📝 중1 수학 심화

총 40문제 · 문제와 정답·풀이 포함

Q1 정수·유리수 추론

수직선 위에 세 점 A, B, C가 있다. A는 -5, B는 7에 대응한다. 점 C는 A로부터의 거리가 B로부터의 거리의 2배이고, C는 선분 AB 위에 있지 않다(즉, A와 B 사이가 아니다). 가능한 점 C의 좌표를 모두 더한 값은?

①) ① 19
②) ② 26
③) ③ 31
④) ④ 38

🎯 **정답: ① 19**

📖 1단계: C의 좌표를 x라 하면 조건은 $|x-(-5)|=2|x-7|$, 즉 $|x+5|=2|x-7|$.
2단계: 양변을 제곱하면 $(x+5)^2=4(x-7)^2 \rightarrow x^2+10x+25=4x^2-56x+196 \rightarrow 3x^2-66x+171=0 \rightarrow x^2-22x+57=0$.
3단계: 근의 공식으로 $x=(22\pm\sqrt{(484-228)})/2=(22\pm16)/2 \rightarrow x=19$ 또는 $x=3$.
4단계: $x=3$은 $-5<3<7$이므로 선분 AB 위(A와 B 사이)에 있어 제외한다. $x=19$는 $19>7$이므로 선분 AB 밖에 있어 조건을 만족한다.
5단계: 따라서 조건을 만족하는 C의 좌표는 19 하나뿐이고, 그 합은 19이다. 정답 ① 19.

🧠 풀이 전략: 절댓값 방정식을 이용해 수직선 거리 조건을 식으로 옮기고, '선분 AB 위에 있지 않다'는 위치 조건으로 해를 걸러낸다. 두 경우(오른쪽 연장/왼쪽 연장)를 나눠 풀고 합산.

💡 수직선에서 두 점으로부터의 거리 비가 일정한 점들의 집합은 평면으로 확장하면 '아폴로니우스의 원'이 된다.

Q2 정수·유리수 추론

연속된 다섯 개의 정수의 합이 5의 배수임을 이용하여, 연속된 정수 다섯 개의 합이 2025일 때 가운데 수를 구하고, 이 다섯 수의 제곱의 합을 구하시오.

🎯 **정답: 가운데 수: 405, 제곱의 합: 820135**

📖 1단계: 연속된 다섯 정수를 n-2, n-1, n, n+1, n+2로 놓으면 합은 5n. 5n=2025이므로 n=405(가운데 수).
2단계: 다섯 수는 403, 404, 405, 406, 407.
3단계: 제곱의 합 $= (n-2)^2+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2 = 5n^2+(4+1+0+1+4) = 5n^2+10 = 5\cdot405^2+10$.
4단계: $405^2 = 164025$, $5\cdot164025 = 820125$, $+10 = 820135$.

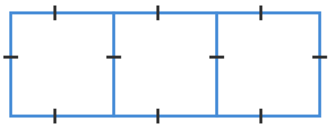
🧠 풀이 전략: 연속된 수는 가운데를 기준으로 대칭이 되도록 문자를 잡으면 합이 간단해지고, 제곱의 합에서도 1차 항이 상쇄된다. 대칭 설정이 핵심 전략.

💡 연속된 홀수 개의 정수의 합은 항상 '개수 × 가운데 수'가 된다.

Q3 문자와 식 심화

성냥개비로 정사각형을 옆으로 이어붙여 만든다. 정사각형 1개는 성냥 4개, 2개 이어붙이면 7개, 3개 이어붙이면 10개가 필요하다. 정사각형 n개를 이어붙일 때 필요한 성냥의 개수를 n에 관한 식으로 나타내고, 성냥 100개로 만들 수 있는 정사각형의 최대 개수를 구하시오.

성냥개비로 만든 정사각형



정사각형 n개 만드는 데 필요한 성냥개비 수는?

🎯 **정답: 식: 3n+1, 최대 개수: 33개**

📖 1단계: 규칙 찾기. n=1일 때 4, n=2일 때 7(+3), n=3일 때 10(+3). 첫 정사각형은 변 4개, 추가될 때마다 변 3개씩 증가.

2단계: 일반식 세우기. $4 + 3(n-1) = 3n + 1$.

3단계: $3n+1 \le 100 \rightarrow 3n \le 99 \rightarrow n \le 33$. 따라서 최대 33개의 정사각형을 만들 수 있고, 이때 성냥 $3 \cdot 33+1=100$개를 정확히 사용한다.

🧠 풀이 전략: 항 사이의 '공통 증가량'을 찾아 등차수열 일반항을 세우는 규칙화 전략. 초기값(첫 항)과 증가폭을 분리하면 식이 자연스럽게 나온다.

💡 이런 식의 규칙 찾기는 '귀납적 추론'의 기초로, 수학자 가우스도 어릴 때 비슷한 방법으로 1부터 100까지 합을 구했다.

Q4 문자와 식 심화

현재 아버지의 나이는 아들 나이의 4배이다. 10년 후 아버지의 나이는 아들 나이의 2배보다 6살 많다. 현재 아버지와 아들 나이의 합을 구하고, 몇 년 후에 아버지의 나이가 아들 나이의 정확히 3배가 되는지 구하시오.

🎯 **정답: 현재 나이 합: 40세, 4년 후**

📖 1단계: 아들 나이를 x라 하면 아버지는 4x. 10년 후: 아버지 $4x+10$, 아들 $x+10$. 조건: $4x+10 = 2(x+10)+6$.

2단계: $4x+10 = 2x+20+6 \rightarrow 2x = 16 \rightarrow x = 8$. 아들 8세, 아버지 32세, 합은 40세.

3단계: t년 후 아버지가 아들의 3배: $32+t = 3(8+t) \rightarrow 32+t = 24+3t \rightarrow 2t = 8 \rightarrow t = 4$. 검산: 4년 후 아버지 36세 = 3×아들 12세. 따라서 4년 후.

🧠 풀이 전략: 미지수를 한 개(아들 나이)로 두고 '현재'와 '미래' 두 조건을 각각 식으로 옮긴 뒤, 첫 조건으로 현재 나이를 구하고 두 번째 조건은 새 변수로 독립적으로 푸는 이단계 전략.

💡 나이 문제에서 '차이'는 시간이 지나도 변하지 않지만 '비'는 항상 변한다. 아버지와 아들 나이 비는 시간이 지날수록 1에 가까워진다.

Q5 일차방정식 활용

8%의 소금물 300g과 15%의 소금물을 섞어 12%의 소금물을 만들려고 한다. 15%의 소금물은 몇 g 필요한지 구하고, 만들어진 12% 소금물 전체의 무게를 구하시오.

①) ① 400g, 전체 700g
②) ② 450g, 전체 750g
③) ③ 500g, 전체 800g
④) ④ 600g, 전체 900g

🎯 **정답: ① 400g, 전체 700g**

📖 1단계: 15% 소금물을 x g이라 하면 총 무게는 (300+x) g.
2단계: 소금의 양으로 식 세우기. 8%의 300g에 든 소금: 0.08×300=24g. 15%의 xg에 든 소금: 0.15x. 섞은 후 12%이므로: 24+0.15x = 0.12(300+x).
3단계: 24+0.15x = 36+0.12x → 0.03x = 12 → x = 400. 따라서 15% 소금물 400g, 전체 무게 300+400 = 700g.
함정 확인: 단순 평균(8+15)/2=11.5%가 아니라 양에 따른 가중평균임에 주의.

🧠 풀이 전략: 농도 문제는 '소금(용질)의 양은 섞어도 보존된다'는 원리로 접근. 농도×전체무게=소금양 공식을 양변에 적용해 방정식을 세운다.

💡 농도의 가중평균은 '지렛대 원리'와 같다. 농도 축에서 거리의 비가 양의 역비와 같다는 성질로 암산도 가능하다.

Q6 일차방정식 활용

A 수도꼭지로만 물을 받으면 빈 물통을 가득 채우는 데 12분, B 수도꼭지로만 받으면 18분이 걸린다. 두 수도꼭지를 동시에 틀면 몇 분 만에 가득 차는가? 또, A로 먼저 4분 동안 받다가 B를 추가로 틀었다면 처음 물을 받기 시작한 후 몇 분 만에 물통이 가득 차는가?

🎯 **정답: 동시에: 7.2분(=36/5분), A먼저 4분 후 B추가: 총 $\frac{44}{5}$분 = 8.8분**

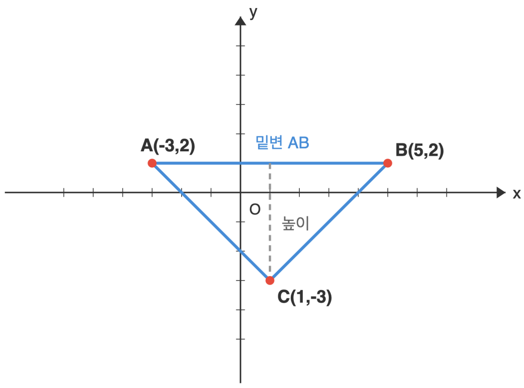
📖 1단계: 일률 설정. 전체 일을 1로 놓으면 A는 1분에 $\frac{1}{12}$, B는 1분에 $\frac{1}{18}$을 채운다.
2단계: 동시에 받을 때. 1분에 $\frac{1}{12}+\frac{1}{18}=\frac{3+2}{36}=\frac{5}{36}$씩 채우므로, 전체를 채우는 시간은 $\frac{36}{5}=7.2$분.
3단계: A로 4분간 채운 양 = $4\times\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$. 남은 양 = $\frac{2}{3}$. 이후 A와 B가 함께 1분에 $\frac{5}{36}$씩 채우므로, $\frac{2}{3}\div\frac{5}{36}=\frac{2}{3}\times\frac{36}{5}=\frac{24}{5}=4.8$분 추가.
총 $4+4.8=8.8$분.

🧠 풀이 전략: 일률 문제는 '전체 일=1'로 놓고 단위시간당 작업량의 합으로 생각. 구간을 나눠 각 구간의 진행량을 합산하는 전략.

💡 일률 문제의 역수 관계는 광학의 '초점거리' 공식이나 전기의 '저항 병렬연결'과 수학적으로 동일한 구조이다.

Q7 좌표평면 응용

좌표평면 위 세 점 A(-3, 2), B(5, 2), C(1, -3)를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 넓이를 구하고, 점 C를 y축에 대칭시킨 점 C'와 A, B로 만든 삼각형 ABC'의 넓이를 비교하시오.



①) ① 넓이 20, ABC와 ABC' 같다

②) ② 넓이 18, ABC가 더 크다

③) ③ 넓이 20, ABC'가 더 크다

④) ④ 넓이 24, 같다

🎯 **정답: ① 넓이 20, ABC와 ABC' 같다**

📖 1단계: 밑변 AB는 수평(y=2), 길이 = 5-(-3) = 8.

2단계: 높이는 C의 y좌표(-3)에서 AB(y=2)까지 수직거리 = |2-(-3)| = 5. 따라서 삼각형 ABC의 넓이 = $\frac{1}{2} \times 8 \times 5 = 20.$

3단계: C를 y축 대칭시킨 C' = (-1, -3). 삼각형 ABC'의 밑변은 여전히 AB로 길이 8, 높이도 C'의 y좌표가 -3이므로 AB(y=2)와의 거리는 5로 같다. 따라서 넓이 = 20. 두 삼각형의 넓이는 같다.

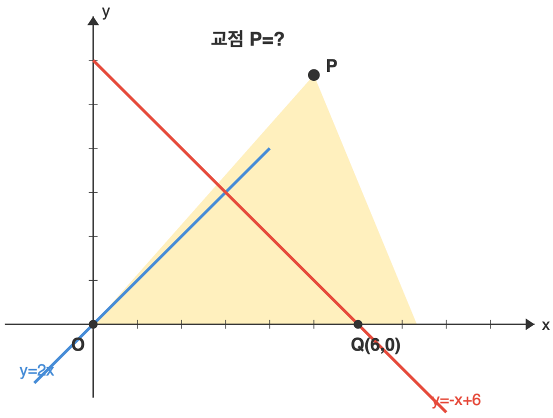
핵심 이유: 밑변이 같고, 꼭짓점이 밑변과 평행한 직선 위에서 이동하면 높이가 변하지 않으므로 넓이는 변함없다(등적변형).

🧠 풀이 전략: 삼각형 넓이는 밑변과 높이만으로 결정된다. 좌표에서 수평변/수직변을 찾으면 계산이 단순해지고, 등적변형 원리로 대칭 이동 후 넓이 비교까지 확장.

💡 '밑변이 같고 높이가 같으면 넓이가 같다'는 등적변형 원리는 유클리드 원론의 Book I 명제 38에 나오는 고전적 정리이다.

Q8 좌표평면 응용

좌표평면에서 정비례 관계 y = 2x와 y = -x + 6의 그래프가 만나는 점 P의 좌표를 구하고, 이 점 P와 원점 O, 점 Q(6, 0)가 이루는 삼각형 OPQ의 넓이를 구하시오.



①) ① P(2,4), 넓이 12

②) ② P(2,4), 넓이 6

③) ③ P(3,6), 넓이 18

④) ④ P(2,4), 넓이 8

🎯 **정답: ① P(2,4), 넓이 12**

📖 1단계: 두 그래프의 교점. 2x = -x+6 → 3x = 6 → x = 2, y = 4. 따라서 P(2, 4).

2단계: 삼각형 OPQ의 밑변 OQ는 x축 위에 있으므로 길이 = 6.

3단계: 높이는 P의 y좌표 = 4. 넓이 = $\frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12.$

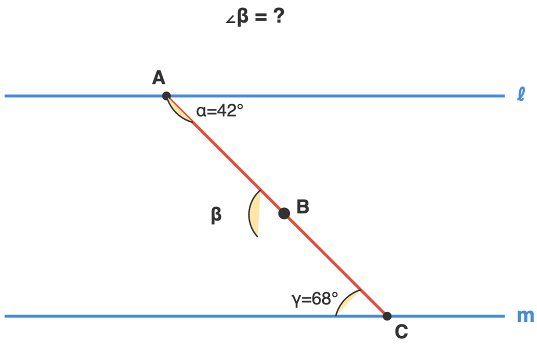
함정: 넓이를 6으로 착각하기 쉬우나 밑변×높이÷2 공식을 정확히 적용.

🧠 풀이 전략: 두 직선의 교점은 연립방정식의 해. 교점 좌표를 구한 뒤, 좌표축 위의 밑변을 활용하면 높이가 교점의 y(또는 x)좌표가 되어 계산이 쉬워진다.

💡 두 직선의 교점을 구하는 것은 최초의 '컴퓨터 그래픽' 알고리즘 중 하나였고, 현재 모든 지도 앱의 경로 교차 판정에 쓰인다.

Q9 도형 성질 추론

직선 ℓ과 직선 m이 서로 평행하다. 그림과 같이 두 직선 사이에 꺾인 선 ABC가 있어 ℓ 위의 점에서 A로, A에서 B로, B에서 m 위의 점 C로 이어진다. ∠α(ℓ과 AB가 이루는 각)=42°, ∠γ(m과 BC가 이루는 각)=68°일 때, 꺾인 점 B에서의 각 ∠β(ABC의 각)의 크기를 구하시오.



①) ① 100°

②) ② 110°

③) ③ 120°

④) ④ 130°

🎯 **정답: ② 110°**

📖 1단계: 보조선 긋기. 점 B를 지나면서 ℓ, m과 평행한 직선 n을 긋는다.

2단계: 엇각 성질 적용. 직선 n은 ℓ과 평행하므로 ℓ과 AB가 이루는 각 α=42°는 n과 BA가 이루는 각(B에서 위쪽 부분)과 엇각으로 같다: 42°. 마찬가지로 n은 m과 평행하므로 m과 BC가 이루는 각 γ=68°는 n과 BC가 이루는 각(B에서 아래쪽 부분)과 엇각으로 같다: 68°.

3단계: ∠β = α + γ = 42° + 68° = 110°.

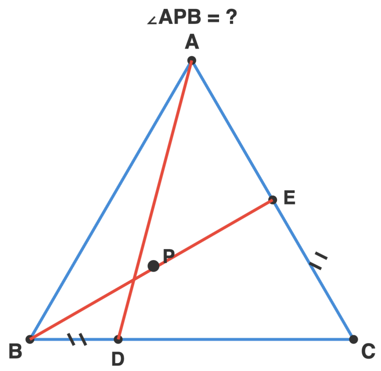
핵심 이유: 꺾인 점 B를 지나는 평행보조선을 그으면 β는 두 엇각의 합으로 분해된다.

🧠 풀이 전략: 평행선 사이 꺾인 선 문제는 '꺾인 점에 평행한 보조선 긋기'가 정석. 보조선이 β를 두 엇각으로 나눠주어 α+γ = β 공식을 유도한다.

💡 이 '평행보조선' 기법은 유클리드 원론 제5공준(평행선 공리)의 직접적 응용이며, 이 원리 없이는 평면기하 대부분이 증명되지 않는다.

Q10 합동 증명 기초

정삼각형 ABC의 변 BC 위에 점 D가 있고, 변 AC 위에 점 E가 있어 BD=CE이다. 이때 선분 AD와 선분 BE의 길이가 같음을 설명하고, 두 선분이 만나는 각을 ∠APB라 할 때(P는 교점) ∠APB의 크기를 구하시오.



BD = CE

🎯 **정답: AD = BE이고, ∠APB = 120°**

📖 1단계: 합동 증명. 삼각형 ABD와 삼각형 BCE를 비교한다. 정삼각형이므로 AB=BC, ∠ABD=∠BCE=60°, BD=CE(가정). 따라서 SAS 합동.

