 (서로 다른 인물 쌍), 가능한 방법 수 = $120 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 30$. 정답은 ②.

🧠 풀이 전략: 순서 조건이 있을 때 '조건을 만족하는 비율'을 곱하는 기법. A,B 두 사람 사이의 순서는 정확히 절반의 경우만 조건을 만족하므로 1/2 곱셈.

💡 이런 기법을 '대칭성 활용'이라 하며, n명 중 특정 k명이 정해진 순서대로 등장하는 경우의 수는 항상 $n!/k!$ 이다.

Q113 유리수·순환소수 추론

분수 $\frac{n}{420}$이 유한소수로 나타내어지도록 하는 자연수 n 중에서 두 자리 자연수의 개수를 구하시오. (단, $\frac{n}{420}$은 기약분수가 아니어도 된다.)

①) ① 4개

②) ② 9개

③) ③ 12개

④) ④ 15개

🎯 **정답: ① 4개**

📖 1단계: $420 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7$이다. 유한소수가 되려면 약분한 기약분수의 분모가 2와 5만으로 이루어져야 하므로, 분모의 인수 3과 7이 모두 약분되어야 한다. 즉 분자 n이 3과 7을 모두 인수로 가져야 하므로 n은 21의 배수이다.

2단계: 두 자리 자연수 중 21의 배수는 $21, 42, 63, 84$이다(105는 세 자리). 따라서 개수는 4개이다.

3단계: 검산하면 $\frac{21}{420} = \frac{1}{20} = 0.05$, $\frac{42}{420} = \frac{1}{10} = 0.1$, $\frac{63}{420} = \frac{3}{20} = 0.15$, $\frac{84}{420} = \frac{1}{5} = 0.2$로 모두 유한소수이다. 정답 ① 4개.

🧠 풀이 전략: 유한소수 조건은 기약분수 분모가 2,5만 가져야 함 → 분모 420의 소인수 중 3,7은 분자가 약분해야 한다 → 따라서 분자 n은 21의 배수 → 두 자리 21배수 개수 세기

💡 $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$의 순환마디 142857은 곱셈 시 자릿수가 순환하는 신비한 수로 유명해.

Q114 지수·식 계산 심화

$x + \frac{1}{x} = 4$일 때, $x^3 + \frac{1}{x^3}$의 값을 구하시오. (단, $x > 0$)

①) ① 48

②) ② 52

③) ③ 60

④) ④ 64

🎯 **정답: ② 52**

📖 1단계: 세제곱의 합 공식 $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$를 이용한다. $a = x$, $b = \frac{1}{x}$로 놓으면 $ab = 1$. 2단계: $\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3 \cdot 1 \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right)$이므로, $4^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3 \cdot 4$. 3단계: $64 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 12$이므로 $x^3 + \frac{1}{x^3} = 64 - 12 = 52$.

🧠 풀이 전략: 세제곱 전개 공식 $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$에서 $ab = 1$인 대칭성을 활용해 직접 풀지 않고 식 변형으로 답을 구한다.

💡 $x + \frac{1}{x} = k$ 꼴은 황금비, 은비 등 자기자신과 역수의 관계를 가진 무리수에서 자주 등장해.

Q115 부등식 활용 심화

어떤 가게에서 사과를 한 개 800원에 사서 x%의 이익을 붙여 정가를 매겼다. 그러나 잘 팔리지 않아 정가에서 200원을 할인하여 팔았더니 한 개당 100원 이상의 이익이 남았다. 이때 x의 최솟값을 구하시오. (단, x는 정수)

①) ① 35
②) ② 38
③) ③ 40
④) ④ 45

🎯 **정답: ② 38**

📖 1단계: 정가는 $800\left(1+\frac{x}{100}\right)=800+8x$ (원)이다. 할인된 판매가는 $800+8x-200=600+8x$ (원). 2단계: 한 개당 이익은 판매가 - 원가 = $(600+8x)-800=8x-200$ (원). 이 값이 100 이상이어야 하므로 $8x-200\geq 100$. 3단계: $8x\geq 300$이므로 $x\geq 37.5$. x는 정수이므로 최솟값은 38.

🧠 풀이 전략: 이익률 기반 정가 → 할인 판매가 → 실제 이익을 식으로 세우고, 이익이 100원 이상이라는 조건을 부등식으로 변환해 정수 최솟값을 구한다.

💡 실제 매장에서는 '심리적 가격대'를 고려해 990원, 1990원처럼 끝자리를 9로 맞춰 가격을 설정해.

Q116 연립방정식 심화 활용

농도가 6%인 소금물과 농도가 10%인 소금물을 섞어서 농도 8%인 소금물 400g을 만들려고 한다. 6%인 소금물을 xg, 10%인 소금물을 yg 사용했다고 할 때, $x-y$의 값을 구하시오.

①) ① -100
②) ② 0
③) ③ 100
④) ④ 200

🎯 **정답: ② 0**

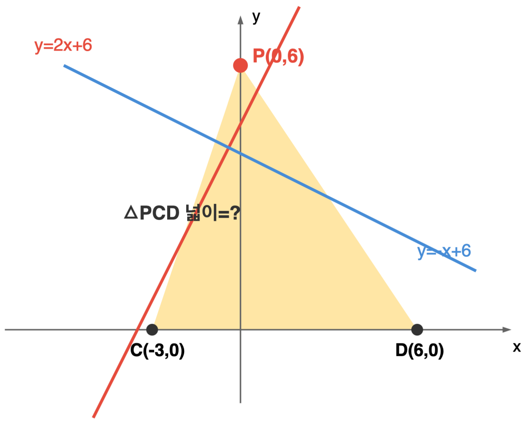
📖 1단계: 전체 소금물 양에 대한 식 $x+y=400$. 2단계: 소금의 양에 대한 식 $\frac{6}{100}x+\frac{10}{100}y=\frac{8}{100}\times 400$. 양변에 100을 곱하면 $6x+10y=3200$, 즉 $3x+5y=1600$. 3단계: $x+y=400$에서 $x=400-y$를 대입하면 $3(400-y)+5y=1600\rightarrow 1200+2y=1600\rightarrow y=200$, $x=200$. 따라서 $x-y=0$.

🧠 풀이 전략: 농도 문제는 (1) 전체 양 식, (2) 소금 양 식 두 개의 식을 세워 연립한다. 8%는 6%와 10%의 정확히 중간이므로 같은 양을 섞은 것이라는 직관도 가능하다.

💡 두 농도의 평균이 목표 농도와 같으면 같은 양을 섞은 것 - 이를 '저울의 원리'라고도 해.

Q117 일차함수 응용

두 직선 $y=2x+6$과 $y=-x+6$이 y축과 만나는 점을 각각 A, B(같은 점이므로 한 점)이라 하고, 두 직선이 x축과 만나는 점을 각각 C, D라 한다. 두 직선과 x축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 구하시오.



①) ① 18

②) ② 21

③) ③ 24

④) ④ 27

🎯 **정답: ④ 27**

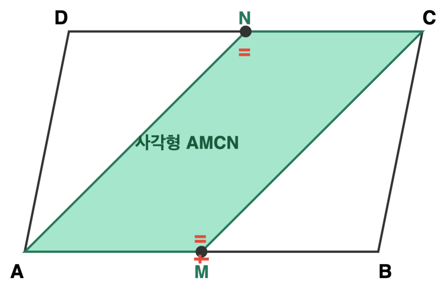
📖 1단계: 두 직선의 y절편을 구한다. $y=2x+6$에서 $x=0$이면 $y=6$. $y=-x+6$에서 $x=0$이면 $y=6$. 두 직선은 모두 점 (0,6)에서 y축과 만난다. 이 점을 P라 하자. 2단계: x축과의 교점을 구한다. $y=0$일 때 $2x+6=0$이므로 $x=-3$, 즉 C(-3,0). $-x+6=0$이므로 $x=6$, 즉 D(6,0). 3단계: 삼각형 PCD의 밑변 CD = $6-(-3)=9$, 높이는 P의 y좌표인 6. 넓이 = $\frac{1}{2}\times 9\times 6=27$.

🧠 풀이 전략: 두 직선의 y절편이 같다는 것을 확인 → 두 직선과 x축이 이루는 삼각형의 꼭짓점은 두 x절편과 공통 y절편 → 밑변과 높이로 넓이 계산.

💡 두 직선의 y절편이 같으면 그 점을 공유하므로 항상 삼각형이 만들어져 - 이를 '직선족'의 시작점이라 해.

Q118 도형 성질 증명

평행사변형 ABCD에서 $\overline{AB}$의 중점을 M, $\overline{CD}$의 중점을 N이라 할 때, 사각형 AMCN은 어떤 사각형인지 가장 정확하게 답하고 그 이유를 추론하시오.



①) ① 마름모

②) ② 직사각형

③) ③ 평행사변형

④) ④ 정사각형

🎯 **정답: ③ 평행사변형**

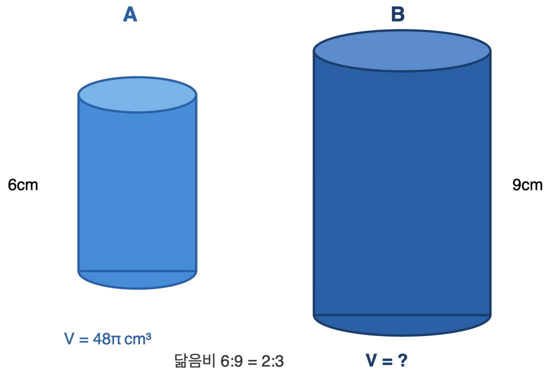
📖 1단계: 평행사변형 ABCD에서 $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$이고 $\overline{AB} = \overline{DC}$이다. M은 AB의 중점이므로 $\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AB}$, N은 DC의 중점이므로 $\overline{NC} = \frac{1}{2}\overline{DC}$. 2단계: 따라서 $\overline{AM} = \overline{NC}$이고, $\overline{AM}$은 $\overline{AB}$의 일부, $\overline{NC}$는 $\overline{DC}$의 일부이므로 $\overline{AM} \parallel \overline{NC}$. 3단계: 사각형 AMCN에서 한 쌍의 대변(AM과 NC)이 평행하고 길이가 같으므로 평행사변형이다. 일반적인 평행사변형 ABCD에서는 AM과 MC, CN과 NA의 길이가 같다는 보장이 없으므로 마름모나 직사각형이 되지는 않는다.

🧠 풀이 전략: 평행사변형 정의: 두 쌍의 대변이 평행. 더 강한 조건: '한 쌍의 대변이 평행하고 같다' → 평행사변형. AM과 NC가 이 조건을 만족함을 보인다.

💡 '한 쌍의 대변이 평행하고 길이가 같다'는 평행사변형 판정의 5가지 조건 중 하나야.

Q119 닮음 심화

두 닮은 원기둥 A와 B가 있다. 원기둥 A의 높이는 6cm, 원기둥 B의 높이는 9cm이다. 원기둥 A의 부피가 48π cm³일 때, 원기둥 B의 부피를 구하시오.



①) ① 108π cm³

②) ② 144π cm³

③) ③ 162π cm³

④) ④ 192π cm³

🎯 **정답:** ③ 162π **cm³**

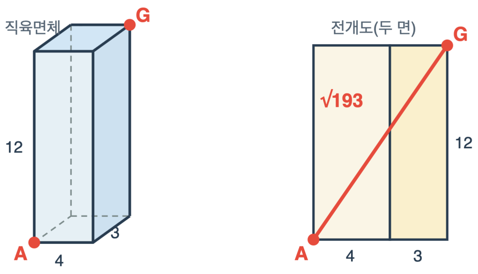
📖 1단계: 두 원기둥이 닮은꼴이므로 닮음비는 높이의 비와 같다. 닮음비 = 6 : 9 = 2 : 3. 2단계: 닮은 입체도형의 부피비는 닮음비의 세제곱과 같다. 따라서 부피비 = $2^3 : 3^3 = 8 : 27$. 3단계: 원기둥 A의 부피를 $V_A = 48\pi$, 원기둥 B의 부피를 V_B라 하면 $48\pi : V_B = 8 : 27$이므로 $V_B = \frac{48\pi \times 27}{8} = 6\pi \times 27 = 162\pi$ cm³.

🧠 풀이 전략: 닮은 입체의 부피비 = 닮음비³. 닮음비를 높이비에서 구하고 세제곱한 뒤 비례식으로 부피를 계산한다.

💡 키가 2배 큰 거인은 부피와 무게가 8배 - 그래서 거인은 자기 다리뼈로 몸을 못 지탱한다는 '제곱-세제곱 법칙'이 있어.

Q120 피타고라스 활용

가로 4cm, 세로 3cm, 높이 12cm인 직육면체 모양 상자가 있다. 한 꼭짓점 A에서 출발해 직육면체의 표면을 따라 마주보는 꼭짓점 G(공간 대각선의 반대쪽)까지 가는 최단 경로의 길이를 구하시오.



①) ① 13 cm

②) ② 15 cm

③) ③ $\sqrt{193}$ cm

④) ④ 19 cm

🎯 **정답: ③ $\sqrt{193}$ cm**

📖 1단계: 직육면체 표면 최단경로는 두 면을 펼친 전개도에서의 직선거리이다. A에서 G까지 두 면을 지나는 전개는 세 가지다.

2단계:

- 가로 4와 세로 3을 이어 붙이고 높이 12를 다른 변으로: $\sqrt{(4+3)^2+12^2} = \sqrt{49+144} = \sqrt{193}$
- 세로 3과 높이 12를 이어 붙이고 가로 4를 다른 변으로: $\sqrt{(3+12)^2+4^2} = \sqrt{225+16} = \sqrt{241}$
- 가로 4와 높이 12를 이어 붙이고 세로 3을 다른 변으로: $\sqrt{(4+12)^2+3^2} = \sqrt{256+9} = \sqrt{265}$

3단계: 세 값 중 최솟값은 $\sqrt{193} \approx 13.9$ cm이다. 따라서 최단거리는 $\sqrt{193}$ cm.

(참고: 13 cm는 표면이 아니라 내부를 가로지르는 공간대각선 $\sqrt{4^2+3^2+12^2} = \sqrt{169} = 13$이므로 표면경로가 아니다.)

🧠 풀이 전략: 공간 표면 최단경로 = 전개도 직선거리. 가능한 모든 펼치기 방법을 시도한 후 가장 짧은 거리를 찾는다.

💡 개미가 직육면체 한 꼭짓점에서 반대쪽 꼭짓점까지 가는 최단경로 문제는 1903년 H.E. Dudeney의 '거미와 파리' 문제로 유명해.

📝 중2 수학 심화

총 40문제 · 문제와 정답·풀이 포함

Q121 경시 확률·퍼즐

5명의 학생 A, B, C, D, E를 일렬로 세울 때, A가 B보다 앞에 서고, 동시에 C가 D보다 앞에 서는 경우의 수를 구하시오.

①) ① 15
②) ② 24
③) ③ 30
④) ④ 60

🎯 **정답: ③ 30**

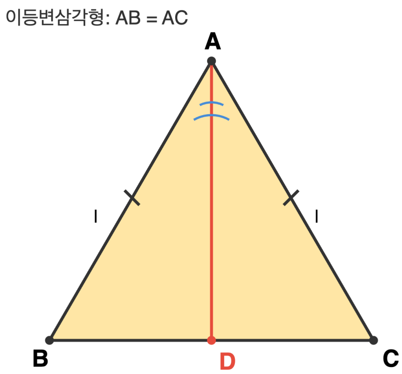
📖 1단계: 5명을 일렬로 세우는 전체 경우의 수는 $5! = 120$이다. 2단계: A와 B의 순서만 보면 (A가 앞, B가 뒤) 또는 (B가 앞, A가 뒤) 두 가지가 동등하게 가능하므로, A가 B보다 앞에 설 확률은 $\frac{1}{2}$. 마찬가지로 C가 D보다 앞에 설 확률도 $\frac{1}{2}$. 3단계: 두 조건은 서로 독립이므로 (A,B의 순서와 C,D의 순서는 서로 영향을 주지 않는다), 두 조건을 모두 만족하는 경우의 수는 $120 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 30$.

🧠 풀이 전략: 전체 순열에서 특정 두 원소의 순서가 정해진 경우는 절반. 두 쌍의 순서 조건이 독립이면 $\frac{1}{4}$만 만족. 직접 세지 말고 대칭성과 독립성으로 빠르게 구하자.

💡 n명 중 k명의 순서가 미리 정해진 줄세우기 경우의 수는 $\frac{n!}{k!}$ - 이를 '제한된 순열'이라 해.

Q122 도형 성질 증명

삼각형 ABC에서 $\overline{AB} = \overline{AC}$인 이등변삼각형이고, $\angle A$의 이등분선이 BC와 만나는 점을 D라 하자. 이때 D는 BC의 중점임을 증명하는 과정에서, 삼각형 ABD와 ACD가 합동인 이유로 가장 적절한 합동조건은?



①) ① SSS (세 변)
②) ② SAS (두 변과 끼인각)
③) ③ ASA (한 변과 양 끝각)
④) ④ RHS (직각·빗변·한 변)

🎯 **정답: ② SAS (두 변과 끼인각)**

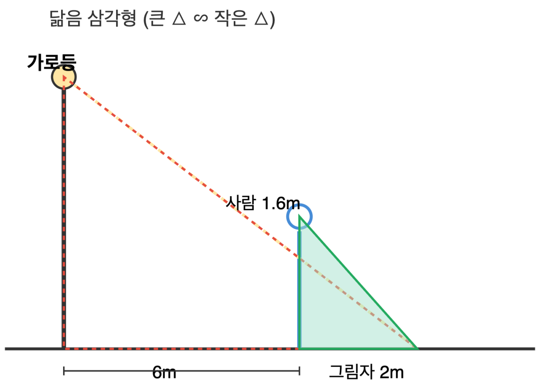
📖 1단계: 삼각형 ABD와 ACD에서 다음을 살펴본다. (i) $\overline{AB} = \overline{AC}$ (이등변삼각형의 정의). (ii) $\angle BAD = \angle CAD$ (AD는 각 A의 이등분선). (iii) $\overline{AD}$는 공통변. 2단계: 두 삼각형에서 두 변($\overline{AB} = \overline{AC}$, $\overline{AD}$ 공통)의 길이가 같고, 그 끼인각($\angle BAD = \angle CAD$)이 같다. 이는 SAS 합동조건이다. 3단계: SAS 합동에 의해 $\triangle ABD \equiv \triangle ACD$이므로 $\overline{BD} = \overline{CD}$, 즉 D는 BC의 중점이다. 동시에 $\angle ADB = \angle ADC = 90°$도 성립해 AD는 BC의 수직이등분선이다.

🧠 풀이 전략: 두 삼각형에서 같은 길이의 변 2개와 그 사이 각이 같으면 SAS. 변-각-변 순서로 매칭되는지 확인하는 것이 핵심.

💡 이등변삼각형의 꼭지각 이등분선은 밑변의 수직이등분선이자 중선이자 수선이야 - 4가지 역할을 동시에 해.

Q123 닮음 심화

키 1.6m인 사람이 가로등 바로 아래에서 6m 떨어진 곳에 서 있을 때, 그림자의 길이가 2m였다. 가로등의 높이를 구하시오.



①) ① 4.8 m

②) ② 6.0 m

③) ③ 6.4 m

④) ④ 8.0 m

🎯 **정답: ③ 6.4 m**

📖 1단계: 가로등 높이를 h m라 하자. 가로등의 끝과 그림자 끝, 그리고 가로등의 밑이 큰 직각삼각형을 이룬다. 이 큰 삼각형의 밑변은 (가로등에서 사람까지 거리) + (그림자 길이) = $6+2=8$ m, 높이는 h m. 2단계: 사람의 키와 그림자가 작은 직각삼각형을 이룬다. 작은 삼각형의 밑변 = 2 m, 높이 = 1.6 m. 빛이 직선이므로 두 삼각형은 닮음(AA 닮음, 공통각과 직각). 3단계: 닮음비에서 $\frac{h}{8}=\frac{1.6}{2}$. 따라서 $h=8\times\frac{1.6}{2}=8\times0.8=6.4$ m.

🧠 풀이 전략: 사람과 그림자, 가로등과 큰 그림자가 닮음 삼각형. 닮음비를 세워 비례식으로 가로등 높이를 구한다.

💡 고대 그리스 탈레스는 이 닮음 원리로 피라미드 높이를 측정했다고 전해져 - 자신의 키와 그림자 길이로!

Q124 부등식 활용 심화

연립부등식 $\begin{cases} 2x-3\le 5 \\ x+a>1 \end{cases}$ 의 해가 $-2<x\le 4$일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

①) ① 1

②) ② 2

③) ③ 3

④) ④ 4

🎯 **정답: ③ 3**

📖 1단계: 첫 번째 부등식 $2x-3\le 5$를 풀면 $2x\le 8$, 즉 $x\le 4$. 2단계: 두 번째 부등식 $x+a>1$을 풀면 $x>1-a$. 두 부등식의 공통 범위가 연립부등식의 해 $-2<x\le 4$이므로 $x>1-a$에서 $1-a=-2$가 되어야 한다. 3단계: $1-a=-2$이므로 $a=3$. 검산: $a=3$이면 $x+3>1$, 즉 $x>-2$. 첫 번째 부등식 $x\le 4$와 합치면 $-2<x\le 4$로 일치한다.

🧠 풀이 전략: 연립부등식의 해 = 두 부등식 해의 교집합. 주어진 해에서 각 경계가 어느 부등식에서 나왔는지 매칭하면 a를 구할 수 있다.

💡 수직선에서 두 부등식의 해를 그림으로 그리면 교집합(겹치는 부분)이 한눈에 보여 - 시각화는 부등식의 친구!

Q125 유리수·순환소수 추론

분수 $\frac{1}{7}$을 소수로 나타내면 $0.\overline{142857}$이다. 이때 소수점 아래 100번째 자리의 숫자를 구하시오.

①) ① 2

②) ② 4

③) ③ 5

④) ④ 8

🎯 **정답: ④ 8**

📖 1단계: 순환마디 '142857'의 길이는 6이다. 즉, 소수점 아래 1, 7, 13, 19번째 자리 등은 모두 같은 숫자가 반복된다.
2단계: 100번째 자리가 순환마디 안에서 몇 번째에 해당하는지 보려면 100을 6으로 나누어야 한다. 100 ÷ 6 = 16 나머지 4.
3단계: 나머지 4는 17번째 순환마디의 4번째 자리에 해당한다. 순환마디 '1, 4, 2, 8, 5, 7'의 4번째 숫자는 8.
4단계: 따라서 소수점 아래 100번째 자리의 숫자는 8.

🧠 풀이 전략: 순환소수의 특정 자릿수를 묻는 문제는 '몇 번째 자리인지를 순환마디의 길이로 나눈 나머지'로 위치를 결정한다. 나머지가 0이면 순환마디의 마지막 자리, 그 외에는 그 나머지번째 자리를 본다.

💡 1/7의 순환마디 142857에 1, 2, 3, 4, 5, 6을 차례로 곱하면 모두 같은 6개 숫자가 회전된 형태(142857, 285714, 428571, 571428, 714285, 857142)로 나타난다. 이런 수를 '순환수(cyclic number)'라 한다.

Q126 지수·식 계산 심화

$(3-1)(3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)+1$의 값은?

①) ① 3^{15}

②) ② 3^{16}

③) ③ $3^{15}-1$

④) ④ $3^{16}-1$

🎯 **정답: ② 3^{16}**

📖 1단계: 곱셈공식 $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$을 반복 적용한다. 먼저 $(3-1)(3+1)=3^2-1=8$.
2단계: $(3^2-1)(3^2+1)=3^4-1$.
3단계: $(3^4-1)(3^4+1)=3^8-1$, 이어서 $(3^8-1)(3^8+1)=3^{16}-1$.
4단계: 결과적으로 $(3-1)(3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)=3^{16}-1$.
5단계: 마지막에 $+1$을 더하면 $3^{16}-1+1=3^{16}$.

🧠 풀이 전략: 첫 항 $(3-1)$을 보고 합·차의 곱 공식이 망원곱(telescoping product)으로 연쇄될 가능성을 인식. 한 번 적용할 때마다 지수가 두 배가 되어 $2^4=16$ 거듭제곱에 도달.

💡 $3^{16}=43{,}046{,}721$로 8자리 수이다. 이런 형태의 망원곱은 페르마 수 $F_n=2^{2^n}+1$의 곱셈적 성질이나 RSA 암호 같은 정수론 문제에서도 핵심적으로 사용된다.

Q127 부등식 활용 심화

어느 시험은 총 20문제로, 정답은 $+5$점, 오답은 -2점, 무응답은 0점이다. 어떤 학생이 5문제는 무응답으로 두고 나머지 15문제에 모두 답을 적었다. 이 학생이 60점 이상을 받기 위해 정답을 맞춰야 하는 최소 문제 수는?

①) ① 11문제
②) ② 12문제
③) ③ 13문제
④) ④ 14문제

🎯 **정답: ③ 13문제**

📖 1단계: 정답을 x개라 하면 오답은 $(15-x)$개이다.
2단계: 점수를 식으로 정리하면, 점수 $= 5x - 2(15-x) = 5x - 30 + 2x = 7x - 30$.
3단계: 60점 이상 조건은 $7x - 30 \geq 60$, 즉 $7x \geq 90$이므로 $x \geq \frac{90}{7} \approx 12.857$.
4단계: x는 자연수이므로 x의 최솟값은 13.
5단계: 검산: $x = 13$이면 점수 $= 7 \cdot 13 - 30 = 61 \geq 60$ ✓. $x = 12$이면 $7 \cdot 12 - 30 = 54 < 60$ ✗.

🧠 풀이 전략: 오답에 감점이 있다는 조건을 놓치면 단순히 $60 \div 5 = 12$로 답하기 쉬운 함정. 점수 식에 오답 감점을 정확히 반영하고, 자연수 해 조건에서 부등식의 분수 경계를 위로 올림 처리한다.

💡 옛날 SAT 시험은 객관식에서 오답 감점 제도(guessing penalty)가 있었다. 이는 학생이 무작위 추측을 통해 점수를 얻는 것을 막기 위함이었지만, 2016년 개정 이후 폐지되어 현재는 없다.

Q128 연립방정식 심화 활용

A, B, C 세 사람이 함께 작업하면 어떤 일을 4시간 만에 끝낼 수 있다. 같은 일을 A와 B 둘이서만 하면 6시간, B와 C 둘이서만 하면 8시간이 걸린다. C 혼자 이 작업을 끝내려면 몇 시간이 걸리는가?

①) ① 8시간
②) ② 10시간
③) ③ 12시간
④) ④ 24시간

🎯 **정답: ③ 12시간**

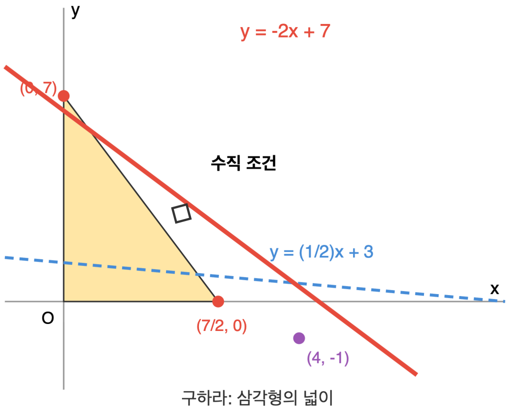
📖 1단계: 1시간당 A, B, C 각각의 작업률을 a, b, c라 하고, 전체 일량을 1로 둔다. 다음 연립방정식을 세운다.
① $a + b + c = \frac{1}{4}$
② $a + b = \frac{1}{6}$
③ $b + c = \frac{1}{8}$
2단계: ①에서 ②를 빼면 $c = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{3-2}{12} = \frac{1}{12}$.
3단계: 즉, C는 1시간에 전체의 $\frac{1}{12}$만큼을 한다. 따라서 C 혼자서 끝내는 시간은 $\frac{1}{1/12} = 12$시간.
4단계: 검증: ②와 ③에서 $a = \frac{1}{8}$, $b = \frac{1}{24}$가 나오고 $a + b + c = \frac{3+1+2}{24} = \frac{1}{4}$ ✓.

🧠 풀이 전략: 일률(작업/시간)을 변수로 잡으면 시간 관계식이 분수 방정식으로 깔끔하게 변환된다. 모든 변수를 다 구할 필요 없이, ①-②로 c를 직접 분리해 답을 빠르게 도출.

💡 '일률' 개념은 물리에서 일·에너지·시간의 관계로 확장되며, 1초 동안 한 일의 양을 나타내는 단위 와트(W)와 같은 개념이 된다. 이런 분수 방정식은 전기 회로의 병렬 저항 계산에서도 동일한 형태로 등장한다.

Q129 일차함수 응용

직선 $y = \frac{1}{2}x + 3$에 수직이고, 점 $(4, -1)$을 지나는 직선이 x축과 y축에 의해 만들어지는 삼각형의 넓이를 구하시오.



①) ① $\frac{49}{4}$
②) ② $\frac{49}{2}$
③) ③ 49
④) ④ $\frac{25}{4}$

🎯 **정답: ① $\frac{49}{4}$**

📖 1단계: 두 직선이 수직이면 기울기의 곱이 -1. 주어진 직선의 기울기는 $\frac{1}{2}$이므로 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{2} \cdot m = -1$에서 $m = -2$
.

2단계: 점 $(4, -1)$을 지나고 기울기가 -2인 직선: $y - (-1) = -2(x - 4)$, 즉 $y = -2x + 7$.

3단계: x절편은 $y = 0$일 때 $x = \frac{7}{2}$, y절편은 $x = 0$일 때 $y = 7$.

4단계: 두 절편과 원점을 꼭짓점으로 하는 직각삼각형의 두 변 길이는 $\frac{7}{2}$와 7.

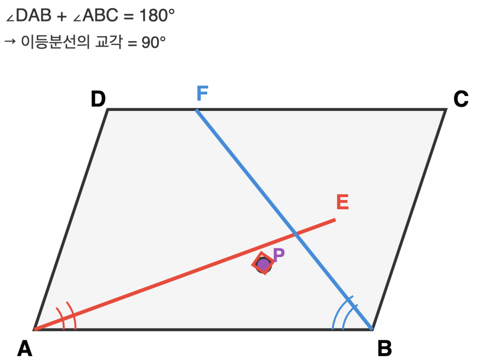
5단계: 삼각형 넓이 $= \frac{1}{2} \times \frac{7}{2} \times 7 = \frac{49}{4}$.

🧠 풀이 전략: 먼저 수직 조건으로 기울기를 결정한 뒤, 점-기울기 형태로 새 직선을 세움. 그다음 두 절편을 구해 직각삼각형 두 변으로 사용해 넓이 공식을 적용.

💡 기울기 곱이 -1이면 수직이라는 사실은 좌표평면에서 직선의 회전과 삼각함수 $\tan$의 합 공식으로 증명된다. 이 성질은 일차함수 계산뿐 아니라 로봇 공학에서 직각 좌표 변환에도 핵심적으로 쓰인다.

Q130 도형 성질 증명

평행사변형 $ABCD$에서 $\angle A$의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 E, $\angle B$의 이등분선이 변 AD와 만나는 점을 F라 하자. 두 이등분선 AE와 BF가 평행사변형 내부에서 만나는 점을 P라 할 때, $\angle APB$의 크기를 구하고 그 이유를 설명하시오.



①) ① 60°

②) ② 75°

③) ③ 90°

④) ④ 120°

🎯 **정답:** ③ 90°

📖 1단계: 평행사변형에서 한 변과 그 이웃하는 두 내각은 동측내각이므로 합이 180°이다. 즉 $\angle DAB + \angle ABC = 180°$.

2단계: AE가 $\angle A$의 이등분선이므로 $\angle PAB = \frac{1}{2}\angle DAB$. 마찬가지로 BF가 $\angle B$의 이등분선이므로 $\angle PBA = \frac{1}{2}\angle ABC$.