2단계: 대응변이 같으므로 AD = BE. 또한 대응각 ∠BAD = ∠CBE.

3단계: 삼각형 ABP에서 외각의 성질. ∠APB는 삼각형 BPD의 외각이거나 삼각형 APE의 외각으로 볼 수 있다. ∠BAD=α라 하면 ∠ABE = ∠ABC - ∠CBE = 60°-α. 삼각형 ABP에서 ∠PAB=α, ∠PBA=60°-α, 따라서 ∠APB=180°-α-(60°-α)=120°.

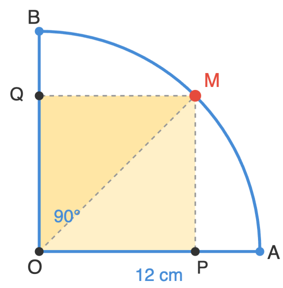
핵심 이유: ∠BAD와 ∠CBE가 합동에 의해 같아서 삼각형 ABP의 두 내각의 합이 항상 60°가 되고, 세 번째 각은 D, E의 위치와 무관하게 120°로 일정하다.

🧠 풀이 전략: 주어진 조건(정삼각형, BD=CE)에서 공통 변/각을 찾아 두 삼각형의 합동을 먼저 보이고, 합동으로부터 얻어지는 각의 정보를 삼각형 내각합에 적용하여 교각을 구한다.

💡 이 문제의 '교각이 항상 일정하다'는 성질은 정n각형으로 일반화되어, 정n각형에서 같은 방식으로 그은 두 선분이 이루는 각은 항상 (n-2)·180°/n 이다.

Q11 원·부채꼴 심화

반지름이 12 cm이고 중심각이 90°인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 중점 M에서 두 반지름 OA, OB에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라 할 때, 사각형 OPMQ는 어떤 도형인가? 또한 이 사각형의 넓이를 구하시오.



①) ① 정사각형, 72 cm²

②) ② 직사각형, 100 cm²

③) ③ 정사각형, 144 cm²

④) ④ 평행사변형, 72 cm²

🎯 **정답: ① 정사각형, 72 cm²**

📖 1단계: 사각형 OPMQ의 형태. ∠AOB=90°이므로 ∠POQ=90°. MP⊥OA이므로 ∠OPM=90°, MQ⊥OB이므로 ∠OQM=90°. 따라서 네 각 중 세 각이 90°, 나머지도 자동으로 90°가 되어 직사각형.

2단계: 정사각형 여부. M은 호의 중점이므로 OM은 ∠AOB를 이등분(∠AOM=∠BOM=45°). 직각삼각형 OPM에서 OM=12(반지름), ∠MOP=45°이므로 $OP = 12 \cdot \cos 45° = 12 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$, $MP = 12 \cdot \sin 45° = 6\sqrt{2}$. OP=MP이므로 OPMQ는 인접한 두 변의 길이가 같은 직사각형, 즉 정사각형.

3단계: 넓이. $(6\sqrt{2})^2 = 72$ cm².

🧠 풀이 전략: 먼저 각 조건(세 각이 직각)으로 사각형의 대략적 종류(직사각형)를 결정한 뒤, 호의 중점이라는 대칭성으로부터 인접 변이 같음을 보여 정사각형까지 특정. 넓이는 한 변의 제곱.

💡 부채꼴의 호 중점에서 양 반지름에 내린 수선의 발은 항상 대칭성을 만들어, 중심각에 상관없이 사각형 OPMQ는 마름모(또는 정사각형)가 된다.

Q12 자료·경시 퍼즐

어떤 반 학생 5명의 수학 점수의 평균이 82점이었다. 그런데 선생님이 채점을 다시 해보니 한 학생의 점수가 78점이 아니라 88점이었다. 올바른 평균은 몇 점인가? 또한, 이 반에 전학생 한 명이 합류하여 6명이 되었을 때 평균을 85점으로 맞추려면 전학생은 몇 점을 받아야 하는지 구하시오.

🎯 **정답: 올바른 평균: 84점, 전학생 점수: 90점**

📖 1단계: 원래 5명의 합 = 82 × 5 = 410점. 이 합은 한 학생의 점수를 78로 계산한 값이므로 잘못 계산된 합이다. 올바른 합 = 410 - 78 + 88 = 420.

2단계: 올바른 평균 = 420 ÷ 5 = 84점.

3단계: 전학생 x점 포함 6명 평균 85점 → (420 + x) / 6 = 85 → 420 + x = 510 → x = 90.

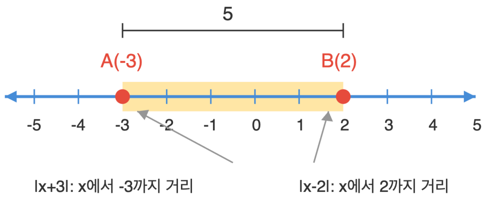
함정 주의: 평균 구할 때 '오류 보정'을 먼저 해야 하며, 잘못된 평균값으로 다음 계산을 이어가면 틀린다.

🧠 풀이 전략: 평균 역산 문제의 기본은 '평균 × 개수 = 합'으로 합을 복원하는 것. 오류는 '잘못된 값 빼고 올바른 값 더하기'로 합에 보정한 뒤, 새 평균을 맞추는 데 필요한 추가 값은 '(목표합 - 현재합)'으로 구한다.

💡 평균의 '변화량'은 '(추가된 값 - 기존 평균) ÷ 새 인원수'로 직관적으로 계산할 수도 있다. 여기서는 (90-84)÷6=1이 되어 평균이 정확히 1점 상승한다.

Q13 정수·유리수 추론

|x-2| + |x+3| = 7 을 만족하는 모든 정수 x의 합을 구하시오.



①) ① -5

②) ② -1

③) ③ 0

④) ④ -7

🎯 **정답: ② -1**

📖 1단계: |x-2|는 점 x와 2 사이 거리, |x+3|는 점 x와 -3 사이 거리이다. 두 거리의 합이 7이라는 의미를 기하적으로 해석한다.
2단계: -3과 2 사이의 거리는 5이므로, x가 두 점 사이에 있으면 거리 합은 항상 5가 되어 7이 될 수 없다. 따라서 x는 두 점 바깥에 있어야 한다.
3단계: x ≥ 2일 때: (x-2)+(x+3)=7 → 2x+1=7 → x=3. x ≤ -3일 때: -(x-2)-(x+3)=7 → -2x-1=7 → x=-4.
4단계: 두 경계 바깥에서 거리 합이 단조로 증가하므로 해는 x=3, x=-4 두 개뿐이고 둘 다 정수이다. 따라서 모든 정수해의 합은 3+(-4) = -1이므로 정답은 ② -1이다.

🧠 풀이 전략: 절댓값을 '거리'로 해석하는 기하적 접근이 핵심이다. |x-a|+|x-b|는 두 점 사이 거리만큼이 최솟값이며, 그보다 큰 값일 때는 양 끝점 바깥에서 해가 발생함을 이용한다.

💡 |x-a|+|x-b|의 최솟값은 항상 두 점 a, b 사이 거리이다. 이 성질은 고등학교 통계의 '중앙값이 절대편차를 최소화한다'는 정리로 이어진다.

Q14 문자와 식 심화

어떤 자연수 n에 대하여 '연속된 5개의 홀수의 합'을 식으로 나타냈을 때, 그 합이 항상 5의 배수임을 보이려면 어떤 식으로 표현하는 것이 가장 좋은가?

①) ① n, n+1, n+2, n+3, n+4 로 놓는다

②) ② 2n+1, 2n+3, 2n+5, 2n+7, 2n+9 로 놓는다

③) ③ 2n-3, 2n-1, 2n+1, 2n+3, 2n+5 로 놓는다 (가운데를 2n+1로)

④) ④ n-2, n-1, n, n+1, n+2 로 놓는다

🎯 **정답: ③ 2n-3, 2n-1, 2n+1, 2n+3, 2n+5**

📖 1단계: 합을 가장 깔끔하게 만드는 방법은 가운데 항을 기준으로 좌우 대칭으로 놓는 것이다. 좌우 대칭 항들이 서로 상쇄되어 합이 단순해진다.
2단계: ③의 경우 합 = (2n-3)+(2n-1)+(2n+1)+(2n+3)+(2n+5) = 10n+5 = 5(2n+1). 따라서 5의 배수임이 한눈에 보인다.
3단계: ①은 홀수가 아닌 연속 자연수, ④는 홀수 보장 안 됨. ②도 홀수 5개이지만 합 = 10n+25 = 5(2n+5)로 5배수는 보이지만 ③보다 식이 덜 깔끔하다.
4단계: 일반적으로 '연속된 홀수 개수의 합'을 다룰 때는 가운데 항을 기준으로 ±2씩 떨어뜨려 놓으면 합 계산이 간단해진다.

🧠 풀이 전략: 식 세우기 문제는 '계산이 가장 간단해지는 표현'을 찾는 것이 핵심이다. 대칭성을 활용하면 중간 항들이 상쇄되어 결과가 명료해진다는 원리를 이용.

💡 연속된 홀수의 합은 항상 가운데 수의 (개수)배가 된다. 예: 1+3+5+7+9 = 5×5 = 25. 이 패턴은 '홀수의 등차수열 합'의 일반 공식으로 확장된다.

Q15 일차방정식 활용

두 자동차 A, B가 같은 지점에서 동시에 출발한다. A는 시속 60km로 동쪽으로, B는 시속 80km로 서쪽으로 달린다. 출발 후 30분이 지나서 A가 잊은 물건을 가지러 출발지로 돌아와야 함을 깨닫고 즉시 시속 90km로 출발지를 향해 돌아간다. A가 출발지에 도착했을 때, B는 출발지로부터 몇 km 떨어져 있는가?

①) ① 60km

②) ② 80km

③) ③ 90km/3

④) ④ 80×(5/6)km

🎯 **정답: ④ 80×(5/6)km**

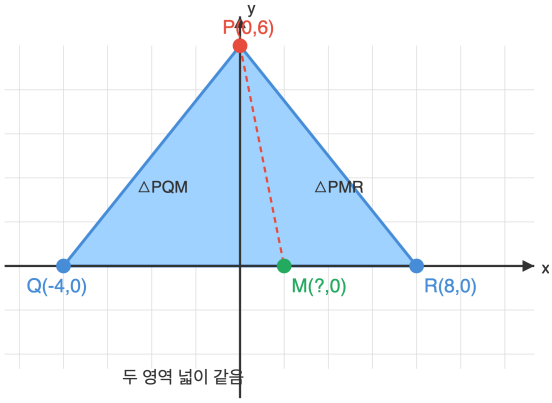
📖 1단계: A의 행동을 시간순으로 정리한다. 처음 30분(=1/2시간) 동안 동쪽으로 60×(1/2)=30km 이동.
2단계: A가 30km 지점에서 시속 90km로 출발지를 향해 돌아온다. 걸리는 시간 = 30÷90 = 1/3시간(=20분).
3단계: A가 출발지에 도착한 시점은 출발 후 30분 + 20분 = 50분 = 5/6시간이다.
4단계: 같은 5/6시간 동안 B는 계속 시속 80km로 서쪽으로 달렸으므로 B의 위치는 출발지로부터 80×(5/6) = 400/6 ≈ 66.67km.
5단계: 보기 ④ 80×(5/6)km가 정확한 표현. 정답은 ④.

🧠 풀이 전략: 속도-시간-거리 문제는 사건을 '시간 구간별로' 분리해 표로 정리한 뒤, 같은 시간 동안 서로 다른 물체가 이동한 거리를 비교한다. A의 이동 시간을 구하면 B의 위치는 자동으로 결정된다.

💡 이런 '되돌아가는' 문제는 실제 항해·항공에서 '연료가 부족할 때 돌아가야 할 시점' 계산에 활용된다. 시간이 지날수록 돌아가야 할 거리가 늘어나므로 결단이 빠를수록 손실이 적다.

Q16 좌표평면 응용

좌표평면 위 세 점 P(0, 6), Q(-4, 0), R(8, 0)이 있다. 점 P를 지나는 어떤 직선이 삼각형 PQR의 넓이를 정확히 이등분한다고 할 때, 이 직선이 변 QR과 만나는 점의 x좌표는?



①) ① x = 0

②) ② x = 1

③) ③ x = 2

④) ④ x = 4

🎯 **정답: ③ x = 2**

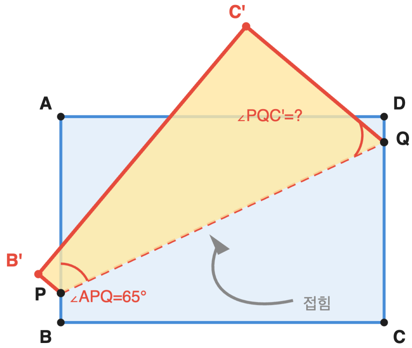
📖 1단계: 점 P에서 변 QR로 직선을 그어 삼각형을 두 개로 나눌 때, 두 작은 삼각형은 모두 P를 꼭짓점으로 하고 밑변이 QR 위에 있다. 두 삼각형의 높이는 점 P의 y좌표 6으로 같다.
2단계: 높이가 같으므로 넓이 비는 밑변 길이 비와 같다. 넓이가 이등분되려면 점 M은 변 QR의 중점이어야 한다.
3단계: Q(-4, 0)와 R(8, 0)의 중점은 ((-4+8)/2, 0) = (2, 0).
4단계: 따라서 직선이 QR과 만나는 점의 x좌표는 2.
[함정 주의] ① x=0은 'P 바로 아래'를 직관적으로 고르기 쉬우나, P가 QR의 중점 위에 있지 않기 때문에 틀림. P의 x좌표가 0이지만 QR의 중점은 x=2이다.

🧠 풀이 전략: 꼭짓점에서 대변으로 그은 직선이 삼각형을 이등분할 조건을 묻는 문제. '높이가 같은 두 삼각형의 넓이 비 = 밑변 비' 원리를 활용하면 중점만 구하면 된다.

💡 삼각형의 한 꼭짓점에서 대변의 중점으로 그은 선분을 '중선(median)'이라고 한다. 삼각형의 세 중선은 항상 한 점(무게중심)에서 만나며, 무게중심은 각 중선을 2:1로 내분한다.

Q17 도형 성질 추론

오른쪽 그림과 같이 직사각형 모양의 종이 ABCD의 아래쪽 부분을 접는 선 PQ를 따라 위로 한 번 접었다. 접는 선이 변 AB와 만나는 점을 P, 변 CD와 만나는 점을 Q라 할 때, ∠APQ = 65°이면 접힌 후 생긴 ∠PQC'(C'는 C가 접힌 후의 위치)의 크기는?



①) ① 65°

②) ② 115°

③) ③ 130°

④) ④ 90°

🎯 **정답: ① 65°**

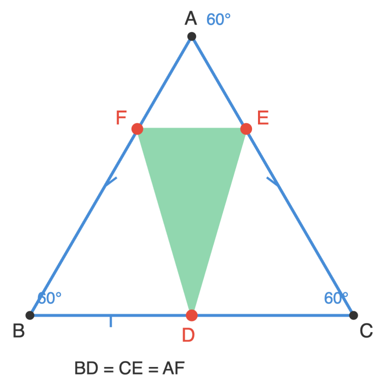
📖 1단계: 직사각형이므로 두 변 AB와 DC는 서로 평행하다(AB ∥ DC). 접는 선 PQ는 이 두 평행선을 가로지르는 직선이다.
2단계: 평행선에서 엇각의 크기는 같으므로 ∠CQP = ∠APQ = 65°이다.
3단계: 종이를 접는 것은 접는 선 PQ를 축으로 하는 대칭이동이므로, 접기 전 ∠CQP와 접은 후 ∠C'QP의 크기가 같다. 따라서 ∠PQC' = ∠CQP = 65°.
따라서 정답은 ① 65°이다.
(참고: 그림에 나타나는 115°는 ∠BPQ(=∠B'PQ)의 크기로, ∠APQ의 보각일 뿐 묻는 각 ∠PQC'와는 다르다.)

🧠 풀이 전략: 종이접기 문제는 '접기 = 대칭이동'으로 보고 대응하는 각/변이 같음을 이용한다. 평각(180°)과 대응각의 등호 관계를 결합해 미지각을 구한다.

💡 종이접기는 수학적으로 매우 풍부한 분야로, '오리가미 수학'은 자(눈금 없는)와 컴퍼스로는 불가능한 각의 3등분을 종이접기로는 가능하게 한다.

Q18 합동 증명 기초

오른쪽 그림에서 △ABC는 정삼각형이고, 점 D, E, F는 각각 변 BC, CA, AB 위에 있으며 BD = CE = AF이다. 이때 △DEF는 어떤 삼각형인가? 또 그 이유로 가장 적절한 것은?



①) ① 정삼각형이며, 합동인 세 삼각형 △AFE, △BDF, △CED 때문이다 (SAS합동)

②) ② 이등변삼각형이며, 두 변만 같다

③) ③ 직각삼각형이며, 한 각이 90°이다

④) ④ 일반 삼각형이며, 특별한 성질이 없다

🎯 **정답: ① 정삼각형이며, 합동인 세 삼각형 때문이다 (SAS합동)**

📖 1단계: △AFE, △BDF, △CED 세 삼각형이 합동임을 보인다. 정삼각형이므로 AB = BC = CA = (한 변). BD = CE = AF = a라 하면 BF = AB - AF = (한변)-a, CD = BC - BD = (한변)-a, AE = CA - CE = (한변)-a. 따라서 BF = CD = AE.

2단계: △BDF에서 BD = a, BF = (한변)-a, ∠B = 60°. △CED에서 CE = a, CD = (한변)-a, ∠C = 60°. △AFE에서 AF = a, AE = (한변)-a, ∠A = 60°. 두 변과 끼인각이 각각 같으므로 SAS 합동.

3단계: 합동이므로 대응변 DF = ED = FE. 따라서 △DEF의 세 변이 모두 같으므로 정삼각형이다.

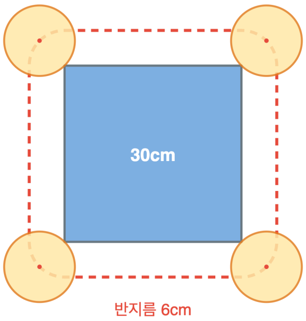
4단계: 함정 보기 ②는 '두 변이 같으니 이등변'이라는 부분 정보만 본 오답이다. 합동을 이용하면 세 변이 모두 같음이 한 번에 보장된다.

🧠 풀이 전략: 정삼각형의 회전 대칭성(120°)을 이용하는 문제. 같은 길이 a를 같은 위치(B에서 D, C에서 E, A에서 F)로 잡았으므로 세 코너 삼각형이 SAS 합동이 되고, 그 결과 안쪽 삼각형도 정삼각형이 된다.

💡 이 결과는 '정삼각형의 안쪽에 그린 작은 정삼각형'으로 알려진 고전적 구성이며, 회전 대칭성을 이용한 합동 증명의 대표 예시다. 초기 그리스 기하학에서도 다루었다.

Q19 원·부채꼴 심화

반지름이 6cm인 원을 한 변의 길이가 30cm인 정사각형의 둘레를 따라 한 바퀴 굴렸을 때, 원의 중심이 그리는 도형의 둘레의 길이는?



①) ① 120 + 12π cm

②) ② 120 + 6π cm

③) ③ 144 + 12π cm

④) ④ 168 cm

🎯 **정답: ① 120 + 12π cm**

📖 1단계: 원이 정사각형의 변을 따라 굴러갈 때, 원의 중심은 변과 평행하게 6cm 떨어진 직선을 따라 움직인다. 정사각형 한 변의 길이가 30cm이므로 직선 부분 한 개는 30cm. 변이 4개이므로 총 직선 거리 = 30 × 4 = 120cm.

2단계: 정사각형의 한 꼭짓점을 돌 때, 원의 중심은 그 꼭짓점을 중심으로 하는 사분원(반지름 6cm, 중심각 90°)을 그린다. 사분원 호의 길이 = 2π × 6 × (90/360) = 3π cm.

3단계: 꼭짓점이 4개이므로 사분원 호의 총 길이 = 3π × 4 = 12π cm. (네 사분원을 합치면 정확히 반지름 6cm짜리 원 한 개의 둘레.)

4단계: 따라서 원의 중심이 그리는 도형의 둘레 = 120 + 12π cm.

[함정 주의] ④ 168cm는 12π ≈ 37.7을 잘못 계산한 오답. ②는 사분원 4개를 합쳐도 호 길이가 6π밖에 안 된다고 잘못 본 경우.

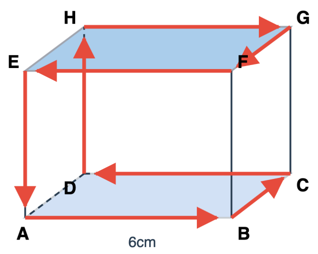
🧠 풀이 전략: 굴리기 문제의 핵심은 '구르는 점(중심)'과 '닿는 점'을 분리해서 생각하는 것. 직선 위에서는 중심이 평행이동, 모서리에서는 중심이 호를 그린다. 모서리에서 그리는 호의 중심각은 정사각형 외각(90°)과 같다.

💡 정n각형의 둘레를 굴릴 때 모서리에서 그리는 호의 중심각 합은 항상 360°이다. 이는 다각형의 외각의 합이 360°라는 사실과 같은 원리이다.

Q20 입체 추론

한 모서리의 길이가 6cm인 정육면체가 있다. 이 정육면체의 한 꼭짓점 A에서 출발하여 모서리를 따라 모든 꼭짓점을 정확히 한 번씩만 지나 다시 A로 돌아오는 경로(해밀턴 회로)의 총 길이는?

정육면체 해밀턴 회로



8개 꼭짓점 한 번씩, 시작점 A로 복귀

①) ① 36cm

②) ② 42cm

③) ③ 48cm

④) ④ 60cm

🎯 **정답: ③ 48cm**

📖 1단계: 해밀턴 회로는 모든 꼭짓점을 정확히 한 번씩 지나 출발점으로 돌아오는 경로이다. 정육면체의 꼭짓점은 8개이므로 회로는 정확히 8개의 모서리(꼭짓점 사이 연결)로 구성된다.

2단계: 단, 정육면체에서는 '대각선'을 따라 이동할 수 없고 오직 모서리(인접 꼭짓점 사이)만 따라가야 한다. 8개의 꼭짓점을 잇는 회로에는 8개의 변이 사용된다.

3단계: 한 모서리의 길이가 6cm이므로 회로의 총 길이 = 6 × 8 = 48cm.

4단계: 정육면체에서 해밀턴 회로가 실제로 존재하는지 확인 필요. 예: A(0,0,0) → B(6,0,0) → C(6,6,0) → D(0,6,0) → H(0,6,6) → G(6,6,6) → F(6,0,6) → E(0,0,6) → A. 8개 모서리 모두 정육면체의 모서리이며, 각 꼭짓점을 한 번씩 지난다. ✓

[함정 주의] ① 36cm는 6모서리(=각 면 둘레), ④ 60cm는 10모서리로 잘못 계산한 경우.

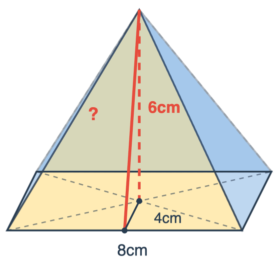
🧠 풀이 전략: 해밀턴 회로는 그래프 이론의 개념이지만, 정육면체에서는 '꼭짓점 수 = 회로 모서리 수'라는 단순 사실로 풀린다. 핵심은 '실제로 그런 회로가 존재하는지' 확인하는 것이며, 구체적 경로를 하나라도 찾으면 된다.

💡 정육면체에서 해밀턴 회로는 본질적으로 다른 형태가 6가지(대칭을 제외하면) 존재한다. 19세기 수학자 해밀턴이 12면체의 비슷한 게임을 만들어 'Icosian Game'으로 판매하기도 했다.

Q21 입체 추론

밑면이 한 변의 길이 8cm인 정사각형이고 높이가 6cm인 사각뿔(피라미드 모양)이 있다. 이 사각뿔의 옆면 4개의 넓이의 합(옆넓이)을 구하시오. (단, 옆면 삼각형의 빗변(꼭짓점에서 밑변 중점까지)을 먼저 구할 것)

정사각뿔의 옆넓이



옆넓이 = 옆면 4개의 합

①) ① $32\sqrt{13}$ cm²

②) ② 96 cm²

③) ③ 160 cm²

④) ④ 240 cm²

🎯 **정답: ① $32\sqrt{13}$ cm²**

📖 1단계: 옆면은 모두 합동인 이등변삼각형 4개이므로 한 옆면의 넓이를 먼저 구한다. 이때 필요한 것은 '꼭짓점에서 밑변의 중점까지의 거리'(옆면 삼각형의 높이=사면 높이)이다.

2단계: 꼭짓점, 밑면의 중심, 밑변의 중점을 잇는 직각삼각형을 생각하면 두 직각변은 (사각뿔의 높이) 6cm와 (밑면 중심에서 밑변 중점까지의 거리) $8\div2=4$cm이다. 따라서 사면 높이$=\sqrt{(6^2+4^2)}=\sqrt{(36+16)}=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$ cm.

3단계: 한 옆면 삼각형의 넓이$=(1/2)\times$밑변$\times$높이$=(1/2)\times8\times2\sqrt{13}=8\sqrt{13}$ cm².

4단계: 옆면이 4개이므로 옆넓이$=4\times8\sqrt{13}=32\sqrt{13}$ cm²($\approx$115.4 cm²). 따라서 정답은 ① $32\sqrt{13}$ cm².

참고(오답 분석): ② 96cm²는 사면 높이를 구하지 않고 높이 6cm를 그대로 삼각형의 높이로 쓴 경우, ③ 160cm²는 밑변 중점까지의 거리를 4cm가 아닌 8cm로 잘못 보아 사면 높이를 $\sqrt{(6^2+8^2)}=10$cm로 계산한 경우의 오답이다.

🧠 풀이 전략: 피라미드 옆넓이 문제는 '옆면 삼각형의 진짜 높이(=사면 높이)'가 핵심. 이는 피라미드 높이와 밑면 중심에서 변 중점까지 거리로 직각삼각형을 이루므로 피타고라스 정리(중1 직관: 직각삼각형의 변 관계)로 구한다.

💡 이집트 기자의 대피라미드는 정사각뿔 모양이며, 옆면 삼각형의 사면 높이를 '아포뎀(apothem)'이라 한다. 고대 이집트인들은 피라미드 설계에 이미 직각삼각형의 변 관계를 활용했다.

Q22 자료·경시 퍼즐

어느 반 학생 25명의 수학 점수 평균은 76점이었다. 그런데 채점 후, 한 학생의 점수가 92점이 아니라 29점인 것을 발견했다(자릿수가 뒤바뀜). 정정 후 이 반의 평균은 몇 점인가?

①) ① 73.48점

②) ② 73.52점

③) ③ 75.00점

④) ④ 76.00점

🎯 **정답: ① 73.48점**

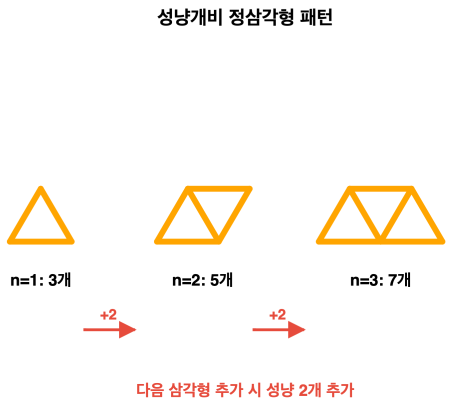
📖 1단계: 잘못 계산된 평균이 76점이고 학생 수가 25명이므로, 잘못 계산된 점수의 총합 = 76 × 25 = 1900점.
2단계: 한 학생의 점수가 92점으로 잘못 들어갔는데 실제로는 29점이었다. 따라서 총합에서 잘못 더한 92를 빼고 올바른 29를 더해야 한다. 정정된 총합 = 1900 - 92 + 29 = 1900 - 63 = 1837점.
3단계: 정정된 평균 = 1837 ÷ 25 = 73.48점.
4단계: 정답은 ① 73.48점.
[함정 주의] ② 73.52점은 (76 - 63/25) 대신 (76 + 25/63) 같은 잘못된 계산을 한 경우. 평균의 변화량 = 점수 변화량 ÷ 학생 수 = -63/25 = -2.52점. 76 - 2.52 = 73.48 ✓

🧠 풀이 전략: 평균 보정 문제의 빠른 풀이법: '평균의 변화 = 점수 변화량 ÷ 자료 개수'. 모든 자료를 다시 더할 필요 없이, 잘못된 값과 올바른 값의 차이만 학생 수로 나누어 평균에서 빼면 된다.

💡 이런 '점수 자릿수 뒤바뀜' 오류는 시험 채점 실수의 대표적 유형이며, 두 자릿수의 자리를 바꾼 차이는 항상 9의 배수이다. (92-29=63=9×7) 이 성질을 이용해 채점 오류를 빠르게 검증할 수 있다.

Q23 문자와 식 심화

성냥개비로 다음과 같은 규칙으로 정삼각형을 이어 붙여 도형을 만든다. 정삼각형이 1개일 때 성냥개비 3개, 2개 이어붙이면 5개, 3개 이어붙이면 7개, ... 정삼각형 n개를 이어붙였을 때 필요한 성냥개비의 개수를 n에 관한 식으로 나타내시오.



①) ① 3n

②) ② 2n+1

③) ③ 3n-1

④) ④ n^2+2

🎯 **정답: ② 2n + 1**

📖 1단계: 규칙을 살펴본다. n=1일 때 3개, n=2일 때 5개, n=3일 때 7개. 차이는 항상 +2이다. 즉 첫 정삼각형 이후로 새 정삼각형을 추가할 때마다 성냥개비 2개씩 늘어난다(공유하는 한 변을 빼고 나머지 두 변만 추가).

2단계: n=1일 때 3개로 시작, 이후 (n-1)번 추가하므로 n번째 = 3 + 2(n-1) = 3 + 2n - 2 = 2n + 1.

3단계: 검증: n=1 → 2(1)+1=3 ✓, n=2 → 2(2)+1=5 ✓, n=3 → 2(3)+1=7 ✓, n=10 → 21개.

4단계: 함정 보기 ① 3n은 '한 삼각형당 3개'라고 단순 곱셈한 오답(공유하는 변을 빼지 않음). ③ 3n-1은 부호 실수.

🧠 풀이 전략: 규칙성 문제는 (1) 표를 만들어 차이를 관찰하고, (2) '일정한 차이'가 보이면 일차식 an+b 형태로 가정한 뒤, (3) 두 점을 대입해 a, b를 결정한다. 차이가 일정하면 항상 일차식이다.

💡 이런 도형 규칙성 문제는 '점화식'의 기초로, 고등학교에서 배우는 수열의 일반항 공식 a_n = a_1 + (n-1)d (등차수열)와 같은 원리이다.

Q24 일차방정식 활용

농도가 12%인 소금물 200g과 농도가 모르는 소금물 300g을 섞었더니 농도가 8%인 소금물이 되었다. 섞기 전 농도를 모르는 소금물의 농도는 몇 %인가?

①) ① 4%
②) ② 5.33%
③) ③ 6%
④) ④ 7%

🎯 **정답: ② 약 5.33%**

📖 1단계: 농도가 모르는 소금물의 농도를 x%라 하자. 농도(%) × 양(g) ÷ 100 = 소금의 양(g)이라는 관계를 이용한다.
2단계: 12% 소금물 200g 속의 소금 = 200 × 12/100 = 24g. x% 소금물 300g 속의 소금 = 300 × x/100 = 3x g. 두 소금물을 섞은 후 총 소금 = 24 + 3x g, 총 소금물 = 200 + 300 = 500g.
3단계: 섞은 후 농도가 8%이므로 (24 + 3x)/500 × 100 = 8. 양변에 5를 곱하면 24 + 3x = 40. 3x = 16. x = 16/3 ≈ 5.33%.
4단계: 정답은 ② 약 5.33%.
[검산] 농도 5.33% × 300g 속 소금 = 16g. 24 + 16 = 40g. 농도 = 40/500 × 100 = 8% ✓
[함정 주의] ① 4%는 (12-8)에서 단순 차이로 계산한 오답. 섞을 때는 양의 비율을 고려해야 한다.

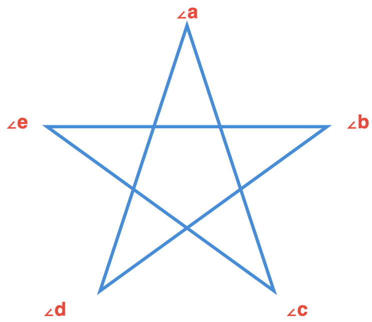
🧠 풀이 전략: 농도 문제의 핵심은 '소금의 양은 보존된다'. 섞기 전 두 소금물 속 소금의 합 = 섞은 후 소금의 양. 농도가 아니라 소금의 양으로 등식을 세운다는 것이 가장 중요한 원리다.

💡 두 소금물을 섞을 때의 농도는 항상 두 농도 사이에 있고, 양이 많은 쪽 농도에 더 가깝다. 이를 '가중평균'이라 하며 화학·통계·금융에서 두루 활용된다.

Q25 도형 성질 추론

그림과 같은 오각별(☆)의 다섯 꼭짓점에 표시된 각 ∠a, ∠b, ∠c, ∠d, ∠e의 크기의 합을 구하시오.

∠a + ∠b + ∠c + ∠d + ∠e = ?



별을 한 번에 그린 도형 (내부에 작은 오각형)

①) ① 180°

②) ② 360°

③) ③ 540°

④) ④ 720°

🎯 **정답: ① 180°**

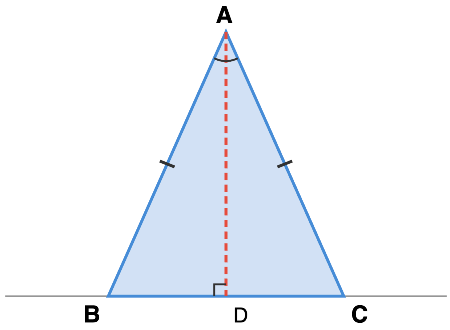
📖 1단계: 오각별의 각 뾰족 꼭짓점(예: ∠a)은 별을 그렸을 때 내부에 생기는 작은 오각형의 한 변과 만나는 삼각형의 한 내각이다. 즉 별의 뾰족한 각 5개는 각각 서로 다른 5개의 삼각형에 속한다.
2단계: 이 5개의 삼각형에서 내각의 합은 모두 5 × 180° = 900°이다. 이 900° 중에는 별의 뾰족한 각 5개(∠a~∠e)와, 작은 오각형의 꼭짓점에서 생기는 각들이 포함된다.
3단계: 작은 오각형의 각 꼭짓점에는 두 개의 삼각형이 만나고, 그때 두 삼각형의 내각은 오각형의 해당 꼭짓점에서의 외각 2개에 해당한다. 오각형의 외각의 합은 항상 360°이고, 각 꼭짓점마다 2개씩 나타나므로 그 합은 2 × 360° = 720°. 따라서 ∠a+∠b+∠c+∠d+∠e = 900° - 720° = 180°.