3단계: 두 각의 합은 $\angle PAB + \angle PBA = \frac{1}{2}(\angle DAB + \angle ABC) = \frac{1}{2} \cdot 180° = 90°$.

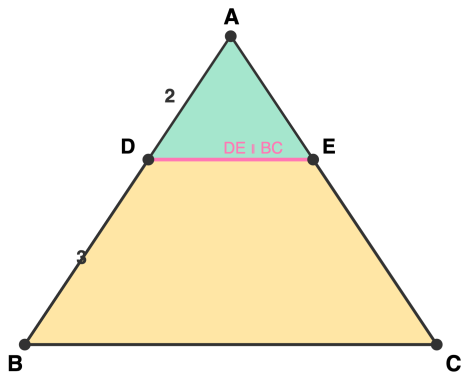
4단계: 삼각형 APB의 내각의 합 180°에서 $\angle APB = 180° - 90° = 90°$.

🧠 풀이 전략: 평행사변형의 동측내각 합 180°라는 핵심 성질을 인식한 후, 두 각을 절반으로 나누면 합이 90°가 됨을 깨닫는 것이 열쇠. 그러면 삼각형 내각의 합으로부터 자동으로 직각이 도출된다.

💡 이 성질은 사다리꼴 등 더 일반적으로, '평행한 두 변에서 시작된 동측내각의 이등분선들은 항상 직교한다'는 정리로 확장된다. 즉, 평행 조건만 있으면 결론은 같다.

Q131 닮음 심화

삼각형 ABC에서 점 D는 변 AB 위에, 점 E는 변 AC 위에 있고 $DE \parallel BC$이다. $\overline{AD}:\overline{DB} = 2:3$일 때, 삼각형 ADE의 넓이와 사다리꼴 $DBCE$의 넓이의 비를 가장 간단한 자연수 비로 구하시오.



△ADE ∽ △ABC

①) ① $2:3$

②) ② $4:21$

③) ③ $4:25$

④) ④ $2:5$

🎯 **정답:** ② $4:21$

📖 1단계: $DE \parallel BC$이므로 동위각에 의해 $\angle ADE = \angle ABC$, $\angle AED = \angle ACB$. 따라서 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ (AA 닮음).

2단계: 닮음비는 $\overline{AD}:\overline{AB} = 2:(2+3) = 2:5$.

3단계: 닮음인 두 도형의 넓이비는 닮음비의 제곱과 같으므로 $\triangle ADE:\triangle ABC = 2^2:5^2 = 4:25$.

4단계: 사다리꼴 $DBCE$의 넓이 $= \triangle ABC - \triangle ADE$, 즉 비율로는 $25 - 4 = 21$.

5단계: 따라서 $\triangle ADE$: 사다리꼴 $DBCE = 4:21$.

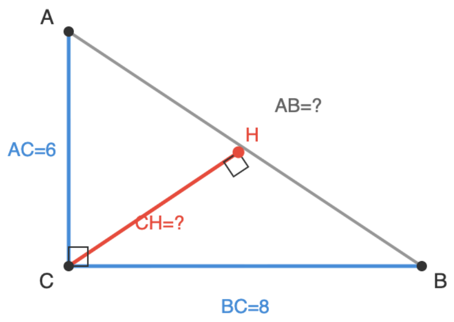
🧠 풀이 전략: 평행선이 만든 닮음 관계를 찾고, '닮음비의 제곱은 넓이비'라는 핵심 정리를 적용. 사다리꼴은 큰 삼각형에서 작은 닮음 삼각형을 빼서 넓이 비율을 도출.

💡 닮음비가 $1:k$인 두 도형은 길이비 $1:k$, 넓이비 $1:k^2$, 부피비 $1:k^3$이 된다. 이는 차원의 본질적인 성질로, 거리를 두 배로 늘리면 사진의 면적은 4배, 동상의 무게는 8배가 되는 까닭이다.

Q132 피타고라스 활용

직각삼각형 ABC에서 $\angle C = 90°$, $\overline{AC} = 6$ cm, $\overline{BC} = 8$ cm이다. 점 C에서 빗변 AB에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 선분 $\overline{CH}$의 길이를 구하시오.

직각삼각형 ABC와 수선 CH



①) ① $\frac{12}{5}$
②) ② $\frac{24}{5}$
③) ③ $\frac{25}{6}$
④) ④ $\frac{48}{5}$

🎯 **정답: ② $\frac{24}{5}$**

📖 1단계: 피타고라스 정리로 빗변의 길이를 구한다. $\overline{AB} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$ cm.
2단계: 삼각형 ABC의 넓이를 두 가지 방식으로 표현.
방법 ①: 두 직각변을 밑변과 높이로: 넓이 $= \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24$ cm^2.
방법 ②: 빗변 AB를 밑변, 수선 CH를 높이로: 넓이 $= \frac{1}{2} \times 10 \times \overline{CH} = 5\overline{CH}$.
3단계: 두 식이 같은 넓이를 나타내므로 $5\overline{CH} = 24$, 즉 $\overline{CH} = \frac{24}{5}$ cm.
4단계: 수선의 길이 $\overline{CH} = \frac{24}{5}$ cm $= 4.8$ cm.

🧠 풀이 전략: 넓이를 두 가지 다른 방식으로 표현하면 같은 값이라는 등식을 만들 수 있다는 발상이 핵심. 직접 수선 길이를 구하기 어려운 경우 우회적으로 넓이를 매개로 풀어내는 강력한 전략.

💡 직각삼각형에서 빗변에 내린 수선이 만드는 두 작은 삼각형은 모두 원래 삼각형과 닮음(세 삼각형이 모두 닮음). 이 성질로부터 $\overline{AH} \cdot \overline{HB} = \overline{CH}^2$이 성립하고, 이를 '기하평균 정리' 또는 '평균비례'라 부른다.

Q133 경시 확률·퍼즐

1, 2, 3, 4, 5의 다섯 개 숫자 중 서로 다른 세 개를 뽑아 세 자리 자연수를 만든다. 다음 두 조건을 모두 만족하는 자연수의 개수를 구하시오.

(가) 세 자리 자연수는 짝수이다.

(나) 백의 자리 숫자가 일의 자리 숫자보다 크다.

①) ① 8

②) ② 10

③) ③ 12

④) ④ 15

🎯 **정답:** ③ 12

📖 1단계: 짝수가 되려면 일의 자리 숫자가 2 또는 4여야 한다. 두 경우로 나눈다.

2단계: [경우 1] 일의 자리 = 2.

- 백의 자리는 2보다 커야 하므로 $\{3, 4, 5\}$ 중 하나, 즉 3가지.
- 십의 자리는 백·일에 사용한 두 숫자를 제외한 나머지 3개 중 하나.
- 합: $3 \times 3 = 9$가지.

3단계: [경우 2] 일의 자리 = 4.

- 백의 자리는 4보다 커야 하므로 5만 가능, 즉 1가지.
- 십의 자리는 $\{1, 2, 3\}$ 중 하나, 즉 3가지.
- 합: $1 \times 3 = 3$가지.

4단계: 두 경우의 합: $9 + 3 = 12$.

🧠 풀이 전략: 두 조건이 동시에 걸린 자릿수 결정 문제는 가장 강한 제약(끝자리가 짝수, 첫자리 부등식)을 먼저 결정하고, 자유로운 자리(십의 자리)를 마지막에 채우는 '제약-자유' 분리 전략으로 풀면 깔끔하다.

💡 이런 자릿수 조건 문제는 비밀번호의 강도, 자동차 번호판의 가능한 조합 수 등 실생활의 카운팅 문제와 동일한 방식으로 분석된다. 컴퓨터 보안에서도 이런 조합론적 분석이 핵심이다.

Q134 유리수·순환소수 추론

분수 $\frac{1}{n}$ (n은 자연수)을 소수로 나타냈을 때 순환마디(반복되는 부분)의 길이가 정확히 6인 가장 작은 자연수 n의 값을 구하시오. (단, 약분 후 분모가 2와 5의 인수만 갖는 경우는 유한소수가 되어 순환마디가 없는 것으로 본다.)

①) ① 6

②) ② 7

③) ③ 11

④) ④ 13

🎯 **정답:** ② 7

📖 1단계: $\frac{1}{n}$이 (유한소수가 아닌) 순환소수가 되는 조건은 분모 n이 2와 5 이외의 소인수를 갖는 것이다. (n이 $2^a \times 5^b$ 꼴이면 유한소수가 되어 순환마디가 없다.)

2단계: $\gcd(n, 10) = 1$일 때 순환마디의 길이는 $10^k \equiv 1 \pmod{n}$을 만족하는 가장 작은 자연수 k와 같다. 작은 n부터 직접 계산해 본다.

3단계: $n = 2, 4, 5$는 유한소수이다. $n = 3$: $\frac{1}{3} = 0.\dot{3}$, 순환마디 길이 1. $n = 6$: $\frac{1}{6} = 0.1\dot{6}$, 순환마디 길이 1. $n = 7$: $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$, 순환마디 길이 6. ✓

4단계: 7보다 작은 자연수는 모두 유한소수이거나 순환마디 길이가 1이므로, 순환마디 길이가 정확히 6인 가장 작은 자연수는 $n = 7$이다. (참고로 $n = 11$은 길이 2, $n = 13$은 길이 6.)

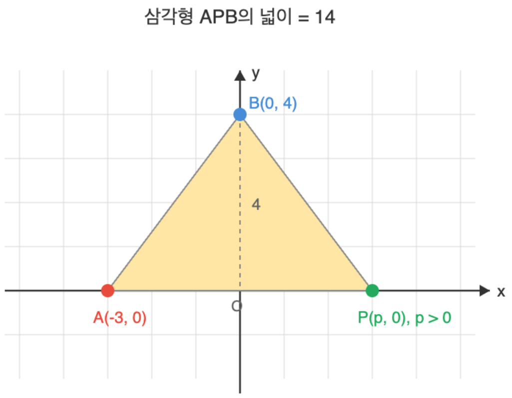
5단계: 따라서 답은 $n = 7$이다.

🧠 풀이 전략: '순환마디 길이 = 10^k이 분모로 나누어 나머지 1이 되는 최소 지수'라는 정수론적 핵심을 인식. 소인수가 2, 5 외인 작은 자연수부터 직접 나누어 보는 탐색 방법이 가장 직관적.

💡 $\frac{1}{7}$의 순환마디 142857은 '순환수(cyclic number)'의 대표적인 예이다. $142857 \times 1, 2, 3, 4, 5, 6$의 결과는 모두 같은 6개의 숫자를 다른 순서로 회전한 형태이며 (142857, 285714, 428571, 571428, 714285, 857142), 7을 곱하면 999999가 된다.

Q135 일차함수 응용

좌표평면 위의 두 점 $A(-3, 0)$과 $B(0, 4)$가 있다. 점 $P(p, 0)$ $(p > 0)$에 대하여 삼각형 APB의 넓이가 14일 때, p의 값을 구하시오.



①) ① 3

②) ② 4

③) ③ 5

④) ④ 6

🎯 **정답:** ② 4

📖 1단계: 점 $A(-3, 0)$과 $P(p, 0)$은 모두 x축 위에 있으므로, 선분 $\overline{AP}$를 삼각형의 밑변으로 잡으면 길이는 $\overline{AP} = p - (-3) = p + 3$ $(p > 0$이므로 양수).

2단계: 점 $B(0, 4)$의 y좌표가 4이므로, 점 B에서 x축 (밑변이 놓인 직선)까지의 수직 거리, 즉 높이는 4이다.

3단계: 삼각형 넓이 공식에 대입: 넓이 $= \frac{1}{2} \times \overline{AP} \times$ 높이 $= \frac{1}{2}(p + 3)(4) = 2(p + 3)$.

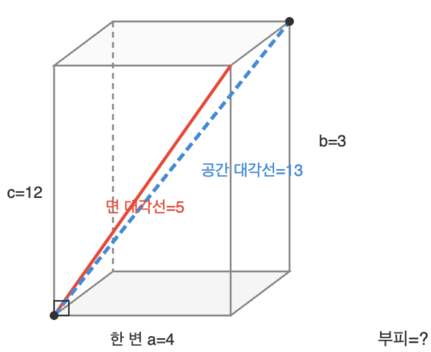
4단계: 조건 $2(p + 3) = 14$을 풀면 $p + 3 = 7$, 따라서 $p = 4$.

🧠 풀이 전략: 두 꼭짓점이 같은 축 위에 있을 때는 그 축 위 변을 밑변으로 잡고, 다른 꼭짓점의 좌표 값을 높이로 사용하는 것이 표준 전략. 좌표평면에서 도형의 넓이 계산은 좌표축 정렬을 활용해 단순화한다.

💡 좌표평면에서 세 점의 좌표만 주어졌을 때 삼각형의 넓이는 행렬식 공식으로 한 번에 계산할 수 있다: 넓이 $= \frac{1}{2}\,|\,x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B)\,|$. 이는 컴퓨터 그래픽에서 많이 사용된다.

Q136 피타고라스 활용

어떤 직육면체에서 한 면(밑면)의 한 변의 길이가 4이고, 그 면의 대각선 길이가 5이며, 직육면체의 공간 대각선(내부 대각선)의 길이가 13이다. 이 직육면체의 부피를 구하시오.



①) ① 108

②) ② 120

③) ③ 144

④) ④ 180

🎯 **정답:** ③ 144

📖 1단계: 직육면체의 가로, 세로, 높이를 각각 a, b, c라 하자. 한 면의 한 변은 $a = 4$, 그 면의 대각선 길이가 5이므로 면에 피타고라스 정리를 적용.

2단계: $a^2 + b^2 = 5^2$, 즉 $16 + b^2 = 25$이므로 $b^2 = 9$, $b = 3$.

3단계: 공간 대각선은 3차원 피타고라스 정리에 의해 $a^2 + b^2 + c^2 = 13^2 = 169$. 위에서 $a^2 + b^2 = 25$이므로 $c^2 = 169 - 25 = 144$, $c = 12$.

4단계: 부피 $= a \times b \times c = 4 \times 3 \times 12 = 144$.

🧠 풀이 전략: 면 대각선과 공간 대각선이 두 변(a, b)을 공유한다는 점을 이용해, 면 대각선으로 한 변(b)을, 공간 대각선과 면 대각선의 차로 높이(c)를 단계적으로 구하는 두 단계 피타고라스 전략. 모든 정수해가 깔끔하게 나오도록 설계됨.

💡 이 문제의 변 길이 조합 $(3, 4, 12, 13)$은 면 대각선과 공간 대각선이 모두 정수가 되는 특수한 정수 조합으로, 한 직각삼각형 안에 또 다른 직각삼각형이 포함된 형태이다. 모든 모서리·면 대각선·공간 대각선이 정수인 직육면체는 'Euler brick(오일러 벽돌)'이라 불리며 정수론의 미해결 문제와 연결된다.

Q137 경시 확률·퍼즐

4명의 학생 A, B, C, D가 다음과 같이 진술했다. A: "B는 거짓말쟁이다." B: "C는 거짓말쟁이다." C: "D는 거짓말쟁이다." D: "A와 B는 모두 거짓말쟁이다." 참말만 하는 사람과 거짓말만 하는 사람이 섞여 있을 때, 거짓말쟁이는 정확히 몇 명인가?

①) ① 1명

②) ② 2명

③) ③ 3명

④) ④ 경우에 따라 다르다

🎯 **정답: ② 2명**

📖 1단계: D의 진술 "A와 B는 모두 거짓말쟁이다"를 분석한다. D가 참말쟁이라면 A, B가 모두 거짓말쟁이여야 한다. 그런데 A가 거짓말쟁이면 A의 진술 "B는 거짓말쟁이다"가 거짓이 되어 B는 참말쟁이가 되므로, B도 거짓말쟁이라는 것과 모순이다. 따라서 D는 거짓말쟁이다.

2단계: D가 거짓말쟁이이므로 C의 진술 "D는 거짓말쟁이다"는 참이다. 따라서 C는 참말쟁이다.

3단계: C가 참말쟁이이므로 B의 진술 "C는 거짓말쟁이다"는 거짓이다. 따라서 B는 거짓말쟁이다.

4단계: B가 거짓말쟁이이므로 A의 진술 "B는 거짓말쟁이다"는 참이다. 따라서 A는 참말쟁이다.

5단계: (검증) D의 진술 "A와 B는 모두 거짓말쟁이"는 실제로 A가 참말쟁이이므로 거짓이며, D가 거짓말쟁이라는 결론과 일관된다.

결론: 참말쟁이는 A, C이고 거짓말쟁이는 B, D로 거짓말쟁이는 정확히 2명이다. 정답 ② 2명.

🧠 풀이 전략: 진리값 연쇄 추론에서는 가장 강한 진술(D의 "여러 명 모두 거짓")부터 가정해서 모순을 찾는다. D를 참으로 가정하면 A의 진술과 충돌하므로 D는 거짓. 이를 출발점으로 C→B→A 순으로 진리값이 자동 결정된다.

💡 이런 유형을 'knights and knaves(기사와 악당)' 문제라 부른다. 수리논리학자 레이먼드 스멀리언이 즐겨 만든 퍼즐.

Q138 연립방정식 심화 활용

강물이 일정한 속력으로 흐르는 강에서 배가 상류 A에서 하류 B까지 내려가는 데 2시간, 다시 B에서 A까지 거슬러 올라가는 데 3시간 걸렸다. 강물의 속력이 시속 4km일 때, A와 B 사이의 거리는 몇 km인가? (배의 정지수면 속력은 일정)

①) ① 36km

②) ② 42km

③) ③ 48km

④) ④ 54km

🎯 **정답: ③ 48km**

📖 1단계: 배의 정지수면 속력을 시속 v km, A-B 거리를 d km라 하자. 내려갈 때 속력 = v+4, 올라갈 때 속력 = v-4.

2단계: 거리 = 속력×시간이므로 $d = 2(v + 4)$ ... ①, $d = 3(v - 4)$ ... ②

3단계: ①=② → $2(v + 4) = 3(v - 4) \rightarrow 2v + 8 = 3v - 12 \rightarrow v = 20$ (km/h)

4단계: $d = 2(20 + 4) = 48$ km

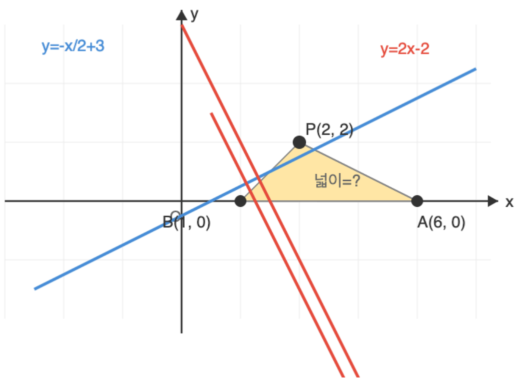
🧠 풀이 전략: 강물 속력 문제는 "배 자체 속력 ± 강물 속력"을 두 미지수가 아닌 합과 차로 보는 것이 핵심. 두 방향의 거리는 같다는 등식을 세우면 미지수 v 하나로 정리된다.

💡 고대 중국 수학서『구장산술(九章算術)』에 이미 비슷한 강물 속력 문제가 등장하며, 동서양 수학 문제의 가장 오래된 유형 중 하나다.

Q139 일차함수 응용

좌표평면 위에 두 직선 $y = -\frac{1}{2}x + 3$과 $y = 2x - 2$가 있다. 두 직선과 x축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 구하시오.

두 직선과 x축으로 둘러싸인 삼각형 ABP



①) ① 4

②) ② 5

③) ③ 6

④) ④ 8

🎯 **정답: ② 5**

📖 1단계: 두 직선의 교점 구하기. $-\frac{1}{2}x + 3 = 2x - 2 \rightarrow \frac{5}{2}x = 5 \rightarrow x = 2, y = 2$. 교점 P(2, 2).

2단계: 각 직선의 x절편 구하기. $y = -\frac{1}{2}x + 3$에서 $y = 0$이면 $x = 6 \rightarrow$ A(6,0). $y = 2x - 2$에서 $y = 0$이면 $x = 1 \rightarrow$ B(1,0).

3단계: 삼각형 ABP의 밑변 AB = 6-1 = 5, 높이 = 점 P의 y좌표 = 2.

4단계: 넓이 = $\frac{1}{2} \times 5 \times 2 = 5$

🧠 풀이 전략: 두 직선과 x축이 만드는 삼각형은 "두 x절편을 밑변, 교점의 y좌표를 높이"로 보는 것이 정석. 교점만 구하면 좌표 없이도 넓이 식이 결정된다.

💡 세 직선이 만드는 삼각형의 넓이는 행렬식(determinant) 공식으로 한 번에 계산할 수 있다. 고등학교 이상에서 배우는 도구다.

Q140 부등식 활용 심화

어떤 가게에서 한 개에 800원인 상품 A와 한 개에 1200원인 상품 B를 합쳐서 20개 사려고 한다. 전체 가격이 20000원 이하가 되도록 할 때, 상품 B를 최대 몇 개까지 살 수 있는가?

①) ① 8개

②) ② 9개

③) ③ 10개

④) ④ 11개

🎯 **정답: ③ 10개**

📖 1단계: 상품 B를 x개 사면 상품 A는 (20-x)개. (단, 0≤x≤20)

2단계: 가격 조건: $800(20 - x) + 1200x \leq 20000$

3단계: $16000 - 800x + 1200x \leq 20000 \rightarrow 400x \leq 4000 \rightarrow x \leq 10$

4단계: x는 자연수(또는 0 이상의 정수)이므로 최대 10개.

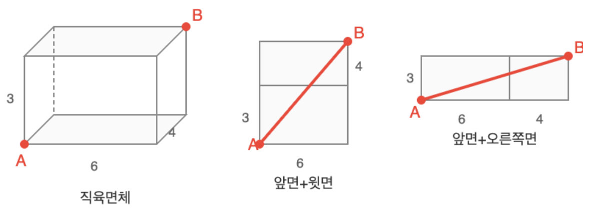
🧠 풀이 전략: 두 종류 상품의 개수와 가격 제약은 "한 변수로 정리(나머지를 20-x로 표현)"하는 것이 핵심. 부등식의 해는 정수 조건과 실제 의미(0개 이상)도 함께 고려해야 한다.

💡 이런 유형의 최적화 문제는 '선형계획법(Linear Programming)'의 가장 기초 사례로, 컴퓨터·경영학에서 자원 배분에 널리 쓰인다.

Q141 피타고라스 활용

가로 6cm, 세로 4cm, 높이 3cm인 직육면체의 한 꼭짓점 A에서 대각선 위의 꼭짓점 B까지 직육면체 표면을 따라 가는 최단 거리를 구하시오. (직육면체 안을 통과할 수 없음)

직육면체와 전개도 위 최단 거리



최단 거리=?

①) ① $\sqrt{74}$ cm
②) ② $\sqrt{85}$ cm
③) ③ $\sqrt{97}$ cm
④) ④ $\sqrt{109}$ cm

🎯 **정답: ② $\sqrt{85}$ cm**

📖 1단계: 직육면체 표면 최단경로는 전개도 위의 직선거리. 전개 방법은 3가지가 있고 각각 비교해야 한다.

2단계: ① 앞면+윗면 펼침: 직선거리 = $\sqrt{(6+3)^2+4^2} = \sqrt{81+16} = \sqrt{97}$

3단계: ② 앞면+오른쪽면 펼침: 직선거리 = $\sqrt{(6+4)^2+3^2} = \sqrt{100+9} = \sqrt{109}$

4단계: ③ 옆면+윗면 펼침(다른 경로): 직선거리 = $\sqrt{6^2+(4+3)^2} = \sqrt{36+49} = \sqrt{85}$

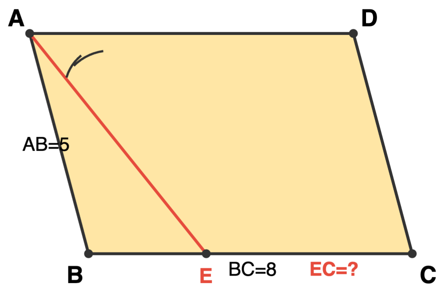
5단계: 가장 작은 값은 $\sqrt{85}$.

🧠 풀이 전략: 직육면체 표면 최단경로는 "펼치는 방법"에 따라 거리가 달라지므로 모든 경우를 비교해야 한다. 가로·세로·높이 중 어느 두 면을 합쳐 펼치느냐에 따라 직선거리가 달라진다.

💡 개미가 직육면체 위를 기어가는 최단경로 문제는 19세기 영국 수학자 헨리 듀드니의 'Spider and Fly' 퍼즐로 유명해졌다.

Q142 도형 성질 증명

평행사변형 ABCD에서 ∠A의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 E라 하자. AB=5cm, BC=8cm일 때, EC의 길이는?



①) ① 2cm
②) ② 3cm
③) ③ 4cm
④) ④ 5cm

🎯 **정답: ② 3cm**

📖 1단계: AD ∥ BC(평행사변형 성질)이므로 ∠DAE = ∠AEB(엇각).
2단계: AE가 ∠A의 이등분선이므로 ∠BAE = ∠DAE.
3단계: 따라서 ∠BAE = ∠AEB. 즉, △ABE는 두 밑각이 같은 이등변삼각형이므로 BE = AB = 5cm.
4단계: EC = BC - BE = 8 - 5 = 3cm.

🧠 풀이 전략: 각이등분선과 평행선이 만나면 "엇각=이등분된 각"이 되어 이등변삼각형이 만들어진다. 이 패턴은 평행사변형, 사다리꼴 문제에서 반복되는 핵심 도구.

💡 각이등분선과 평행선의 조합은 유클리드 『원론』 1권 명제 5의 직접적 응용으로, 2300년 된 고전 증명 패턴이다.

Q143 유리수·순환소수 추론

분수 $\frac{a}{60}$이 유한소수가 되도록 하는 한 자리 자연수 a의 개수는?

①) ① 2개
②) ② 3개
③) ③ 4개
④) ④ 5개

🎯 **정답: ② 3개**

📖 1단계: 분수가 유한소수가 되려면 기약분수의 분모가 2와 5만의 곱이어야 한다.
2단계: $60 = 2^2 \times 3 \times 5$이므로, $\frac{a}{60}$이 유한소수가 되려면 a가 3의 배수여서 분모의 3을 약분으로 없애야 한다.
3단계: 한 자리 자연수 중 3의 배수: 3, 6, 9.
4단계: 검증. $\frac{3}{60} = \frac{1}{20} = 0.05$(유한), $\frac{6}{60} = \frac{1}{10} = 0.1$(유한), $\frac{9}{60} = \frac{3}{20} = 0.15$(유한).
5단계: 답은 3개.

🧠 풀이 전략: 분수 유한소수 판정의 핵심은 "기약분수의 분모가 $2^a \times 5^b$ 꼴인가?"이다. 분모에 다른 소인수(3, 7, 11 등)가 있으면 분자가 그 소인수의 배수여야 약분되어 사라진다.

💡 십진법에서 유한소수가 되는 분수의 분모 조건이 2와 5인 이유는 10=2×5이기 때문이다. 12진법이라면 2와 3이 조건이 된다.

Q144 경시 확률·퍼즐

1부터 9까지의 숫자가 적힌 9장의 카드에서 서로 다른 3장을 뽑아 세 자리 자연수를 만든다. 이 수가 짝수이면서 100의 자리 숫자가 일의 자리 숫자보다 큰 경우의 수는?

①) ① 84개

②) ② 96개

③) ③ 112개

④) ④ 140개

🎯 **정답: ③ 112개**

📖 1단계: 일의 자리는 짝수여야 하므로 {2, 4, 6, 8} 중 하나. 일의 자리를 d라 하자.
2단계: 100의 자리 h는 d보다 커야 하고, d≠h.
- d=2: h ∈ {3,4,5,6,7,8,9} → 7가지
- d=4: h ∈ {5,6,7,8,9} → 5가지
- d=6: h ∈ {7,8,9} → 3가지
- d=8: h ∈ {9} → 1가지
3단계: h, d가 정해지면 10의 자리 t는 1~9 중 h, d를 제외한 7개에서 선택.
4단계: 경우의 수 합 = (7+5+3+1)×7 = 16×7 = 112.

🧠 풀이 전략: "짝수 조건(일의 자리)"과 "부등호 조건(100의 자리>일의 자리)"을 동시에 만족시키려면 일의 자리부터 고정하고 그에 따른 100의 자리 후보를 세는 것이 정석. 마지막으로 자유로운 10의 자리 경우를 곱한다.

💡 이런 식의 "고정-탐색-자유" 카운팅은 IMO(국제수학올림피아드) 조합 문제에서도 자주 등장하는 기본 기법이다.

Q145 지수·식 계산 심화

$2^{12} \times 5^{10}$은 몇 자리의 자연수인가?

①) ① 11자리

②) ② 12자리

③) ③ 13자리

④) ④ 14자리

🎯 **정답: ① 11자리**

📖 1단계: 지수의 짝을 맞추기 위해 변형한다. $2^{12} \times 5^{10} = 2^2 \times 2^{10} \times 5^{10} = 2^2 \times (2 \times 5)^{10} = 4 \times 10^{10}$
2단계: $4 \times 10^{10} = 40000000000$ 이다.
3단계: 이 수는 맨 앞의 4 뒤에 0이 10개 있으므로 $1 + 10 = 11$자리 수이다.
4단계: 따라서 정답은 ① 11자리.

🧠 풀이 전략: $2^a \times 5^b$ 꼴의 자릿수는 "2와 5의 지수를 맞춰 10^k로 만들고 남은 인수를 곱한다"가 핵심. 남은 인수의 자릿수에 k를 더한다.

💡 N의 자릿수는 $\lfloor \log_{10} N \rfloor + 1$로 구할 수 있다. 고등학교 로그 단원에서 다시 만나게 될 공식이다.

Q146 연립방정식 심화 활용

세 수 x, y, z에 대해 $x+y=7$, $y+z=10$, $z+x=9$를 만족할 때, $x \times y \times z$의 값은?

①) ① 36

②) ② 48

③) ③ 60

④) ④ 72

🎯 **정답: ④ 72**

📖 1단계: 세 식을 모두 더한다. $(x+y)+(y+z)+(z+x)=7+10+9$

2단계: $2(x+y+z)=26 \rightarrow x+y+z=13$

3단계: 각 변수 구하기. $z=13-(x+y)=13-7=6$, $x=13-(y+z)=13-10=3$, $y=13-(z+x)=13-9=4$

4단계: $xyz=3\times4\times6=72$

5단계: 재검토. $x=3, y=4, z=6$이면 $x+y=7$ ✓, $y+z=10$ ✓, $z+x=9$ ✓. $xyz=72$. 정답은 ④ 72.

🧠 풀이 전략: 3변수 연립방정식에서 모든 식을 더해 "전체 합"을 먼저 구하는 기법은 정형 패턴이다. 그 합에서 각 식의 좌변을 빼면 한 변수가 한 번에 나온다.

💡 이 기법은 행렬·선형대수에서 "가우스 소거법"의 가장 단순한 형태다. 컴퓨터 그래픽스, 통계학에서 광범위하게 쓰인다.

Q147 유리수·순환소수 추론

분수 $\frac{n}{420}$이 유한소수로 나타내어지는 자연수 n의 값 중 1≤n≤100인 것의 개수는? (단, 분수는 기약분수가 아닐 수도 있다.)

①) ① 4개

②) ② 14개

③) ③ 16개

④) ④ 21개

🎯 **정답: ① 4개**

📖 1단계: $420=2^2\times3\times5\times7$로 소인수분해한다.

2단계: $\frac{n}{420}$이 유한소수가 되려면 약분 후 분모의 소인수가 2와 5뿐이어야 한다. 따라서 분모의 3과 7이 약분되어 사라지도록 분자 n이 $3\times7=21$의 배수여야 한다.

3단계: $1\le n\le100$에서 21의 배수는 $21, 42, 63, 84$로 4개이다.

4단계: 따라서 정답은 ① 4개.

🧠 풀이 전략: 유한소수 조건은 약분 후 분모의 소인수가 2와 5뿐이어야 한다는 것이 핵심. 420 = $2^2\cdot3\cdot5\cdot7$에서 3과 7이 약분되어야 하므로 n은 21의 배수여야 함을 추론한다.