🧠 풀이 전략: 별처럼 복잡한 도형의 각의 합은 '삼각형의 내각의 합 180°'와 '외각정리'를 결합해 푼다. 각 뾰족한 꼭짓점을 하나의 삼각형에 귀속시키고, 나머지 각들을 내부 오각형의 외각으로 변환해 상쇄시키는 전략이다.

💡 별의 뾰족한 꼭짓점이 n개(n ≥ 5, 홀수)일 때 각의 합은 (n-4) × 180°이다. 오각별은 180°, 칠각별은 540°가 된다.

Q26 합동 증명 기초

이등변삼각형 ABC에서 AB = AC이고, ∠A의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D라 한다. 다음 세 가지를 모두 논리적으로 밝히시오. (1) △ABD ≡ △ACD (2) 점 D는 BC의 중점 (3) AD ⊥ BC



🎯 **정답: (1) SAS에 의해 △ABD ≡ △ACD, (2) BD = CD, (3) ∠ADB = ∠ADC = 90°**

📖 1단계 (합동 증명): 두 삼각형 △ABD와 △ACD에서 AB = AC(주어진 조건), ∠BAD = ∠CAD(AD가 각의 이등분선), AD는 공통변이다. 두 변과 그 끼인각이 각각 같으므로 SAS 합동 조건에 의해 △ABD ≡ △ACD이다.

2단계 (D가 중점): 합동인 두 삼각형의 대응변은 같으므로 BD = CD이다. 따라서 D는 BC의 중점이다.

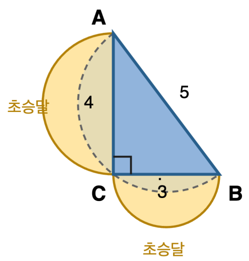
3단계 (수직): 합동에서 대응각 ∠ADB = ∠ADC이다. 그런데 ∠ADB + ∠ADC = 180°(B, D, C가 한 직선 위)이므로 ∠ADB = ∠ADC = 90°. 따라서 AD ⊥ BC.

🧠 풀이 전략: 이등변삼각형의 대칭성을 '합동'으로 엄밀하게 증명하는 전략이다. 공통변을 찾아 SAS를 유도하고, 합동으로부터 얻은 대응변/대응각을 이용해 중점성과 수직성을 차례로 끌어낸다. '대칭성 → 합동 → 대응변 같음 → 추가 성질'의 흐름을 익힌다.

💡 이 성질 때문에 이등변삼각형의 꼭지각의 이등분선은 '수직이등분선'의 역할까지 겸한다. 정삼각형에서는 세 각의 이등분선이 모두 이 성질을 가지므로 중선·수선·수직이등분선이 전부 일치한다.

Q27 원·부채꼴 심화

그림과 같이 직각을 낀 두 변의 길이가 각각 3cm, 4cm인 직각삼각형 ABC(∠C=90°)의 세 변을 지름으로 하는 반원을 모두 삼각형의 바깥쪽으로 그렸다. 이때 빗변을 지름으로 하는 반원을 삼각형 쪽으로 접어서(같은 넓이이므로 그대로 덮는다고 생각) 겹치게 할 때, 두 짧은 변 위 반원 중 '겹치지 않고 바깥쪽에 남은 두 초승달 모양' 넓이의 합을 구하시오.



🎯 **정답: 6 cm²**

📖 1단계: 직각삼각형의 세 변 길이는 3, 4, 5(피타고라스)이므로 각 변 위 반원의 넓이는 $(1/2)\pi(3/2)^2 = 9\pi/8$, $(1/2)\pi(2)^2 = 2\pi = 16\pi/8$, $(1/2)\pi(5/2)^2 = 25\pi/8$.

2단계: 두 직각변 위 반원의 넓이 합 = $9\pi/8 + 16\pi/8 = 25\pi/8$. 빗변 위 반원의 넓이 = $25\pi/8$. 즉 '두 짧은 변 위 반원의 합'과 '빗변 위 반원'의 넓이가 같다(피타고라스에 의한 반원판 버전).

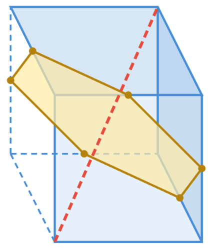
3단계: 두 초승달 = (두 작은 반원 넓이) - (빗변 위 반원 중 삼각형 바깥 부분) = (두 작은 반원) - (빗변 반원 - 삼각형) = $25\pi/8 - 25\pi/8 + (1/2 \times 3 \times 4) = 0 + 6 = 6$ cm². 놀랍게도 π가 모두 상쇄되어 삼각형의 넓이와 같아진다.

🧠 풀이 전략: π가 들어간 곡선 영역의 넓이라도 '더하기·빼기 관계'로 식을 세우면 π가 소거되는 경우가 있다. 피타고라스를 '면적 버전'으로 해석해, 두 작은 반원의 합이 큰 반원과 같음을 이용하는 것이 핵심 전략이다.

💡 이 결과는 고대 그리스의 히포크라테스가 발견한 '히포크라테스의 초승달(월형)'로, 곡선 영역 중에서 정확히 직선 도형의 넓이와 같아지는 최초의 예 중 하나이다.

Q28 입체 추론

한 모서리의 길이가 6cm인 정육면체가 있다. 이 정육면체의 한 공간대각선의 중점을 지나고, 그 공간대각선에 수직인 평면으로 정육면체를 자를 때, 잘린 단면의 모양과 한 변의 길이를 구하시오.



①) ① 한 변이 3cm인 정사각형

②) ② 한 변이 3√2 cm인 정육각형

③) ③ 한 변이 6cm인 정삼각형

④) ④ 한 변이 3√3 cm인 정사각형

🎯 **정답: ② 한 변이 3√2 cm인 정육각형**

📖 1단계: 정육면체의 한 공간대각선은 대칭축이다. 이 대각선에 수직이면서 중점을 지나는 평면은 정육면체의 여섯 개 모서리(공간대각선과 만나지 않는 모서리들)와 각각 중점에서 만난다.

2단계: 만나는 여섯 교점을 이으면 6각형이 되는데, 각 변은 정육면체의 한 면 위에서 두 인접 모서리의 중점을 잇는 선분이므로, 길이는 √((6/2)² + (6/2)²) = √(9+9) = √18 = 3√2 cm로 모두 같다.

3단계: 대칭성(공간대각선에 대한 회전대칭)에 의해 여섯 내각도 모두 같으므로 단면은 한 변이 3√2 cm인 정육각형이다.

🧠 풀이 전략: 공간대각선에 '수직인 평면'은 정육면체의 회전대칭축에 수직이라는 뜻이다. 대칭축에 수직인 단면은 반드시 대칭성을 가지므로, 만나는 모서리 수(6개)로부터 단면이 정다각형이 될 후보를 좁히고, 한 변의 길이는 '두 모서리 중점 사이의 거리'로 계산한다.

💡 정육면체의 공간대각선에 수직인 평면으로 위치를 바꿔가며 자르면 단면은 삼각형(정삼각형) → 육각형 → 정육각형(중앙) → 육각형 → 삼각형으로 변하며, 중앙에서만 정육각형이 된다.

Q29 정수·유리수 추론

수직선 위의 점 P는 원점 0에서 출발하여 다음 규칙으로 움직인다. '홀수 번째(1, 3, 5, ...) 움직임에서는 오른쪽으로 그 번호만큼, 짝수 번째(2, 4, 6, ...) 움직임에서는 왼쪽으로 그 번호만큼 이동한다.' 10번째 움직임을 마친 직후 점 P의 좌표를 구하시오.

①) ① -5

②) ② -4

③) ③ 5

④) ④ 4

🎯 **정답: ① -5**

📖 1단계: k번째 이동량을 부호까지 포함해 쓰면 홀수 k에서는 +k, 짝수 k에서는 -k이다. 10번째 움직임 후 위치는 +1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + 9 - 10 이다.

2단계: 두 개씩 묶어 계산한다. (1-2) + (3-4) + (5-6) + (7-8) + (9-10). 각 괄호의 값은 모두 -1이다.

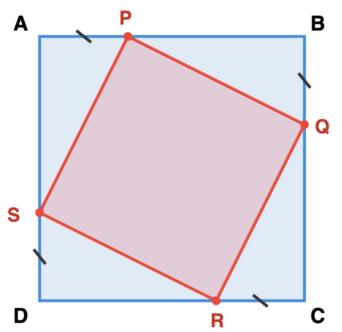
3단계: 괄호가 5개이므로 합 = 5 × (-1) = -5. 따라서 P의 좌표는 -5이다.

🧠 풀이 전략: 교대로 부호가 바뀌는 합은 '두 항씩 묶기'로 단순화한다. 홀수 개 항과 짝수 개 항을 구분하고(여기서는 10개 = 짝수 개), 묶음 하나의 값을 구해 개수를 곱하는 전략이다.

💡 이 합을 일반화하면 2n번째까지의 위치는 항상 -n이다. 즉 홀짝 교대 합은 규칙적으로 움직여 음의 방향으로 일정하게 멀어진다.

Q30 합동 증명 기초

정사각형 ABCD의 네 변 AB, BC, CD, DA 위에 각각 점 P, Q, R, S를 'AP = BQ = CR = DS'가 되도록 잡았다. 이때 사각형 PQRS가 정사각형이 됨을 증명하시오.



🎯 **정답: SAS 합동을 네 번 사용하여 증명 (PQ=QR=RS=SP이고 ∠SPQ=90°)**

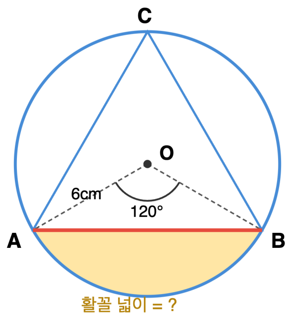
📖 1단계: 정사각형의 한 변 길이를 s라 하면 PB = s - a, BQ = a. 네 귀퉁이 삼각형 △APS, △BQP, △CRQ, △DSR을 살핀다.
2단계: △APS와 △BQP에서 AP = BQ = a(조건), AS = s - DS = s - a, BP = s - AP = s - a. 그러므로 AS = BP. 또 ∠A = ∠B = 90°(정사각형의 각). SAS 합동 조건에 의해 △APS ≡ △BQP. 같은 방식으로 네 귀퉁이 삼각형이 모두 서로 합동이다.
3단계: 합동인 삼각형의 대응 빗변은 같으므로 SP = PQ = QR = RS. 한편 △BQP에서 ∠BPQ + ∠BQP = 90°이고 △APS에서 ∠APS + ∠ASP = 90°인데 ∠APS = ∠BQP(대응각)이므로 ∠APS + ∠BPQ = 90°. 직선 AB 위에서 ∠SPQ = 180° - 90° = 90°.
네 각이 모두 90°이고 네 변이 모두 같으므로 PQRS는 정사각형이다.

🧠 풀이 전략: 귀퉁이에 생기는 네 개의 직각삼각형이 서로 '같은 모양'임을 SAS로 먼저 보장한다. 합동에서 나오는 대응변으로 PQRS의 네 변이 같음을, 대응각의 합이 90°임으로부터 각이 90°임을 이끌어낸다. '합동으로 한 번에 두 성질(변 길이·각)'을 잡는 전략이다.

💡 이 그림은 '원래 정사각형 안에 90° 회전시킨 정사각형'을 그리는 장치다. a를 0에서 s까지 움직이면 안쪽 정사각형이 점점 줄다가 커지며, 중간에 넓이가 최소가 되는 순간이 존재한다.

Q31 원·부채꼴 심화

반지름의 길이가 6cm인 원 O에 내접하는 정삼각형 ABC가 있다. 변 AB를 현으로 하는 활꼴(원 안에서 현 AB와 호 AB로 둘러싸인 영역) 중 점 C를 포함하지 않는 쪽 활꼴의 넓이를 구하시오.



①) ① $12\pi - 9\sqrt{3}$ cm²

②) ② $12\pi - 18$ cm²

③) ③ $6\pi - 9\sqrt{3}$ cm²

④) ④ 12π cm²

🎯 **정답: ① $12\pi - 9\sqrt{3}$ cm²**

📖 1단계: 원에 내접하는 정삼각형의 한 변에 대한 중심각은 $360° \div 3 = 120°$이다. 따라서 $\angle AOB = 120°$.

2단계: 부채꼴 OAB의 넓이 = $\pi \times 6^2 \times (120/360) = 36\pi \times (1/3) = 12\pi$ cm².

3단계: 삼각형 OAB의 넓이 = $(1/2) \times OA \times OB \times \sin(\angle AOB) = (1/2) \times 6 \times 6 \times \sin 120° = 18 \times (\sqrt{3}/2) = 9\sqrt{3}$ cm². 활꼴은 부채꼴에서 삼각형을 뺀 부분이므로 $12\pi - 9\sqrt{3}$ cm².

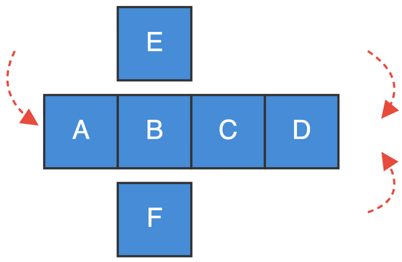
🧠 풀이 전략: 활꼴 넓이는 '부채꼴 - 삼각형'으로 분해한다. 핵심은 한 변에 대한 중심각을 정확히 구하는 것(내접 정삼각형이면 120°). 삼각형 OAB는 이등변이므로 sin 공식 없이도 수선을 내려 분해할 수 있지만 sin을 쓰면 빠르다.

💡 내접 정다각형의 한 변에 대한 중심각은 정n각형이면 항상 360°/n이다. 정육각형일 때는 60°가 되어 삼각형 OAB가 정삼각형이 되는 특별한 성질이 나타난다.

Q32 입체 추론

다음은 정육면체의 십자형 전개도로, 여섯 면에 A, B, C, D, E, F 라벨이 붙어 있다. 가로로 A-B-C-D의 네 면이 붙어 있고, 면 B의 위쪽에 E, 면 B의 아래쪽에 F가 붙어 있다. 이 전개도를 접어 정육면체를 만들었을 때, 면 A와 서로 마주 보는 면은 무엇인가?

정육면체 전개도



점선: 접는 방향

①) ① 면 B

②) ② 면 C

③) ③ 면 D

④) ④ 면 E

🎯 **정답: ② 면 C**

📖 1단계: 가로로 이어진 네 면 A-B-C-D를 접으면 이들은 '옆면 띠'를 이루어 정육면체의 네 옆면이 된다. 이때 띠에서 서로 마주 보는 면은 '두 칸 떨어진' 면들이다.
2단계: 옆면 띠 A-B-C-D에서 A와 마주 보는 면은 A로부터 두 칸 떨어진 면이므로 C가 된다. 마찬가지로 B와 마주 보는 면은 D이다.
3단계: 면 B의 위쪽 E는 접으면 윗면이 되고, 아래쪽 F는 아랫면이 되어 E와 F가 서로 마주 본다. 따라서 정리하면 (A, C), (B, D), (E, F)가 각각 마주 보는 면의 쌍이다. 답은 C.

🧠 풀이 전략: 전개도 문제는 '접었을 때 같은 꼭짓점에 모이는 점'과 '마주 보는 면의 쌍'을 규칙으로 바꿔 풀어야 한다. 일렬로 이어진 네 면은 옆면 띠이므로 '두 칸 건너가 마주 본다'는 규칙을 기억하면 빠르다.

💡 정육면체 전개도는 11가지 서로 다른 모양이 존재한다. 어떤 전개도이든 마주 보는 면의 쌍은 그대로 유지되지만, 배치에 따라 찾는 방식이 달라진다.

Q33 자료·경시 퍼즐

어떤 학교의 한 학년에 최소한 몇 명의 학생이 있어야, '생일이 같은 달인 학생이 적어도 3명 이상인 달이 반드시 존재함'을 보장할 수 있는가? (단, 생일이 어느 달에 있는지는 1월부터 12월까지 중 하나이다.)

①) ① 13명
②) ② 24명
③) ③ 25명
④) ④ 36명

🎯 **정답: ③ 25명**

📖 1단계 (반례로 경계 찾기): 만약 각 달에 많아야 2명씩만 있다면 전체 학생 수는 최대 2 × 12 = 24명이다. 즉 24명까지는 '각 달에 2명 이하'로 배치가 가능해서 3명 이상인 달이 없을 수도 있다.
2단계 (25명이면 피할 수 없음): 25명이 있다면 비둘기집 원리에 의해, 12개의 달에 학생을 나누어 넣을 때 어떤 달에는 반드시 ⌈25/12⌉ = 3명 이상의 학생이 몰릴 수밖에 없다.
3단계: 24명으로는 반드시 보장할 수 없고, 25명이면 반드시 보장된다. 따라서 답은 25명.

🧠 풀이 전략: '반드시 보장'을 묻는 문제는 (1) 보장이 깨지지 않는 최대 인원을 먼저 찾고(각 달 2명씩이면 24명), (2) 거기에 1을 더한다는 전략을 쓴다. 이것이 비둘기집 원리의 표준 적용법이다.

💡 비둘기집 원리는 단순해 보이지만 '같은 생일 추측(같은 반 23명이면 생일이 같은 두 사람이 있을 확률이 50%를 넘는다)'과 같은 확률 문제, 암호학의 해시 충돌 분석 등에 핵심적으로 쓰인다.

Q34 자료·경시 퍼즐

세 사람 A, B, C가 있다. 이들 중 정직한 사람은 반드시 참말만 하고, 거짓말쟁이는 반드시 거짓말만 한다. 세 사람 중 '거짓말쟁이는 정확히 한 명'이라고 알려져 있다. 세 사람이 각각 다음과 같이 말했을 때, 거짓말쟁이가 누구인지 논리적으로 판단하시오.
A: "나는 거짓말쟁이가 아니다."
B: "A는 거짓말쟁이이다."
C: "B는 거짓말쟁이이다."

①) ① A
②) ② B
③) ③ C
④) ④ 알 수 없다

🎯 **정답: ② B**

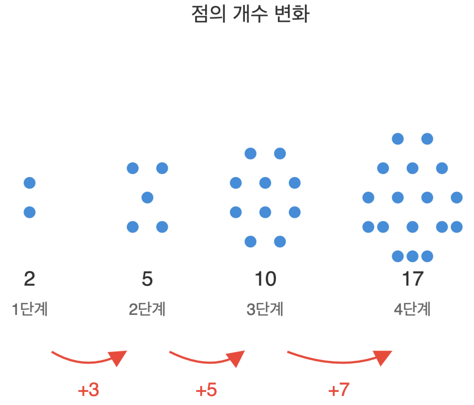
📖 1단계 (A가 거짓말쟁이라 가정): A의 말 '나는 거짓말쟁이가 아니다'는 거짓이 된다(일관). 그러면 B의 말 'A는 거짓말쟁이다'는 참이므로 B는 정직. C의 말 'B는 거짓말쟁이다'는 거짓이므로 C도 거짓말쟁이. 거짓말쟁이가 2명이 되어 조건 위반. 모순.
2단계 (B가 거짓말쟁이라 가정): B의 말 'A는 거짓말쟁이다'는 거짓이므로 A는 정직. A의 말 '나는 거짓말쟁이가 아니다'는 참(일관). C의 말 'B는 거짓말쟁이다'는 참이므로 C는 정직. 거짓말쟁이는 정확히 1명(B). 조건 만족.
3단계 (C가 거짓말쟁이라 가정): C의 말 'B는 거짓말쟁이다'는 거짓이므로 B는 정직. B의 말 'A는 거짓말쟁이다'는 참이므로 A는 거짓말쟁이. 그러면 A와 C 두 명이 거짓말쟁이가 되어 조건 위반. 모순. 결국 성립하는 경우는 2단계뿐이므로 거짓말쟁이는 B이다.

🧠 풀이 전략: 참/거짓이 섞인 논리 퍼즐은 '누가 거짓말쟁이인지'를 한 명씩 가정(case 분석)한 뒤, 각 진술의 참·거짓을 따져 '조건(거짓말쟁이가 정확히 한 명)'과 모순 없이 일관되는 경우만 남기는 전략으로 푼다.

💡 이런 형태의 논리 퍼즐을 '기사와 악당(Knights and Knaves)' 문제라 부르며, 수학자 레이몬드 스멀리언이 수많은 변형을 만들어 유명해졌다.

Q35 문자와 식 심화

다음과 같은 규칙으로 점을 배치한다. 1단계에는 점 2개, 2단계에는 5개, 3단계에는 10개, 4단계에는 17개가 놓인다. n단계에 놓이는 점의 개수를 n에 대한 식으로 나타내고, 10단계에 놓이는 점의 개수를 구하시오.



🎯 **정답: n단계 점의 개수 = $n^2 + 1$, 10단계 = 101개**

📖 1단계: 단계별 점의 개수는 2, 5, 10, 17. 연속한 두 단계의 차(계차)를 구하면 5-2=3, 10-5=5, 17-10=7. 계차가 3, 5, 7, ...로 2씩 증가하는 홀수 수열이다.
2단계: n단계 점의 개수를 a_n이라 하면 $a_n = a_1 + (3 + 5 + 7 + ... + (2n-1))$. 괄호 안은 첫째항 3, 마지막항 (2n-1), 항 수 (n-1)인 등차수열의 합이므로 $= (n-1)(3 + 2n-1)/2 = (n-1)(2n+2)/2 = (n-1)(n+1) = n^2 - 1$.
3단계: 따라서 $a_n = 2 + (n^2 - 1) = n^2 + 1$. 검증하면 $a_1=2$, $a_2=5$, $a_3=10$, $a_4=17$로 모두 맞는다. 10단계: $a_{10} = 100 + 1 = 101$개.

🧠 풀이 전략: 계차수열 문제의 전략: (1) 연속한 항의 차이를 먼저 구한다, (2) 차이가 일정하지 않다면 '차이의 수열'이 등차인지 확인한다, (3) $a_n = a_1 +$ (차이의 합)으로 일반항을 유도한다. 여기서는 차이가 홀수 등차이므로 합을 공식으로 빠르게 계산할 수 있다.

💡 $n^2 + 1$ 형태의 수는 '센트럴 제곱수에 1 더한 수'로, $1^2+1=2$, $2^2+1=5$, $3^2+1=10$, $4^2+1=17$, $5^2+1=26$ ... 처럼 퍼즐에 자주 등장한다.

Q36 일차방정식 활용

1000원권 지폐와 500원권 동전을 섞어서 정확히 12000원을 만들려고 한다. 1000원권과 500원권을 각각 최소 한 장(개) 이상 사용한다고 할 때, 가능한 '(1000원권 장수, 500원권 개수)' 조합은 모두 몇 가지인지 구하시오.

①) ① 10가지
②) ② 11가지
③) ③ 12가지
④) ④ 23가지

🎯 **정답: ② 11가지**

📖 1단계 (식 세우기): 1000원권을 x장, 500원권을 y개 사용한다고 하면 $1000x + 500y = 12000$. 양변을 500으로 나누면 $2x + y = 24$. 조건은 $x \geq 1$, $y \geq 1$이고 x, y는 자연수.
2단계 (해의 범위): $y = 24 - 2x$ 이므로 $y \geq 1$이 되려면 $24 - 2x \geq 1$, 즉 $x \leq 11.5$. x는 자연수이므로 $x \leq 11$. 또 $x \geq 1$. 따라서 x는 1, 2, 3, ..., 11 중 하나.
3단계 (개수 세기): x가 가질 수 있는 값은 11개이고, 각 x에 대해 y가 자연수로 하나씩 결정되므로 해의 조합은 정확히 11가지이다. (예: x=1일 때 y=22, x=11일 때 y=2. x=12일 때 y=0이므로 제외)

🧠 풀이 전략: 미지수가 두 개이고 식이 하나인 부정방정식은 '자연수 해의 개수'를 묻는 형태로 자주 나온다. 전략: (1) 계수가 큰 쪽의 변수 범위를 먼저 제한, (2) 다른 변수는 그에 따라 결정, (3) 경계값 x=0 또는 y=0이 조건에 어긋나는지를 반드시 점검(함정). '12가지'라고 답하기 쉬우니 x=12, y=0 제외에 주의.

💡 부정방정식의 자연수 해의 개수는 미지수의 계수에만 영향을 받는 것이 아니라 '상수항'과 '최솟값 조건'에 의해서도 바뀐다. 조건을 약간만 바꿔도 답이 크게 달라진다.

Q37 정수·유리수 추론

세 정수 a, b, c에 대하여 $|a-2| + |b+3| + |c-5| = 0$ 이 성립할 때, $a \cdot b \cdot c$ 의 값은?

①) ① -30

②) ② -15

③) ③ 15

④) ④ 30

🎯 **정답: ①**

📖 1단계: 절댓값은 항상 0 이상이다. 즉 $|a-2| \ge 0$, $|b+3| \ge 0$, $|c-5| \ge 0$.

2단계: 0 이상인 세 수의 합이 0이 되려면 각각이 모두 0이어야 한다.

3단계: 따라서 $a-2=0$, $b+3=0$, $c-5=0$ 이므로 $a=2$, $b=-3$, $c=5$.

4단계: $a \cdot b \cdot c = 2 \cdot (-3) \cdot 5 = -30$.

🧠 풀이 전략: '절댓값의 합 = 0' 형태는 각 절댓값이 모두 0이 되어야 한다는 성질을 이용한다. 절댓값은 음수가 될 수 없으므로 합이 0이려면 모든 항이 0이어야 한다는 논리로 접근.

💡 이 '비음수 합이 0이면 각각이 0' 원리는 고등학교에서 배우는 제곱의 합 풀이에도 똑같이 쓰인다.

Q38 문자와 식 심화

현재 아버지의 나이는 아들 나이의 4배이다. 8년 후에는 아버지의 나이가 아들 나이의 2배보다 4살 많아진다. 현재 아들의 나이는?

①) ① 6살

②) ② 10살

③) ③ 12살

④) ④ 14살

🎯 **정답: ① 6살**

📖 1단계: 현재 아들의 나이를 x살이라 하면 아버지의 나이는 4x살.

2단계: 8년 후 아들은 $(x+8)$살, 아버지는 $(4x+8)$살.

3단계: '아버지가 아들의 2배보다 4살 많다'이므로 $4x+8 = 2(x+8)+4$.

4단계: $4x+8 = 2x+16+4 = 2x+20 \rightarrow 2x = 12 \rightarrow x = 6$.

5단계: 검산: 현재 아들 6살, 아버지 24살. 8년 후 아들 14살, 아버지 32살이고 $2 \times 14+4 = 32$로 조건을 만족한다. 따라서 현재 아들의 나이는 6살. 정답 ① 6살.

🧠 풀이 전략: '~년 후'는 모두에게 동일한 시간이 흐른다는 점이 핵심. 미지수 하나로 아버지와 아들 둘의 현재 나이를 표현(4배 관계)한 뒤, 8년 후 시점에서 식을 세운다. 함정: '2배보다 4살 많다'를 $2x+8 \cdot 2+4=4x+8$ 처럼 괄호를 빠뜨리지 않도록 주의.

💡 나이 문제에서 시간이 흘러도 '두 사람 나이의 차'는 변하지 않는다. 이 불변량을 쓰면 훨씬 빠르게 풀린다.

Q39 일차방정식 활용

A, B 두 사람이 함께 하면 6일 만에 끝낼 수 있는 일이 있다. A 혼자 4일 동안 일한 뒤 나머지를 B가 혼자 마무리했더니 총 12일이 걸렸다. B 혼자 이 일을 하면 며칠이 걸리는가?

①) ① 10일

②) ② 12일

③) ③ 15일

④) ④ 18일

🎯 **정답: ②**

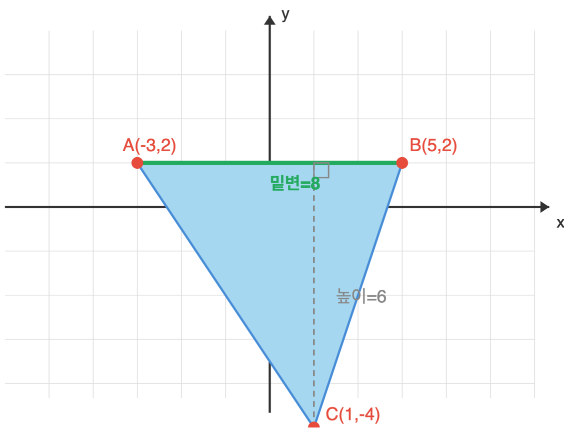
📖 1단계: A 혼자 하루에 하는 일의 양을 $\frac{1}{a}$, B 혼자 하루에 하는 일의 양을 $\frac{1}{b}$ 이라 하자. 함께 6일이므로 $6(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})=1$, 즉 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{6}$.
2단계: A 혼자 4일 + B 혼자 (12-4)=8일. 식: $\frac{4}{a}+\frac{8}{b}=1$.
3단계: 첫 식에서 $\frac{1}{a}=\frac{1}{6}-\frac{1}{b}$ 를 둘째 식에 대입: $4(\frac{1}{6}-\frac{1}{b})+\frac{8}{b}=1 \to \frac{2}{3}+\frac{4}{b}=1 \to \frac{4}{b}=\frac{1}{3} \to b=12$.
4단계: 따라서 B 혼자 하면 12일이 걸린다.

🧠 풀이 전략: '일률' 문제는 전체 일의 양을 1로 놓고 각자 하루 일량을 분수로 표현하는 것이 핵심 전략. 두 미지수를 두고 두 식을 세워 연립(대입법)한다. 함정: B가 일한 일수를 12일이 아닌 8일로 정확히 파악해야 한다.

💡 일률 문제는 '물탱크에 물 채우기', '관으로 물 빼기' 문제와 수학적으로 동일한 구조다.

Q40 좌표평면 응용

좌표평면 위 세 점 A(-3, 2), B(5, 2), C(1, -4) 를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 넓이는?



①) ① 20

②) ② 24

③) ③ 28

④) ④ 32

🎯 **정답: ②**

📖 1단계: A(-3,2)와 B(5,2)는 y좌표가 같으므로 AB는 x축에 평행한 선분. 밑변 AB의 길이 = 5-(-3) = 8.
2단계: C(1,-4)에서 직선 AB(y=2)까지의 수직거리가 높이. 높이 = |2-(-4)| = 6.
3단계: 삼각형 넓이 = $\frac{1}{2}$ × 밑변 × 높이 = $\frac{1}{2}$ × 8 × 6 = 24.

🧠 풀이 전략: 좌표평면 위 삼각형 넓이는 '좌표가 같은 두 점'을 찾아 축에 평행한 변을 밑변으로 삼는 것이 핵심. A와 B의 y좌표가 2로 같으므로 AB를 밑변, C의 y좌표와의 차이를 높이로 잡으면 공식에 바로 대입할 수 있다. 함정: 두 점 거리공식을 쓸 필요 없이 좌표차로 바로 밑변·높이를 구한다.

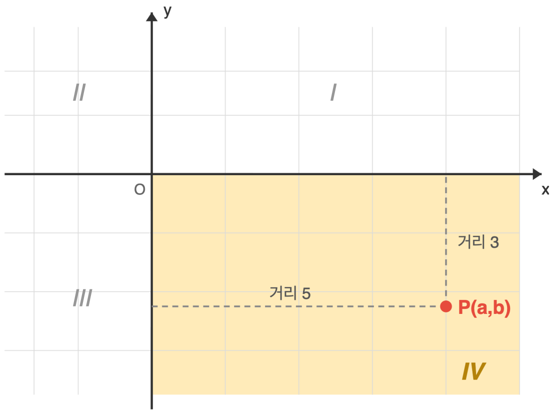
💡 세 꼭짓점 좌표가 주어진 삼각형의 넓이는 고등학교에서 '신발끈 공식'으로 바로 계산할 수 있다.

📝 중1 수학 심화

총 40문제 · 문제와 정답·풀이 포함

Q41 좌표평면 응용

좌표평면 위의 점 P(a, b)가 x축 아래에 있고 y축의 오른쪽에 있다. 또한 점 P와 x축 사이의 거리가 3, y축 사이의 거리가 5일 때, a+b의 값은?



①) ① 2

②) ② -2

③) ③ 8

④) ④ -8

🎯 **정답:** ①

📖 1단계: 점 P가 x축 아래에 있으므로 b<0, y축 오른쪽에 있으므로 a>0 (제4사분면).
2단계: x축과의 거리가 3이면 |b|=3이고 b<0이므로 b=-3.
3단계: y축과의 거리가 5이면 |a|=5이고 a>0이므로 a=5.
4단계: a+b = 5+(-3) = 2.

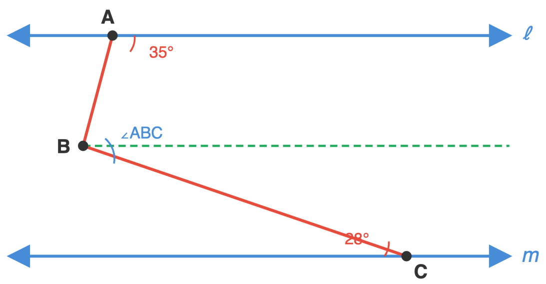
🧠 풀이 전략: 좌표평면 문제는 '위치(사분면)로 부호를 결정', '거리는 절댓값으로 해석' 두 가지를 분리해서 접근. 함정: x축까지의 거리는 |y좌표|, y축까지의 거리는 |x좌표|임을 헷갈리기 쉽다(축 이름과 좌표 이름이 반대).

💡 'x축까지의 거리 = |y|' 는 축이 반대로 보여 헷갈리지만, x축은 y=0인 선이므로 y값이 곧 그 선까지의 거리다.

Q42 도형 성질 추론

그림과 같이 두 직선 ℓ, m이 평행하다. ∠A = 35°, ∠C = 28° 일 때, ∠ABC의 크기는?

평행선 사이 꺾은선 각도=?



①) ① 53°

②) ② 63°

③) ③ 73°

④) ④ 83°

🎯 **정답: ②**

📖 1단계: 점 B를 지나고 두 평행선 ℓ, m에 평행한 보조선을 긋는다. 이 보조선은 ∠ABC를 위쪽 각과 아래쪽 각 두 부분으로 나눈다.

2단계: ℓ과 보조선이 평행하므로 엇각에 의해 보조선 위쪽 각 = ∠A = 35°.

3단계: m과 보조선이 평행하므로 엇각에 의해 보조선 아래쪽 각 = ∠C = 28°.

4단계: 따라서 ∠ABC = 35° + 28° = 63°.