💡 분모 420은 1년의 약수와 관련된 수로, 약수 개수가 24개나 된다.

Q148 지수·식 계산 심화

$x + \frac{1}{x} = 4$일 때, $x^3 + \frac{1}{x^3}$의 값은?

①) ① 48

②) ② 52

③) ③ 60

④) ④ 64

🎯 **정답: ② 52**

📖 1단계: 세제곱 공식 $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$를 이용한다. $a = x$, $b = \frac{1}{x}$로 놓으면 $ab = 1$.

2단계: $\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3 \cdot 1 \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right)$이다.

3단계: $4^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3 \cdot 4$이므로 $64 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 12$.

4단계: 따라서 $x^3 + \frac{1}{x^3} = 64 - 12 = 52$.

🧠 풀이 전략: x를 직접 구하면 무리수가 되어 복잡하다. 대신 세제곱 전개 공식을 이용해 $x \cdot \frac{1}{x} = 1$이라는 대칭성을 활용하면 깔끔하게 풀린다. 대칭식 변형의 핵심.

💡 이런 대칭식은 황금비 관련 수식에서도 자주 나타난다. $\phi - \frac{1}{\phi} = 1$이 황금비의 정의 중 하나이다.

Q149 부등식 활용 심화

어느 가게에서 한 개에 800원에 사 온 물건을 정가의 20%를 할인해서 팔아도 원가의 10% 이상의 이익을 남기려고 한다. 정가는 최소 얼마 이상이어야 하는가?

①) ① 1000원

②) ② 1100원

③) ③ 1200원

④) ④ 1300원

🎯 **정답: ② 1100원**

📖 1단계: 정가를 x원이라 하면, 20% 할인한 판매가는 0.8x원이다.

2단계: 이익은 (판매가 - 원가) = 0.8x - 800 (원). 원가의 10% 이상의 이익을 남기려면 0.8x - 800 ≥ 800 × 0.1 = 80이어야 한다.

3단계: 0.8x ≥ 880, 양변을 0.8로 나누면 x ≥ 1100.

4단계: 따라서 정가는 최소 1100원 이상이어야 한다.

🧠 풀이 전략: 이익=판매가-원가의 정의를 적용하고, '10% 이상'을 부등호 ≥로 정확히 옮기는 것이 관건. 할인율 20%를 0.8배로 변환하는 비율 감각도 필요.

💡 실제 마트는 보통 30-50% 마진을 두고 정가를 정한다.

Q150 연립방정식 심화 활용

강물이 흐르는 강에서 배가 상류로 12 km 거슬러 올라가는 데 3시간, 같은 거리를 하류로 내려오는 데 2시간이 걸렸다. 정지된 물에서의 배의 속력과 강물의 속력의 합은 몇 km/h인가?

①) ① 5 km/h

②) ② 6 km/h

③) ③ 7 km/h

④) ④ 8 km/h

🎯 **정답: ② 6 km/h**

📖 1단계: 정지된 물에서의 배의 속력을 x km/h, 강물의 속력을 y km/h라 하자. 상류로 거슬러 올라갈 때 실제 속력은 $(x-y)$, 하류로 내려올 때 실제 속력은 $(x+y)$이다.

2단계: 상류는 $12=(x-y)\times 3$이므로 $x-y=4$. 하류는 $12=(x+y)\times 2$이므로 $x+y=6$.

3단계: 두 식을 더하면 $2x=10$, 즉 $x=5$이고 $y=6-5=1$이다.

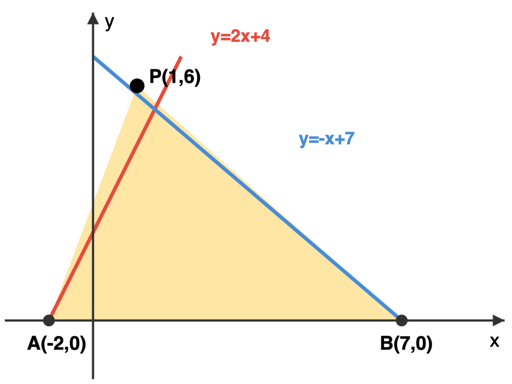
4단계: 묻는 값은 배의 속력과 강물의 속력의 합 $x+y=5+1=6$이다. 따라서 정답은 ② 6 km/h.

🧠 풀이 전략: 강물 문제의 핵심은 '상대속도'. 상류는 속도가 빠지고, 하류는 더해진다. 거리=속력×시간 공식으로 두 방정식을 세우고 가감법으로 푼다.

💡 이 방법은 2000년 전 그리스 학자 디오판토스의 산술책에도 등장한다.

Q151 일차함수 응용

두 직선 $y=2x+4$와 $y=-x+7$이 x축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 두 직선의 교점을 P라 하자. 삼각형 ABP의 넓이는?



①) ① 24

②) ② 27

③) ③ 30

④) ④ 36

🎯 **정답: ② 27**

📖 1단계: 점 A는 $y=2x+4$가 x축과 만나는 점. $0=2x+4 \Rightarrow x=-2$. 따라서 A(-2, 0).

2단계: 점 B는 $y=-x+7$이 x축과 만나는 점. $0=-x+7 \Rightarrow x=7$. 따라서 B(7, 0).

3단계: 교점 P는 두 식을 연립. $2x+4=-x+7 \Rightarrow 3x=3 \Rightarrow x=1, y=6$. 따라서 P(1, 6).

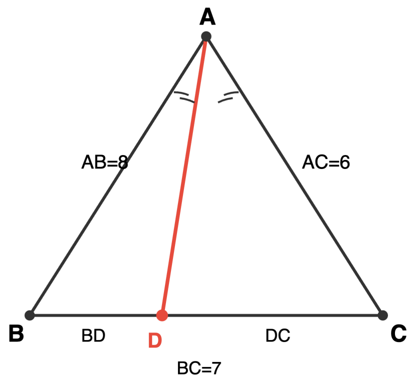
4단계: 밑변 AB = 7-(-2) = 9, 높이 = P의 y좌표 = 6. 넓이 = $\frac{1}{2}\times 9\times 6=27$.

🧠 풀이 전략: x축 위의 두 점을 밑변으로 잡으면 높이는 교점의 y좌표가 된다는 것이 핵심 통찰. 따로 거리 공식을 쓸 필요 없이 좌표 차이만 계산하면 된다.

💡 이런 삼각형 넓이 계산은 좌표기하의 신발끈 공식의 특수한 경우이다.

Q152 도형 성질 증명

삼각형 ABC에서 ∠A의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D라 하자. AB = 8, AC = 6, BC = 7일 때, BD의 길이는? (각의 이등분선의 성질: BD:DC = AB:AC)



①) ① 3
②) ② $\frac{7}{2}$
③) ③ 4
④) ④ $\frac{14}{3}$

🎯 **정답: ③ 4**

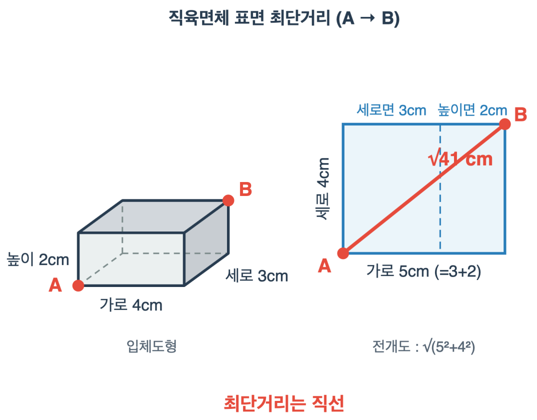
📖 1단계: 각의 이등분선 정리에 의해 BD:DC = AB:AC = 8:6 = 4:3이다.
2단계: BD + DC = BC = 7이므로, BD = $\frac{4}{4+3} \times 7 = \frac{4}{7} \times 7 = 4$.
3단계: 따라서 DC = 7 - 4 = 3. 비율 확인: 4:3 = 8:6 ✓.
4단계: 답은 BD = 4.

🧠 풀이 전략: 각의 이등분선 정리는 변의 비가 분할되는 비와 같다는 강력한 도구. 비례식을 BD = $\frac{AB}{AB+AC} \times BC$로 변환하면 직접 계산 가능.

💡 각의 이등분선 정리는 유클리드 원론 6권 명제 3에 등장한다.

Q153 피타고라스 활용

가로 4 cm, 세로 3 cm, 높이 2 cm인 직육면체의 한 꼭짓점 A에서 대각선으로 마주 보는 꼭짓점 B까지 표면을 따라 가는 최단거리는?



①) ① $\sqrt{45}$ cm
②) ② $\sqrt{41}$ cm
③) ③ $\sqrt{61}$ cm
④) ④ $\sqrt{74}$ cm

🎯 **정답: ② $\sqrt{41}$ cm**

📖 1단계: 표면 최단경로는 두 면을 펼친 전개도에서의 직선거리이다. 세 가지 전개를 비교한다.

2단계:

- 세로 3과 높이 2를 이어 붙이고 가로 4를 다른 변으로: $\sqrt{(3+2)^2+4^2} = \sqrt{25+16} = \sqrt{41}$
- 가로 4와 높이 2를 이어 붙이고 세로 3을 다른 변으로: $\sqrt{(4+2)^2+3^2} = \sqrt{36+9} = \sqrt{45}$
- 가로 4와 세로 3을 이어 붙이고 높이 2를 다른 변으로: $\sqrt{(4+3)^2+2^2} = \sqrt{49+4} = \sqrt{53}$

3단계: 세 값 중 최솟값은 $\sqrt{41} \approx 6.40$ cm이다. 따라서 최단거리는 $\sqrt{41}$ cm.

🧠 풀이 전략: 3차원 공간 문제를 2차원으로 변환하는 핵심 기법. 직육면체 표면을 어느 면을 따라 펼치느냐에 따라 길이가 달라지므로 모든 경우를 비교해야 한다.

💡 개미가 직육면체 표면을 따라 이동하는 문제로 유명하다. '개미와 설탕' 문제라고도 한다.

Q154 경시 확률·퍼즐

5명의 학생 A, B, C, D, E가 일렬로 서려고 한다. A와 B가 서로 이웃하지 않으면서, C는 항상 D보다 앞에 서야 하는 경우의 수는?

①) ① 24
②) ② 36
③) ③ 48
④) ④ 60

🎯 **정답: ② 36**

📖 1단계: 전체 5명이 일렬로 서는 경우의 수는 5! = 120이다. 그중 C가 D보다 앞인 경우는 절반인 60.
2단계: A와 B가 이웃하는 경우를 빼야 한다. A와 B를 한 묶음으로 보면 4! × 2 = 48이고, 그중 C가 D보다 앞인 경우는 절반인 24.
3단계: 따라서 (C가 D보다 앞) 중에서 (A와 B가 이웃하지 않는) 경우 = 60 - 24 = 36.
4단계: 답은 36가지.

🧠 풀이 전략: 두 조건을 동시에 만족시키려면 '대칭성'과 '여사건'을 활용한다. C-D 순서 조건은 절반으로 나누고, A-B 이웃 조건은 묶음으로 처리 후 빼는 것이 핵심.

💡 이런 문제는 '제한 조건이 있는 순열'의 전형이며, 알고리즘 면접에서도 자주 나온다.

Q155 유리수·순환소수 추론

$0.\bar{3} + 0.1\bar{6}$를 기약분수로 나타내면?

①) ① $\frac{1}{2}$
②) ② $\frac{3}{7}$
③) ③ $\frac{2}{3}$
④) ④ $\frac{5}{6}$

🎯 **정답: ① $\frac{1}{2}$**

📖 1단계: $0.\bar{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.
2단계: $0.1\bar{6}$를 분수로 변환. x = 0.1666...로 놓으면 10x = 1.666..., 100x = 16.666.... 100x - 10x = 90x = 15. 따라서 x = $\frac{15}{90} = \frac{1}{6}$.
3단계: $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
4단계: 따라서 답은 $\frac{1}{2}$.

🧠 풀이 전략: 순수 순환소수와 혼순환소수 둘 다 분수 변환 공식을 쓴다. 혼순환의 경우 '소수점 첫째 자리부터 순환이 시작되도록' 10배 후 빼기 기법을 적용한다.

💡 순환소수의 분수 변환은 무한등비급수의 합 공식과 본질적으로 같다.

Q156 연립방정식 심화 활용

세 수 x, y, z가 x + y + z = 12, x + 2y + 3z = 20, 2x + y + z = 15를 만족할 때, xyz의 값은?

①) ① -30
②) ② 36
③) ③ 42
④) ④ 60

🎯 **정답: ① -30**

📖 1단계: 세 식을 식①, 식②, 식③이라 하자. 식③ - 식① $= (2x + y + z) - (x + y + z) = x = 15 - 12 = 3$이므로 $x = 3$.
2단계: 식①에 $x = 3$ 대입: $y + z = 9$. 식②에 $x = 3$ 대입: $2y + 3z = 17$.
3단계: $y = 9 - z$를 $2y + 3z = 17$에 대입하면 $2(9 - z) + 3z = 17$, 즉 $18 + z = 17$이므로 $z = -1$, $y = 10$.
4단계: 검산하면 식① $3 + 10 + (-1) = 12$ ✓, 식② $3 + 20 + (-3) = 20$ ✓, 식③ $6 + 10 + (-1) = 15$ ✓.
5단계: $xyz = 3 \times 10 \times (-1) = -30$. 따라서 정답은 ① -30.

🧠 풀이 전략: 3변수 연립방정식은 두 식의 차로 한 변수를 먼저 구하는 것이 핵심. 식들 간의 계수 차이를 관찰해 효과적인 소거법을 선택한다.

💡 3변수 연립은 행렬과 가우스 소거법으로 일반화되며, 컴퓨터 그래픽스에 필수적이다.

Q157 부등식 활용 심화

|2x - 5| < 7을 만족하는 정수 x의 개수는?

①) ① 5

②) ② 6

③) ③ 7

④) ④ 8

🎯 **정답: ② 6**

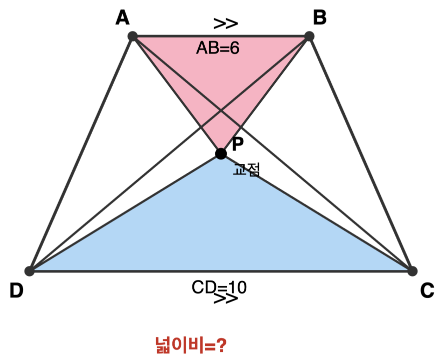
📖 1단계: 절댓값 부등식 $|2x-5|<7$은 $-7<2x-5<7$과 동치이다.
2단계: 각 변에 5를 더하면 $-2<2x<12$이고, 양변을 2로 나누면 $-1<x<6$이다.
3단계: $-1<x<6$을 만족하는 정수 x는 $0, 1, 2, 3, 4, 5$의 6개이다.
4단계: 따라서 정답은 ② 6.

🧠 풀이 전략: 절댓값 부등식 |A| < B는 -B < A < B로 풀어쓴다. 부등호가 strict인지 등호 포함인지 정확히 따져 정수해 개수를 센다.

💡 절댓값 부등식은 거리 개념으로 해석할 수 있다. |x-a|<r은 a로부터 거리 r 이내의 점들이다.

Q158 닮음 심화

사다리꼴 ABCD에서 AB ∥ CD이고 AB=6, CD=10이다. 두 대각선 AC와 BD가 만나는 점을 P라 할 때, △ABP와 △CDP의 넓이의 비를 구하시오. (왜 그런 비가 나오는지 닮음을 이용해 설명할 수 있어야 한다.)



①) ① 9 : 25

②) ② 3 : 5

③) ③ 6 : 10

④) ④ 18 : 50

🎯 **정답: ① 9 : 25**

📖 1단계: AB ∥ CD이므로 ∠PAB=∠PCD, ∠PBA=∠PDC (엇각). 따라서 △ABP ∽ △CDP (AA 닮음). 2단계: 닮음비는 대응변의 비, AB:CD = 6:10 = 3:5. 3단계: 닮음인 두 도형의 넓이의 비는 닮음비의 제곱이므로 $3^2 : 5^2 = 9 : 25$.

🧠 풀이 전략: 평행선이 잘리는 두 삼각형은 거의 항상 닮음을 만든다. 엇각으로 두 각이 같음을 보여 AA 닮음을 적용한 후, '넓이비는 닮음비의 제곱'이라는 핵심 공식을 활용한다. 길이비 3:5에 속아 그대로 답하면 함정에 빠진다.

💡 사다리꼴 두 대각선이 만드는 네 삼각형 중, 평행한 두 변에 닿은 두 삼각형(△ABP, △CDP)은 닮음이지만, 양 옆의 두 삼각형(△APD, △BPC)은 합동에 가까운 같은 넓이를 가진다.

Q159 지수·식 계산 심화

$a-\frac{1}{a}=3$ (단, $a>0$)일 때, $a^3-\frac{1}{a^3}$의 값을 구하시오.

①) ① 27
②) ② 30
③) ③ 36
④) ④ 45

🎯 **정답: ③ 36**

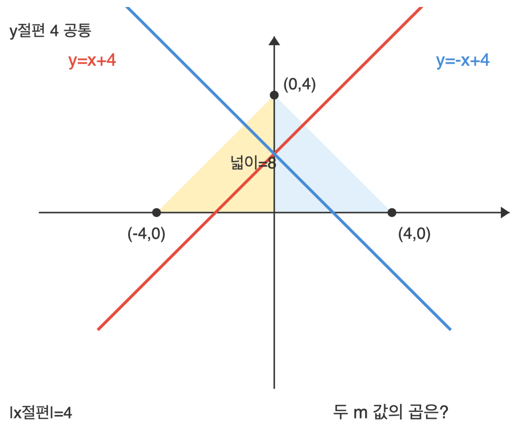
📖 1단계: 양변을 제곱하면 $\left(a-\frac{1}{a}\right)^2=a^2-2+\frac{1}{a^2}=9$이므로 $a^2+\frac{1}{a^2}=11$. 2단계: 곱셈공식 $A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)$를 $A=a, B=\frac{1}{a}$에 적용하면 $a^3-\frac{1}{a^3}=\left(a-\frac{1}{a}\right)\left(a^2+1+\frac{1}{a^2}\right)$. 3단계: 1단계 결과를 대입, $3\times(11+1)=3\times12=36$.

🧠 풀이 전략: a 자체를 구하지 않고 식 변형만으로 푼다. (1) 제곱해서 $a^2+\frac{1}{a^2}$를 얻고, (2) 세제곱 차의 인수분해 공식 $A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)$를 떠올린다. $AB=a\cdot\frac{1}{a}=1$이라는 점이 핵심.

💡 a가 양수일 때 $a-\frac{1}{a}=3$의 해는 $a=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$로 무리수지만, $a^3-\frac{1}{a^3}$의 값은 정수 36이 된다. 식 자체의 대칭성이 무리수 부분을 깔끔히 상쇄한다.

Q160 일차함수 응용

직선 $y=mx+4$가 x축, y축과 만나서 만드는 삼각형의 넓이가 8이 되도록 하는 모든 m의 값의 곱을 구하시오. (단, $m\neq0$)



①) ① 1
②) ② -1
③) ③ 2
④) ④ -2

🎯 **정답: ② -1**

📖 1단계: 직선의 y절편은 4, x절편은 $-\frac{4}{m}$. 좌표축과 이루는 삼각형은 두 절편을 직각변으로 갖는 직각삼각형. 2단계: 넓이 = $\frac{1}{2}\times\left|-\frac{4}{m}\right|\times4=\frac{8}{|m|}$. 이 값이 8이 되려면 $|m|=1$, 즉 $m=1$ 또는 $m=-1$. 3단계: 두 값의 곱 = $1\times(-1)=-1$.

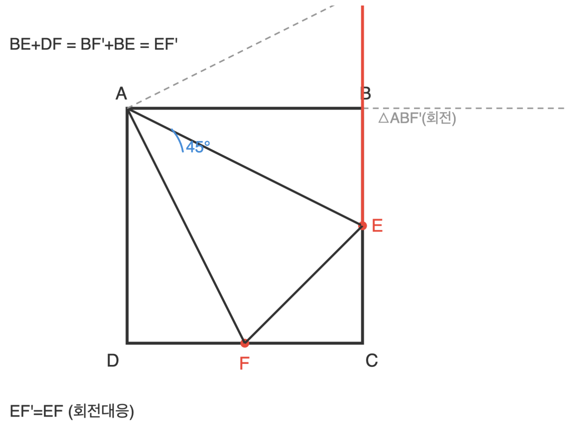
🧠 풀이 전략: x절편이 음수일 수도 있으므로 절댓값 처리가 필수. m의 부호에 따라 직선이 좌우 대칭 위치에 그려져 두 답이 동시에 나오는 함정. '넓이가 같아지는 두 직선'을 동시에 머릿속으로 그려 보자.

📝 중2 수학 심화

총 40문제 · 문제와 정답·풀이 포함

Q161 도형 성질 증명

한 변의 길이가 6인 정사각형 ABCD에서 변 BC 위의 점 E와 변 CD 위의 점 F가 ∠EAF=45°를 만족한다. 'BE + DF = EF가 항상 성립한다'를 증명할 때, 핵심이 되는 보조선(또는 보조 도형)은 무엇인가?



①) ① △ADF를 점 A 중심으로 반시계방향 90° 회전시켜 △ABF'를 만든다

②) ② 점 E와 점 F를 잇고 그 중점을 표시한다

③) ③ 점 A에서 EF에 수선의 발을 내린다

④) ④ 정사각형의 두 대각선을 그어 교점을 표시한다

🎯 **정답: ① △ADF를 점 A 중심으로 반시계방향 90° 회전시켜 △ABF'를 만든다**

📖 1단계: △ADF를 점 A 중심으로 반시계방향 90° 회전시키면 D는 B로 가고 F는 변 BC의 연장선 위 점 F'로 간다. 회전이므로 AF=AF', DF=BF'이며 ∠F'AB = ∠FAD. 2단계: ∠BAD=90°이고 ∠EAF=45°이므로 ∠FAD+∠BAE = 90°-45° = 45°. 따라서 ∠F'AE = ∠F'AB+∠BAE = ∠FAD+∠BAE = 45° = ∠EAF. 3단계: △AEF와 △AEF'에서 AE 공통, AF=AF', ∠EAF=∠EAF' → SAS 합동. 따라서 EF = EF' = BE+BF' = BE+DF.

🧠 풀이 전략: 정사각형(=직각이 끼어 있는 도형)에서 두 변에 점이 있고 사이 각이 모서리 각의 절반이라면, 한 변을 회전으로 다른 변에 이어 붙여 '직선 위의 합'으로 바꾸는 회전합동이 통한다.

💡 이 회전 발상은 일본 수학자들이 즐겨 다루는 '하코쿠[半角]의 정리'로 알려져 있고, 정사각형 안의 45° 각을 다루는 거의 모든 문제에서 결정타로 쓰인다.

Q162 유리수·순환소수 추론

다음 세 순환소수의 합 $0.\overline{1} + 0.\overline{12} + 0.\overline{123}$을 기약분수로 나타냈을 때, 그 분모를 구하시오.

①) ① 1221

②) ② 333

③) ③ 999

④) ④ 3663

🎯 **정답: ① 1221**

📖 1단계: 각 순환소수를 분수로 변환. $0.\overline{1} = \frac{1}{9}$, $0.\overline{12} = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}$, $0.\overline{123} = \frac{123}{999} = \frac{41}{333}$. 2단계: 9, 33, 333의 최소공배수를 구한다. $9 = 3^2$, $33 = 3 \cdot 11$, $333 = 3^2 \cdot 37$이므로 LCM = $3^2 \cdot 11 \cdot 37 = 3663$. 통분 후 합 = $\frac{407}{3663} + \frac{444}{3663} + \frac{451}{3663} = \frac{1302}{3663}$. 3단계: 약분. $1302 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 31$, $3663 = 3^2 \cdot 11 \cdot 37$, 공약수는 3. $\frac{1302}{3663} = \frac{434}{1221}$. 분자 434와 1221의 공약수를 다시 확인하면 1뿐. 따라서 기약분수의 분모는 1221.

🧠 풀이 전략: 순환소수 → 분수 변환 후 통분 → 덧셈 → 약분의 순서. 각 분모(9, 99, 999, ...)를 소인수분해하고 LCM을 정확히 구한다. 마지막 약분에서 분자/분모 모두 소인수분해해 공약수를 빠짐없이 찾는 것이 핵심.

💡 분모가 9, 99, 999처럼 9의 반복일 때, 분자의 자릿수가 곧 순환마디의 길이가 된다. 이게 '$0.\overline{abc} = \frac{abc}{999}$' 공식의 본질이다.

Q163 부등식 활용 심화

세 변의 길이가 모두 자연수이고 둘레가 18인 삼각형은 모두 몇 가지인가? (단, 합동인 삼각형은 같은 것으로 본다.)

①) ① 5가지

②) ② 6가지

③) ③ 7가지

④) ④ 8가지

🎯 **정답: ③ 7가지**

📖 1단계: 세 변을 $a \le b \le c$ (자연수)라 하고 $a + b + c = 18$. 삼각부등식 $a + b > c$ 필요. 2단계: $a + b > c$이고 $a + b = 18 - c$이므로 $18 - c > c$, 즉 $c < 9$. 또 c가 가장 큰 변이므로 $3c \ge 18$, $c \ge 6$. 따라서 $c = 6, 7, 8$. 3단계: $c = 6$이면 $a + b = 12$, $a \le b \le 6$이라 $a = b = 6$ (1가지). $c = 7$이면 $a + b = 11$, $a \le b \le 7$이라 $(a, b) = (4, 7), (5, 6)$ (2가지). $c = 8$이면 $a + b = 10$, $a \le b \le 8$이라 $(a, b) = (2, 8), (3, 7), (4, 6), (5, 5)$ (4가지). 합계 1+2+4 = 7가지.

🧠 풀이 전략: 삼각형 가능 조건은 '가장 긴 변 < 나머지 두 변의 합'. 한 변(가장 긴 변)을 고정한 뒤 나머지를 자연수로 나열하는 체계적 탐색. 정렬($a \le b \le c$)로 중복(합동)을 자동으로 막는다.

💡 삼각부등식이 등호 a+b=c를 허용하지 않는 이유는 그러면 세 점이 일직선 위에 놓여 '뭉개진 삼각형(degenerate triangle)'이 되기 때문이다.

Q164 연립방정식 심화 활용

어떤 자연수 N을 3으로 나누면 1이 남고, 5로 나누면 2가 남고, 7로 나누면 3이 남는다. 이런 자연수 중 가장 작은 N을 구하시오.

①) ① 52

②) ② 47

③) ③ 38

④) ④ 67

🎯 **정답: ① 52**

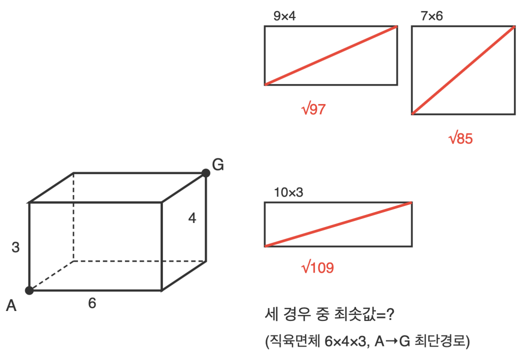
📖 1단계: 5로 나누면 2가 남으므로 $N = 5a + 2$ (a는 0 이상의 정수). 2단계: 이 식이 3으로 나누면 1 남아야 함. $5a + 2$를 3으로 나누면 $5a + 2 \equiv 2a + 2 \pmod 3$이고 이것이 1이 되려면 $2a \equiv -1 \equiv 2 \pmod 3$, 즉 $a \equiv 1 \pmod 3$. $a = 3b + 1$로 두면 $N = 5(3b + 1) + 2 = 15b + 7$. 3단계: 이 식이 7로 나누면 3 남아야 함. $15b + 7$을 7로 나누면 $15b + 7 \equiv b + 0 \equiv b \pmod 7$이고 이것이 3이 되려면 $b \equiv 3 \pmod 7$. 가장 작은 자연수 N은 $b = 3$일 때, $N = 15 \cdot 3 + 7 = 52$. 검산: 52 = 17·3+1 ✓, 52 = 10·5+2 ✓, 52 = 7·7+3 ✓.

🧠 풀이 전략: 세 조건을 한꺼번에 풀려 하지 말고, 한 조건씩 차례로 대입하며 미지수를 줄여나간다. ' $N = 5a + 2 \to 15b + 7 \to 105c + 52$'처럼 매 단계에서 새 변수로 표현하면 마지막에 가장 작은 정수만 대입하면 된다.

💡 이 유형은 약 1700년 전 중국 수학책 '손자산경(孫子算經)'에 처음 등장했고, 오늘날 '중국인의 나머지 정리(Chinese Remainder Theorem, CRT)'로 일반화되어 RSA 암호 등에 사용된다.

Q165 피타고라스 활용

가로 6, 세로 4, 높이 3인 직육면체의 한 꼭짓점에서 공간에서 가장 멀리 떨어진 꼭짓점까지 표면을 따라가는 최단 거리를 구하시오. (단, 곤충처럼 표면 위로만 이동할 수 있다.)



①) ① $\sqrt{97}$

②) ② $\sqrt{85}$

③) ③ $\sqrt{61}$

④) ④ $\sqrt{109}$

🎯 **정답: ② $\sqrt{85}$**

📖 1단계: 곡면 위 최단 경로는 전개도에서 직선 거리로 나타난다. A에서 G까지 가는 표면 경로는 어느 두 면을 지나느냐에 따라 세 가지가 있다. 2단계: (i) 앞면(6×3)과 윗면(6×4)은 길이 6인 변을 공유하므로 펼치면 변이 6과 3+4=7 → $\sqrt{6^2 + 7^2} = \sqrt{85}$. (ii) 앞면(6×3)과 옆면(4×3)은 길이 3인 변을 공유하므로 펼치면 변이 6+4=10과 3 → $\sqrt{10^2 + 3^2} = \sqrt{109}$. (iii) 윗면(6×4)과 옆면(4×3)은 길이 4인 변을 공유하므로 펼치면 변이 6+3=9와 4 → $\sqrt{9^2 + 4^2} = \sqrt{97}$. 3단계: 세 값 중 최솟값. $\sqrt{85} \approx 9.22 < \sqrt{97} \approx 9.85 < \sqrt{109} \approx 10.44$. 답은 $\sqrt{85}$.

🧠 풀이 전략: 공간 표면 위의 최단 경로 문제는 '면을 펼쳐 평면에 깔면 직선이 최단'이라는 원리. 어떤 두 면을 펼치느냐에 따라 답이 달라지므로 세 경우를 모두 따져 가장 짧은 것을 골라야 한다.

💡 이 문제 유형은 '거미와 파리 문제(spider and fly problem)'로 알려져 있다. 직관적으로 떠오르는 경로보다 '돌아가는 듯 보이는' 경로가 더 짧을 수 있어서 오답을 유발하는 대표적 함정 문제.

Q166 경시 확률·퍼즐

1부터 20까지의 자연수 중에서 11개를 임의로 골랐을 때, 그 중에 합이 21이 되는 두 수가 반드시 들어 있음을 보이려고 한다. 어떤 '비둘기집'을 설정하는 것이 가장 적절한가?

①) ① 10개의 비둘기집: {1,2}, {3,4}, ..., {19,20}
②) ② 4개의 비둘기집: 1 - 5, 6 - 10, 11 - 15, 16 - 20
③) ③ 11개의 비둘기집: {1}, {2}, ..., {10}, {11 - 20}
④) ④ 10개의 비둘기집: {1,20}, {2,19}, {3,18}, ..., {10,11}

🎯 **정답: ④ 10개의 비둘기집: {1,20}, {2,19}, {3,18}, ..., {10,11}**

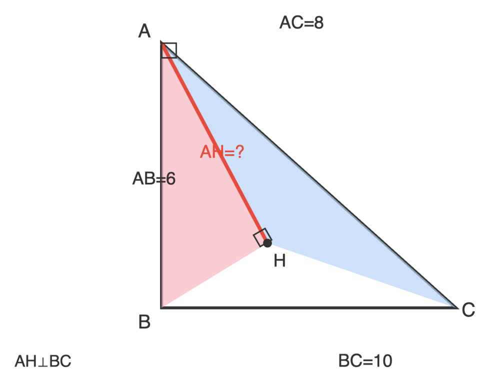
📖 1단계: 합이 21인 두 자연수 쌍을 모두 찾는다. (1,20), (2,19), (3,18), ..., (10,11)로 정확히 10쌍. 이 10쌍을 비둘기집으로 둔다. 2단계: 1부터 20까지의 모든 자연수는 정확히 10개의 비둘기집 중 정확히 한 곳에 속한다(중복도 누락도 없다). 3단계: 11개의 수를 10개의 비둘기집에 나누어 넣으면, 비둘기집 원리에 의해 적어도 한 비둘기집에 두 수가 함께 들어간다. 그 두 수는 같은 쌍이므로 합이 21. 다른 보기는 '합이 21'이라는 결론을 보장하지 못한다.

🧠 풀이 전략: 비둘기집 원리는 'N+1마리를 N개 집에 넣으면 한 집에 2마리 이상 있다'. 핵심은 '내가 보이려는 결론을 만족하도록 비둘기집을 짝지어 정의하는 것'. 합이 21이라는 결론에 맞추어 '합이 21인 쌍'을 그대로 비둘기집으로 삼는다.

💡 비둘기집 원리(Pigeonhole Principle)는 19세기 디리클레가 정리해 'Dirichlet's drawer principle'이라고도 한다. 단순해 보이지만 정수론, 그래프 이론, 컴퓨터 과학에서 강력한 증명 도구로 쓰인다.

Q167 닮음 심화

직각삼각형 ABC에서 ∠A=90°, AB=6, AC=8이다. 점 A에서 빗변 BC에 내린 수선의 발을 H라 할 때, AH의 길이를 구하시오. (닮음을 이용해 두 가지 방법으로 검증할 수 있다.)



①) ① $\frac{18}{5}$
②) ② $\frac{12}{5}$
③) ③ $\frac{24}{5}$
④) ④ $\frac{48}{5}$

🎯 **정답: ③ $\frac{24}{5}$**

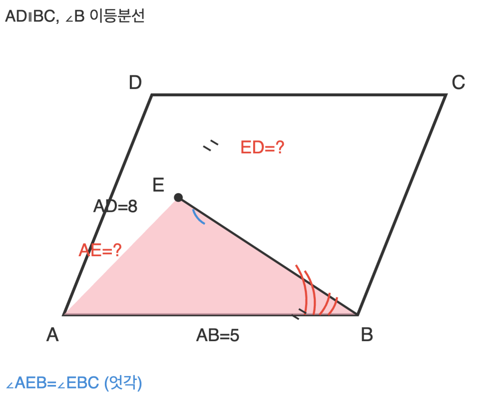
📖 1단계: 피타고라스 정리로 $BC = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$. 2단계: △ABC의 넓이를 두 가지 방법으로 표현. 직각변 기준: $S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$. 빗변 기준: $S = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AH = 5 \cdot AH$. 3단계: 두 표현이 같으므로 $5 \cdot AH = 24$, 따라서 $AH = \frac{24}{5}$. (닮음 검증: △ABC ∽ △HBA (공통각 ∠B, 직각). 대응변비 $\frac{AB}{BC} = \frac{AH}{AC}$에서 $\frac{6}{10} = \frac{AH}{8}$, $AH = \frac{48}{10} = \frac{24}{5}$. 같은 답.)

🧠 풀이 전략: 직각삼각형의 빗변에 내린 수선은 항상 두 작은 삼각형을 만들고, 그 둘은 원래 삼각형과 모두 닮음(AA, 공통각+직각). 가장 빠른 길은 '같은 삼각형 넓이를 두 가지 밑변 기준으로 표현'. 닮음으로 검산할 수 있어 안전.

💡 이 'AH·BC = AB·AC' 공식은 직각삼각형의 빗변 위 수선에서 항상 성립하는 관계식이다. 또한 $AH^2 = BH \cdot HC$가 성립하는데, 이게 바로 '평균비례(기하평균)' 관계의 시작이다.

Q168 도형 성질 증명

평행사변형 ABCD에서 AB=5, AD=8이고, ∠B의 이등분선이 변 AD와 만나는 점을 E라 한다. ED의 길이를 구하시오. (왜 그렇게 되는지 이등변삼각형의 성질로 설명할 수 있어야 한다.)



①) ① 2

②) ② 5

③) ③ 4

④) ④ 3

🎯 **정답: ④ 3**

📖 1단계: BE가 ∠B의 이등분선이므로 ∠ABE = ∠EBC. 한편 평행사변형에서 AD ∥ BC이고 BE가 두 평행선을 자르는 직선이므로 ∠AEB = ∠EBC (엇각). 2단계: 두 식을 합치면 ∠ABE = ∠AEB. 따라서 △ABE는 두 밑각(∠ABE, ∠AEB)이 같은 이등변삼각형이고, 두 밑각의 대변인 AE와 AB가 같다. 즉 AE = AB = 5. 3단계: ED = AD - AE = 8 - 5 = 3.

🧠 풀이 전략: 평행사변형 안에서 각의 이등분선을 다루는 문제는 거의 항상 '평행선의 엇각 → 두 각이 같음 → 이등변삼각형 발견'으로 풀린다. '두 밑각이 같으면 그 대변이 같다'는 이등변삼각형의 핵심 성질을 잊지 말 것.

💡 이 사실은 일반화된다: 평행사변형의 어떤 각의 이등분선이 마주보는 변(또는 그 연장선)을 자르면, 그 거리는 항상 짧은 변의 길이와 같다. AD=AB이면 E와 D가 일치해 각의 이등분선이 마주 꼭짓점을 지나가는 마름모의 성질로 이어진다.

Q169 지수·식 계산 심화

세 수 $A = 2^{40}$, $B = 3^{30}$, $C = 5^{20}$의 크기를 비교하여 작은 것부터 큰 순서로 올바르게 나열한 것은?

①) ① A < B < C

②) ② A < C < B

③) ③ B < A < C

④) ④ C < A < B

🎯 **정답: ②**

📖 1단계: 세 지수 40, 30, 20의 최대공약수는 10이므로 모든 식을 지수가 10인 형태로 변형한다. 2단계: $A = 2^{40} = (2^4)^{10} = 16^{10}$, $B = 3^{30} = (3^3)^{10} = 27^{10}$, $C = 5^{20} = (5^2)^{10} = 25^{10}$. 3단계: 지수가 모두 10으로 같으므로 밑의 크기로 비교하면 16 < 25 < 27. 따라서 A < C < B.

🧠 풀이 전략: 지수와 밑이 모두 다른 거듭제곱을 비교할 때는 지수의 최대공약수를 찾아 같은 지수로 묶는다. 같은 지수로 통일하면 결국 밑끼리만 비교하면 되므로 단순한 자연수 대소 비교 문제로 환원된다.

💡 이 방법은 로그를 사용하지 않고도 거대한 수의 대소를 정확히 비교할 수 있게 해주는 고전적 기법이다.

Q170 지수·식 계산 심화

이차방정식 $x^2 - 3x + 1 = 0$의 한 근 x에 대하여 $x^2 + \frac{1}{x^2}$의 값은?

①) ① 5
②) ② 7
③) ③ 9
④) ④ 11

🎯 **정답: ②**

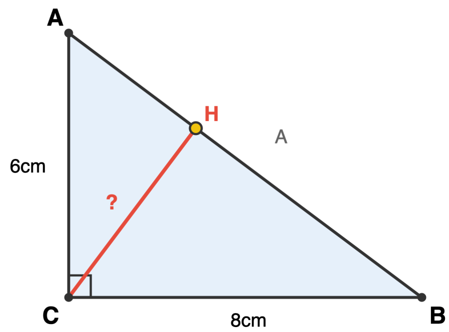
📖 1단계: $x = 0$이면 식이 성립하지 않으므로 $x \neq 0$. 양변을 x로 나누면 $x - 3 + \frac{1}{x} = 0$, 즉 $x + \frac{1}{x} = 3$. 2단계: 양변을 제곱하면 $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = 9$. 3단계: 따라서 $x^2 + \frac{1}{x^2} = 9 - 2 = 7$.

🧠 풀이 전략: x의 정확한 값을 구하지 않고도 식의 값을 구할 수 있는지 살펴보자. 방정식 양변을 x로 나누어 $x + \frac{1}{x}$의 형태를 만들면, 곱셈공식에 의해 자동으로 $x^2 + \frac{1}{x^2}$이 표현된다.

💡 x를 직접 구하면 $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$로 무리수이지만, 식의 값은 깔끔하게 자연수 7이 된다.

Q171 닮음 심화

직각삼각형 ABC에서 ∠C = 90°이고 AC = 6cm, BC = 8cm이다. 점 C에서 빗변 AB에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 선분 CH의 길이는?



①) ① 4 cm
②) ② 4.5 cm
③) ③ 4.8 cm
④) ④ 5 cm

🎯 **정답: ③**

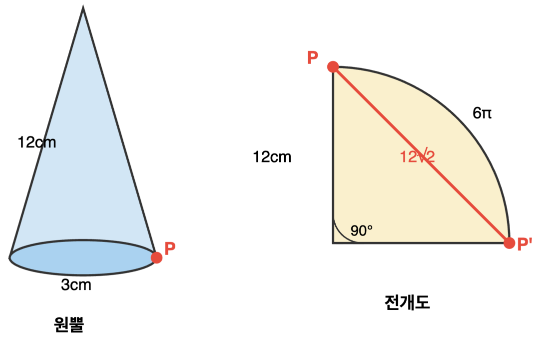
📖 1단계: 피타고라스 정리에 의해 $AB^2 = AC^2 + BC^2 = 36 + 64 = 100$이므로 AB = 10cm. 2단계: △ABC의 넓이를 두 가지로 표현한다. 직각변을 밑변·높이로 보면 $\frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24$. 빗변 AB를 밑변, CH를 높이로 보면 $\frac{1}{2} \times 10 \times CH = 5 \cdot CH$. 3단계: 두 표현은 같은 넓이이므로 $5 \cdot CH = 24$, 따라서 $CH = \frac{24}{5} = 4.8$cm.

🧠 풀이 전략: 직각삼각형의 넓이는 어느 변을 밑변으로 하느냐에 관계없이 같은 값이어야 한다. 두 직각변을 활용한 표현과 빗변·수선 표현을 등식으로 놓으면 수선의 길이가 즉시 나온다. 닮음을 이용해도 같은 답을 얻을 수 있다.

💡 빗변에 내린 수선은 빗변을 두 부분으로 나누는데, 이 두 부분의 길이의 곱은 수선 길이의 제곱과 같다. 이를 '직각삼각형의 평균관계'라 부른다.

Q172 피타고라스 활용

밑면의 반지름이 3cm이고 모선의 길이가 12cm인 원뿔이 있다. 밑면 위의 한 점 P에서 출발하여 원뿔의 옆면을 한 바퀴 돌아 다시 P로 돌아오는 가장 짧은 경로의 길이는?



①) ① 12 cm

②) ② 12√2 cm

③) ③ 18 cm

④) ④ 24 cm

🎯 **정답: ②**

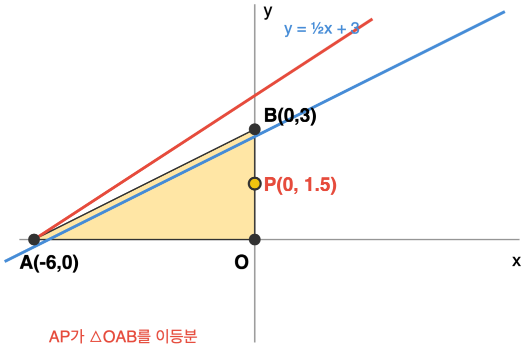
📖 1단계: 곡면 위의 최단경로는 곡면을 평면으로 펼쳤을 때의 직선이다. 원뿔 옆면을 펼치면 반지름 12cm인 부채꼴이 나온다. 2단계: 부채꼴 호의 길이는 원래 밑면의 둘레인 $2\pi \times 3 = 6\pi$cm. 부채꼴 중심각을 θ라 하면 $\frac{\theta}{360°} = \frac{6\pi}{2\pi \times 12} = \frac{1}{4}$, 따라서 $\theta = 90°$. 3단계: 점 P가 부채꼴에서 두 반지름의 끝점 P, P'로 나타나고, 두 점 사이 직선 거리가 최단경로. ∠POP' = 90°이고 OP = OP' = 12이므로 피타고라스 정리에 의해 $PP' = \sqrt{12^2 + 12^2} = 12\sqrt{2}$ cm.

🧠 풀이 전략: 곡면 위의 최단경로 문제는 곡면을 평평하게 펼쳐서 평면 위 두 점 사이 거리로 환원한다. 원뿔의 경우 부채꼴이 되며, 부채꼴의 중심각은 (밑면 둘레)/(모선이 그리는 큰 원의 둘레)로 계산한다.

💡 원뿔의 옆면을 펼쳤을 때 중심각이 360°에 도달하면 그것은 더 이상 원뿔이 아니라 평면이며, 0°에 가까워지면 무한히 뾰족한 원뿔이 된다.

Q173 일차함수 응용

직선 $y=\frac{1}{2}x+3$이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 점 A를 지나면서 △OAB의 넓이를 정확히 이등분하는 직선의 기울기는? (단, O는 원점)



①) ① $\frac{1}{6}$
②) ② $\frac{1}{4}$
③) ③ $\frac{1}{3}$
④) ④ $\frac{1}{2}$

🎯 **정답: ②**

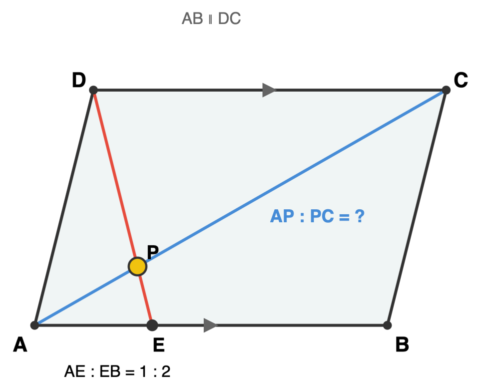
📖 1단계: 직선이 x축과 만나는 점은 $0=\frac{1}{2}x+3$에서 $x=-6$, A(-6, 0). y축과 만나는 점은 B(0, 3). △OAB의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 6\times 3=9$. 2단계: 점 A를 지나며 △OAB를 이등분하는 직선은 변 OB(y축의 일부) 위의 점 P(0, p)를 지난다. △OAP의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 6\times p=3p$. 이등분 조건: $3p=\frac{9}{2}$, 따라서 $p=\frac{3}{2}$. 3단계: 직선 AP의 기울기는 $\frac{\frac{3}{2}-0}{0-(-6)}=\frac{1}{4}$.

🧠 풀이 전략: 한 꼭짓점을 지나면서 삼각형의 넓이를 이등분하는 직선은 그 꼭짓점의 대변 위 어느 점을 지난다. 이등분 조건을 부분 삼각형의 넓이 식으로 옮기면 미지의 점 좌표를 결정할 수 있고, 그로부터 직선 기울기가 구해진다.

💡 한 꼭짓점에서 대변의 중점을 잇는 선분(중선)은 항상 삼각형의 넓이를 정확히 이등분하는 특별한 선이다.

Q174 닮음 심화

평행사변형 ABCD에서 변 AB 위의 점 E가 AE:EB = 1:2를 만족한다. 대각선 AC와 선분 DE가 점 P에서 만날 때, AP:PC를 구하시오.



①) ① 1:2

②) ② 1:3

③) ③ 1:4

④) ④ 2:5

🎯 **정답: ②**

📖 1단계: 평행사변형이므로 AB ∥ DC이고 AB = DC. △AEP와 △CDP에서 ∠AEP = ∠CDP (AB와 DC가 평행이므로 엇각), ∠APE = ∠CPD (맞꼭지각). 두 쌍의 각이 같으므로 △AEP ~ △CDP (AA 닮음). 2단계: AE = $\frac{1}{3}$AB, DC = AB이므로 AE:DC = AE:AB = 1:3. 3단계: 닮음 두 삼각형의 대응변 비는 모두 같으므로 AP:CP = AE:CD = 1:3.

🧠 풀이 전략: 평행사변형의 대향변은 평행이고 길이가 같다. 대향변 위의 점들을 잇는 두 직선이 교차하면 엇각과 맞꼭지각이 자동으로 생기므로 AA 닮음이 성립한다. 닮음비는 두 평행한 변에 속한 선분의 길이비로 결정된다.

💡 이 기법을 일반화하면 '평행한 두 변을 가진 도형에서 두 변을 잇는 직선들의 교점이 만드는 비'는 항상 두 변 위 부분 길이의 비로 결정된다.

Q175 부등식 활용 심화

가로의 길이가 세로의 길이보다 3cm 긴 직사각형이 있다. 이 직사각형의 둘레가 50cm 이상 70cm 이하일 때, 가로의 길이가 될 수 있는 자연수는 모두 몇 개인가?

①) ① 4개

②) ② 5개

③) ③ 6개

④) ④ 7개

🎯 **정답: ③**

📖 1단계: 세로의 길이를 $x$cm라 하면 가로는 $(x+3)$cm. 둘레 = $2(x+(x+3)) = 4x+6$cm. 2단계: 둘레 조건 $50 \le 4x+6 \le 70$. 모든 변에서 6을 빼면 $44 \le 4x \le 64$, 4로 나누면 $11 \le x \le 16$. 3단계: x가 자연수이므로 $x \in \{11, 12, 13, 14, 15, 16\}$. 가로 = $x+3 \in \{14, 15, 16, 17, 18, 19\}$이므로 모두 6개.

🧠 풀이 전략: 미지수를 한 개로 정하고(세로) 다른 변량을 식으로 표현한 뒤(가로 = 세로 + 3), 조건을 부등식으로 옮긴다. 부등식의 양쪽을 동시에 정리하는 연립부등식 형태로 푸는 것이 핵심. 자연수 조건은 마지막 단계에서 적용한다.

💡 둘레의 길이가 같은 직사각형 중에서는 정사각형일 때 넓이가 가장 크다. 등주부등식이라 불리는 이 성질은 모든 도형으로 일반화된다.

Q176 연립방정식 심화 활용

3시와 4시 사이에 시계의 시침과 분침이 정확히 일직선(180°)을 이루는 시각은? (시침은 1시간에 30°, 분침은 1시간에 360° 회전한다)

①) ① 3시 $48\frac{2}{11}$분

②) ② 3시 $49\frac{1}{11}$분

③) ③ 3시 $50\frac{5}{11}$분

④) ④ 3시 $52\frac{4}{11}$분

🎯 **정답: ②**

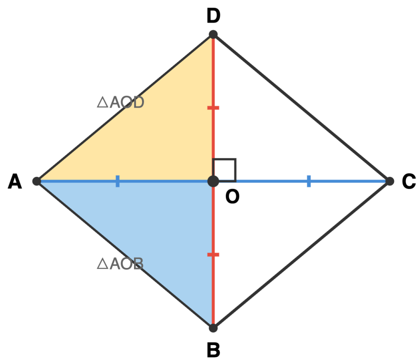
📖 1단계: 12시 방향을 0°로 두면 3시 정각의 시침은 90°, 분침은 0°에 있다. 시침은 1분에 0.5°, 분침은 1분에 6° 움직인다. 2단계: m 분 후 시침의 위치 = $90 + 0.5m$, 분침의 위치 = $6m$. 3시 ~ 4시 사이에는 분침이 시침보다 앞서 있고 결국 180° 차이가 나야 한다. 즉 $6m - (90 + 0.5m) = 180$. 3단계: $5.5m = 270$, $m = \frac{270}{5.5} = \frac{540}{11} = 49\frac{1}{11}$. 따라서 3시 $49\frac{1}{11}$분.

🧠 풀이 전략: 시계 문제는 두 바늘의 각속도를 시간의 일차식으로 표현하는 것이 핵심. 두 바늘 사이의 각도 조건(0°, 90°, 180° 등)을 방정식으로 옮기면 미지의 시간이 즉시 나온다. 분수 분모에 11이 자주 나오는 것은 분침과 시침 속도차 5.5°/분에서 비롯된다.

💡 12시간 동안 시침과 분침이 정확히 일직선이 되는 순간은 11번 발생한다. 12번이 아닌 이유는 12시 정각에 두 바늘이 같은 방향에 있기 때문이다.

Q177 도형 성질 증명

평행사변형 ABCD의 두 대각선 AC, BD가 점 O에서 만난다. AC ⊥ BD가 성립할 때, ABCD가 마름모임을 증명하기 위해 핵심적으로 사용되는 합동조건과 합동인 두 삼각형의 짝은?



대각선이 수직이등분 → 합동삼각형

①) ① SSS, △AOB ≡ △COD

②) ② SAS, △AOB ≡ △AOD

③) ③ ASA, △AOB ≡ △COD

④) ④ SSA, △AOB ≡ △BOC

🎯 **정답: ②**

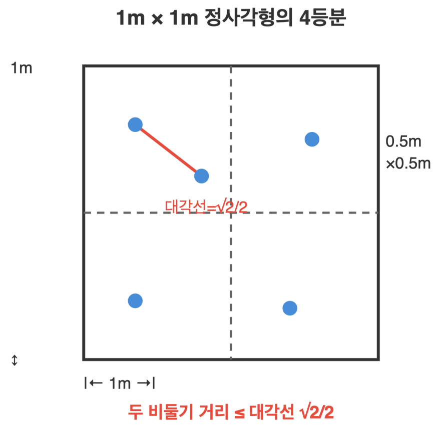
📖 1단계: 평행사변형의 두 대각선은 서로를 이등분하므로 OB = OD. 2단계: △AOB와 △AOD를 비교한다. AO는 두 삼각형의 공통변, OB = OD (1단계), ∠AOB = ∠AOD = 90° (가정 AC ⊥ BD). 두 변과 그 끼인각이 같으므로 SAS 합동. 3단계: 합동에 의해 AB = AD. 평행사변형이면서 인접한 두 변의 길이가 같으면 모든 변의 길이가 같으므로 마름모이다.

🧠 풀이 전략: 도형 판정 문제는 어떤 합동조건으로 어느 변·각의 등호를 끌어낼 수 있는지를 거꾸로 추적해야 한다. AC ⊥ BD라는 조건은 직각이라는 각 정보를 주므로, 끼인각이 직각인 SAS가 자연스럽게 적용된다. 'SSS'는 변 정보만 필요하고, 'ASA'는 변 한 개·각 두 개가 필요하다.

💡 마름모는 '네 변의 길이가 같은 평행사변형'으로 정의되며, '대각선이 수직'이라는 조건은 평행사변형이 마름모가 되기 위한 필요충분조건이다.

Q178 경시 확률·퍼즐

한 변의 길이가 1m인 정사각형 모양의 마당 안에 5마리의 비둘기가 임의의 위치에 앉아 있다. 이때 어떤 두 비둘기 사이의 거리가 반드시 $\frac{\sqrt{2}}{2}$m 이하임을 증명할 수 있다. 이 증명의 핵심 아이디어로 가장 적절한 것은?



①) ① 정사각형을 4개의 0.5m × 0.5m 작은 정사각형으로 나눈다

②) ② 정사각형을 5개의 영역으로 나눈다

③) ③ 비둘기가 항상 정사각형의 네 꼭짓점에 있다고 가정한다

④) ④ 비둘기는 항상 중앙에 모여 앉는다

🎯 **정답: ①**

📖 1단계: 1m × 1m 정사각형을 가로·세로 모두 이등분하여 0.5m × 0.5m 작은 정사각형 4개로 나눈다. 2단계: 5마리의 비둘기를 4개의 영역에 배치하면 비둘기집 원리(서랍의 원리)에 의해 적어도 한 영역에는 2마리 이상이 들어간다. 3단계: 한 변이 0.5m인 정사각형 내부 두 점 사이의 가장 먼 거리는 대각선의 길이 $\sqrt{0.5^2 + 0.5^2} = \sqrt{0.5} = \frac{\sqrt{2}}{2}$m. 따라서 같은 작은 정사각형 안의 두 비둘기 사이 거리는 $\frac{\sqrt{2}}{2}$m 이하.

🧠 풀이 전략: '반드시 어떤 조건이 성립한다'는 형식의 문제는 비둘기집 원리가 강력한 도구가 된다. 핵심은 적절한 영역 분할로, 비둘기 수보다 1 적은 개수의 영역으로 나누는 것이다. 이렇게 하면 어떤 영역에는 비둘기 2마리가 반드시 들어가며, 그 영역의 지름이 거리 상한이 된다.

💡 비둘기집 원리는 디리클레의 서랍 원리로도 불리며, 컴퓨터 과학의 해시 충돌, 암호학의 충돌 보장 등에도 광범위하게 활용된다.

Q179 경시 확률·퍼즐

숫자 1, 2, 3, 4, 5를 한 번씩만 사용하여 만들 수 있는 다섯 자리 자연수를 작은 것부터 차례로 나열할 때, 70번째 수는?

①) ① 35142

②) ② 35214

③) ③ 35241

④) ④ 35412

🎯 **정답: ③**

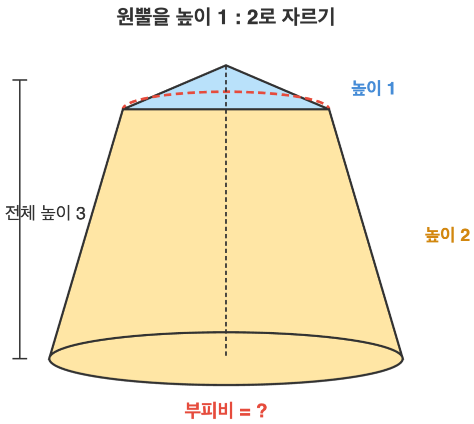
📖 1단계: 첫 자리에 따라 분류하면 첫 자리가 1, 2, 3, 4, 5인 수가 각각 $4! = 24$개씩 있다. 1로 시작: 1번째 ~ 24번째, 2로 시작: 25번째 ~ 48번째, 3으로 시작: 49번째 ~ 72번째. 70번째는 3으로 시작하는 22번째 수. 2단계: 3 다음 자리에 따라 분류. 31__: $3! = 6$개 (49 ~ 54), 32__: 6개 (55 ~ 60), 34__: 6개 (61 ~ 66), 35__: 6개 (67 ~ 72). 70번째는 35__ 그룹의 4번째. 3단계: 35__의 나머지 자리에는 1, 2, 4가 들어간다. 작은 순서로 35124, 35142, 35214, 35241, 35412, 35421. 4번째는 35241.

🧠 풀이 전략: 사전식 나열 문제는 자릿수별로 가능한 경우의 수를 계산하여 어느 그룹에 해당 순번이 속하는지 좁혀 나간다. 한 번에 한 자리씩 결정하면서 남은 순번을 갱신해 가는 것이 핵심. 첫 자리, 둘째 자리, 셋째 자리 순으로 단계적으로 확정한다.

💡 5개의 서로 다른 숫자를 일렬로 배치하는 방법의 수는 $5! = 120$가지로, 5명이 일렬로 줄을 서는 방법의 수와 정확히 같다.

Q180 닮음 심화

원뿔의 높이를 위에서부터 1:2의 비율로 자르는 평면이 있다. 이 평면으로 잘려 만들어진 위쪽 작은 원뿔의 부피와 아래쪽 원뿔대의 부피의 비는?



①) ① 1:8

②) ② 1:7

③) ③ 1:26

④) ④ 1:27

🎯 **정답: ③**

📖 1단계: 자르는 평면은 원뿔의 밑면과 평행하므로, 위쪽 작은 원뿔과 원래의 큰 원뿔은 닮음 관계이다. 닮음비는 높이의 비와 같다. 작은 원뿔 높이가 1, 큰 원뿔 전체 높이가 1+2=3이므로 닮음비 1:3. 2단계: 닮음비가 1:3인 두 입체의 부피비는 $1^3 : 3^3 = 1 : 27$. 작은 원뿔의 부피를 1, 큰 원뿔 전체 부피를 27이라고 두자. 3단계: 원뿔대의 부피 = 큰 원뿔 부피 - 작은 원뿔 부피 = 27 - 1 = 26. 따라서 작은 원뿔 : 원뿔대 = 1 : 26.

🧠 풀이 전략: 원뿔을 밑면과 평행한 평면으로 자르면 위쪽은 항상 원래 원뿔과 닮음. 닮음비는 길이비(=높이비)와 같고, 부피비는 그 세제곱비. 원뿔대는 직접 다루기 어려우므로 '큰 원뿔 - 작은 원뿔'로 분리해 계산하는 것이 표준 전략이다.

💡 원뿔을 수평 단면으로 자르면 단면적이 위에서 아래로 이차함수처럼 변하기 때문에, 부피는 세제곱 비로 변한다. 이는 카발리에리 원리의 한 응용이다.

Q181 유리수·순환소수 추론

100 이하의 자연수 n 중에서 분수 $\frac{n}{120}$이 유한소수가 되도록 하는 n의 개수를 구하시오.

①) ① 30개

②) ② 33개

③) ③ 36개

④) ④ 40개

🎯 **정답: ② 33개**

📖 1단계: $120 = 2^3 \times 3 \times 5$로 소인수분해한다. 2단계: 분수 $\frac{n}{120}$이 유한소수가 되려면 기약분수로 만들었을 때 분모의 소인수가 2와 5뿐이어야 한다. 즉 분모에 있는 3을 약분으로 없애야 하므로 분자 n이 3의 배수여야 한다. 3단계: 100 이하의 3의 배수는 3, 6, 9, ..., 99로 총 $[100/3] = 33$개이다.

🧠 풀이 전략: 유한소수의 핵심 조건은 '기약분수의 분모가 2와 5만 가짐'이다. 분모 120 안의 2와 5는 그대로 두어도 되지만, 소인수 3은 반드시 분자에서 약분으로 사라져야 한다. 따라서 n이 3의 배수라는 조건으로 환원되어, 단순한 배수 카운팅 문제가 된다.

💡 분모가 어떤 수이든, 그 수에 포함된 2와 5가 아닌 모든 소인수를 분자가 흡수해야만 유한소수가 된다.

Q182 부등식 활용 심화

연립부등식 $\begin{cases} 2x-3<x+1 \\ 3x+a \geq 2x \end{cases}$ 의 해 중 자연수가 정확히 1개가 되도록 하는 정수 a의 값을 구하시오.

①) ① $a=-3$

②) ② $a=-2$

③) ③ $a=-1$

④) ④ $a=0$

🎯 **정답: ① $a=-3$**

📖 1단계: 첫 부등식 $2x-3<x+1$을 정리하면 $x<4$. 2단계: 둘째 부등식 $3x+a \geq 2x$를 정리하면 $x \geq -a$. 따라서 연립의 해는 $-a \leq x<4$. 3단계: 자연수 해는 1, 2, 3 중에서 나오므로 정확히 1개이려면 $x=3$만 들어가야 한다. 즉 $2<-a \leq 3$이고, 이를 풀면 $-3 \leq a<-2$. 정수는 $a=-3$.

🧠 풀이 전략: 연립부등식의 해를 구간으로 정리한 뒤, 그 구간 안에 들어가는 자연수 개수가 정확히 1개라는 조건으로 미지수 a를 역으로 추적한다. 경계값 포함 여부($\leq$ vs $<$)가 결과를 가르므로 부등호 방향을 정확히 따져야 한다.

💡 연립부등식의 정수 해 개수를 묻는 문제는 늘 '경계 포함 여부'가 함정이다. 등호가 빠지면 해가 1개씩 어긋난다.