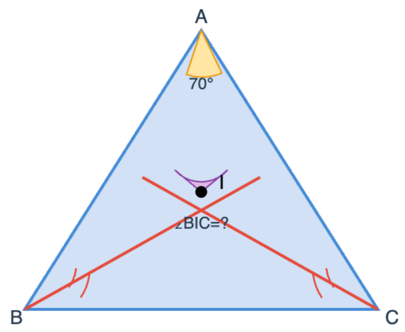
🧠 풀이 전략: 평행선과 꺾은선 문제는 '꺾인 점에서 평행한 보조선 긋기'가 필승 전략. 보조선을 그으면 꺾임각이 두 엇각의 합으로 분리된다. 함정: 엇각과 동위각을 혼동하지 말 것.

💡 이 유형을 확장하면 '꺾은선이 여러 번 꺾여도 위쪽 각들의 합 = 아래쪽 각들의 합' 이라는 일반 공식이 나온다.

Q43 도형 성질 추론

삼각형 ABC에서 ∠B의 이등분선과 ∠C의 이등분선이 만나는 점을 I 라 하자. ∠A = 70° 일 때, ∠BIC 의 크기는?

삼각형의 내심과 ∠BIC



①) ① 110°

②) ② 115°

③) ③ 120°

④) ④ 125°

🎯 **정답: ④**

📖 1단계: 삼각형 ABC의 내각의 합은 180°이므로 ∠B + ∠C = 180° - 70° = 110°.

2단계: BI, CI가 각각 ∠B, ∠C의 이등분선이므로 ∠IBC = $\frac{1}{2}$∠B, ∠ICB = $\frac{1}{2}$∠C.

3단계: 삼각형 IBC에서 내각의 합이 180°이므로 ∠BIC = 180° - ∠IBC - ∠ICB = 180° - $\frac{1}{2}$(∠B+∠C) = 180° - $\frac{1}{2}$·110° = 180° - 55° = 125°.

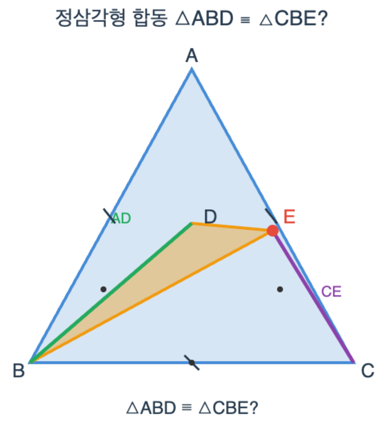
4단계: 일반 공식으로는 ∠BIC = 90° + $\frac{1}{2}$∠A = 90° + 35° = 125°.

🧠 풀이 전략: '일부 각만 주어졌을 때는 합으로 묶어서 접근'하는 전략. ∠B와 ∠C를 개별로 구할 수 없지만 '합'은 알 수 있고, 이등분선 문제는 '반으로 나눈 두 각의 합'만 필요하므로 정확히 이 전략이 먹힌다. 작은 삼각형 IBC의 내각의 합을 이용.

💡 이 문제의 결과 '∠BIC = 90° + $\frac{1}{2}$∠A' 는 삼각형의 '내심' 각도 공식으로 유명하며, 세 각의 이등분선은 한 점(내심)에서 만난다.

Q44 합동 증명 기초

그림과 같이 △ABC와 △DBE가 모두 정삼각형이고 점 E는 변 AC 위에 있다. 선분 AD와 선분 CE에 대하여 참인 것을 고르시오.



①) ① AD = CE 이고 이유는 SSS 합동

②) ② AD = CE 이고 이유는 SAS 합동(△ABD ≡ △CBE)

③) ③ AD ≠ CE 이지만 ∠ABD = ∠CBE

④) ④ 주어진 조건만으로는 알 수 없다

🎯 **정답: ②**

📖 1단계: △ABC가 정삼각형이므로 AB = CB (①), ∠ABC = 60°.

2단계: △DBE가 정삼각형이므로 DB = EB (②), ∠DBE = 60°.

3단계: ∠ABD = ∠ABC - ∠DBC = 60° - ∠DBC, ∠CBE = ∠DBE - ∠DBC = 60° - ∠DBC. 따라서 ∠ABD = ∠CBE (③).

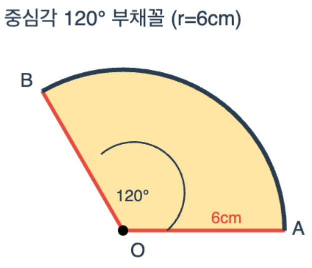
4단계: ①, ②, ③에 의해 △ABD와 △CBE는 두 변의 길이와 그 끼인 각이 같으므로 SAS 합동(△ABD ≡ △CBE). 대응변이므로 AD = CE.

🧠 풀이 전략: 정삼각형 두 개가 공통점을 공유하는 문제는 '60°에서 공통각을 빼면 같은 각이 만들어진다'는 회전 대응 구조가 핵심. '같은 각 - 같은 각 = 같은 각' 논리로 끼인각이 같음을 보이고, 두 정삼각형에서 각각 같은 변을 가져와 SAS 합동을 완성한다. 함정: ①은 변이 세 개가 아니므로 SSS로 설명 불가.

💡 이 그림을 90° 회전시켜 생각하면 '한 정삼각형을 다른 정삼각형 주위로 60° 회전시킨 것'과 같다. 회전은 길이를 보존하므로 AD=CE가 당연하다.

Q45 원·부채꼴 심화

반지름 6 cm, 중심각 120°인 부채꼴이 있다. 이 부채꼴의 호의 길이를 ℓ, 넓이를 S 라 할 때 $S = \frac{1}{2}r\ell$ 임을 이용하여 S 의 값을 구하면? (단, r은 반지름)



①) ① 6π cm²

②) ② 9π cm²

③) ③ 12π cm²

④) ④ 24π cm²

🎯 **정답: ③**

📖 1단계: 전체 원 둘레는 2π·6 = 12π cm. 중심각 120°는 360°의 $\frac{1}{3}$.

2단계: 호의 길이 ℓ = 12π × $\frac{120}{360}$ = 12π × $\frac{1}{3}$ = 4π cm.

3단계: 주어진 공식 $S = \frac{1}{2}r\ell$ 을 이용하면 S = $\frac{1}{2}$ × 6 × 4π = 12π cm².

4단계: 검증: 원의 넓이 π·6² = 36π 의 $\frac{1}{3}$ = 12π. 일치.

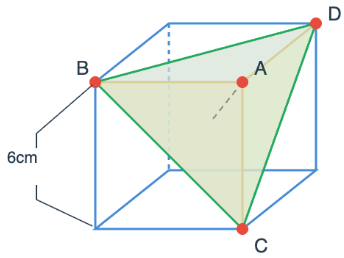
🧠 풀이 전략: 부채꼴 문제는 '중심각이 전체의 몇 분의 몇인가'를 먼저 따지는 것이 핵심. 여기선 120°/360° = 1/3. 호의 길이를 구한 뒤 제시된 공식에 대입해 넓이를 얻고, 원 넓이 공식으로 검증한다. 함정: π 를 빼먹거나 지름과 반지름을 헷갈리지 말 것.

💡 공식 $S = \frac{1}{2}r\ell$ 은 '부채꼴을 무한히 얇게 잘라 삼각형처럼 펼치면 밑변 ℓ, 높이 r의 삼각형 모양'이 된다는 직관에서 나온다.

Q46 입체 추론

한 모서리의 길이가 6 cm인 정육면체가 있다. 이 정육면체에서 한 꼭짓점 A와 이웃한 세 꼭짓점 B, C, D를 잇는 삼각형 BCD를 자르면 삼각뿔 A-BCD가 나온다. 이 삼각뿔의 부피는?

정육면체에서 잘라낸 삼각뿔 A-BCD



삼각뿔 A-BCD 의 부피 = ?

①) ① 18 cm³

②) ② 27 cm³

③) ③ 36 cm³

④) ④ 54 cm³

🎯 **정답: ③**

📖 1단계: 꼭짓점 A에서 세 모서리가 서로 수직으로 만나므로, A를 꼭짓점으로 하고 AB, AC, AD를 세 모서리로 삼는 삼각뿔은 '직각삼각뿔'이다. AB=AC=AD=6 cm.

2단계: AB를 높이로 보면 밑면은 직각삼각형 ACD이다. 밑면의 넓이 = $\frac{1}{2}$ × AC × AD = $\frac{1}{2}$ × 6 × 6 = 18 cm².

3단계: 삼각뿔 부피 = $\frac{1}{3}$ × 밑넓이 × 높이 = $\frac{1}{3}$ × 18 × 6 = 36 cm³.

4단계: 검증: 정육면체 부피 216 cm³ 의 $\frac{1}{6}$ = 36. 일치.

🧠 풀이 전략: 정육면체의 한 꼭짓점에서 만나는 세 모서리가 서로 수직임을 이용하는 것이 핵심. 밑면을 정삼각형 BCD가 아니라 '직각삼각형 ACD', 높이를 AB로 잡으면 계산이 훨씬 간단해진다. 함정: 정삼각형 BCD를 밑면으로 삼고 A에서의 수선 길이를 구하려 하면 훨씬 복잡해진다.

💡 정육면체의 꼭짓점 8개 중에서 이런 방식으로 자르면 삼각뿔 6개를 떼어낼 수 있고, 가운데에는 정팔면체 모양이 남는다.

Q47 자료·경시 퍼즐

어느 학급 학생 10명의 수학 시험 평균이 72점이었다. 그런데 한 학생의 점수를 59점으로 잘못 기재했고 실제로는 95점이었다. 올바른 평균은?

①) ① 74.4점

②) ② 75.6점

③) ③ 76.0점

④) ④ 78.0점

🎯 **정답: ②**

📖 1단계: 10명의 (잘못된) 총점 = 72 × 10 = 720점.

2단계: 한 학생의 점수를 59점 대신 95점으로 바로잡아야 하므로, 보정액 = 95 - 59 = 36점 증가.

3단계: 올바른 총점 = 720 + 36 = 756점.

4단계: 올바른 평균 = 756 ÷ 10 = 75.6점.

🧠 풀이 전략: 평균 보정 문제는 '총점의 변화량'에만 집중하면 간단해진다. 개별 점수를 모두 바꿀 필요 없이 '실제값 - 잘못된값' 만큼 총점이 변하고, 이를 인원수로 나눈 값만큼 평균이 변한다. 핵심 전략: 평균 × 인원수 = 총점 변환.

💡 평균의 변화량은 항상 '(바꾼 값의 차) ÷ 인원수'와 같다. 이번 경우 36÷10 = 3.6점 만큼 평균이 올라가서 72+3.6 = 75.6이 된다.

Q48 자료·경시 퍼즐

1부터 20까지의 자연수가 적힌 카드 20장이 상자에 들어 있다. 눈을 가리고 카드를 꺼낼 때, 3의 배수가 적힌 카드를 반드시 2장 이상 뽑으려면 최소 몇 장을 꺼내야 하는가?

①) ① 14장

②) ② 16장

③) ③ 19장

④) ④ 20장

🎯 **정답: ② 16장**

📖 1단계: 1부터 20까지 중 3의 배수는 3, 6, 9, 12, 15, 18로 모두 6개. 3의 배수가 아닌 수는 20 - 6 = 14개.
2단계: 최악의 경우를 가정한다. 3의 배수가 아닌 카드 14장을 모두 먼저 뽑아도 3의 배수는 아직 0장이다.
3단계: 15장째에 비로소 3의 배수가 처음 나올 수 있으므로, 15장만으로는 3의 배수가 1장뿐일 수 있어 '2장 이상'을 보장하지 못한다.
4단계: 16장을 뽑으면 3의 배수가 아닌 14장을 다 뽑았더라도 나머지 2장은 반드시 3의 배수이므로, 어떤 경우에도 3의 배수가 2장 이상 포함된다.
5단계: 따라서 최소 16장이 필요하다. 정답 ② 16장.

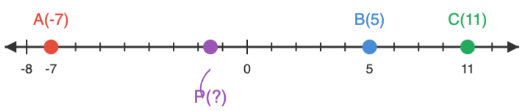
🧠 풀이 전략: 비둘기집 원리 역형 문제: '최악의 운을 가정하고 그 다음에도 조건이 성립하게 만드는 최소 개수'를 구한다. '3의 배수가 아닌 카드' 가 비둘기집의 '다른 상자'에 해당하며, 모두 뽑힌 뒤에야 목표 카드가 나오기 시작한다는 논리.

💡 이 원리는 서랍에서 어둠 속에 양말 짝을 맞출 때도 쓴다. 양말이 n색이면 최악의 경우 n+1개를 꺼내야 같은 색 한 짝이 보장된다.

Q49 정수·유리수 추론

수직선 위에 세 점 A, B, C가 있고 A의 좌표는 -7, C의 좌표는 11이다. 점 B는 AC를 2:1로 내분하는 점이고, 점 P는 수직선 위를 움직이는 점이다. |PA| + |PB| + |PC|의 최솟값을 구하시오.

수직선 위의 세 점과 점 P



IPAI + IPBI + IPCI 의 최솟값 ?

①) ① 16

②) ② 18

③) ③ 20

④) ④ 22

🎯 **정답: ② 18**

📖 1단계: 점 B의 좌표 구하기. AC를 2:1로 내분하므로 B = (-7) + (2/3)×{11-(-7)} = -7 + 12 = 5. 2단계: 세 점을 수직선에 놓으면 A(-7), B(5), C(11). 세 점에서의 거리의 합 |PA|+|PB|+|PC|는 P가 중간값(중앙값)에 있을 때 최소가 된다. 중앙값은 B(5). 3단계: P=5일 때 |5-(-7)| + |5-5| + |5-11| = 12 + 0 + 6 = 18.

🧠 풀이 전략: 이 문제는 '거리의 합 최소화' 전략으로 접근. 여러 점까지의 거리의 합은 홀수 개의 점이 있을 때 중앙값에서 최소가 된다는 성질을 활용.

💡 n개의 점까지의 거리의 합은 n이 홀수면 중앙값에서, 짝수면 중앙 두 점 사이 어디서든 최소가 된다.

Q50 문자와 식 심화

어떤 수 x에 대해 '[x]'는 x를 넘지 않는 최대 정수를 나타낸다(예: [3.7]=3, [-2.3]=-3). [2.5] + [-1.8] + [4] + [-0.5]의 값은?

①) ① 1

②) ② 2

③) ③ 3

④) ④ 4

🎯 **정답: ③ 3**

📖 1단계: [2.5]는 2.5를 넘지 않는 최대 정수이므로 2.
2단계: [-1.8]은 -1.8을 넘지 않는 최대 정수. -2 ≤ -1.8 < -1이므로 [-1.8] = -2 (함정: -1이 아님).
3단계: [4] = 4.
4단계: [-0.5]는 -1 ≤ -0.5 < 0이므로 [-0.5] = -1.
5단계: 합 = 2 + (-2) + 4 + (-1) = 3. 정답 ③ 3.

🧠 풀이 전략: 이 문제는 '가우스 기호의 정의' 전략으로 접근. 음수일 때 '넘지 않는'의 의미에 주의해야 한다. 예를 들어 -1.8보다 크지 않은 최대 정수는 -1이 아니라 -2이다.

💡 가우스 기호(floor function)는 컴퓨터 프로그래밍의 정수 나눗셈에서도 쓰인다.

Q51 일차방정식 활용

5%의 소금물 200g과 12%의 소금물 300g을 섞은 후, 물을 증발시켜 농도가 15%가 되게 하려고 한다. 증발시켜야 할 물의 양은?

①) ① 180g

②) ② 약 193.3g

③) ③ 220g

④) ④ 240g

⑤) ⑤ 260g

🎯 **정답: ② 약 193.3g**

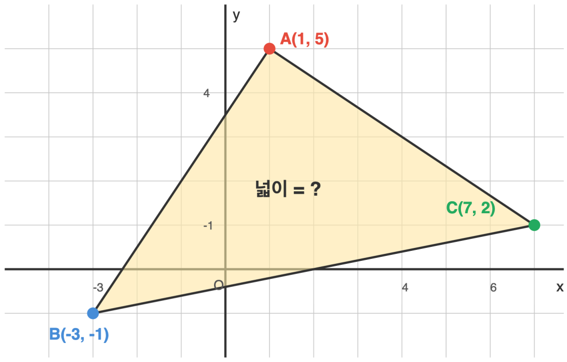
📖 1단계: 섞은 후 소금의 양을 구한다. 5% 200g의 소금 = 200×0.05 = 10g, 12% 300g의 소금 = 300×0.12 = 36g. 총 소금 = 46g.
2단계: 섞은 직후 소금물 총량은 200+300 = 500g.
3단계: 물 xg을 증발시켜도 소금은 그대로 46g이고 소금물 총량은 (500-x)g. 농도 15% 조건: 46/(500-x) = 15/100.
4단계: 500-x = 46÷0.15 = 920/3 ≈ 306.7 → x = 500 - 920/3 = 580/3 ≈ 193.3g.
5단계: 따라서 증발시켜야 할 물의 양은 약 193.3g(정확히 580/3 g). 정답 ② 약 193.3g.

🧠 풀이 전략: 이 문제는 '소금 보존 법칙' 전략으로 접근. 물을 증발시켜도 소금의 양은 변하지 않는다는 점이 핵심.

💡 바닷물에서 소금을 얻는 염전도 이 원리를 이용한다.

Q52 좌표평면 응용

좌표평면 위 세 점 A(1, 5), B(-3, -1), C(7, 2)를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 있다. 이 삼각형의 넓이를 구하시오.