Q183 연립방정식 심화 활용

둘레가 600m인 호수 둘레를 두 사람 A, B가 같은 지점에서 동시에 출발하여 같은 방향으로 돌면 50분 후에 처음으로 A가 B를 한 바퀴 앞서고, 반대 방향으로 돌면 6분 후에 처음으로 만난다. A와 B의 분속을 각각 구하시오. (단, A의 속력이 B보다 빠르다.)

①) ① A=56 m/분, B=44 m/분

②) ② A=60 m/분, B=40 m/분

③) ③ A=58 m/분, B=42 m/분

④) ④ A=55 m/분, B=45 m/분

🎯 **정답: ① A=56 m/분, B=44 m/분**

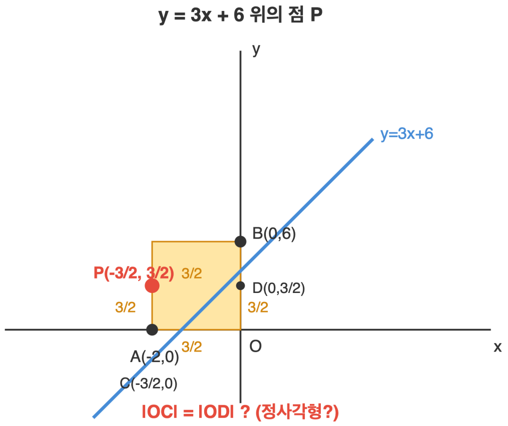
📖 1단계: A의 분속을 a m/분, B의 분속을 b m/분이라 하자 $(a>b)$. 같은 방향으로 한 바퀴 앞서려면 A가 B보다 600m를 더 가야 하므로 $(a-b)\times 50=600$, 즉 $a-b=12$. 2단계: 반대 방향으로 만나려면 두 사람이 합쳐 둘레 600m를 가야 하므로 $(a+b)\times 6=600$, 즉 $a+b=100$. 3단계: 두 식을 더하면 $2a=112$이므로 $a=56$, $b=100-56=44$.

🧠 풀이 전략: 원형 트랙 문제는 '같은 방향 → 상대속도 = 속도 차', '반대 방향 → 상대속도 = 속도 합'으로 환원하는 것이 핵심이다. 두 조건이 각각 $a-b$와 $a+b$를 곧바로 알려 주므로, 합과 차를 푸는 가장 깔끔한 연립이 된다.

💡 원형 트랙 위의 두 사람은 추격(같은 방향)과 마주침(반대 방향) 시간만 알면 두 속도를 항상 결정할 수 있다.

Q184 일차함수 응용

직선 $y = 3x + 6$이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 선분 AB 위의 점 P에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 할 때, 사각형 OCPD가 정사각형이 되도록 하는 점 P의 좌표를 구하시오. (단, O는 원점)



①) ① P(-1, 3)

②) ② P($-\frac{3}{2}$, $\frac{3}{2}$)

③) ③ P(-2, 0)

④) ④ P($-\frac{1}{2}$, $\frac{9}{2}$)

🎯 **정답: ② P($-\frac{3}{2}$, $\frac{3}{2}$)**

📖 1단계: 직선 $y = 3x + 6$의 x절편은 $y = 0$일 때 $x = -2$이므로 A(-2, 0), y절편은 B(0, 6). 선분 AB 위의 점 P를 $P(p, 3p + 6)$이라 두면 $-2 \leq p \leq 0$이다. 2단계: P는 2사분면(또는 좌표축 위)에 있으므로 C는 $C(p, 0)$, D는 $D(0, 3p + 6)$. 사각형 OCPD의 가로변 길이는 $|OC| = -p$ ($\because p \leq 0$), 세로변 길이는 $|OD| = 3p + 6$. 3단계: 정사각형이 되려면 두 변이 같아야 하므로 $-p = 3p + 6$, $-4p = 6$, $p = -\frac{3}{2}$. 따라서 $P\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

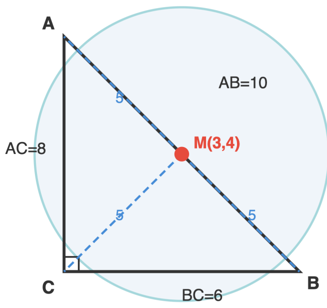
🧠 풀이 전략: 사각형 OCPD는 두 좌표축에 변을 둔 직사각형이며, 가로와 세로가 같아야 정사각형이 된다. 점 P가 직선 위에 있다는 조건을 좌표 $(p, 3p + 6)$으로 매개화하면 'P의 두 좌표의 절댓값이 같다'는 단순한 일차방정식으로 환원된다.

💡 두 좌표축에서 같은 거리에 있는 점들은 직선 $y = -x$ 또는 $y = x$ 위에 놓인다. 이 직선과 주어진 일차함수의 교점이 곧 정사각형을 만드는 점이다.

Q185 도형 성질 증명

직각삼각형 ABC에서 $\angle C = 90°$, $\overline{BC} = 6$, $\overline{AC} = 8$이다. 빗변 AB의 중점을 M이라 할 때, $\overline{CM}$의 길이를 구하시오. 또한 왜 $\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM}$이 성립하는지 외심 개념으로 설명하시오.

직각삼각형의 외심 = 빗변의 중점



외심 = 빗변의 중점 M

①) ① 4

②) ② $2\sqrt{6}$

③) ③ 5

④) ④ $\frac{24}{5}$

🎯 **정답: ③ 5**

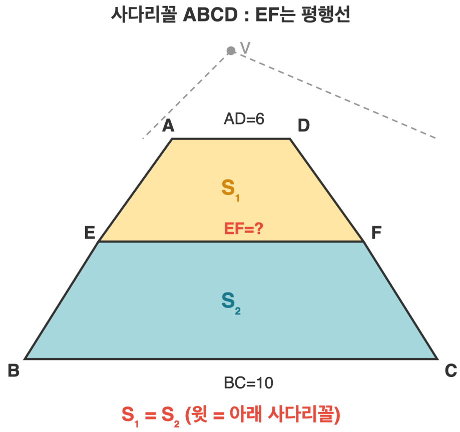
📖 1단계: 피타고라스 정리에 의해 $\overline{AB} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$. 2단계: 직각삼각형의 외심(세 꼭짓점에서 같은 거리에 있는 점)은 빗변의 중점에 있다. 그 이유는 빗변을 지름으로 하는 원 위의 점은 모두 빗변에 대해 직각을 이루기 때문이다(탈레스의 정리). 따라서 직각꼭짓점 C도 그 원 위에 있고, M은 외심이 된다. 3단계: 외심에서 세 꼭짓점까지의 거리는 외접원의 반지름과 같으므로 $\overline{CM} = \overline{AM} = \overline{BM} = \frac{1}{2}\overline{AB} = 5$.

🧠 풀이 전략: $\overline{CM}$을 좌표로 직접 계산할 수도 있지만(M(3,4) → CM=$\sqrt{9+16} = 5$), 본 문제의 핵심은 '왜 빗변의 중점이 세 꼭짓점에서 같은 거리에 있는가'이다. 이는 '빗변을 지름으로 하는 원 위의 점은 직각을 이룬다'는 탈레스의 정리(또는 그 역)로 설명되며, 외심의 위치를 즉시 알려 준다.

💡 직각삼각형의 빗변은 곧 외접원의 지름이고, 직각꼭짓점은 항상 그 원 위에 놓인다. 이것이 탈레스의 정리이며, 가장 오래된 기하 정리 중 하나이다.

Q186 닮음 심화

사다리꼴 ABCD에서 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, $\overline{AD} = 6$, $\overline{BC} = 10$이다. AD와 평행한 직선 EF가 사다리꼴을 두 개의 사다리꼴 AEFD와 EBCF로 나눌 때, 두 사다리꼴의 넓이가 같도록 하는 EF의 길이를 구하시오. (단, E는 AB 위의 점, F는 CD 위의 점)



①) ① $\sqrt{60}$
②) ② $2\sqrt{17}$
③) ③ $\sqrt{72}$
④) ④ 8

🎯 **정답:** ② $2\sqrt{17}$

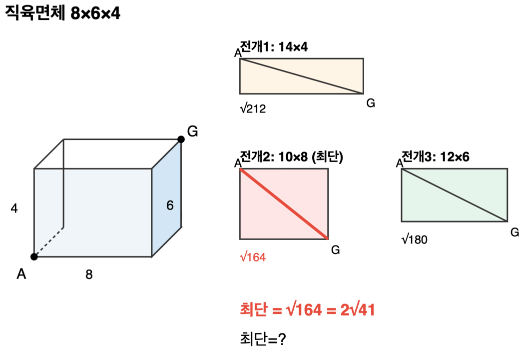
📖 1단계: AB와 DC를 위쪽으로 연장하면 한 점 V에서 만나 사다리꼴이 큰 삼각형의 일부가 된다. 이 삼각형 안에서 AD, EF, BC는 모두 밑변에 평행하므로 V를 정점으로 하는 닮은 세 작은(중간/큰) 삼각형이 만들어진다. 정점 V에서 평행 변까지의 거리는 평행 변의 길이에 비례한다. 2단계: 닮음비가 변의 길이 비와 같으므로 정점에서 잘려진 삼각형들의 넓이는 평행 변 길이의 제곱에 비례한다. 즉 (V로부터 EF까지의 삼각형 넓이) − (V로부터 AD까지의 삼각형 넓이) = $k(EF^2 - 36)$, (V부터 BC까지) − (V부터 EF까지) = $k(100 - EF^2)$ (k는 같은 비례상수). 3단계: 두 사다리꼴 넓이가 같으려면 $EF^2 - 36 = 100 - EF^2$, 즉 $2EF^2 = 136$, $EF^2 = 68$, $\overline{EF} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$.

🧠 풀이 전략: 사다리꼴을 평행한 선으로 나누는 문제에서는 사다리꼴을 큰 삼각형의 일부로 보고 닮음을 활용하는 것이 가장 강력하다. '닮은 도형의 넓이비 = 닮음비의 제곱' 원리로부터 사다리꼴 넓이를 두 평행 변 길이의 제곱 차이에 비례시켜 표현할 수 있고, 그 결과 평행 변 길이만으로 답이 결정된다.

💡 사다리꼴의 두 평행 변 길이가 a, b일 때, 넓이를 정확히 이등분하는 평행선의 길이는 항상 $\sqrt{\dfrac{a^2 + b^2}{2}}$, 즉 두 변 길이의 '제곱평균'이다.

Q187 피타고라스 활용

가로 8 cm, 세로 6 cm, 높이 4 cm인 직육면체의 한 꼭짓점 A에서 A와 가장 멀리 떨어진 꼭짓점 G까지 직육면체의 표면을 따라 갈 때, 최단경로의 길이를 구하시오.



①) ① $\sqrt{180}$ cm
②) ② $2\sqrt{41}$ cm
③) ③ $\sqrt{212}$ cm
④) ④ $\sqrt{200}$ cm

🎯 **정답: ② $2\sqrt{41}$ cm**

📖 1단계: 곡면(여기서는 꺾인 표면) 위의 최단경로는 면을 평면으로 펼쳐 A와 G를 직선으로 이은 거리이다. 직육면체에서는 어느 두 면을 거치느냐에 따라 펼치는 방법이 세 가지 있다. 2단계: 세 펼침에서 직사각형의 가로·세로는 (두 모서리의 합, 나머지 한 모서리)이므로, 빗변은 다음과 같다. (i) (8+6, 4) → $\sqrt{14^2+4^2} = \sqrt{212}$. (ii) (6+4, 8) → $\sqrt{10^2+8^2} = \sqrt{164}$. (iii) (8+4, 6) → $\sqrt{12^2+6^2} = \sqrt{180}$. 3단계: $\sqrt{164} < \sqrt{180} < \sqrt{212}$ 이므로 최단거리는 $\sqrt{164} = 2\sqrt{41}$ cm이다.

🧠 풀이 전략: 표면 위 최단거리는 항상 '평면으로 펼친 후의 직선거리'와 같다. 직육면체는 펼치는 방향이 세 가지이므로 세 빗변을 모두 계산해 비교해야 한다. 한 가지만 시도하고 답이라고 단정하면 함정에 빠진다.

💡 직육면체에서 어떤 펼침이 최단이 되는지는 모서리 길이의 비에 따라 달라진다. 한 모서리만 매우 길거나 짧으면 어느 두 면을 거쳐야 하는지가 결정적이 된다.

Q188 지수·식 계산 심화

$a+b=5,\ ab=3$일 때, $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$의 값을 구하시오.

①) ① $\frac{16}{3}$
②) ② $\frac{17}{3}$
③) ③ $\frac{19}{3}$
④) ④ $\frac{22}{3}$

🎯 **정답: ③ $\frac{19}{3}$**

📖 1단계: 두 분수를 통분하면 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=\frac{a^2+b^2}{ab}$. 2단계: 곱셈공식으로 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=5^2-2\times3=25-6=19$. 3단계: 따라서 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=\frac{19}{3}$.

🧠 풀이 전략: 분수식의 합을 통분하면 분자와 분모 모두 a, b에 대한 대칭식이 된다. 대칭식은 항상 $a+b$와 ab만으로 표현할 수 있으므로, 굳이 a, b의 값을 구할 필요가 없다.

💡 $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$는 양수일 때 항상 2 이상이며, $a=b$일 때 최솟값 2를 가진다(산술-기하 평균 부등식의 한 사례).

Q189 지수·식 계산 심화

$a+b+c=6$, $a^2+b^2+c^2=14$, $abc=6$일 때, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$의 값을 구하시오.

①) ① $\frac{5}{6}$

②) ② $\frac{11}{6}$

③) ③ $\frac{7}{3}$

④) ④ $\frac{17}{6}$

🎯 **정답: ② $\frac{11}{6}$**

📖 1단계: 세 분수를 통분하면 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{ab+bc+ca}{abc}$. 2단계: 곱셈공식 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$를 이용하면 $6^2=14+2(ab+bc+ca)$, 즉 $ab+bc+ca=\frac{36-14}{2}=11$. 3단계: 따라서 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{11}{6}$.

🧠 풀이 전략: 세 변수의 대칭식 문제는 '기본 대칭식' 세 가지 $a+b+c$, $ab+bc+ca$, abc로 거의 모든 식을 표현할 수 있다. 역수의 합은 분자에 $ab+bc+ca$, 분모에 abc가 오는 형태이므로 두 번째 기본 대칭식만 추가로 구하면 끝이다.

💡 a, b, c는 사실 1, 2, 3이다(삼차식 $x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x-2)(x-3)$의 세 해). 그래서 역수의 합은 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{11}{6}$로 곧장 확인할 수도 있다.

Q190 경시 확률·퍼즐

어떤 학년의 학생 수가 100명이다. 비둘기집 원리를 이용하여, '같은 달에 태어난 학생이 적어도 N명 있다'고 항상 보장할 수 있는 N의 가능한 최댓값을 구하시오.

①) ① 8

②) ② 9

③) ③ 10

④) ④ 12

🎯 **정답: ② 9**

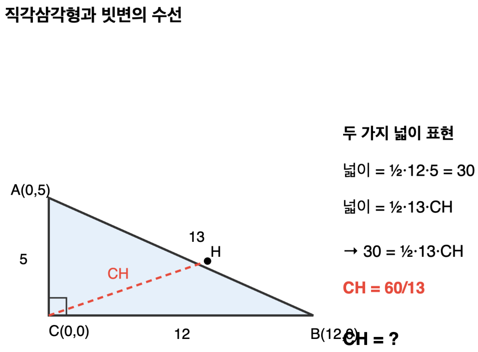
📖 1단계: 1년은 12개월이므로 학생들을 태어난 달에 따라 12개의 그룹(=비둘기집)으로 나눈다. 2단계: 만약 모든 달의 학생 수가 8명 이하라면 전체 학생 수는 최대 $12\times 8=96$명이지만 실제로는 100명이므로 모순이다. 따라서 어떤 달에는 반드시 9명 이상의 학생이 태어났다 ($\lceil 100/12\rceil=9$). 3단계: 한편 11개의 달에 9명씩, 1개 달에 1명을 배치하면 합 100명이 되고 어느 달도 9명을 초과하지 않는다. 따라서 '항상 보장'할 수 있는 N의 최댓값은 9이다.

🧠 풀이 전략: 비둘기집 원리: n개의 비둘기집에 $n\cdot k+1$마리 이상의 비둘기가 있으면 어떤 집에는 $k+1$마리 이상이 있다. 100명을 12개월로 나누면 $\lceil 100/12\rceil=9$명 이상은 보장된다. 단, 'N의 최댓값'을 묻는 것이므로 'N+1=10명까지는 항상 보장되지 않는다'는 반례까지 함께 확인해야 완전한 답이 된다.

💡 비둘기집 원리는 단순해 보여도 '서로 아는 사이거나 모두 모르는 사이인 3명의 그룹은 6명 이상의 모임에 항상 존재한다(램지 정리)' 같은 깊은 결과의 출발점이 된다.

Q191 피타고라스 활용

직각삼각형 ABC에서 $\angle C = 90°$, $\overline{BC} = 12$, $\overline{AC} = 5$이다. 점 C에서 빗변 AB에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\overline{CH}$의 길이를 구하시오.



①) ① $\frac{60}{17}$
②) ② $\frac{60}{13}$
③) ③ $\frac{12}{5}$
④) ④ $\frac{13}{5}$

🎯 **정답: ② $\frac{60}{13}$**

📖 1단계: 피타고라스 정리에 의해 $\overline{AB} = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13$. 2단계: △ABC의 넓이를 두 가지 방법으로 표현한다. (i) 두 직각변의 곱의 절반: $\frac{1}{2} \times 12 \times 5 = 30$. (ii) 빗변과 빗변에 내린 수선의 곱의 절반: $\frac{1}{2} \times 13 \times \overline{CH}$. 3단계: 두 표현이 같은 넓이를 나타내므로 $\frac{1}{2} \times 13 \times \overline{CH} = 30$, 즉 $\overline{CH} = \frac{60}{13}$.

🧠 풀이 전략: 수선의 발의 좌표를 직접 계산하는 대신, '한 도형의 넓이는 어떤 변을 밑변으로 잡든 항상 같다'는 사실을 활용한다. 직각삼각형에서는 두 직각변을 밑변·높이로 한 표현과 빗변을 밑변, 빗변 위 수선을 높이로 한 표현이 같으므로 수선 길이가 즉시 나온다.

💡 직각삼각형에서 빗변 위 수선의 발은 빗변을 두 부분 p, q로 나누고 항상 $h^2 = pq$가 성립한다(기하평균 정리). 이 문제에서는 $p = \frac{25}{13}$, $q = \frac{144}{13}$이고 $\sqrt{pq} = \frac{60}{13}$이다.

Q192 유리수·순환소수 추론

분수 $\frac{21}{2^3 \times 5 \times n}$ 이 유한소수가 되도록 하는 두 자리 자연수 n 의 개수는? (단, 21과 n 은 서로소가 아닐 수도 있음)

①) ① 8개

②) ② 10개

③) ③ 12개

④) ④ 25개

🎯 **정답: ④ 25개**

📖 1단계: 유한소수가 되려면 기약분수의 분모가 2와 5만으로 이루어져야 한다.

2단계: 분자 $21 = 3 \times 7$이므로 분모 $2^3 \times 5 \times n$에서 2,5가 아닌 소인수는 분자의 3과 7로만 약분된다. $21 = 3^1 \times 7^1$이라 약분 가능한 3과 7은 각각 1개뿐이므로, n은 소인수가 2,5,3,7로만 이루어지되 3과 7의 지수가 각각 1 이하인 수, 즉 $n = 2^a \times 5^c \times k$ ($k \in \{1, 3, 7, 21\}$) 꼴이어야 한다.

3단계: 두 자리 수($10 \le n \le 99$)를 k별로 센다.

- $k = 1$: 10, 16, 20, 25, 32, 40, 50, 64, 80 (9개)
- $k = 3$: 12, 15, 24, 30, 48, 60, 75, 96 (8개)
- $k = 7$: 14, 28, 35, 56, 70 (5개)
- $k = 21$: 21, 42, 84 (3개)

4단계: $9 + 8 + 5 + 3 = 25$개. (18=2·3², 27=3³처럼 3 또는 7이 2제곱 이상이면 약분되지 않아 제외된다.)

5단계: 따라서 정답은 ④ 25개.

🧠 풀이 전략: 분자에 약분 가능한 소인수가 있다는 점에 주목. 21=3×7이므로 분모에 3 또는 7이 있어도 약분되어 유한소수가 될 수 있다. 따라서 n의 허용 소인수는 {2,3,5,7}.

💡 분자에 따라 유한소수 판정이 달라진다는 점이 핵심. 단순 암기로는 함정에 빠지기 쉬움.

Q193 유리수·순환소수 추론

기약분수 $\frac{m}{37}$ $(1 \le m \le 36)$ 을 소수로 나타내면 모두 순환소수가 된다. 이때 순환마디의 길이가 항상 일정한 자연수 k 라고 할 때, k 의 값을 구하는 과정에서 다음 중 옳은 것은?

①) ① $10^k \equiv 1 \pmod{37}$ 을 만족하는 최소의 k 이며, $k = 3$ 이다

②) ② $10^k \equiv 0 \pmod{37}$ 을 만족하는 최소의 k 이며, $k = 6$ 이다

③) ③ $37 \times k$ 가 $10^n - 1$ 의 형태여야 하며, $k = 9$ 이다

④) ④ 분자와 분모의 차이로 결정되며, $k = 36$ 이다

🎯 **정답: ① $10^k \equiv 1 \pmod{37}$ 을 만족하는 최소의 k 이며, $k = 3$ 이다**

📖 1단계: 분수 $\frac{m}{37}$ 의 순환마디 길이는 $10^k - 1$ 이 37의 배수가 되는 최소 k 와 같다. 즉 $10^k \equiv 1 \pmod{37}$. 2단계: $10^1 = 10, 10^2 = 100 = 2 \times 37 + 26, 10^3 = 1000 = 27 \times 37 + 1$. 따라서 $10^3 \equiv 1 \pmod{37}$. 3단계: $k = 3$ 이 최소. 실제로 $\frac{1}{37} = 0.\overline{027}$ 로 순환마디 길이가 3이다. 4단계: 모든 m 에 대해 동일한 길이 3을 가진다.

🧠 풀이 전략: $\frac{1}{p}$ 의 순환마디 길이는 10이 mod p에서 갖는 위수(order)와 같다. 37은 소수이므로 위수는 36의 약수. 직접 계산하여 확인.

💡 $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$ 처럼 순환마디 길이는 분모의 성질로 결정된다.

Q194 지수·식 계산 심화

$x+\frac{1}{x}=4$ 일 때, $x^3+\frac{1}{x^3}$ 의 값을 구하시오. (단, $x>0$)

①) ① 48

②) ② 52

③) ③ 60

④) ④ 64

🎯 **정답: ② 52**

📖 1단계: 곱셈공식 $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$ 를 이용. $a=x, b=\frac{1}{x}$ 대입. 2단계: $\left(x+\frac{1}{x}\right)^3=x^3+\frac{1}{x^3}+3\cdot x\cdot\frac{1}{x}\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^3+\frac{1}{x^3}+3\left(x+\frac{1}{x}\right)$. 3단계: $4^3=x^3+\frac{1}{x^3}+3\times4$. 따라서 $64=x^3+\frac{1}{x^3}+12$. 4단계: $x^3+\frac{1}{x^3}=64-12=52$.

🧠 풀이 전략: 세제곱 전개에서 가운데 항 $3ab(a+b)$ 가 핵심. $x\cdot\frac{1}{x}=1$ 이라는 점을 활용해 식 전체가 $x+\frac{1}{x}$ 의 식으로 환원됨.

💡 $x+\frac{1}{x}$ 형태의 식은 자기 자신과 역수의 대칭이라 모든 $x^n+\frac{1}{x^n}$ 의 값을 점화식으로 구할 수 있다.

Q195 부등식 활용 심화

어느 상점에서 한 개에 원가 4000원인 물건을 정가의 20% 할인하여 판매해도 원가의 15% 이상의 이익이 남게 하려고 한다. 이때 정가는 최소 얼마 이상이어야 하는가?

①) ① 5500원

②) ② 5750원

③) ③ 6000원

④) ④ 6250원

🎯 **정답: ② 5750원**

📖 1단계: 정가를 x 원이라 하자. 할인 후 판매가는 $0.8x$ 원. 2단계: 이익 = 판매가 - 원가 = $0.8x-4000$. 이 값이 원가의 15% 이상이어야 한다. 즉 $0.8x-4000\geq4000\times0.15=600$. 3단계: $0.8x\geq4600$, 양변에 5/4를 곱하면 $x\geq5750$. 4단계: 따라서 정가는 최소 5750원이어야 한다.

🧠 풀이 전략: 두 단계 비율(할인율, 이익률)을 분리해서 부등식으로 세움. 할인은 정가에, 이익률은 원가에 적용된다는 점을 구분.

💡 실제 가격 책정에서도 할인 폭과 마진을 분리해 계산하는 부등식 모델을 쓴다.

Q196 연립방정식 심화 활용

갑, 을, 병 세 사람이 공동으로 일을 하면 6일 만에 끝낼 수 있다. 갑과 을이 함께 하면 9일, 갑과 병이 함께 하면 12일이 걸린다. 을이 혼자서 이 일을 끝내는 데 며칠이 걸리는가?

①) ① 12일

②) ② 36일

③) ③ 24일

④) ④ 18일

🎯 **정답: ① 12일**

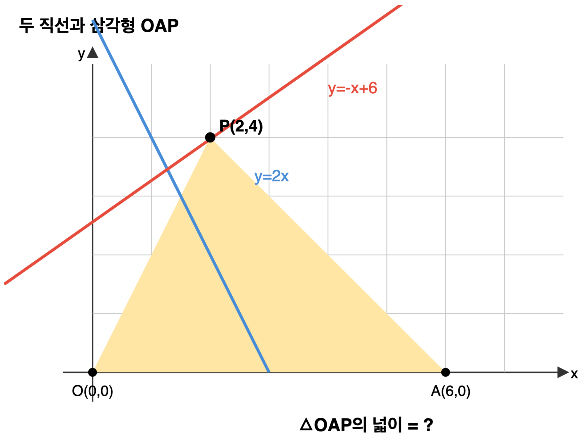
📖 1단계: 갑, 을, 병의 하루 일률을 각각 a,b,c라 하면 $a+b+c=\frac{1}{6}$, $a+b=\frac{1}{9}$, $a+c=\frac{1}{12}$이다.
2단계: 을의 일률은 $b=(a+b+c)-(a+c)=\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{2-1}{12}=\frac{1}{12}$이다.
3단계: 을이 혼자 하면 걸리는 날수는 일률의 역수이므로 $\frac{1}{b}=12$일이다.
4단계: (참고) $c=(a+b+c)-(a+b)=\frac{1}{6}-\frac{1}{9}=\frac{1}{18}$(병=18일), $a=\frac{1}{9}-\frac{1}{12}=\frac{1}{36}$(갑=36일)로 검산하면 $a+c=\frac{1}{36}+\frac{1}{18}=\frac{1}{12}$ ✓.
5단계: 따라서 을이 혼자 하면 12일이 걸린다. 정답은 ① 12일.

🧠 풀이 전략: 3변수 연립방정식. 전체 식에서 두 사람의 합을 빼서 한 사람의 일률을 직접 구하는 소거법 사용.

💡 일률 문제는 시간의 역수(rate)로 다루면 일차 연립방정식으로 깔끔하게 풀린다.

Q197 일차함수 응용

좌표평면 위에서 두 직선 $y=-x+6$ 과 $y=2x$ 가 만나는 점을 P라 하고, 두 직선이 x 축과 만나는 점을 각각 A, O(원점)라 하자. 삼각형 OAP의 넓이를 구하시오.



①) ① 8

②) ② 10

③) ③ 12

④) ④ 14

🎯 **정답: ③ 12**

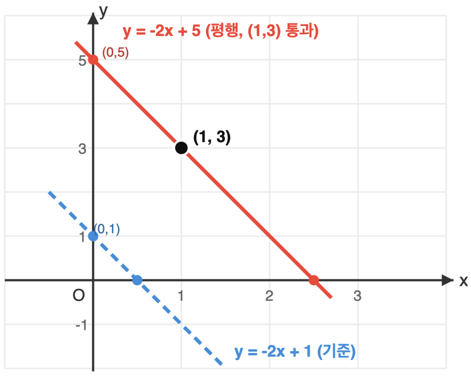
📖 1단계: 두 직선의 교점 P를 구한다. $-x+6=2x \to 3x=6 \to x=2,\ y=4$. 따라서 P(2, 4). 2단계: $y=-x+6$ 의 x절편은 $0=-x+6 \to$ A(6, 0). 원점 O(0, 0)이므로 OA는 x축 위 길이 6. 3단계: 점 P의 y좌표 4는 OA를 밑변으로 했을 때의 높이. 4단계: 삼각형 OAP의 넓이 = $\frac{1}{2}\times 6\times 4=12$.

🧠 풀이 전략: x축 위의 두 점을 밑변으로 하면 높이는 세 번째 점의 y좌표. 교점 좌표를 구하는 것이 핵심.

💡 좌표평면에서 삼각형 넓이는 밑변과 높이를 좌표축 평행 방향으로 잡으면 가장 쉽다.

Q198 일차함수 응용

일차함수 $y = ax + b$ 의 그래프가 점 (1, 3)을 지나고, 직선 $y = -2x + 1$ 와 평행하다. 이때 $a + b$ 의 값은?



①) ① 1
②) ② 3
③) ③ -2
④) ④ 5

🎯 **정답: ② 3**

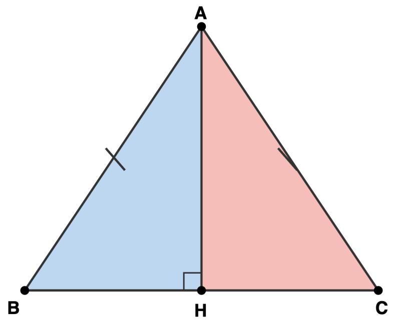
📖 1단계: 평행 조건은 기울기가 같다. 따라서 $a = -2$. 2단계: 직선이 점 (1, 3)을 지나므로 $3 = -2 \times 1 + b$. 3단계: $3 = -2 + b$ $\rightarrow b = 5$. 4단계: $a + b = -2 + 5 = 3$.

🧠 풀이 전략: 평행 = 기울기가 같다, 점을 지난다 = 좌표를 대입한다. 두 조건을 분리해서 각각 미지수를 결정.

💡 평행한 두 직선은 같은 방향을 가리키므로 y 절편만 다르다.

Q199 도형 성질 증명

이등변삼각형 ABC에서 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 이고, 꼭지각 A에서 밑변 BC에 내린 수선의 발을 H라 하자. 이때 점 H가 BC의 중점임을 보이는 가장 적절한 합동조건은?



①) ① SSS 합동

②) ② SAS 합동

③) ③ ASA 합동

④) ④ RHS(빗변·한 변) 합동

🎯 **정답: ④ RHS(빗변·한 변) 합동**

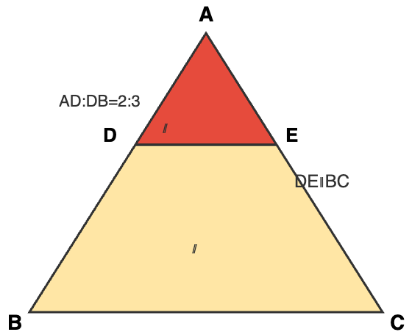
📖 1단계: 두 직각삼각형 ABH와 ACH를 비교한다. ∠AHB = ∠AHC = 90° (AH가 수선). 2단계: AH는 공통변. 빗변 AB = AC (이등변삼각형 조건). 3단계: 두 직각삼각형에서 빗변과 다른 한 변이 각각 같으므로 RHS 합동. 따라서 △ABH ≡ △ACH. 4단계: 합동이므로 BH = CH, 즉 H는 BC의 중점.

🧠 풀이 전략: 꼭지각에서 내린 수선이라는 조건이 직각을 만든다는 것에 주목. 직각삼각형 합동조건 RHS를 떠올리면 빗변(AB=AC)과 공통변(AH)으로 결론.

💡 이등변삼각형에서 꼭지각 이등분선, 밑변에 내린 수선, 밑변의 수직이등분선, 꼭지각에서 밑변의 중점을 잇는 선은 모두 일치한다.

Q200 닮음 심화

삼각형 ABC에서 변 AB 위의 점 D, 변 AC 위의 점 E에 대하여 DE ∥ BC이고, $\overline{AD} : \overline{DB} = 2 : 3$ 이다. 삼각형 ADE의 넓이가 8 cm² 일 때, 사다리꼴 DBCE의 넓이를 구하시오.



①) ① 25 cm²

②) ② 32 cm²

③) ③ 42 cm²

④) ④ 50 cm²

🎯 **정답: ③ 42 cm²**

📖 1단계: DE ∥ BC이므로 △ADE ∽ △ABC (AA 닮음). 닮음비는 $\overline{AD} : \overline{AB} = 2 : (2+3) = 2 : 5$. 2단계: 닮음비 2:5이면 넓이비는 $2^2 : 5^2 = 4 : 25$. 3단계: △ADE = 8 cm² 이므로 △ABC = $8 \times \frac{25}{4} = 50$ cm². 4단계: 사다리꼴 DBCE = △ABC − △ADE = $50 - 8 = 42$ cm².

🧠 풀이 전략: 평행선이 만드는 닮음 → 닮음비 → 넓이비(제곱) → 전체에서 작은 것을 빼면 사다리꼴.

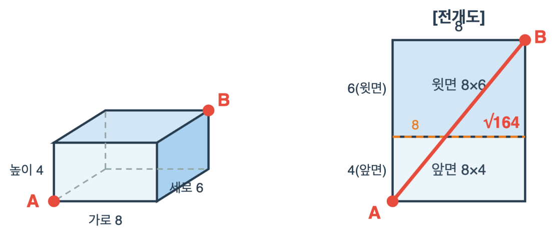
💡 닮음에서 길이비 k, 넓이비 k^2, 부피비 k^3 은 차원 수와 일치.

📝 중2 수학 심화

총 40문제 · 문제와 정답·풀이 포함

Q201 피타고라스 활용

가로 8 cm, 세로 6 cm, 높이 4 cm인 직육면체의 한 꼭짓점 A에서 그 대각선 반대 꼭짓점 B까지 직육면체 표면을 따라 가는 가장 짧은 경로의 길이를 구하시오. (단, 가로면-앞면을 거쳐가는 경우만 고려)



직육면체 (가로 8, 세로 6, 높이 4)

①) ① $\sqrt{116}$ cm
②) ② $\sqrt{200}$ cm
③) ③ $\sqrt{164}$ cm
④) ④ $\sqrt{180}$ cm
⑤) ⑤ $\sqrt{212}$ cm

🎯 **정답: ③ $\sqrt{164}$ cm**

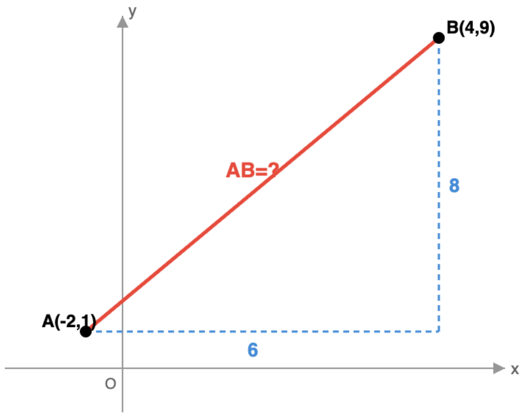
📖 1단계: 표면 위의 최단경로는 두 면을 한 평면으로 펼쳤을 때의 직선거리이다. 문제의 조건대로 윗면(가로면)과 앞면을 펼친다. 2단계: 윗면은 가로 8 × 세로 6, 앞면은 가로 8 × 높이 4이며, 두 면은 길이가 8인 모서리에서 만난다. 두 면을 펼치면 한 변이 8이고 다른 변이 6 + 4 = 10인 직사각형이 되고, A와 B는 그 대각선의 양 끝에 놓인다. 3단계: 최단거리 $= \sqrt{8^2 + 10^2} = \sqrt{64 + 100} = \sqrt{164}$ cm. 따라서 답은 ③ $\sqrt{164}$ cm이다. (보기 ① $\sqrt{116} = 2\sqrt{29}$ 는 표면 경로가 아니라 직육면체 내부의 공간대각선 $\sqrt{8^2 + 6^2 + 4^2} = \sqrt{116}$ 값이므로 함정 오답이다.)

🧠 풀이 전략: 3차원 표면 위의 거리는 2차원 전개도에서 직선거리. 펼치는 방향에 따라 여러 경우가 생기므로 모두 비교.

💡 개미가 직육면체 위를 가는 최단경로 문제는 펼침 방향이 핵심으로, 모든 펼침을 시도해야 한다.

Q202 피타고라스 활용

좌표평면 위의 두 점 A(-2, 1)과 B(4, 9) 사이의 거리를 구하시오.



①) ① 8
②) ② 10
③) ③ 12
④) ④ 14

🎯 **정답: ② 10**

📖 1단계: 두 점 사이의 거리 공식 $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ 사용. 2단계: x 차이 $= 4 - (-2) = 6$, y 차이 $= 9 - 1 = 8$. 3단계: $d = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100}$. 4단계: $d = 10$.

🧠 풀이 전략: 좌표 차이를 직각삼각형의 두 변으로 보고 빗변 길이가 두 점 사이 거리. 6,8,10은 유명한 피타고라스 수.

💡 3-4-5, 6-8-10, 5-12-13 같은 피타고라스 수는 시험에서 자주 등장한다.

Q203 경시 확률·퍼즐

숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 서로 다른 세 숫자를 골라 세 자리 자연수를 만들 때, 그 수가 5의 배수인 자연수의 개수는?

①) ① 6개
②) ② 9개
③) ③ 12개
④) ④ 15개

🎯 **정답: ③ 12개**

📖 1단계: 5의 배수가 되려면 일의 자리가 0 또는 5이어야 한다. 주어진 숫자에 0이 없으므로 일의 자리는 반드시 5. 2단계: 일의 자리 5 고정. 백의 자리는 1, 2, 3, 4 중 하나(4가지). 3단계: 십의 자리는 백의 자리와 5를 제외한 3가지. 4단계: 따라서 4 × 3 = 12개.

🧠 풀이 전략: 5의 배수 판정 → 일의 자리 제한 → 남은 자리 순열. 단계별로 자리수를 정해서 곱의 법칙 적용.

💡 5의 배수는 일의 자리만 보면 되고, 3의 배수는 자릿수 합을 보는 등 배수 판정법은 자리값 진법 구조와 연결된다.

Q204 유리수·순환소수 추론

기약분수 $\frac{n}{84}$ (단, $1 \leq n \leq 83$인 자연수)이 유한소수로 나타내어질 수 있는 자연수 n의 개수를 구하시오. (단, 기약분수 조건을 반드시 고려할 것)

①) ① 3개

②) ② 11개

③) ③ 12개

④) ④ 14개

🎯 **정답: ① 3개**

📖 1단계: $84 = 2^2 \times 3 \times 7$. 기약분수로 약분했을 때 분모의 소인수가 2와 5만 남아야 유한소수가 된다.

2단계: 분모 84의 소인수 3과 7을 모두 약분하여 없애야 하므로 분자 n은 $3 \times 7 = 21$의 배수여야 한다. (n이 3 또는 7 중 하나만의 배수이면 약분 후 분모에 다른 소인수가 남아 순환소수가 된다.)

3단계: $1 \leq n \leq 83$ 범위에서 21의 배수는 $21, 42, 63$의 3개이다. 실제로 $\frac{21}{84} = \frac{1}{4} = 0.25$, $\frac{42}{84} = \frac{1}{2} = 0.5$, $\frac{63}{84} = \frac{3}{4} = 0.75$로 모두 유한소수이므로 답은 3개이다. (정답 ①)

🧠 풀이 전략: 분모를 소인수분해 → 유한소수 조건은 '분모 소인수가 2,5뿐' → 분자가 3,7을 모두 포함해야 함 → 21의 배수 찾기.

💡 분모에 2와 5 외의 소인수가 하나라도 남으면 반드시 순환소수가 된다.

Q205 지수·식 계산 심화

실수 a에 대하여 $a + \frac{1}{a} = 4$일 때, $a^3 + \frac{1}{a^3}$의 값을 구하시오. (단, $a \neq 0$)

①) ① 48

②) ② 52

③) ③ 56

④) ④ 64

🎯 **정답: ② 52**

📖 1단계: 세제곱 공식 $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$ 활용. $b = \frac{1}{a}$로 두면 $ab = 1$.

2단계: $\left(a + \frac{1}{a}\right)^3 = a^3 + \frac{1}{a^3} + 3 \cdot 1 \cdot \left(a + \frac{1}{a}\right)$

$\Rightarrow 4^3 = a^3 + \frac{1}{a^3} + 3 \times 4$

3단계: $64 = a^3 + \frac{1}{a^3} + 12$이므로 $a^3 + \frac{1}{a^3} = 64 - 12 = 52$.

🧠 풀이 전략: 대칭식 변형: $(a + 1/a)$의 거듭제곱을 전개하여 $a^3 + 1/a^3$ 항을 분리. $a \cdot 1/a = 1$이라는 관찰이 핵심.

💡 $a + 1/a$의 값만 알면 $a^n + 1/a^n$ 모든 차수를 점화식으로 구할 수 있다.

Q206 부등식 활용 심화

어떤 회사에서 제품 A를 정가의 20% 할인하여 팔아도 원가의 25% 이상의 이익이 남도록 정가를 정하려고 한다. 원가가 10000원일 때, 정가는 최소 얼마 이상이어야 하는지 구하시오.

①) ① 14000원
②) ② 15000원
③) ③ 15625원
④) ④ 16000원

🎯 **정답: ③ 15625원**

📖 1단계: 정가를 x원이라 하자. 20% 할인한 판매가는 $0.8x$원.
2단계: 이익 = 판매가 - 원가 = $0.8x - 10000$. 이 이익이 원가의 25% 이상이어야 하므로
$0.8x - 10000 \geq 10000 \times 0.25 = 2500$
3단계: $0.8x \geq 12500 \Rightarrow x \geq \frac{12500}{0.8} = 15625$. 따라서 정가는 최소 15625원 이상.

🧠 풀이 전략: 미지수 설정(정가=x) → 할인가 표현 → 이익 부등식 세우기 → x에 대해 정리.

💡 실제 마트 가격표의 999원, 1990원 등은 심리적 가격 결정과 부등식 최적화의 결과이다.

Q207 연립방정식 심화 활용

세 수 x, y, z에 대하여 $x + y + z = 12$, $2x - y + z = 7$, $x + 2y - z = 6$가 성립할 때, xyz의 값을 구하시오.

①) ① 36
②) ② 48
③) ③ 60
④) ④ 72

🎯 **정답: ③ 60**

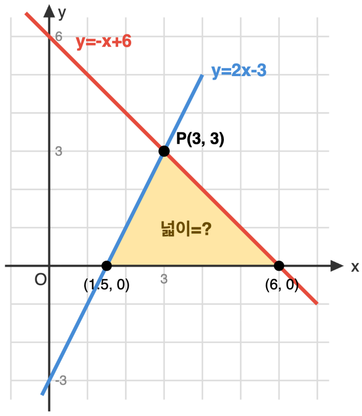
📖 1단계: 식① $x + y + z = 12$, 식② $2x - y + z = 7$, 식③ $x + 2y - z = 6$.
2단계: 식①에서 $z = 12 - x - y$. 식②에 대입하면 $2x - y + (12 - x - y) = 7 \Rightarrow x - 2y = -5$ ... (A). 식③에 대입하면 $x + 2y - (12 - x - y) = 6 \Rightarrow 2x + 3y = 18$ ... (B).
3단계: (A)에서 $x = 2y - 5$를 (B)에 대입하면 $2(2y - 5) + 3y = 18 \Rightarrow 7y = 28 \Rightarrow y = 4$. 따라서 $x = 2 \times 4 - 5 = 3$, $z = 12 - 3 - 4 = 5$.
4단계: 검산하면 $3 + 4 + 5 = 12$, $2 \times 3 - 4 + 5 = 7$, $3 + 2 \times 4 - 5 = 6$으로 모두 성립한다. 그러므로 $xyz = 3 \times 4 \times 5 = 60$. (정답 ③)

🧠 풀이 전략: 세 식에서 한 변수씩 소거 → 두 변수 연립 → 해 구한 후 곱셈.

💡 3원 연립방정식은 행렬의 역수(역행렬)로도 한 번에 풀 수 있다.

Q208 일차함수 응용

좌표평면 위에 두 직선 $y = -x + 6$과 $y = 2x - 3$이 있다. 두 직선과 x축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 구하시오.



①) ① $\frac{27}{4}$
②) ② $\frac{27}{2}$
③) ③ 9
④) ④ $\frac{45}{4}$

🎯 **정답: ① $\frac{27}{4}$**

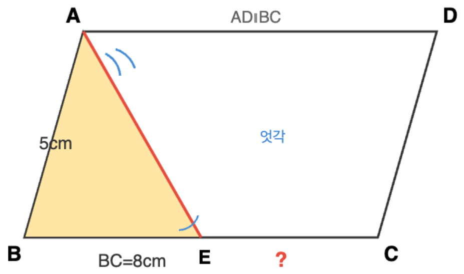
📖 1단계: 두 직선의 교점 구하기. $-x + 6 = 2x - 3 \Rightarrow 3x = 9 \Rightarrow x = 3, y = 3$. 교점 P(3, 3).
2단계: 두 직선의 x절편 구하기. $y = -x + 6$의 x절편: $x = 6$. $y = 2x - 3$의 x절편: $x = \frac{3}{2}$. 따라서 x축 위의 밑변은 $6 - \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$.
3단계: 삼각형의 높이는 교점의 y좌표인 3. 따라서 넓이 = $\frac{1}{2} \times \frac{9}{2} \times 3 = \frac{27}{4}$. 따라서 답은 ① $\frac{27}{4}$.

🧠 풀이 전략: 두 직선 교점(꼭짓점)과 x절편(밑변 양 끝점)을 구한 뒤 밑변·높이 적용.

💡 직선이 x축과 이루는 삼각형의 넓이는 절편과 기울기로 즉시 계산할 수 있다.

Q209 도형 성질 증명

평행사변형 ABCD에서 $\angle A$의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 E라 하자. $\overline{AB} = 5\text{cm}, \overline{BC} = 8\text{cm}$일 때, $\overline{EC}$의 길이를 구하고, $\triangle ABE$가 이등변삼각형임을 보이시오.



①) ① 2cm

②) ② 3cm

③) ③ 4cm

④) ④ 5cm

🎯 **정답: ② 3cm**

📖 1단계: 평행사변형이므로 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$. 따라서 $\angle DAE = \angle AEB$ (엇각).

2단계: AE는 $\angle A$의 이등분선이므로 $\angle BAE = \angle DAE$. 따라서 $\angle BAE = \angle AEB$. 즉 △ABE에서 두 밑각이 같으므로 △ABE는 이등변삼각형이고 $\overline{BE} = \overline{AB} = 5\text{cm}$.

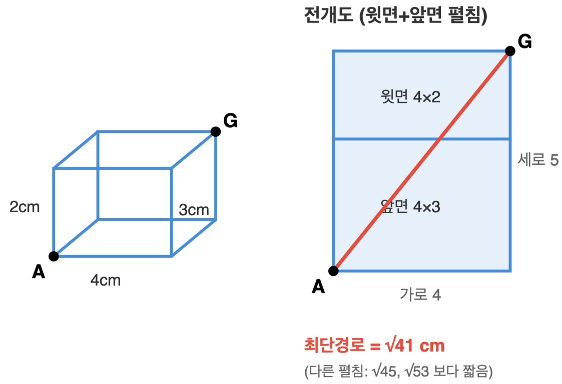
3단계: $\overline{EC} = \overline{BC} - \overline{BE} = 8 - 5 = 3\text{cm}$.

🧠 풀이 전략: 평행선의 엇각 + 각이등분 → 두 각이 같음 → 이등변삼각형 → BE = AB.

💡 평행사변형에서 각의 이등분선은 항상 마주보는 변에 이등변 조각을 만들어 낸다.

Q210 피타고라스 활용

가로 4cm, 세로 3cm, 높이 2cm인 직육면체가 있다. 한 꼭짓점 A에서 출발하여 이와 마주보는 꼭짓점 G까지 직육면체 표면을 따라 가는 최단 경로의 길이를 구하시오.



①) ① $\sqrt{29}$ cm
②) ② $\sqrt{41}$ cm
③) ③ $\sqrt{45}$ cm
④) ④ $\sqrt{61}$ cm

🎯 **정답: ② $\sqrt{41}$ cm**

📖 1단계: 직육면체의 표면을 펼쳐서 평면에서의 직선 거리를 구해야 함. 펼치는 방법은 3가지.

방법1: 옆면+윗면 → 직사각형 가로 (4+2)=6, 세로 3 → 거리 $\sqrt{6^2+3^2} = \sqrt{45}$.

방법2: 앞면+윗면 → 직사각형 가로 4, 세로 (3+2)=5 → 거리 $\sqrt{4^2+5^2} = \sqrt{41}$.

방법3: 옆면+뒷면 → 직사각형 가로 (4+3)=7, 세로 2 → 거리 $\sqrt{7^2+2^2} = \sqrt{53}$.

2단계: 세 경로 비교: $\sqrt{41} \approx 6.40$, $\sqrt{45} \approx 6.71$, $\sqrt{53} \approx 7.28$.

3단계: 따라서 최단 경로의 길이는 $\sqrt{41}$ cm.

🧠 풀이 전략: 3D에서 표면 최단경로 → 전개도로 펼침 → 모든 펼침 방법 시도 → 피타고라스 정리로 거리 계산 → 최솟값 선택.

💡 직육면체 표면 최단경로 문제는 항상 세 가지 펼침을 모두 비교해야 정답이 나온다.

Q211 경시 확률·퍼즐

네 명의 학생 A, B, C, D가 다음과 같이 진술했다.
A: 'B는 거짓말을 하고 있다.'
B: 'C는 거짓말을 하고 있다.'
C: 'D는 거짓말을 하고 있다.'
D: 'A와 B는 모두 거짓말을 하고 있다.'
네 명 중 진실을 말한 사람의 수를 구하시오.

①) ① 1명
②) ② 2명
③) ③ 3명
④) ④ 4명

🎯 **정답: ② 2명**

📖 1단계: D의 진술을 분석. D가 참이라면 'A와 B 모두 거짓'. A가 거짓이면 'B는 진실'인데, 이는 D가 'B는 거짓'이라 한 것과 모순. 따라서 D는 거짓말쟁이.
2단계: D가 거짓이면, 'A 또는 B 중 적어도 한 명은 진실'.
경우(i): A가 진실 → B는 거짓 → C는 진실(B가 'C는 거짓'이라 했지만 B가 거짓이므로) → D는 거짓(C가 'D는 거짓'이라 했고 C가 진실). 검증: A진실, B거짓, C진실, D거짓 → A,C 진실 = 2명. 모순 없음.
3단계: 경우(ii): A가 거짓 → B는 진실 → C는 거짓 → D는 진실. 그러나 1단계에서 D는 반드시 거짓이므로 모순. 따라서 경우(i)만 성립. 진실을 말한 사람은 A와 C, 총 2명.

🧠 풀이 전략: 극단적 진술(D)부터 검토 → 자기모순 발견하면 거짓 확정 → 연쇄적으로 진리값 추론 → 모순 없는 경우만 채택.

💡 논리 퍼즐에서는 가장 강한 주장을 하는 사람의 진술부터 검토하면 빨리 풀린다.

Q212 유리수·순환소수 추론

순환소수 $0.\overline{36}$과 $0.\overline{27}$의 합을 기약분수로 나타내시오. (단, $0.\overline{ab}$는 ab가 반복되는 순환소수를 의미한다.)

①) ① $\frac{7}{11}$
②) ② $\frac{63}{99}$
③) ③ $\frac{6}{11}$
④) ④ $\frac{2}{3}$

🎯 **정답: ① $\frac{7}{11}$**

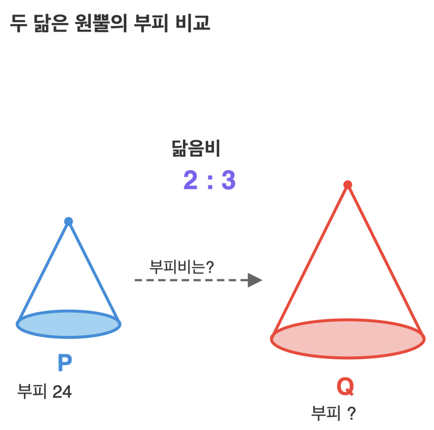
📖 1단계: $0.\overline{36} = \frac{36}{99} = \frac{4}{11}$ (분자, 분모 9로 약분).
2단계: $0.\overline{27} = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$ (분자, 분모 9로 약분).
3단계: 합 $= \frac{4}{11} + \frac{3}{11} = \frac{7}{11}$. 이 분수는 분모 11이 소수이므로 더 이상 약분 불가능, 기약분수.

🧠 풀이 전략: 순환마디 두 자리 → 분모 99 → 약분 → 동분모 합산 → 기약분수 확인.

💡 $\frac{1}{11} = 0.\overline{09}$, $\frac{2}{11} = 0.\overline{18}$ 등 분모 11의 분수는 항상 두 자리 순환마디를 갖는다.

Q213 닮음 심화

두 닮은 원뿔 P, Q의 닮음비가 2:3이다. 원뿔 P의 부피가 24cm³일 때, 원뿔 Q의 부피를 구하시오.



①) ① 36cm³

②) ② 54cm³

③) ③ 81cm³

④) ④ 108cm³

🎯 **정답: ③ 81cm³**

📖 1단계: 닮은 두 입체의 부피비는 닮음비의 세제곱. 닮음비 P:Q = 2:3이므로 부피비 = $2^3 : 3^3 = 8 : 27$.

2단계: 원뿔 P의 부피가 24cm³이므로 비례식: $8 : 27 = 24 : V_Q$.

3단계: $V_Q = \frac{27 \times 24}{8} = \frac{648}{8} = 81$cm³. 따라서 원뿔 Q의 부피는 81cm³.

🧠 풀이 전략: 닮은 도형 → 길이비, 넓이비, 부피비 관계 → 부피비는 닮음비의 세제곱 → 비례식 풀이.

💡 두 배 큰 인형은 부피와 무게가 8배가 된다. 이것이 거대 로봇이 현실에서 어려운 이유다.

Q214 유리수·순환소수 추론

분수 17/55를 소수로 나타내었을 때, 소수점 아래 100번째 자리의 숫자는 무엇인가? 그 이유를 설명하라.

①) ① 0

②) ② 3

③) ③ 5

④) ④ 9

🎯 **정답: ① 0**

📖 1) 분모 55 = 5 × 11에 11이 들어 있으므로 17/55는 순환소수가 된다. 2) 직접 나눗셈을 하면 17 ÷ 55 = 0.3090909... 즉 첫 자리에 3이 오고, 그 다음부터 0과 9가 번갈아 나타난다. 3) 소수점 아래 1번째 자리는 3, 2번째부터는 짝수 자리에는 0, 홀수 자리에는 9가 반복된다. 4) 100번째 자리는 짝수이므로 답은 0.

🧠 풀이 전략: 분모를 소인수분해해 순환 여부를 확인하고, 직접 나눗셈으로 자릿수 패턴을 찾아낸 뒤, 위치(짝/홀)에 따라 어떤 숫자가 오는지 일반화한다.

💡 분모에 11이 포함된 기약분수의 십진 전개는 두 자리짜리 순환마디를 가지는 경우가 많다.

Q215 지수·식 계산 심화

$a = 2026^2 - 2025^2$, $b = 2025^2 - 2024^2$, $c = 2024^2 - 2023^2$일 때, $a + b + c$의 값을 구하시오. (직접 제곱을 계산하지 말고 곱셈공식을 활용할 것)

①) ① 12141
②) ② 12145
③) ③ 12147
④) ④ 12150

🎯 **정답: ③ 12147**

📖 1) 곱셈공식 $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$를 이용한다. 2) $a = (2026 + 2025)(2026 - 2025) = 4051 \times 1 = 4051$. 3) $b = (2025 + 2024)(2025 - 2024) = 4049 \times 1 = 4049$. 4) $c = (2024 + 2023)(2024 - 2023) = 4047 \times 1 = 4047$. 5) 따라서 $a + b + c = 4051 + 4049 + 4047 = 12147$.

🧠 풀이 전략: 큰 수의 제곱을 직접 다루는 대신 합과 차의 곱으로 변형한다. 연속한 자연수의 제곱 차는 두 수의 합과 같다는 점을 이용해 빠르게 계산한다.

💡 홀수 1, 3, 5, ...의 합이 제곱수가 되는 성질도 사실 $n^2 - (n - 1)^2 = 2n - 1$에서 출발한다.

Q216 부등식 활용 심화

x, y가 모두 자연수일 때, 부등식 2x + 3y ≤ 12를 만족하는 순서쌍 (x, y)의 개수를 구하시오.

①) ① 6개
②) ② 7개
③) ③ 8개
④) ④ 9개

🎯 **정답: ③ 8개**

📖 1) y의 가능한 값을 작은 자연수부터 차례로 고정하고, 각 경우의 x 범위를 구한다. 2) y=1: 2x ≤ 9이므로 x ≤ 4.5, x = 1,2,3,4. (4개) 3) y=2: 2x ≤ 6이므로 x ≤ 3, x = 1,2,3. (3개) 4) y=3: 2x ≤ 3이므로 x ≤ 1.5, x = 1. (1개) 5) y=4: 2x ≤ 0이므로 자연수 x 없음. 6) 총합 4 + 3 + 1 = 8개.

🧠 풀이 전략: 두 변수 부등식의 해를 셀 때는 한 변수를 고정해 1차원 부등식으로 환원하고, 가능한 모든 경우를 빠짐 없이 누적한다.

💡 이런 격자점 세기 문제는 좌표평면 위 영역(삼각형)을 그려 해석하면 더 직관적으로 풀린다.

Q217 연립방정식 심화 활용

농도가 다른 두 소금물 A, B가 있다. A 200 g과 B 300 g을 섞었더니 7 %의 소금물이 되었고, A 300 g과 B 200 g을 섞었더니 8 %의 소금물이 되었다. 소금물 A의 농도를 구하시오.

①) ① 8 %
②) ② 9 %
③) ③ 10 %
④) ④ 11 %

🎯 **정답: ③ 10 %**

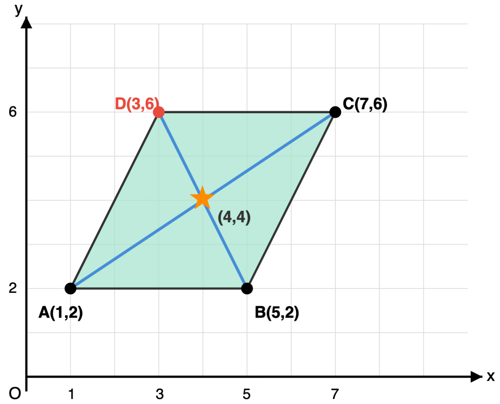
📖 1) A의 농도를 a %, B의 농도를 b %로 두고, 각 경우 녹아 있는 소금의 양으로 식을 세운다. 2) 첫 번째 조건: 0.01a × 200 + 0.01b × 300 = 0.07 × 500. 정리하면 2a + 3b = 35. 3) 두 번째 조건: 0.01a × 300 + 0.01b × 200 = 0.08 × 500. 정리하면 3a + 2b = 40. 4) 두 식을 연립한다. 3 × (3a+2b) - 2 × (2a+3b) = 9a + 6b - 4a - 6b = 5a = 3 × 40 - 2 × 35 = 50. 따라서 a = 10. 5) A의 농도는 10 %.

🧠 풀이 전략: 농도 문제는 항상 소금의 절대량을 기준으로 식을 세운다. 미지수가 두 개이면 서로 다른 두 가지 혼합 조건이 있어야 풀 수 있다는 점을 의식한다.

💡 농도 혼합은 가중평균과 같다. 더 많이 섞은 쪽으로 결과 농도가 가까워진다.

Q218 일차함수 응용

좌표평면 위의 세 점 A(1, 2), B(5, 2), C(7, 6)이 평행사변형 ABCD의 세 꼭짓점일 때, 점 D의 좌표와 두 대각선 AC, BD의 교점 좌표를 구하시오.



①) ① D(3, 6), 교점 (4, 4)

②) ② D(11, 6), 교점 (6, 4)

③) ③ D(3, 4), 교점 (4, 3)

④) ④ D(11, 4), 교점 (5, 3)

🎯 **정답: ① D(3, 6), 교점 (4, 4)**

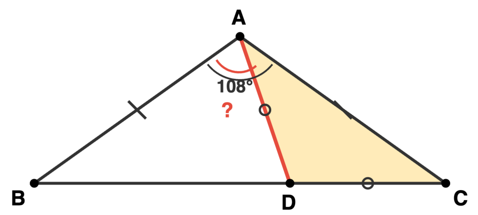
📖 1) 평행사변형 ABCD에서 변 AB와 변 DC는 평행하고 길이가 같다. 즉 점 A에서 B로 가는 변화량과 점 D에서 C로 가는 변화량이 같다. 2) A(1,2)에서 B(5,2)로의 변화량은 (4, 0)이므로 D에서 C로의 변화량도 (4, 0). 따라서 D = (7-4, 6-0) = (3, 6). 3) 평행사변형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분하므로 교점은 두 대각선의 중점에서 만난다. 4) 대각선 AC의 중점 = ((1+7)/2, (2+6)/2) = (4, 4). 5) 검증: BD의 중점 = ((5+3)/2, (2+6)/2) = (4, 4)로 일치한다.

🧠 풀이 전략: 평행사변형의 두 핵심 성질, 즉 마주보는 변이 평행하고 길이가 같다는 점, 두 대각선이 서로를 이등분한다는 점을 좌표로 옮긴다. 두 성질이 동시에 성립함을 검증해 일관성을 확인한다.

💡 네 점 P, Q, R, S가 평행사변형이 되는 조건은 PQ의 중점과 RS의 중점이 같다는 단순한 식 하나로 표현된다.

Q219 도형 성질 증명

이등변삼각형 ABC에서 AB = AC이고 ∠BAC = 108°이다. 변 BC 위에 점 D를 잡아 AD = DC가 되도록 할 때, ∠BAD의 크기를 구하고 그 과정을 단계적으로 설명하시오.



①) ① 36°

②) ② 54°

③) ③ 72°

④) ④ 90°

🎯 **정답: ③ 72°**

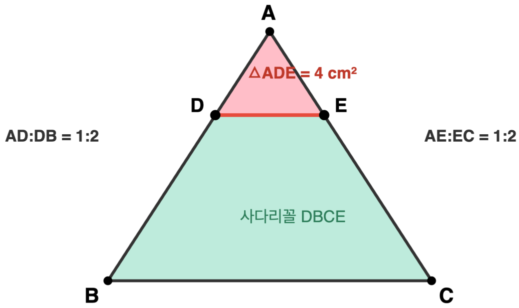
📖 1) 이등변삼각형 ABC에서 AB = AC이므로 두 밑각이 같다. ∠ABC = ∠ACB = (180° - 108°)/2 = 36°. 2) 점 D는 변 BC 위에 있고 AD = DC이므로 △ADC도 이등변삼각형. 두 변 DA, DC에 마주보는 두 각이 같다. 즉 ∠DAC = ∠DCA = ∠ACB = 36°. 3) 따라서 ∠BAD = ∠BAC - ∠DAC = 108° - 36° = 72°.

🧠 풀이 전략: 큰 이등변삼각형의 밑각을 먼저 구한 뒤, 그 안의 작은 이등변삼각형(△ADC)에서 같은 밑각이 다시 등장한다는 사실을 이용한다. 큰 각을 두 부분으로 나누는 시각적 분할이 핵심.