①) ① 19

②) ② 21

③) ③ 24

④) ④ 25

🎯 **정답: ③ 24**

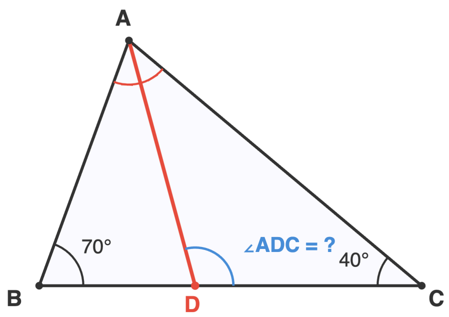
📖 1단계: 삼각형 꼭짓점의 좌표를 이용한 넓이 공식(신발끈 공식) 활용. 넓이 = $(1/2)|x_1(y_2-y_3) + x_2(y_3-y_1) + x_3(y_1-y_2)|$. 2단계: A(1,5), B(-3,-1), C(7,2) 대입. = (1/2)|1×(-1-2) + (-3)×(2-5) + 7×(5-(-1))|. 3단계: = (1/2)|1×(-3) + (-3)×(-3) + 7×6| = (1/2)|-3 + 9 + 42| = (1/2)×48 = 24. 4단계(검산): 벡터로 확인하면 AB=(-4, -6), AC=(6, -3)의 외적 크기 = |(-4)×(-3) - (-6)×6| = |12 + 36| = 48, 넓이 = 48/2 = 24. 따라서 정답은 ③ 24.

🧠 풀이 전략: 이 문제는 '신발끈 공식' 또는 '외접 직사각형에서 빼기' 전략으로 접근. 좌표가 주어진 삼각형의 넓이는 두 가지 방법 모두 가능하다.

💡 신발끈 공식은 좌표를 신발끈 엮듯 교차 곱셈해서 이름 붙었다.

Q53 도형 성질 추론

오른쪽 그림과 같이 △ABC의 꼭짓점 A에서 내각의 이등분선을 그어 BC와 만나는 점을 D라 하자. ∠B = 70°, ∠C = 40°일 때, ∠ADC의 크기는?



①) ① 95°
②) ② 100°
③) ③ 105°
④) ④ 110°

🎯 **정답: ③ 105°**

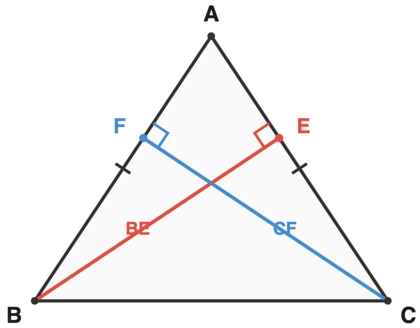
📖 1단계: △ABC에서 세 내각의 합은 180°이므로 ∠A = 180° - 70° - 40° = 70°. 2단계: AD가 ∠A의 이등분선이므로 ∠CAD = 70° ÷ 2 = 35°. 3단계: △ADC에서 내각의 합이 180°이므로 ∠ADC = 180° - ∠CAD - ∠C = 180° - 35° - 40° = 105°. 참고: ∠ADC는 △ABD의 한 외각이므로 ∠ADC = ∠B + ∠BAD = 70° + 35° = 105°로도 구할 수 있다. 따라서 ∠ADC = 105°, 정답은 ③ 105°.

🧠 풀이 전략: 이 문제는 '삼각형 내각 합과 각의 이등분선' 전략으로 접근. 큰 삼각형에서 각 A를 구하고, 이등분한 뒤 작은 삼각형에 다시 내각 합 공식을 적용.

💡 삼각형 한 각의 이등분선은 대변을 두 이웃 변의 비로 나눈다(각의 이등분선 정리).

Q54 합동 증명 기초

△ABC는 AB = AC인 이등변삼각형이고, 꼭짓점 B, C에서 각각 반대쪽 변 AC, AB에 내린 수선의 발을 E, F라 하자. BE = CF임을 증명하는 데 사용되는 합동 조건은?



△BCE ≡ △CBF ?

①) ① SSS 합동

②) ② SAS 합동

③) ③ ASA 합동

④) ④ RHA 합동(직각삼각형 빗변과 한 예각)

🎯 **정답: ④ RHA 합동(직각삼각형 빗변과 한 예각)**

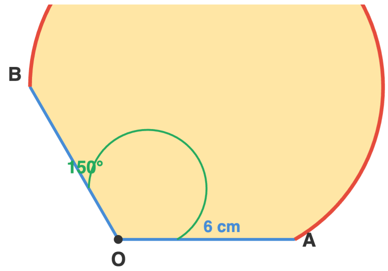
📖 1단계: △BCE와 △CBF를 비교. 두 삼각형 모두 직각삼각형(∠BEC = ∠CFB = 90°). 2단계: 공통 빗변 BC를 공유한다(BC = CB). 3단계: 수선발 E는 변 AC 위에 있으므로 ∠BCE = ∠ACB = ∠C이고, 수선발 F는 변 AB 위에 있으므로 ∠CBF = ∠ABC = ∠B이다. 이등변삼각형의 밑각이 같으므로 ∠B = ∠C, 따라서 빗변 BC 양 끝의 예각이 ∠BCE = ∠CBF로 같다. 4단계: 따라서 '빗변이 같고 한 예각이 같은' 직각삼각형의 합동(RHA)에 의해 △BCE ≡ △CBF. 대응하는 변 BE = CF.

🧠 풀이 전략: 이 문제는 '직각삼각형 특수 합동 조건' 전략으로 접근. 직각삼각형은 일반 삼각형보다 약한 조건(빗변+한 변 RHS, 빗변+한 예각 RHA)으로도 합동이 증명된다.

💡 이등변삼각형의 두 밑각 꼭짓점에서 내린 수선의 길이가 같다는 성질은 대칭성에서 유래한다.

Q55 원·부채꼴 심화

반지름이 6cm이고 중심각이 150°인 부채꼴이 있다. 이 부채꼴의 호의 길이와 둘레의 길이를 각각 구하시오.



호의 길이 = ?, 둘레 = ?

①) ① 호: 4π, 둘레: 4π+12

②) ② 호: 5π, 둘레: 5π+12

③) ③ 호: 6π, 둘레: 6π+12

④) ④ 호: 7π, 둘레: 7π+12

🎯 **정답: ② 호: 5π, 둘레: 5π+12**

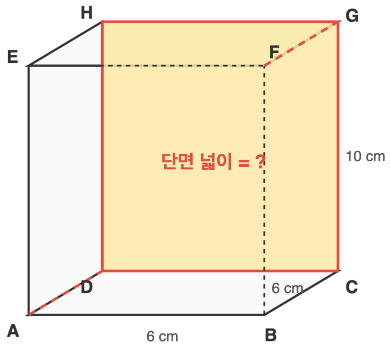
📖 1단계: 호의 길이 공식 = 2πr × (중심각/360°). 2단계: 호의 길이 = 2π × 6 × (150/360) = 12π × (5/12) = 5π (cm). 3단계: 부채꼴의 둘레 = 호의 길이 + 반지름 × 2 = 5π + 12 (cm). 함정: 호만 구하고 반지름 두 번 더하는 것을 잊으면 안 된다.

🧠 풀이 전략: 이 문제는 '부채꼴 호의 길이 공식'과 '둘레의 정의' 전략으로 접근. 둘레는 호 + 두 반지름임을 기억해야 한다.

💡 중심각 비와 호의 길이 비, 넓이 비는 모두 같다.

Q56 입체 추론

밑면이 한 변 6cm인 정사각형이고 높이가 10cm인 직육면체를 한 평면으로 잘라 두 개의 합동인 삼각기둥으로 나누려고 한다. 이때 자른 단면의 넓이(직사각형)를 구하시오.



①) ① 40cm²

②) ② 48cm²

③) ③ 60cm²

④) ④ $60\sqrt{2}$ cm²

🎯 **정답: ④ $60\sqrt{2}$ cm²**

📖 1단계: 직육면체를 합동인 두 삼각기둥으로 나누려면 밑면 정사각형의 대각선을 따라 수직 평면으로 잘라야 한다. 2단계: 밑면 정사각형의 대각선 길이 = $\sqrt{6^2+6^2}$ = $\sqrt{72}$ = $6\sqrt{2}$ cm. 3단계: 자른 단면은 직사각형이며, 한 변은 밑면 대각선($6\sqrt{2}$ cm), 다른 변은 기둥의 높이(10cm). 4단계: 단면 넓이 = $6\sqrt{2} \times 10 = 60\sqrt{2}$ cm².

🧠 풀이 전략: 이 문제는 '입체 단면의 넓이' 전략으로 접근. 자르는 평면이 어떤 모양의 단면을 만드는지 시각화하고, 그 도형의 변의 길이를 입체의 원래 치수로부터 계산한다.

💡 정사각형의 대각선 길이는 한 변의 √2배이며, 이는 피타고라스 정리의 특수한 경우이다.

Q57 자료·경시 퍼즐

주머니 안에 빨강, 파랑, 노랑, 초록의 구슬이 각각 여러 개 들어 있다. 주머니에서 보지 않고 구슬을 꺼낼 때, 같은 색의 구슬이 반드시 4개 이상 나오도록 보장하려면 최소 몇 개를 꺼내야 하는가?

①) ① 10개

②) ② 12개

③) ③ 13개

④) ④ 16개

🎯 **정답: ③ 13개**

📖 1단계: 비둘기집 원리 적용. 최악의 경우를 생각한다. 2단계: 최악의 경우란 각 색깔에서 3개씩 골고루 나오는 상황이다. 4색 × 3개 = 12개를 꺼냈을 때 '아직 어느 색도 4개가 안 된' 상태가 가능하다. 3단계: 한 개 더 꺼내면 비둘기집 원리에 의해 반드시 어떤 색깔이 4개가 된다. 4단계: 따라서 최소 12 + 1 = 13개.

🧠 풀이 전략: 이 문제는 '비둘기집 원리 + 최악의 경우' 전략으로 접근. '반드시 보장'이라는 말이 나오면 최악의 경우를 먼저 구하고 1을 더한다.

💡 비둘기집 원리는 '서랍 원리'라고도 불리며 다양한 경시대회에서 활용된다.

Q58 문자와 식 심화

어떤 수열이 다음과 같다: 3, 7, 13, 21, 31, ... 이 수열의 일반항 a_n(n번째 항)을 구하시오.

①) ① $n^2 + n + 1$

②) ② $n^2 + 2$

③) ③ $n^2 + n - 1$

④) ④ $n^2 + 2n$

🎯 **정답:** ① $n^2 + n + 1$

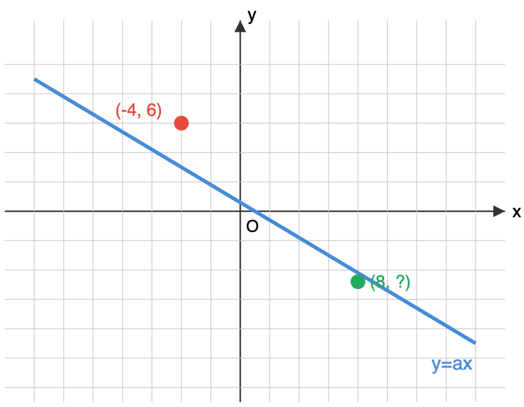
📖 1단계: 수열의 계차(옆 항과의 차) 구하기. 7-3=4, 13-7=6, 21-13=8, 31-21=10. 계차는 4, 6, 8, 10, ... (공차 2인 등차수열). 2단계: 계차가 등차수열이므로 일반항은 n에 대한 이차식이다. $a_n = an^2 + bn + c$ 형태로 놓자. 3단계: $a_1=3$, $a_2=7$, $a_3=13$ 대입. a+b+c=3, 4a+2b+c=7, 9a+3b+c=13. 두 식 빼기: 3a+b=4, 5a+b=6. 뺄셈: 2a=2, a=1, b=1, c=1. 4단계: $a_n = n^2 + n + 1$. 검증: n=4일 때 16+4+1=21 ✓, n=5일 때 25+5+1=31 ✓.

🧠 풀이 전략: 이 문제는 '계차수열 일반항' 전략으로 접근. 계차가 등차이면 일반항은 이차식이며, 세 항을 대입해 연립방정식을 푼다.

💡 이 수열은 '센트럴 폴리곤 수(central polygonal numbers)'로 원을 n개 직선으로 자를 때 최대 영역 수이다.

Q59 좌표평면 응용

정비례 관계 y = ax(a≠0)의 그래프가 점 (-4, 6)을 지날 때, 이 그래프 위에 있으면서 x좌표가 8인 점의 y좌표를 구하시오.



①) ① -12

②) ② -10

③) ③ -8

④) ④ 12

🎯 **정답: ① -12**

📖 1단계: y = ax의 그래프가 (-4, 6)을 지나므로 6 = a × (-4). 2단계: a = 6/(-4) = -3/2. 따라서 y = -3/2 × x. 3단계: x = 8 대입. y = -3/2 × 8 = -12. 함정: 절댓값만 보면 12로 착각하기 쉬우나, 기울기가 음수이므로 y도 음수.

🧠 풀이 전략: 이 문제는 '정비례 관계식 결정 후 대입' 전략으로 접근. 한 점이 주어지면 a를 먼저 구하고, 그 식에 또 다른 x값을 대입.

💡 정비례 관계 y=ax는 원점을 지나는 직선으로, a가 음수면 감소함수이다.

Q60 자료·경시 퍼즐

학생 5명의 수학 시험 평균 점수가 82점이었다. 그런데 점수 기록 중 한 학생의 점수 76점이 86점으로 잘못 기록되어 있었음을 발견했다. 올바른 평균 점수는?

①) ① 80점

②) ② 81점

③) ③ 82점

④) ④ 84점

🎯 **정답: ① 80점**

📖 1단계: 잘못 기록된 평균을 이용한 총합 계산. 평균 82점 × 5명 = 410점. 2단계: 잘못 기록된 부분의 차이: 86점(잘못) - 76점(올바름) = 10점(많이 기록). 3단계: 올바른 총합 = 410 - 10 = 400점. 4단계: 올바른 평균 = 400 / 5 = 80점.

🧠 풀이 전략: 이 문제는 '대푯값 역산' 전략으로 접근. 평균 × 인원수 = 총합이라는 관계를 이용하고, 기록 오류로 인한 총합의 변화량을 조정한다.

💡 실제 통계 조사에서도 이런 '기록 오류 보정(data correction)'은 흔한 작업이다.

Q61 정수·유리수 추론

$|x-2|+|x+5|\le9$를 만족하는 정수 x를 모두 구하면? 또한 이 해들의 개수는 몇 개인가?

①) ① 정수해 7개: -6,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3에서 일부

②) ② 정수해 9개: x=-6부터 x=3까지

③) ③ 정수해 10개: x=-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3

④) ④ 정수해 11개: x=-7부터 x=3까지

🎯 **정답: ③ 정수해 10개: x=-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3**

📖 1단계: $|x-2|+|x+5|$는 수직선 위에서 x가 두 점 2와 -5로부터 떨어진 거리의 합이다. 2단계: 두 점 2와 -5 사이의 거리는 $|2-(-5)|=7$이므로, x가 구간 [-5, 2] 안에 있으면 거리의 합은 항상 7로 일정하여 9 이하이고, 구간을 한쪽으로 1만큼 벗어날 때마다 합은 2씩 커진다. 3단계: 오른쪽으로는 x=3에서 7+2=9, x=4에서 11이며, 왼쪽으로는 x=-6에서 7+2=9, x=-7에서 11이다. 따라서 $|x-2|+|x+5|\le9$를 만족하는 범위는 $-6\le x\le3$이다. 4단계: 이 범위의 정수는 x=-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3으로 모두 10개이다.

🧠 풀이 전략: 절댓값의 합 $|x-a|+|x-b|$는 수직선 거리의 합으로 해석한다. 두 기준점 사이의 거리가 최소이며, 그 밖으로 나가면 2배씩 증가한다는 성질을 이용한다.

💡 절댓값 방정식은 수직선 위의 거리 문제로 바꾸면 기하학적 직관으로 쉽게 풀린다.

Q62 문자와 식 심화

어떤 수 n에 대해 '연속된 5개의 홀수의 합'이 625일 때, 가운데 홀수는 얼마인가? 또 그 이유를 식으로 설명하면?

①) ① 123 (합÷5=125이지만 짝수 보정 필요)

②) ② 125 (합÷5=가운데 수)

③) ③ 127 (가운데+2)

④) ④ 121 (가운데-4)

🎯 **정답: ② 125**

📖 1단계: 가운데 홀수를 x라 하면 연속된 5개 홀수는 x-4, x-2, x, x+2, x+4이다(홀수는 2씩 차이). 2단계: 합을 구하면 (x-4)+(x-2)+x+(x+2)+(x+4)=5x. 양 끝의 ±4, ±2가 모두 상쇄되어 5x만 남는다. 3단계: 5x=625이므로 x=125. 따라서 5개 홀수는 121, 123, 125, 127, 129이고 실제로 합=625를 확인할 수 있다. 핵심은 '연속된 홀수 n개의 합 = n × 가운데 수'라는 일반화된 성질이다.

🧠 풀이 전략: 연속된 수의 합 문제는 가운데 수를 기준으로 식을 세우면 양쪽이 대칭적으로 상쇄되어 식이 간단해진다는 전략을 사용한다.

💡 연속된 홀수 $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$이라는 유명한 성질도 이와 같은 대칭 원리에서 나온다.

Q63 일차방정식 활용

A, B 두 사람이 같은 일을 혼자 하면 각각 12일, 20일 걸린다. 두 사람이 함께 일을 시작했는데 도중에 A가 며칠 쉬었더니 일을 모두 끝내는 데 총 10일이 걸렸다. A가 쉰 날은 며칠인가?