💡 꼭지각이 108°인 이등변삼각형은 정오각형의 한 변과 두 대각선이 만드는 모양과 같다. 이 안에는 황금비가 숨어 있다.

Q220 닮음 심화

삼각형 ABC에서 변 AB 위의 점 D는 AD : DB = 1 : 2를 만족하고, 변 AC 위의 점 E는 AE : EC = 1 : 2를 만족한다. △ADE의 넓이가 4 cm²일 때, 사다리꼴 DBCE의 넓이를 구하시오.



①) ① 12 cm²

②) ② 24 cm²

③) ③ 32 cm²

④) ④ 36 cm²

🎯 **정답: ③ 32 cm²**

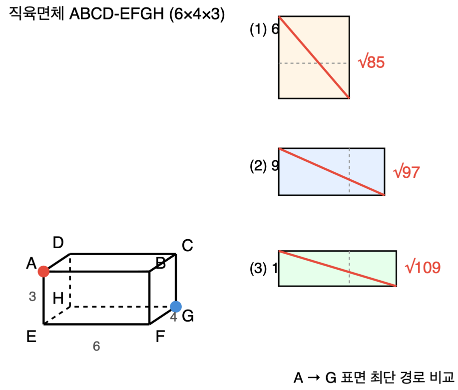
📖 1) AD : DB = 1 : 2이므로 AD : AB = 1 : 3. 같은 방식으로 AE : AC = 1 : 3. 2) △ADE와 △ABC에서 ∠A는 공통이고 두 변이 같은 비(1:3)에 있으므로 SAS 닮음. 닮음비는 1 : 3. 3) 닮음비가 1 : 3이면 넓이비는 $1^2 : 3^2 = 1 : 9$. 4) △ADE의 넓이가 4 cm²이므로 △ABC의 넓이는 9 × 4 = 36 cm². 5) 사다리꼴 DBCE의 넓이 = △ABC - △ADE = 36 - 4 = 32 cm².

🧠 풀이 전략: 두 삼각형이 닮음임을 SAS 조건으로 확인한 뒤, 닮음비의 제곱이 넓이비라는 정리를 적용한다. 사다리꼴은 큰 삼각형에서 작은 삼각형을 빼서 구한다.

💡 닮음비 k에 대해 길이는 k배, 넓이는 k^2 배, 부피는 k^3 배. 차원이 한 단계 올라갈 때마다 비가 한 번씩 곱해진다.

Q221 피타고라스 활용

직육면체 ABCD-EFGH의 가로 AB = 6 cm, 세로 BC = 4 cm, 높이 BF = 3 cm이다. 윗면의 한 꼭짓점 A에서 출발해 직육면체의 표면을 따라 대각선 위치의 꼭짓점 G(아랫면 반대편 꼭짓점)까지 가는 최단 경로의 길이를 구하시오.



①) ① √85 cm

②) ② √97 cm

③) ③ √109 cm

④) ④ √125 cm

🎯 **정답: ① √85 cm**

📖 1) 입체 표면 위 두 점을 잇는 최단 경로는 그 두 점이 지나는 면들을 평면으로 펼친 뒤의 직선거리이다. 2) A에서 G로 가는 경로는 거치는 두 면의 조합에 따라 세 가지 경우가 있다. 3) 윗면(6×4)과 큰 옆면(6×3)을 펼친 경우: 직사각형 6×(4+3) = 6×7, 대각선 = $\sqrt{6^2+7^2}$ = $\sqrt{85}$. 4) 윗면(6×4)과 작은 옆면(4×3)을 펼친 경우: 직사각형 (6+3)×4 = 9×4, 대각선 = $\sqrt{9^2+4^2}$ = $\sqrt{97}$. 5) 두 옆면(6×3)과 (4×3)을 펼친 경우: 직사각형 (6+4)×3 = 10×3, 대각선 = $\sqrt{10^2+3^2}$ = $\sqrt{109}$. 6) 세 값을 비교하면 √85 < √97 < √109이므로 최단 경로는 √85 cm.

🧠 풀이 전략: 입체 위 최단 경로 문제는 평면으로 '펼치는' 사고가 핵심이다. 가능한 펼침을 모두 시도해 가장 짧은 직선거리를 찾는다.

💡 이 유형은 거미가 직육면체 방의 한 모퉁이에서 반대 모퉁이까지 가는 최단 경로 문제로 19세기 영국의 퍼즐가 듀더니가 유행시켰다.

Q222 경시 확률·퍼즐

1부터 20까지의 자연수 중에서 임의로 몇 개를 뽑을 때, 그 안에 합이 21이 되는 두 수가 반드시 포함되도록 하려면 최소 몇 개를 뽑아야 하는가? 그 이유를 비둘기집 원리로 설명하라.

①) ① 10개

②) ② 11개

③) ③ 12개

④) ④ 21개

🎯 **정답: ② 11개**

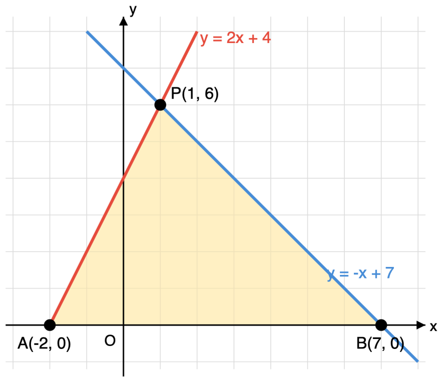
📖 1) 1부터 20까지의 수 중 합이 21이 되는 짝을 모두 나열한다: (1,20), (2,19), (3,18), (4,17), (5,16), (6,15), (7,14), (8,13), (9,12), (10,11). 모두 10쌍이고, 1부터 20까지의 모든 수가 정확히 한 쌍에 속한다. 2) 만약 각 쌍에서 한 개씩만 골라 뽑으면 최대 10개를 뽑아도 합이 21인 짝이 만들어지지 않는다. 따라서 10개로는 보장할 수 없다. 3) 11개를 뽑으면 비둘기 11마리를 비둘기집 10개에 넣는 것과 같으므로, 어느 한 쌍에서 두 수가 모두 뽑힐 수밖에 없다. 4) 따라서 합이 21인 두 수가 반드시 나타나도록 하려면 최소 11개를 뽑아야 한다.

🧠 풀이 전략: 전체 집합을 '같은 성질'을 가진 작은 부분(여기서는 합이 21인 쌍)으로 분할한다. 부분의 개수보다 1 많이 뽑으면 어느 부분에 두 개가 들어갈 수밖에 없다는 것이 비둘기집 원리.

💡 비둘기집 원리는 1834년 디리클레가 정수론에 응용한 이후 조합론과 컴퓨터 과학의 기본 도구가 되었다.

Q223 일차함수 응용

두 직선 y = 2x + 4와 y = -x + 7의 교점을 P, 직선 y = 2x + 4가 x축과 만나는 점을 A, 직선 y = -x + 7이 x축과 만나는 점을 B라 한다. 삼각형 PAB의 넓이를 구하시오.



①) ① 18
②) ② 24
③) ③ 27
④) ④ 36

🎯 **정답: ③ 27**

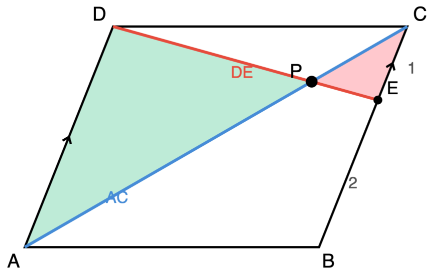
📖 1) 두 직선의 교점 P를 구한다. 2x + 4 = -x + 7에서 3x = 3, x = 1, y = 6. 따라서 P(1, 6). 2) 점 A는 직선 y = 2x + 4가 x축(y = 0)과 만나는 점이므로 0 = 2x + 4에서 x = -2. A(-2, 0). 3) 점 B는 직선 y = -x + 7이 x축과 만나는 점이므로 0 = -x + 7에서 x = 7. B(7, 0). 4) 두 점 A, B는 모두 x축 위에 있으므로 선분 AB의 길이는 7 - (-2) = 9. 이 변을 밑변으로 보면, 삼각형의 높이는 P의 y좌표 = 6. 5) 삼각형 PAB의 넓이 = (1/2) × 9 × 6 = 27.

🧠 풀이 전략: 두 직선과 x축이 만드는 삼각형은 세 꼭짓점을 모두 좌표로 구한 뒤, x축 위 변을 밑변으로 잡고 그 위 점의 y좌표를 높이로 사용하면 단번에 넓이가 나온다.

💡 좌표만 알면 삼각형의 넓이는 신발끈 공식으로도 계산할 수 있다. (1/2)|x_1(y_2-y_3) + x_2(y_3-y_1) + x_3(y_1-y_2)|.

Q224 닮음 심화

평행사변형 ABCD에서 변 BC 위에 BE : EC = 2 : 1을 만족하는 점 E를 잡는다. 대각선 AC와 선분 DE의 교점을 P라 할 때, DP : PE의 비를 구하고, 닮음을 이용하여 그 이유를 설명하라.



AD ∥ EC ⇒ △PAD ~ △PCE (AD : EC = 3 : 1)

①) ① 1 : 1

②) ② 2 : 1

③) ③ 3 : 1

④) ④ 3 : 2

🎯 **정답: ③ 3 : 1**

📖 1) 평행사변형 ABCD에서 변 AD와 변 BC는 평행하므로, 변 AD와 선분 EC도 평행하다. 2) 직선 DE와 AC가 점 P에서 만나며 두 평행선 AD, EC를 가로지른다. △PAD와 △PCE에서 ∠APD = ∠CPE(맞꼭지각), ∠PAD = ∠PCE(평행선의 엇각). 3) 두 쌍의 각이 같으므로 △PAD ~ △PCE (AA 닮음). 4) 닮음비는 대응변의 비. 평행사변형이므로 AD = BC이고 BE : EC = 2 : 1에서 EC = (1/3)BC = (1/3)AD. 따라서 AD : EC = 3 : 1. 5) 닮음에서 대응변의 비는 모두 같으므로 DP : PE = AD : EC = 3 : 1.

🧠 풀이 전략: 두 평행한 선분이 두 직선에 의해 가로지를 때 만들어지는 두 삼각형은 AA 닮음이며, 두 평행한 선분의 길이비가 곧 닮음비이다. 평행사변형의 마주보는 변이 같다는 성질을 결합한다.

💡 이 닮음 구조는 사다리꼴의 두 대각선 교점에서도 똑같이 나타나며, 사다리꼴의 두 평행한 변의 길이비가 그대로 대각선 분할비가 된다.

Q225 경시 확률·퍼즐

9개의 동전 중 1개가 가짜로, 진짜 동전보다 약간 가볍다(가짜 동전 1개의 위치는 모름). 양팔저울만을 사용해 가짜 동전을 확실하게 찾아내려면 최소 몇 번의 측정이 필요한가? 전략을 함께 설명하라.

①) ① 1번

②) ② 2번

③) ③ 3번

④) ④ 4번

🎯 **정답: ② 2번**

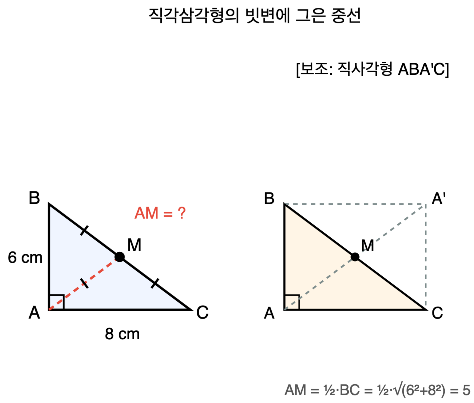
📖 1) 양팔저울 한 번의 측정에서 얻을 수 있는 결과는 '왼쪽이 가벼움', '평형', '오른쪽이 가벼움'의 세 가지뿐이다. n번 측정해서 구별할 수 있는 경우의 수는 최대 3^n이며, 9개를 구별하려면 $3^n \geq 9$, 즉 $n \geq 2$가 필요하다. 2) 실제로 2번이면 가능한 전략을 구성할 수 있다. 9개를 3개씩 세 그룹 A, B, C로 나눈다. 3) 1차 측정: A와 B를 양팔저울에 올린다. A가 가벼우면 가짜는 A 안에, B가 가벼우면 가짜는 B 안에, 평형이면 가짜는 C 안에 있다. 어느 경우든 가짜를 포함하는 3개짜리 그룹이 결정된다. 4) 2차 측정: 그 3개에서 두 개를 골라 양팔저울에 올린다. 한쪽이 가벼우면 그 동전이 가짜, 평형이면 올리지 않은 한 개가 가짜다. 5) 따라서 최악의 경우에도 2번이면 가짜를 확실히 찾을 수 있고, 1번으로는 불가능하므로 답은 2번.

🧠 풀이 전략: 측정 한 번이 주는 정보량(3가지 결과)을 먼저 평가해 이론적 하한을 구하고, 그 하한을 실제로 달성하는 분할 전략(3등분)을 구성한다. '하한 + 구성'의 두 단계로 최소값을 증명.

💡 같은 3등분 전략을 적용하면 27개 동전 중 가짜 1개는 단 3번, 81개 중에서는 4번 만에 찾을 수 있다. 이는 정보이론에서 말하는 엔트로피 계산과 정확히 일치한다.

Q226 도형 성질 증명

직각삼각형 ABC에서 ∠A=90°, AB=6 cm, AC=8 cm이다. 빗변 BC의 중점을 M이라 할 때, AM의 길이를 구하고, '직각삼각형의 빗변의 중점이 세 꼭짓점에서 같은 거리에 있다'는 사실이 성립하는 이유로 가장 적절한 것을 고르시오.



①) ① AM=4, 평행사변형의 두 대각선이 서로 이등분하므로

②) ② AM=5, 빗변의 중점 M은 외접원의 중심이고 반지름은 빗변의 절반

③) ③ AM=6, 무게중심이 변을 1:2로 나누는 성질에 의해

④) ④ AM=7, 사인법칙에 의해 외접원 지름이 결정되므로

🎯 **정답: ② AM=5, 빗변의 중점 M은 외접원의 중심이고 반지름은 빗변의 절반**

📖 1단계: 피타고라스 정리로 빗변 길이 계산. $BC = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$ cm.

2단계: 핵심 보조선 사용. AM을 연장하여 AM=MA'인 점 A'를 잡으면, 사각형 ABA'C에서 두 대각선 AA'과 BC가 서로 이등분되므로 평행사변형이다. 그런데 ∠A=90°이므로 이는 직사각형이 된다.

3단계: 직사각형의 두 대각선은 길이가 같으므로 AA' = BC = 10. 따라서 AM = AA'/2 = 5 cm. 동시에 BM = MC = 5이므로 AM = BM = CM이 성립한다.

4단계: 즉, M은 △ABC의 외접원의 중심이며, 반지름은 빗변의 절반이다.

🧠 풀이 전략: 직각삼각형의 빗변과 직각 꼭짓점 사이에는 특별한 관계가 있다. '한 변을 지름으로 하는 원에 내접하는 삼각형의 그 지름에 대한 원주각은 90°'라는 사실의 역(역명제)을 떠올리면, 빗변이 곧 외접원의 지름이고 그 중점이 외심이 된다. 따라서 빗변의 중점에서 세 꼭짓점까지 거리가 모두 외접원의 반지름으로 같다.

💡 이 성질은 고대 그리스의 수학자 탈레스(Thales)가 처음 증명한 것으로 알려진 '탈레스의 정리'의 역에 해당한다. 직각이 보이면 빗변을 지름으로 하는 원을 떠올리는 것은 경시대회의 단골 전략이다.

Q227 지수·식 계산 심화

두 양수 a, b가 $a^2 + b^2 = 7ab$ (단, a > b)를 만족할 때, $\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}$의 값을 구하시오.

①) ① $\frac{5}{9}$
②) ② $\frac{7}{5}$
③) ③ $\frac{9}{5}$
④) ④ $\frac{25}{9}$

🎯 **정답: ③ $\frac{9}{5}$**

📖 1단계: 분자 변형. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. 조건 $a^2 + b^2 = 7ab$를 대입하면 $(a+b)^2 = 7ab + 2ab = 9ab$.

2단계: 분모 변형. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = 7ab - 2ab = 5ab$.

3단계: 분자/분모. $\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2} = \frac{9ab}{5ab} = \frac{9}{5}$ (a>0, b>0이므로 ab≠0이라 약분 가능).

🧠 풀이 전략: a, b를 직접 구하려 하지 말고 '대칭식 형태'를 활용한다. 주어진 조건이 $a^2 + b^2$ 형태이고 묻는 식이 $(a \pm b)^2$ 형태라는 점에 주목하면, $(a \pm b)^2$를 전개해서 $a^2 + b^2$를 통째로 치환할 수 있다. 이렇게 하면 미지수 ab가 분자/분모에서 약분되어 깔끔한 비가 나온다.

💡 대칭식의 변형은 경시대회의 핵심 기법이다. 'a+b'와 'ab' 두 가지(기본대칭식)만 알면 거의 모든 대칭식의 값을 구할 수 있다.

Q228 부등식 활용 심화

다음 연립부등식을 만족하는 자연수 x를 모두 구하고, 그 합을 구하시오.

$$\begin{cases} 3x - 2 < x + 6 \\ 2x + 1 \geq 5 - x \end{cases}$$

①) ① 합 = 3
②) ② 합 = 5
③) ③ 합 = 9
④) ④ 합 = 14

🎯 **정답: ② 합 = 5**

📖 1단계: 첫째 부등식 풀이. $3x - 2 < x + 6$에서 $2x < 8$, 즉 $x < 4$.

2단계: 둘째 부등식 풀이. $2x + 1 \geq 5 - x$에서 $3x \geq 4$, 즉 $x \geq \frac{4}{3}$.

3단계: 두 범위의 공통부분. $\frac{4}{3} \leq x < 4$.

4단계: 이 범위의 자연수는 x = 2, 3 (1은 4/3보다 작아서 제외, 4는 미만이라 제외).

5단계: 합 = 2 + 3 = 5.

🧠 풀이 전략: 각 부등식을 따로 푼 뒤 두 해의 교집합을 수직선에서 시각화한다. 함정은 양 끝의 등호 처리(< 와 ≤의 차이)와 자연수의 범위(1부터 시작)이다. 4/3은 1.33...이므로 자연수 1은 포함되지 않는다는 점을 놓치지 말자.

💡 연립부등식의 해는 항상 두 직선이 만들어내는 영역의 '겹치는 부분'이다. 한 쪽이 무한대로 열려 있으면 해가 무한히 많아 보이지만, 자연수처럼 이산집합으로 제한하면 유한해진다.

Q229 연립방정식 심화 활용

농도 8%의 소금물과 농도 12%의 소금물을 적당히 섞어서 농도 10%의 소금물 500 g을 만들려고 한다. 이때 8% 소금물은 몇 g이 필요한가?

①) ① 200 g

②) ② 250 g

③) ③ 300 g

④) ④ 350 g

🎯 **정답: ② 250 g**

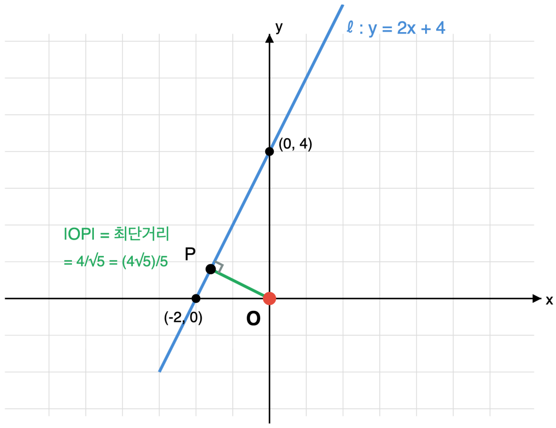
📖 1단계: 미지수 설정. 8% 소금물 x g, 12% 소금물 y g이라 한다.
2단계: 양에 대한 식. $x + y = 500$ ... ㉠
3단계: 소금의 양에 대한 식. 8% 소금물 속 소금 = 0.08x, 12% 소금물 속 소금 = 0.12y. 섞은 결과 10% 500 g 속 소금 = 50 g. 따라서 $0.08x + 0.12y = 50$, 양변에 100을 곱해 $8x + 12y = 5000$, 4로 약분하면 $2x + 3y = 1250$ ... ㉡
4단계: 연립 풀이. ㉠에서 $y = 500 - x$를 ㉡에 대입: $2x + 3(500 - x) = 1250 \rightarrow 2x + 1500 - 3x = 1250 \rightarrow -x = -250 \rightarrow x = 250$.
5단계: 검산. y = 250. 0.08·250 + 0.12·250 = 20 + 30 = 50 ✓ (10% 500 g의 소금량과 일치).

🧠 풀이 전략: 농도 문제는 '양 보존 + 소금(용질) 보존'이라는 두 가지 보존량을 식으로 잡는 것이 핵심이다. 농도 = 소금/소금물이므로, 소금량 = 농도 × 소금물의 양. 두 식에서 한 변수를 소거(대입법)하여 1변수 일차방정식으로 만든다. 이 문제는 두 농도가 10%로부터 같은 거리(2%)에 있어 1:1 비율이 나오는 깔끔한 케이스이다.

💡 두 농도의 평균이 정확히 목표 농도와 같으면 두 소금물의 양은 1:1이 된다. 이를 천칭의 원리(또는 가중평균)로 풀면 식 없이도 즉답할 수 있다.

Q230 일차함수 응용

좌표평면 위에 직선 ℓ: $y = 2x + 4$가 있다. 이 직선 위의 점 중에서 원점 O로부터의 거리가 가장 짧은 점 P의 좌표를 구하시오.



①) ① $\left(-\frac{4}{5}, \frac{12}{5}\right)$
②) ② $\left(-\frac{8}{5}, \frac{4}{5}\right)$
③) ③ $(-2, 0)$
④) ④ $(0, 4)$

🎯 **정답: ②** $\left(-\frac{8}{5}, \frac{4}{5}\right)$

📖 1단계: 한 점에서 직선까지의 최단거리는 그 점에서 직선에 내린 '수선의 발'까지의 거리이다. 즉, P는 원점에서 ℓ에 내린 수선과 ℓ의 교점이다.

2단계: ℓ의 기울기는 2이므로, ℓ에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$ (두 직선이 수직 ⇔ 기울기의 곱이 -1).

3단계: 원점을 지나고 기울기 $-\frac{1}{2}$인 직선은 $y = -\frac{1}{2}x$.

4단계: 두 직선의 교점. $2x + 4 = -\frac{1}{2}x \to$ 양변에 2를 곱하면 $4x + 8 = -x \to 5x = -8 \to x = -\frac{8}{5}$.

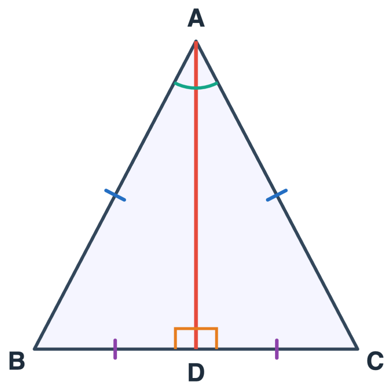
5단계: $y = -\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{8}{5}\right) = \frac{4}{5}$. 따라서 P$\left(-\frac{8}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

🧠 풀이 전략: '한 점과 직선 사이의 거리'는 곧 '수선의 발까지의 거리'다. 따라서 (1) 원래 직선과 수직인 직선을 원점에서 그어주고 (2) 두 직선의 교점을 구한다. 두 직선이 수직 ⇔ 기울기의 곱이 -1이라는 조건을 활용한다. 답이 분수가 나오는 것을 두려워하지 말 것.

💡 이때 |OP|는 점과 직선 사이의 거리 공식 $\frac{|0 - 2 \cdot 0 + 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$로도 직접 구해진다.

Q231 도형 성질 증명

이등변삼각형 ABC(AB = AC)의 꼭짓각 A의 이등분선이 BC와 만나는 점을 D라 하자. 이때 'AD ⊥ BC이고 BD = CD'임을 증명하려고 한다. △ABD와 △ACD의 합동을 보이는 데 사용되는 합동 조건은?



①) ① SAS합동 (두 변과 끼인각이 각각 같음)

②) ② SSS합동 (세 변이 각각 같음)

③) ③ AA닮음 (두 각이 각각 같음)

④) ④ ASA합동을 쓰되 BD=CD를 가정한 후

🎯 **정답: ① SAS합동 (두 변과 끼인각이 각각 같음)**

📖 1단계: 가정 정리. AB = AC (이등변), AD는 ∠A의 이등분선 → ∠BAD = ∠CAD, AD = AD (공통변).
2단계: △ABD와 △ACD에서 두 변(AB=AC, AD공통)과 그 끼인각(∠BAD=∠CAD)이 각각 같다. 따라서 SAS합동이 성립한다.
3단계: 합동의 결과로 대응변 BD = CD (∴ D는 BC의 중점), 대응각 ∠ADB = ∠ADC.
4단계: 그런데 ∠ADB와 ∠ADC는 일직선 BC 위의 인접각이므로 ∠ADB + ∠ADC = 180°. 따라서 ∠ADB = ∠ADC = 90°. 즉 AD ⊥ BC.
5단계: 결론. AD는 BC의 수직이등분선이다.

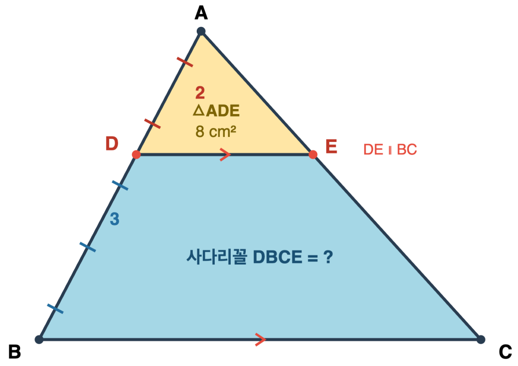
함정 보기 분석: ④번처럼 BD=CD를 가정해 ASA를 쓰면 '결론을 가정으로 쓰는 순환논증'이 된다. ②는 BD=CD를 따로 보여야 하는데, 이는 합동의 결과지 가정이 아니다.

🧠 풀이 전략: 이등변삼각형의 대칭성을 합동 조건의 어느 형태로 나타낼 수 있는지 묻는 문제다. '주어진 사실'은 두 변(AB=AC, AD공통)과 한 각(∠BAD=∠CAD)이고, 이 한 각이 두 변 사이의 끼인각이라는 점에서 SAS가 정확히 들어맞는다. 결론(BD=CD, AD⊥BC)을 합동 조건에 사용하면 순환논증이 되므로 주의.

💡 이등변삼각형의 꼭짓각의 이등분선은 동시에 (1) 밑변의 수직이등분선이며 (2) 밑변에 대한 중선이고 (3) 꼭짓점에서 밑변에 내린 수선이다. 보통 삼각형에서는 이 네 가지가 다 다른 직선이지만, 이등변에서는 한 직선으로 일치한다.

Q232 닮음 심화

삼각형 ABC의 변 AB 위의 점 D, 변 AC 위의 점 E에 대해 DE ∥ BC이다. AD : DB = 2 : 3이고 △ADE의 넓이가 8 cm²일 때, 사다리꼴 DBCE의 넓이를 구하시오.



AD : DB = 2 : 3, △ADE = 8 cm² ⇒ 사다리꼴 DBCE = ?

①) ① 12 cm²

②) ② 32 cm²

③) ③ 42 cm²

④) ④ 50 cm²

🎯 **정답: ③ 42 cm²**

📖 1단계: DE ∥ BC이므로 ∠ADE = ∠ABC, ∠AED = ∠ACB (평행선의 동위각). ∠A는 공통각. 따라서 △ADE ∽ △ABC.

2단계: 닮음비 결정. AD : AB = AD : (AD + DB) = 2 : (2+3) = 2 : 5.

3단계: 닮음비가 m : n인 두 도형의 넓이비는 $m^2 : n^2$ 이다. 따라서 △ADE : △ABC = $2^2 : 5^2$ = 4 : 25.

4단계: △ADE = 8 cm²이므로 비례식 $\frac{8}{\triangle ABC} = \frac{4}{25}$에서 △ABC = $\frac{8 \times 25}{4}$ = 50 cm².

5단계: 사다리꼴 DBCE = △ABC - △ADE = 50 - 8 = 42 cm².

함정 분석: ① 12는 넓이비(4:25) 대신 변의 길이비를 그대로 써서 사다리꼴:△ADE = DB:AD = 3:2로 보고 $8 \times \frac{3}{2} = 12$로 계산한 오답이다. ④ 50은 큰 삼각형 △ABC의 넓이(50)까지만 구하고 △ADE를 빼는 것을 잊은 오답이다. 닮음비 2:5의 제곱인 넓이비 4:25를 적용한 뒤 사다리꼴 = △ABC - △ADE로 마무리하는 것이 핵심이다.

🧠 풀이 전략: 닮음비와 넓이비를 혼동하지 않는 것이 핵심이다. 변의 길이는 1차원이지만 넓이는 2차원이므로, 닮음비가 m:n이면 넓이비는 $m^2:n^2$이다. AD:DB = 2:3이지만 닮음비는 AD:AB = 2:5라는 점에 주의(분모가 전체 길이). 사다리꼴은 큰 삼각형에서 작은 삼각형을 빼서 구하는 것이 빠르다.

💡 같은 원리로 부피비는 닮음비의 세제곱이다(예: 큰 컵과 작은 컵). 그래서 키가 1.5배인 사람은 부피가 약 $1.5^3 \approx 3.4$배가 되어 동일 비율로 살이 찐 것처럼 보인다.

Q233 유리수·순환소수 추론

분수 $\frac{n}{45}$이 유한소수로 나타내어지도록 하는 100 이하의 자연수 n의 개수를 구하시오.

①) ① 5개

②) ② 9개

③) ③ 11개

④) ④ 20개

🎯 **정답: ③ 11개**

📖 1단계: 분모를 소인수분해. $45 = 3^2 \times 5$.

2단계: 분수가 유한소수가 되려면 기약분수의 분모가 2와 5 이외의 소인수를 갖지 않아야 한다. 즉, 분모의 3^2 부분이 약분되어 사라져야 한다.

3단계: 분모의 $3^2 = 9$가 약분되려면 분자 n이 9의 배수여야 한다.

4단계: 100 이하의 9의 배수: 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 99 → 총 11개.

5단계: 검증. 예) n = 9 → $\frac{9}{45} = \frac{1}{5} = 0.2$ (유한). n = 6 → $\frac{6}{45} = \frac{2}{15}$인데 분모에 3이 남아 있어 무한소수.

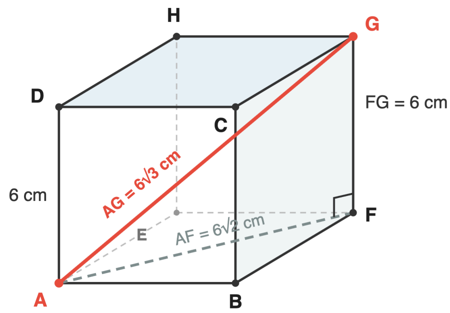
함정: ②번 9개는 9, 18, ..., 81까지만 센 경우(90, 99 빠뜨림). ④번 20개는 5의 배수까지 잘못 포함한 오답.

🧠 풀이 전략: '유한소수가 되는 조건'을 분모의 소인수에서 시작한다. 기약분수의 분모에 2와 5 이외의 소인수가 있으면 무한소수다. 따라서 분자가 분모의 '나쁜 소인수(3^2)'를 모두 약분해 줘야 한다. 그 조건은 분자가 9의 배수가 되는 것이다(3의 배수만으로는 부족, 9까지 필요).

💡 우리가 일상에서 쓰는 1/3 = 0.333... 같은 무한소수가 등장하는 이유는 우리가 10진법(=2×5의 배수계)을 쓰기 때문이다. 만약 12진법을 썼다면 1/3 = 0.4라는 유한소수가 된다.

Q234 피타고라스 활용

한 모서리의 길이가 6 cm인 정육면체에서 한 꼭짓점 A와 그 공간대각선의 반대편 꼭짓점 G를 잇는 선분 AG의 길이를 구하시오.



①) ① $6\sqrt{2}$ cm

②) ② $6\sqrt{3}$ cm

③) ③ 9 cm

④) ④ 12 cm

🎯 **정답: ② $6\sqrt{3}$ cm**

📖 1단계: 바닥면 대각선 AF부터 구한다. 바닥면은 한 변 6 cm인 정사각형 ABFE(꼭짓점 순서: A-B-F-E). 직각삼각형 ABF (∠B = 90°)에서 피타고라스 정리: $AF = \sqrt{AB^2 + BF^2} = \sqrt{36 + 36} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$ cm.

2단계: 이제 직각삼각형 AFG를 본다. AF는 바닥면 위에 있고 FG는 모서리(연직 방향)이므로 AF ⊥ FG, 즉 ∠AFG = 90°. FG = 6.

3단계: 직각삼각형 AFG에서 다시 피타고라스: $AG^2 = AF^2 + FG^2 = (6\sqrt{2})^2 + 6^2 = 72 + 36 = 108.$

4단계: $AG = \sqrt{108} = \sqrt{36 \cdot 3} = 6\sqrt{3}$ cm.

5단계: 일반화. 한 변이 a인 정육면체의 공간대각선은 $a\sqrt{3}$ 이다.

🧠 풀이 전략: 3차원 도형에서 두 점 사이의 거리 → 평면 두 번 펼치기. 먼저 바닥면 위의 두 점 사이 거리(2차원 피타고라스)를 구한 뒤, 그 결과를 한 변으로 삼아 다시 수직 모서리와 직각삼각형을 만들어(3차원 피타고라스) 답을 구한다. 즉, 피타고라스 정리를 두 번 연속 적용.

💡 한 변이 a인 정n각형의 대각선 길이는 차원이 늘수록 √n 형태로 늘어난다: 정사각형 대각선 a√2, 정육면체 공간대각선 a√3, 4차원 정초입체 a√4=2a, n차원 정초입체 a√n. 차원이 올라갈수록 '대각선이 엄청나게 길어지는' 고차원의 직관 깨짐 현상의 시작이다.

Q235 경시 확률·퍼즐

1부터 10까지의 자연수 중에서 임의로 6개의 수를 선택할 때, 선택된 6개의 수 중에서 두 수의 합이 11이 되는 짝이 반드시 존재함을 보이려고 한다. 다음 중 가장 적절한 논증은?

①) ① 합이 11인 짝 {1,10}, {2,9}, {3,8}, {4,7}, {5,6}로 1~10을 5개 그룹으로 나눈다. 6개를 뽑으면 비둘기집 원리에 의해 적어도 한 그룹에 두 수가 모두 포함된다.

②) ② 1~10의 합은 55이고 6개의 합은 평균적으로 33이므로 합이 11인 짝이 있다.

③) ③ 모든 6개의 부분집합을 일일이 확인해 본다.

④) ④ 합이 11이 되지 않는 6개의 부분집합도 존재하므로 '반드시' 존재한다고 할 수 없다.

🎯 **정답: ① 합이 11인 짝 {1,10}, {2,9}, {3,8}, {4,7}, {5,6}로 1~10을 5개 그룹으로 나눈다. 6개를 뽑으면 비둘기집 원리에 의해 적어도 한 그룹에 두 수가 모두 포함된다.**

📖 1단계: 1부터 10까지의 수를 합이 11이 되는 짝(쌍)으로 묶는다. {1,10}, {2,9}, {3,8}, {4,7}, {5,6}. 정확히 5개의 쌍이며, 각 수는 정확히 한 쌍에 속한다.
2단계: 각 쌍을 '비둘기집(상자)'으로, 뽑힌 수 6개를 '비둘기'로 비유한다. 6개의 비둘기를 5개의 상자에 넣으면, 비둘기집 원리에 의해 적어도 한 상자에 비둘기가 2마리 이상 들어간다.
3단계: 그 상자(쌍)에서 두 수가 모두 뽑혔다는 뜻이고, 그 두 수의 합은 정확히 11이다.
4단계: 따라서 어떤 6개를 뽑더라도 합이 11인 두 수가 반드시 포함된다 (증명 종료).

함정 ④ 분석: 만약 합이 11이 되지 않는 6개 부분집합이 존재한다면 그 6개는 5개의 쌍에서 각각 1개씩만 골라야 하는데, 5개의 쌍에서 각각 1개씩이면 5개밖에 못 뽑는다. 모순이므로 ④는 거짓.

🧠 풀이 전략: 비둘기집 원리는 'n+1개의 사물을 n개의 상자에 넣으면 적어도 한 상자엔 2개 이상이 들어간다'는 직관적이지만 강력한 도구다. 핵심은 '어떻게 분류(상자)할 것인가'를 잘 잡는 것. 여기서는 '합이 특정 값이 되는 짝'으로 분류하는 것이 정답. 5개의 쌍에 6개를 넣으니 비둘기집 원리가 곧바로 적용된다.

💡 비둘기집 원리는 '디리클레의 서랍 원리(Dirichlet's drawer principle)'로도 불린다. 단순해 보이지만 정수론과 조합론에서 강력한 무기로, '서로 다른 367명을 모으면 같은 생일이 반드시 존재한다'(366일의 비둘기집)와 같은 결론도 같은 논리.

Q236 지수·식 계산 심화

두 양수 a, b가 $a + b = 5$, $ab = 3$을 만족할 때, $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$의 값을 구하시오.

①) ① $\frac{5}{9}$

②) ② $\frac{13}{9}$

③) ③ $\frac{19}{9}$

④) ④ $\frac{25}{9}$

🎯 **정답: ③ $\frac{19}{9}$**

📖 1단계: 식을 통분한다. $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{b^2 + a^2}{a^2b^2} = \frac{a^2 + b^2}{(ab)^2}$.
2단계: 분자 $a^2 + b^2$ 변형. 항등식 $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$에서 $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = 5^2 - 2 \cdot 3 = 25 - 6 = 19$.
3단계: 분모 $(ab)^2$ 계산. $(ab)^2 = 3^2 = 9$.
4단계: 따라서 $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{19}{9}$.
5단계: 검산. a, b는 $t^2 - 5t + 3 = 0$의 두 근(이차방정식 근과 계수의 관계). $t = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$. 직접 대입해도 같은 값이 나오지만 이렇게 풀지 않는 게 핵심.

🧠 풀이 전략: a, b를 직접 구하지 말 것 (구하면 무리수가 나와 계산이 복잡해진다). 대신 (1) 분수를 통분해 a^2+b^2와 $(ab)^2$ 형태로 만들고 (2) 항등식 $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$를 사용해 주어진 a+b, ab 값으로 표현한다. 이렇게 '기본대칭식만 사용'하는 사고가 대칭식 문제의 본질.

💡 이런 유형은 'a, b를 두 근으로 갖는 이차방정식'을 떠올리는 것과 같은 맥락이다. 이차방정식의 근과 계수의 관계가 정확히 a+b와 ab를 다루기 때문에, 중2 단계의 대칭식 변형은 고1의 근과 계수의 관계로 자연스럽게 이어진다.

Q237 부등식 활용 심화

한 사람이 사과와 배를 합쳐 모두 12개를 사려고 한다. 사과는 한 개에 800원, 배는 한 개에 1200원이다. 총 구입비가 12000원 이하가 되도록 사고 싶고, 단 배도 적어도 1개는 사야 한다. 이때 사과를 적어도 몇 개 사야 하는가?

①) ① 4개

②) ② 5개

③) ③ 6개

④) ④ 7개

🎯 **정답: ③ 6개**

📖 1단계: 미지수 설정. 사과 x개, 배 (12 - x)개. (단, x는 0 이상의 정수, 배도 1개 이상이므로 12 - x ≥ 1, 즉 x ≤ 11.)
2단계: 비용 부등식 세우기. $800x + 1200(12 - x) \leq 12000$.
3단계: 전개와 정리. $800x + 14400 - 1200x \leq 12000 \rightarrow -400x \leq -2400$.
4단계: 양변을 음수 -400으로 나눈다. 이때 부등호 방향이 바뀐다. $x \geq 6$.
5단계: 결합 조건 6 ≤ x ≤ 11. '적어도 몇 개'를 묻고 있으므로 최솟값 6.
6단계: 검산. x=6일 때 비용 = 800·6 + 1200·6 = 4800 + 7200 = 12000 ≤ 12000 ✓ (등호 성립). x=5라면 비용 = 4000 + 8400 = 12400 > 12000으로 조건 위반.

함정 ②(5개) 분석: 부등호의 방향을 바꾸지 않아 $x \leq 6$으로 잘못 결론을 내거나, 등호를 빼고 6보다 큰 자연수를 잡으면 7이 나오는 식의 실수.

🧠 풀이 전략: 사과를 더 많이 살수록 단가가 싸므로 총 비용이 줄어든다. 따라서 비용 제한을 만족시키려면 사과 개수에 하한이 생긴다. 식을 세울 때 핵심은: (1) 두 종류 합이 12로 고정 → 한 변수로 표현, (2) 음수로 나눌 때 부등호 방향 뒤집기, (3) 단순 산식의 답이 아닌 '개수의 정수 최솟값'을 묻는다는 점.

💡 사과와 배의 단가 차이가 클수록 한쪽이 늘어날 때 총비용이 빠르게 변한다. 두 단가의 평균이 1000원이고 12개 모두 평균가로 사면 정확히 12000원이 된다. 사과(평균보다 200원 싼 쪽)를 평균보다 더 많이 사야 비용이 평균선 아래로 떨어지는 구조.

Q238 유리수·순환소수 추론

분수 $\frac{n}{180}$이 유한소수로 나타내어질 때, n이 두 자리 자연수라면 n의 값으로 가능한 것의 개수는? (단, 기약분수가 되었을 때 분모가 2와 5만의 곱이어야 한다.)

①) ① 8개

②) ② 9개

③) ③ 10개

④) ④ 11개

🎯 **정답: ③ 10개**

📖 1단계: 180 = $2^2 \times 3^2 \times 5$로 소인수분해된다. 유한소수가 되려면 기약분수의 분모에 2,5 외의 소인수가 없어야 하므로, 분자 n이 $3^2=9$의 배수여야 한다.
2단계: 두 자리 자연수 중 9의 배수는 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 99로 총 10개이다.
3단계: 이들 각각에 대해 n/180을 약분하면 분모에 3이 사라지고 2와 5만 남으므로 모두 유한소수가 된다. 따라서 답은 10개.

🧠 풀이 전략: 유한소수 조건은 '기약분수의 분모가 2와 5만의 곱'. 분모 180의 소인수 중 3^2을 약분으로 없애려면 분자가 9의 배수여야 함을 핵심으로 추론.

💡 분모를 인수분해하여 2와 5 이외의 소인수를 제거할 수 있는지 확인하는 것이 유한소수 판별의 핵심이다.

Q239 부등식 활용 심화

어떤 자연수 x가 다음 두 부등식을 동시에 만족할 때, x의 값을 모두 더하면? $3x - 5 < 2x + 4, \quad \frac{x+2}{3} \geq \frac{x-1}{2}$

①) ① 28

②) ② 36

③) ③ 45

④) ④ 55

🎯 **정답: ① 28**

📖 1단계: 첫 번째 부등식 $3x - 5 < 2x + 4$에서 $x < 9$.

2단계: 두 번째 부등식 $\frac{x+2}{3} \geq \frac{x-1}{2}$의 양변에 6을 곱하면 $2(x+2) \geq 3(x-1)$, 즉 $2x + 4 \geq 3x - 3$이므로 $x \leq 7$.

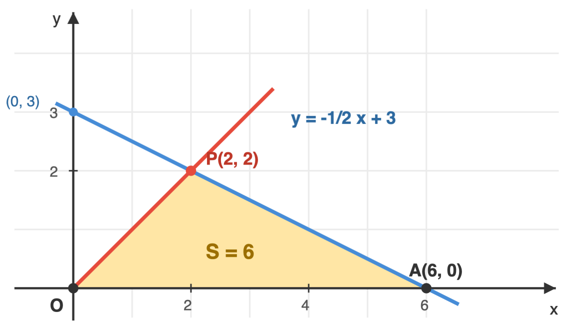
3단계: 두 부등식을 동시에 만족하려면 $x < 9$이면서 $x \leq 7$이어야 하므로 교집합은 $x \leq 7$이다. 자연수 해는 $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$이고 그 합은 $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$이다. 따라서 정답은 ① 28.

🧠 풀이 전략: 두 부등식의 해를 각각 구한 후 교집합을 찾는다. 자연수 조건이라는 점을 놓치지 않는다.

💡 분수 부등식은 분모의 최소공배수를 곱하여 정수 부등식으로 만드는 것이 정석이다.

Q240 일차함수 응용

좌표평면 위에 직선 $y = -\frac{1}{2}x + 3$이 있다. 이 직선 위의 점 P를 지나면서 원점을 지나는 직선이 직선 $y = -\frac{1}{2}x + 3$과 함께 x축과 이루는 삼각형의 넓이가 6일 때, 점 P의 좌표는? (단, 점 P의 x좌표는 양수)



①) ① (2, 2)

②) ② (4, 1)

③) ③ (3, 1.5)

④) ④ (2.5, 1.75)

🎯 **정답: ① (2, 2)**

📖 1단계: 직선 $y = -\frac{1}{2}x + 3$이 x축과 만나는 점은 A(6, 0). 점 P를 $\left(p, \ -\frac{1}{2}p + 3\right)$ $(p > 0)$이라 하자.

2단계: 삼각형 OAP의 밑변을 $\overline{OA} = 6$으로 보면 높이는 점 P의 y좌표 $\left(-\frac{1}{2}p + 3\right)$이다(P는 x축 위쪽). 넓이 = $\frac{1}{2} \times 6 \times \left(-\frac{1}{2}p + 3\right) = 6$.

3단계: $3\left(-\frac{1}{2}p + 3\right) = 6 \Rightarrow -\frac{1}{2}p + 3 = 2 \Rightarrow p = 2$. 따라서 P = (2, 2).

4단계: 검산. O(0,0), A(6,0), P(2,2)이면 넓이 = $\frac{1}{2} \times 6 \times 2 = 6$ ✓. 따라서 답은 ① (2, 2).

🧠 풀이 전략: x축 위의 절편을 밑변으로 잡아 삼각형 넓이를 점 P의 y좌표를 이용해 표현. 그 후 P가 직선 위에 있다는 조건으로 좌표 결정.

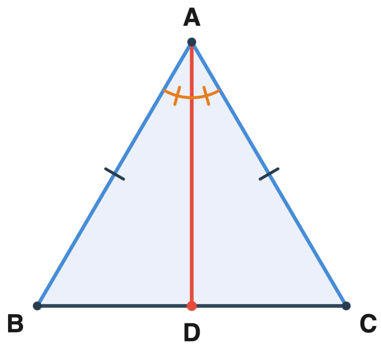
💡 좌표평면에서 삼각형 넓이는 한 변을 좌표축에 둘 때 가장 쉽게 계산된다.

📝 중2 수학 심화

총 10문제 · 문제와 정답·풀이 포함

Q241 도형 성질 증명

삼각형 ABC에서 $\overline{AB} = \overline{AC}$인 이등변삼각형이고, 변 BC 위에 점 D가 있다. $\overline{AD}$가 각 BAC의 이등분선일 때, 다음 중 항상 옳은 것은?



①) ① $\overline{BD} = \overline{CD}$

②) ② $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

③) ③ $\angle ADB = \angle ADC = 90°$

④) ④ ①, ②, ③ 모두 옳다

🎯 **정답: ④ ①, ②, ③ 모두 옳다**

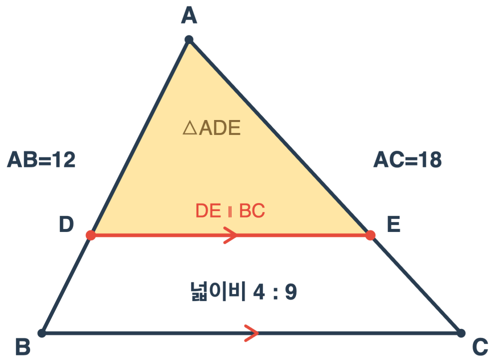
📖 1단계: 삼각형 ABD와 ACD에서 $\overline{AB} = \overline{AC}$ (이등변), $\angle BAD = \angle CAD$ (각이등분선), $\overline{AD}$ 공통이므로 SAS 합동.
2단계: 합동이므로 대응변 $\overline{BD} = \overline{CD}$ (①). 또한 대응각 $\angle ADB = \angle ADC$.
3단계: $\angle ADB + \angle ADC = 180°$ (평각)이고 두 각이 같으므로 각각 $90°$. 따라서 $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ (②, ③). 모두 옳다.

🧠 풀이 전략: 이등변삼각형의 꼭지각의 이등분선은 세 가지 동시 성질(중선, 수직이등분선, 수선)을 갖는다는 핵심 정리를 SAS 합동으로 증명한다.

💡 이등변삼각형의 꼭지각 이등분선, 중선, 높이는 모두 같은 직선이다. 이는 정삼각형의 모든 대칭축이 일치하는 이유이기도 하다.

Q242 닮음 심화

삼각형 ABC에서 $\overline{AB} = 12$, $\overline{AC} = 18$이다. 변 AB 위의 점 D, 변 AC 위의 점 E에 대하여 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$이고 삼각형 ADE의 넓이가 삼각형 ABC 넓이의 $\frac{4}{9}$일 때, $\overline{AD}$의 길이는?



①) ① 6
②) ② 7
③) ③ 8
④) ④ 9

🎯 **정답: ③ 8**

📖 1단계: $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$이므로 삼각형 ADE와 삼각형 ABC는 AA 닮음(공통각 ∠A, 동위각 ∠ADE=∠ABC).
2단계: 닮음비를 $k : 1$이라 하면 넓이비는 $k^2 : 1$. $k^2 = \frac{4}{9}$이므로 $k = \frac{2}{3}$.
3단계: 따라서 $\overline{AD} : \overline{AB} = 2 : 3$. $\overline{AD} = 12 \times \frac{2}{3} = 8$.

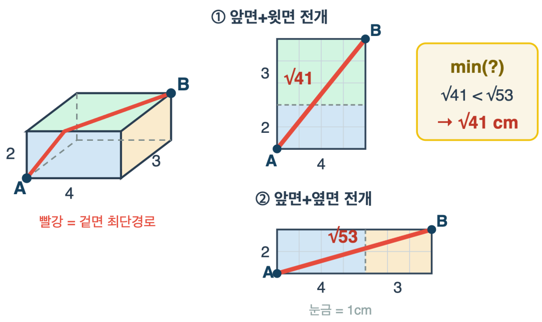
🧠 풀이 전략: 평행선이 만들어내는 닮음을 인지하고, 넓이비 = 닮음비²의 관계에서 닮음비를 역산한다.

💡 닮음에서 길이의 비가 k이면 넓이의 비는 k^2, 부피의 비는 k^3이다. 이를 닮음의 차원 정리라 한다.

Q243 피타고라스 활용

가로 4cm, 세로 3cm, 높이 2cm인 직육면체의 한 꼭짓점 A에서 대각선의 반대 꼭짓점 B(공간 대각선 끝점)까지 직육면체의 표면을 따라 갈 때, 가장 짧은 거리는?

직육면체 표면 최단경로 A→B



①) ① $\sqrt{29}$ cm
②) ② $\sqrt{41}$ cm
③) ③ $\sqrt{45}$ cm
④) ④ $\sqrt{61}$ cm

🎯 **정답: ② $\sqrt{41}$ cm**

📖 1단계: 표면을 펼친 전개도에서 A에서 B까지의 직선거리가 최단경로다. 펼치는 방법은 세 가지.
경우1: 앞면(4×2)+윗면(4×3) 펼치기 → 거리 $\sqrt{4^2+(2+3)^2} = \sqrt{16+25} = \sqrt{41}$.
경우2: 앞면(4×2)+오른쪽면(2×3) 펼치기 → 거리 $\sqrt{(4+3)^2+2^2} = \sqrt{49+4} = \sqrt{53}$.
경우3: 옆면(3×2)+윗면(3×4) 펼치기 → 거리 $\sqrt{3^2+(2+4)^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45}$.
2단계: 세 경우 중 최솟값은 $\sqrt{41}$.
3단계: 따라서 표면 최단경로는 $\sqrt{41}$ cm.
🧠 풀이 전략: 공간에서의 최단경로 문제는 표면을 평면에 펼쳐 직선거리로 환원한다. 펼치는 방법이 여러 가지이므로 모두 비교한다.
💡 꿀벌과 거미는 본능적으로 표면 최단경로를 찾는다. 인간이 풀려면 전개도와 피타고라스의 정리가 필요하다.

Q244 경시 확률·퍼즐

1, 2, 3, 4, 5의 숫자가 적힌 카드 5장에서 서로 다른 3장을 뽑아 일렬로 놓아 세 자리 수를 만든다. 이 세 자리 수가 4의 배수일 확률은?

①) ① $\frac{1}{6}$
②) ② $\frac{1}{5}$
③) ③ $\frac{2}{15}$
④) ④ $\frac{1}{4}$

🎯 **정답: ② $\frac{1}{5}$**

📖 1단계: 5장에서 3장을 뽑아 일렬로 놓는 모든 경우의 수: $5 \times 4 \times 3 = 60$가지.
2단계: 4의 배수 판별법: 끝 두 자리가 4의 배수. 1~5의 서로 다른 두 숫자로 만든 두 자리 수 중 4의 배수인 것을 찾는다. 12, 24, 32, 52가 4의 배수 (16은 6없음, 20은 0없음, 28은 8없음, 36은 6없음, 40,44는 불가, 48은 8없음). 즉 12, 24, 32, 52 → 4가지.
3단계: 각 경우 백의 자리에는 남은 3개 중 1개 → $4 \times 3 = 12$가지. 확률 $= \frac{12}{60} = \frac{1}{5}$.
🧠 풀이 전략: 4의 배수는 끝 두 자리만 보면 된다는 판별법을 활용. 가능한 끝 두 자리를 체계적으로 나열한 뒤 백의 자리 경우를 곱한다.
💡 4의 배수 판별: 끝 두 자리가 4의 배수면 전체도 4의 배수. 100이 4의 배수이기 때문이다.

Q245 연립방정식 심화 활용

세 자연수 x, y, z가 다음 식을 만족할 때, $x+y+z$의 값은? $x+y=11, \quad y+z=14, \quad z+x=13$

①) ① 17

②) ② 18

③) ③ 19

④) ④ 20

🎯 **정답: ③ 19**

📖 1단계: 세 식을 모두 더한다. $(x+y)+(y+z)+(z+x)=11+14+13=38$.

2단계: 좌변은 $2(x+y+z)$이므로 $2(x+y+z)=38$.

3단계: 따라서 $x+y+z=19$. (참고: 각각 $x=19-14=5$, $y=19-13=6$, $z=19-11=8$로 세 자연수도 구할 수 있다.)

🧠 풀이 전략: 각 변수를 따로 구하지 않고 세 식을 모두 더해 대칭식 $x+y+z$의 값을 한 번에 구하는 것이 핵심.

💡 이런 형태의 연립방정식은 '대칭 합' 기법으로 한 줄에 풀 수 있어 경시문제에서 자주 등장한다.

Q246 닮음 심화

두 닮은 직육면체 A, B가 있다. A의 겉넓이가 $54cm^2$, B의 겉넓이가 $96cm^2$이고 A의 부피가 $27cm^3$일 때, B의 부피는?

①) ① $48\ cm^3$

②) ② $56\ cm^3$

③) ③ $64\ cm^3$

④) ④ $72\ cm^3$

🎯 **정답: ③ $64\ cm^3$**

📖 1단계: 닮은 두 입체에서 겉넓이의 비는 닮음비의 제곱이다. $\frac{54}{96}=\frac{9}{16}=\left(\frac{3}{4}\right)^2$이므로 닮음비는 $3:4$.

2단계: 부피의 비는 닮음비의 세제곱이므로 $3^3:4^3=27:64$.

3단계: A의 부피가 27이므로 B의 부피는 $64\ cm^3$.

🧠 풀이 전략: 닮음의 차원 정리: 길이비 $k \to$ 넓이비 $k^2 \to$ 부피비 k^3. 겉넓이비에서 닮음비를 역산한 후 부피비를 적용한다.

💡 닮음 입체의 부피는 길이의 세제곱에 비례. 그래서 인형보다 사람의 무게가 훨씬 무겁다.

Q247 부등식 활용 심화

어느 가게에서 원가가 5000원인 물건을 정가의 20%를 할인하여 팔아도 원가의 12% 이상의 이익을 얻으려고 한다. 정가는 최소 얼마 이상이어야 하는가?

①) ① 6500원

②) ② 6800원

③) ③ 7000원

④) ④ 7200원

🎯 **정답: ③ 7000원**

📖 1단계: 정가를 x원이라 하자. 20% 할인된 판매가 = $0.8x$원.

2단계: 원가 5000원에 대한 12%의 이익 = $5000 \times 0.12 = 600$원. 따라서 판매로 얻는 이익은 $0.8x - 5000 \geq 600$ 이상이어야 한다.

3단계: $0.8x \geq 5600$이므로 $x \geq 7000$. 따라서 정가는 최소 7000원 이상.

🧠 풀이 전략: 이익 = 판매가 - 원가, 그리고 이익이 원가의 일정 % 이상이라는 두 조건을 부등식으로 표현. 원가의 12% 값을 미리 계산하면 풀이가 단순해진다.

💡 실제 마트에서 '대박 세일'이라고 광고하는 경우에도 원가 대비 일정 이익률을 유지하도록 정가를 부풀리는 일이 흔하다.

Q248 지수·식 계산 심화

세 실수 a, b, c가 $a+b+c=6$이고 $a^2+b^2+c^2=14$를 만족할 때, $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$의 값을 구하라.

①) ① 6

②) ② 14

③) ③ 22

④) ④ 28

🎯 **정답: ① 6**

📖 1단계: $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$를 전개하면 $2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca=2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca)$로 정리된다.

2단계: 곱셈공식 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에서 $36=14+2(ab+bc+ca)$이므로 $ab+bc+ca=11$.

3단계: 1단계 식에 대입하면 $2\times14-2\times11=28-22=6$.

검산: 예를 들어 $(a,b,c)=(1,2,3)$이면 $a+b+c=6$, $a^2+b^2+c^2=14$를 만족하고, $(1-2)^2+(2-3)^2+(3-1)^2=1+1+4=6$이다.

🧠 풀이 전략: 세 변수의 차의 제곱합은 직접 구할 수 없다. 전개해 대칭식 $a^2+b^2+c^2$와 $ab+bc+ca$로 바꾸면 주어진 조건을 활용할 수 있다. $(a+b+c)^2$ 곱셈공식이 두 대칭식을 잇는 다리 역할을 한다.

💡 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geq0$이고, 등호는 $a=b=c$일 때만 성립한다. 이 식은 통계학의 분산 개념의 출발점이다.

Q249 연립방정식 심화 활용

두 종류의 소금물 A, B가 있다. 소금물 A 200g과 소금물 B 100g을 섞으면 농도가 7%인 소금물이 되고, 소금물 A 100g과 소금물 B 200g을 섞으면 농도가 8%인 소금물이 된다. 두 소금물 A, B의 원래 농도를 차례로 구하라.

①) ① A=4%, B=10%

②) ② A=5%, B=11%

③) ③ A=6%, B=9%

④) ④ A=7%, B=10%

🎯 **정답: ③ A=6%, B=9%**

📖 1단계: 소금물 A의 농도를 a%, B의 농도를 b%라 하자. '소금량 = 농도 × 전체질량'이고 섞을 때 소금량은 보존된다.

2단계: 첫 혼합. A 200g 속 소금 = $2a$ g, B 100g 속 소금 = b g. 합 300g이 7%이므로 소금이 21g. 따라서 $2a+b=21$.

3단계: 두 번째 혼합. A 100g 속 소금 = a g, B 200g 속 소금 = $2b$ g. 합 300g이 8%이므로 소금이 24g. 따라서 $a+2b=24$.

4단계: 연립 풀이. 첫 식에서 $b=21-2a$. 둘째 식에 대입: $a+2(21-2a)=24 \Rightarrow -3a=-18 \Rightarrow a=6$. 그러면 $b=21-12=9$.

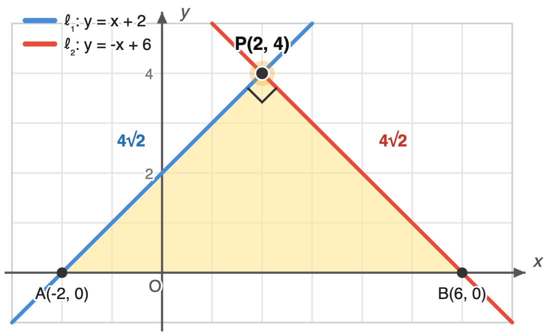
검산: 6%×200 + 9%×100 = 12 + 9 = 21g, 21/300 = 7%. ✓ 6%×100 + 9%×200 = 6 + 18 = 24g, 24/300 = 8%. ✓

🧠 풀이 전략: 농도 문제는 '소금량 보존'이 핵심 보존식이다. 두 가지 혼합 시나리오는 두 식을 주므로 미지수 두 개에 대한 연립방정식이 자연스럽게 만들어진다. 농도를 분수가 아닌 정수 %로 두면 계산이 깔끔해진다.

💡 이 문제의 구조는 화학의 몰 농도 혼합, 통계의 가중평균, 경제의 평균단가 계산과 수학적으로 동일하다.

Q250 일차함수 응용

좌표평면 위의 두 직선 $\ell_1: y = x + 2$와 $\ell_2: y = -x + 6$이 x축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 두 직선의 교점을 P라 한다. △PAB의 모양과 넓이를 바르게 짝지은 것은?



AP = BP = 4√2, AB = 8

①) ① 정삼각형, 넓이 16

②) ② 이등변직각삼각형, 넓이 16

③) ③ 직각삼각형(이등변 아님), 넓이 $8\sqrt{2}$

④) ④ 둔각삼각형, 넓이 24

🎯 **정답: ② 이등변직각삼각형, 넓이 16**

📖 1단계: 각 직선의 x절편을 구한다. $\ell_1: 0 = x + 2 \Rightarrow A = (-2, 0)$. $\ell_2: 0 = -x + 6 \Rightarrow B = (6, 0)$.

2단계: 두 직선의 교점 P. $x + 2 = -x + 6 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2,\ y = 4$. 따라서 $P = (2, 4)$.

3단계: 두 직선의 기울기 곱이 $1 \times (-1) = -1$이므로 두 직선은 서로 수직. 즉 ∠APB = 90°.

4단계: 거리 계산. $AP = \sqrt{(2-(-2))^2 + (4-0)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$. $BP = \sqrt{(2-6)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$. AP = BP 이므로 이등변, 또한 ∠P = 90°이므로 이등변직각삼각형이다. (피타고라스 역정리 검증: $AP^2 + BP^2 = 32 + 32 = 64 = 8^2 = AB^2$. ✓)

5단계: 넓이 = $\frac{1}{2} \times AP \times BP = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 4\sqrt{2} = 16$. (또는 밑변 AB=8, 높이는 P의 y좌표 4: $\frac{1}{2} \times 8 \times 4 = 16$.)

🧠 풀이 전략: 두 직선의 위치관계를 기울기로 먼저 판단한다. 기울기 곱이 -1이면 수직이고 교점에서 직각이 생긴다. 다음으로 두 변의 길이를 비교해 이등변 여부를 확인. 직각삼각형의 넓이는 두 직각변 곱의 절반으로 가장 빠르게 구한다.

💡 기울기가 1과 -1로 서로 음의 역수이고 절댓값이 같은 두 직선은 항상 좌표축의 가로선과 함께 이등변직각삼각형을 만든다.