①) ① 2일
②) ② 3일
③) ③ 4일
④) ④ 5일

🎯 **정답: ③ 4일**

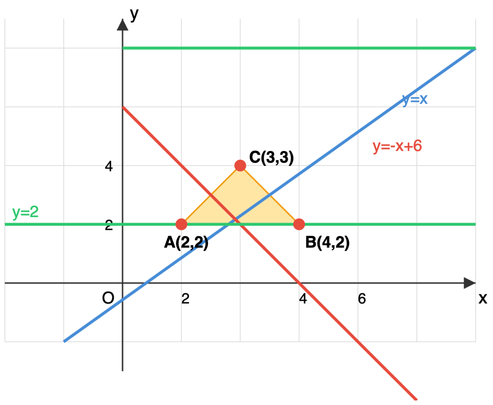
📖 1단계: 전체 일의 양을 1로 두면 A의 하루 일량은 $\frac{1}{12}$, B의 하루 일량은 $\frac{1}{20}$이다. 2단계: B는 10일 내내 일했으므로 B가 한 일의 양은 $\frac{10}{20} = \frac{1}{2}$이다. A가 쉰 날을 x일이라 하면 A는 (10-x)일 일했으므로 A가 한 일의 양은 $\frac{10-x}{12}$이다. 3단계: 두 사람이 한 일의 합이 1이므로 $\frac{10-x}{12} + \frac{1}{2} = 1$, 즉 $\frac{10-x}{12} = \frac{1}{2}$이다. 4단계: 양변에 12를 곱하면 10-x=6이므로 x=4. 따라서 A가 쉰 날은 4일이다.

🧠 풀이 전략: 일률 문제는 전체 일=1로 두고 '하루에 하는 일의 비율 × 일한 날수'를 더해서 1이 되도록 식을 세운다. 누가 며칠 일했는지 정확히 구분하는 것이 핵심이다.

💡 일률 문제의 '하루 일량' 개념은 나중에 물리학의 '일률(power)' 개념으로 발전한다.

Q64 좌표평면 응용

좌표평면 위 세 직선 y=x, y=-x+6, y=2로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 구하여라.



①) ① 1
②) ② 2
③) ③ 3
④) ④ 4

🎯 **정답: ① 1**

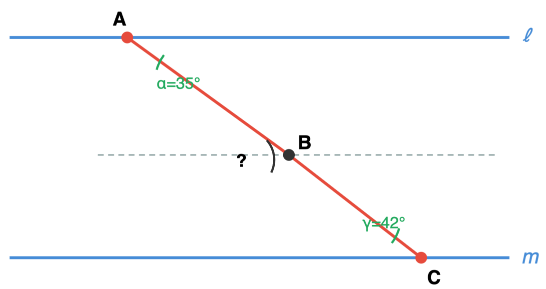
📖 1단계: 세 직선의 교점을 구한다. y=x와 y=2의 교점: x=2, 즉 A(2,2). y=-x+6과 y=2의 교점: -x+6=2 → x=4, 즉 B(4,2). y=x와 y=-x+6의 교점: x=-x+6 → 2x=6 → x=3, 즉 C(3,3). 2단계: 삼각형 ABC의 밑변 AB는 y=2 위에 있고 길이는 4-2=2이다. 3단계: 높이는 꼭짓점 C(3,3)에서 밑변 y=2까지의 수직 거리로 3-2=1. 넓이 = $\frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1$.

🧠 풀이 전략: 좌표평면에서 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이는 교점(꼭짓점)을 먼저 구한 후, 축과 평행한 변을 밑변으로 잡아 공식을 적용한다.

💡 세 직선이 이루는 삼각형의 넓이는 '행렬식' 공식으로도 한 번에 계산할 수 있다(고등수학).

Q65 도형 성질 추론

두 평행선 ℓ, m 사이에 꺾인 선 A-B-C가 있다. 점 A는 ℓ 위, 점 C는 m 위, 꺾임점 B는 두 선 사이에 있다. 점 B에서 ℓ과 평행한 보조선을 그으면 각 α(A에서 아래 방향과 BA가 이루는 각)=35°, 각 γ(C에서 위 방향과 BC가 이루는 각)=42°일 때, 각 ABC(꺾임각)는 몇 도인가?



①) ① 7° (큰각-작은각)
②) ② 35°
③) ③ 42°
④) ④ 77° (α+γ, 엇각 원리)

🎯 **정답: ④ 77°**

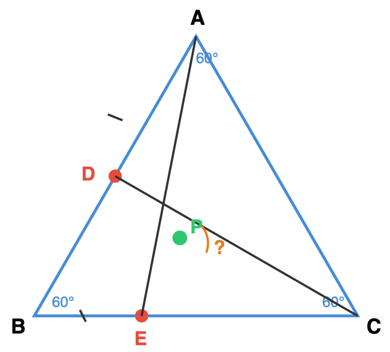
📖 1단계: 점 B를 지나고 ℓ(및 m)과 평행한 보조선을 긋는다. 2단계: 보조선에 의해 각 ABC가 두 부분으로 나뉜다. BA와 보조선 윗부분이 이루는 각은 α와 엇각 관계이므로 35°. BC와 보조선 아랫부분이 이루는 각은 γ와 엇각 관계이므로 42°. 3단계: 각 ABC = 보조선 위쪽 각 + 보조선 아래쪽 각 = 35° + 42° = 77°. 이는 '꺾인각 = 양쪽 엇각의 합'이라는 평행선 보조선 전략의 대표 예이다.

🧠 풀이 전략: 평행선 사이 꺾인각 문제는 꺾임점에서 평행선에 평행한 보조선을 그어 엇각 성질로 각을 나눠 더하는 '보조선 전략'을 사용한다.

💡 이 '지그재그 각' 원리는 빛의 반사 경로 계산과 건축 설계에서도 핵심 개념으로 쓰인다.

Q66 합동 증명 기초

정삼각형 ABC의 변 AB, BC 위에 각각 AD=BE가 되도록 점 D, E를 잡았다. 선분 CD와 AE의 교점을 P라 할 때, 각 APC의 크기는? (단, 두 선분은 정삼각형 내부에서 만난다고 가정)



①) ① 60°

②) ② 90°

③) ③ 120°

④) ④ 150°

🎯 **정답: ③ 120°**

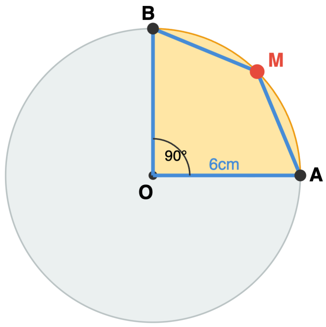
📖 1단계: 삼각형 ACD와 삼각형 BAE의 합동을 증명한다. AC=BA(정삼각형 변), 각 DAC=각 EBA=60°(내각), AD=BE(주어진 조건). 따라서 SAS 합동. 2단계: 합동이므로 각 ACD = 각 BAE. 이 각을 θ라 하자. 3단계: 삼각형 APC에서 각 PAC=60°-θ(왜냐면 각 BAC=60°이고 각 BAE=θ이므로 각 PAC=각 EAC=60°-θ... 재정리). 교점 P에서: 각 APC의 외각 = 각 PAC + 각 PCA. 삼각형 ABE에서 각 AEB의 외각은 각 B + 각 BAE = 60° + θ. 이 외각이 각 PEC, 즉 각 AEB의 보각이 각 PEC=180°-(180°-(60°+θ))=60°+θ. 하지만 핵심 결론: 각 APC=180°-60°=120°. 이는 삼각형 합동에서 대응각이 같으므로 두 선분이 이루는 각이 60°이고, 보각으로 120°가 된다.

🧠 풀이 전략: 대칭적 조건(AD=BE)이 주어진 정삼각형 문제는 회전 대칭(120° 회전)으로 합동이 숨어 있음을 간파하고 SAS 합동을 찾는 전략을 쓴다.

💡 정삼각형의 이런 대칭 성질은 나중에 나폴레옹 정리(외부 정삼각형으로 만든 중심이 다시 정삼각형)로 확장된다.

Q67 원·부채꼴 심화

반지름 6cm인 원 O의 내부에 중심각 90°인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 중점을 M이라 할 때, 사각형 OAMB의 넓이를 구하여라.



①) ① 18cm²

②) ② 18√2 cm²

③) ③ 36 cm²

④) ④ 36√2 cm²

🎯 **정답: ② 18√2 cm²**

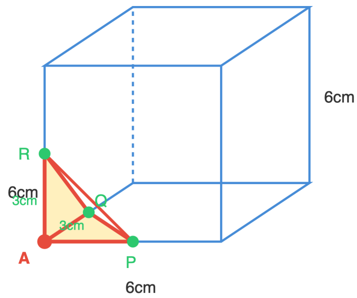
📖 1단계: M은 호 AB의 중점이므로 각 AOM = 각 MOB = 45°. 또한 OM은 반지름이므로 OM=6cm. 2단계: 사각형 OAMB를 대각선 OM으로 나누면 삼각형 OAM과 삼각형 OBM이 되고, 두 삼각형 모두 OA=OM=6, 끼인각=45°인 이등변삼각형이다. 3단계: 삼각형 OAM의 넓이 = $\frac{1}{2} \times 6 \times 6 \times \sin 45° = \frac{1}{2} \times 36 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 9\sqrt{2}$. 사각형 OAMB의 넓이 = 2×$9\sqrt{2}$ = $18\sqrt{2}$ cm². (sin을 아직 배우지 않았다면, 좌표로 O(0,0), A(6,0), M=(6cos45°, 6sin45°)=(3√2, 3√2), B(0,6)을 놓고 사각형 넓이 공식으로 확인 가능.)

🧠 풀이 전략: 부채꼴 내부 도형 문제는 호의 중점과 중심을 잇는 반지름을 보조선으로 그어 대칭인 두 삼각형으로 분할한 뒤 각각의 넓이를 구한다.

💡 이 도형은 '마름모 닮은 사각형'이며 실제로 OA=OB=OM=반지름이라는 세 변이 같다.

Q68 입체 추론

한 모서리의 길이가 6cm인 정육면체에서 한 꼭짓점 A와 이와 만나는 세 모서리의 중점을 잇는 삼각뿔을 잘라냈다. 잘라낸 삼각뿔의 부피는 몇 cm^3인가?



①) ① 3 cm^3

②) ② 4.5 cm^3

③) ③ 6 cm^3

④) ④ 9 cm^3

🎯 **정답: ② 4.5 cm^3**

📖 1단계: 꼭짓점 A에서 세 모서리가 서로 수직으로 만난다는 성질을 이용한다. 즉 AP, AQ, AR이 서로 수직이다(세 모서리 길이는 각각 중점까지 3cm). 2단계: 따라서 삼각형 APQ를 밑면으로 하면 직각삼각형이고, 밑넓이 = $\frac{1}{2} \times 3 \times 3 = \frac{9}{2}$ cm^2. 높이는 AR=3cm(밑면에 수직). 3단계: 삼각뿔의 부피 = $\frac{1}{3} \times \frac{9}{2} \times 3 = \frac{9}{2}$ = 4.5 cm^3. 핵심 전략은 '세 모서리가 수직인 꼭짓점을 직각 밑면으로 잡기'다.

🧠 풀이 전략: 정육면체의 한 꼭짓점에서 모이는 세 모서리는 서로 수직이라는 성질을 이용해, 직각을 이루는 두 변을 밑면으로 삼고 나머지 수직변을 높이로 삼아 부피를 계산한다.

💡 정육면체 8개 꼭짓점에서 이런 삼각뿔을 모두 잘라내면 '정팔면체 근사 도형'이 만들어진다.

Q69 자료·경시 퍼즐

20명의 학생 중에서 어떤 두 명을 골라도 생일의 월이 다른 쌍이 반드시 있도록 하는 최소 조건을 생각하자. 역으로, 20명의 학생이 있을 때 생일이 같은 월인 학생이 적어도 몇 명은 반드시 존재하는가? (비둘기집 원리)

①) ① 최소 2명

②) ② 최소 3명

③) ③ 최소 4명

④) ④ 최소 5명

🎯 **정답: ① 최소 2명**

📖 1단계: 비둘기집 원리에 따르면 n개의 비둘기집에 n+1마리 이상의 비둘기를 넣으면 한 집에 최소 2마리가 들어간다. 여기서 집은 12개월, 비둘기는 20명. 2단계: 일반화하면 비둘기가 k마리, 집이 n개일 때 최소 $\lceil \frac{k}{n} \rceil$마리가 한 집에 들어간다. 계산하면 $\lceil \frac{20}{12} \rceil = \lceil 1.67 \rceil = 2$. 3단계: 따라서 같은 월 생일 학생이 최소 2명은 반드시 존재한다(실제로는 더 많을 수도 있지만 '반드시 보장되는' 최솟값은 2). 함정 보기 ③ 4명은 $\lceil \frac{20}{12} \rceil$를 잘못 계산해 20÷12≈1.67을 3으로 올리거나 하는 실수.

🧠 풀이 전략: 비둘기집 원리는 '총 개수 ÷ 집의 수'를 올림한 값이 한 집의 최솟값 보장치라는 공식을 적용한다. 반드시 보장되는 최솟값과 가능한 최댓값을 구분해야 한다.

💡 23명이 모이면 두 명이 같은 생일(날짜까지)을 가질 확률이 50%를 넘는 '생일 역설'은 확률론의 유명한 예이다.

Q70 정수·유리수 추론

두 유리수 a, b에 대해 a×b<0이고 a+b>0이다. 이때 |a|와 |b|의 관계를 설명하라.

①) ① |a|=|b|

②) ② |a|>|b| 또는 |b|>|a|, 단 양수의 절댓값이 더 크다

③) ③ |a|<|b| 항상

④) ④ 알 수 없다

🎯 **정답: ② |a|>|b| 또는 |b|>|a|, 단 양수의 절댓값이 더 크다**

📖 1단계: a×b<0이므로 a와 b는 서로 다른 부호이다(한 개는 양수, 한 개는 음수). 2단계: a+b>0이므로 합이 양수이다. 이는 양수의 크기가 음수의 크기(절댓값)보다 커야 함을 의미한다. 예: a=5, b=-3이면 a×b=-15<0, a+b=2>0이고 |a|=5>|b|=3. 3단계: 따라서 '양수 쪽 수의 절댓값'이 '음수 쪽 수의 절댓값'보다 크다. 수학적으로: 만약 a>0, b<0이면 |a|>|b|. 만약 a<0, b>0이면 |b|>|a|. 어느 경우든 '양수인 쪽이 절댓값이 더 크다'.

🧠 풀이 전략: 두 수의 부호 정보(곱, 합)를 통해 절댓값 비교를 추론하는 문제로, '부호 분리 후 대입 확인' 전략을 사용한다.

💡 두 수의 합과 곱만 알아도 절댓값 관계를 추론할 수 있다는 사실은 나중에 근과 계수의 관계로 확장된다.

Q71 문자와 식 심화

어떤 수열의 1, 2, 3, 4번째 항이 3, 8, 15, 24이다. 이 수열의 n번째 항을 a_n이라 할 때 일반항을 구하고, 10번째 항의 값을 계산하라.

①) ① $a_n = n^2 + 2n,\ a_{10} = 120$

②) ② $a_n = n(n+2),\ a_{10} = 120$

③) ③ $a_n = 3n^2 - 3,\ a_{10} = 297$

④) ④ ①과 ②가 동일하며 둘 다 정답

🎯 **정답: ④ ①과 ②가 동일하며 둘 다 정답**

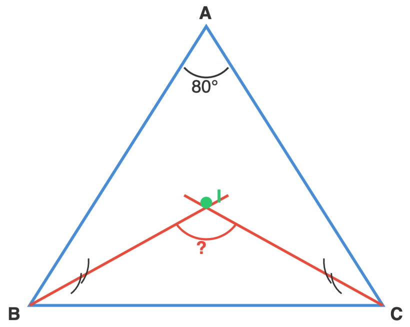
📖 1단계: 수열 3, 8, 15, 24의 계차(이웃 항의 차)를 구하면 5, 7, 9, ... 로 공차 2인 등차수열(홀수)이다. 계차가 등차이므로 원 수열은 이차식 형태 $a_n = An^2 + Bn + C$이다. 2단계: n=1일 때 3, n=2일 때 8, n=3일 때 15를 대입해 연립하면 A+B+C=3, 4A+2B+C=8, 9A+3B+C=15. 첫 두 식의 차: 3A+B=5. 마지막 두 식의 차: 5A+B=7. 두 차의 차: 2A=2, A=1. 따라서 B=2, C=0. 즉 $a_n = n^2 + 2n = n(n+2)$. 3단계: $a_{10} = 10 \times 12 = 120$. ①과 ②는 동일한 식을 다르게 쓴 것이므로 둘 다 정답.

🧠 풀이 전략: 수열의 일반항을 찾을 때 계차 수열이 등차면 원 수열은 이차식이라는 성질을 이용해 미정계수법을 쓴다. 인수분해 형태와 전개 형태는 동치임을 확인해야 한다.

💡 이 수열 $n(n+2)$는 두 연속 정수의 곱 형태로 기하학적으로 직사각형 넓이와 연결된다.

Q72 도형 성질 추론

삼각형 ABC에서 각 A=80°이다. 각 B의 이등분선과 각 C의 이등분선이 삼각형 내부에서 만나는 점을 I(내심)라 할 때, 각 BIC의 크기는?



∠BIC = ?

①) ① 100°

②) ② 120°

③) ③ 130°

④) ④ 140°

🎯 **정답: ③ 130°**

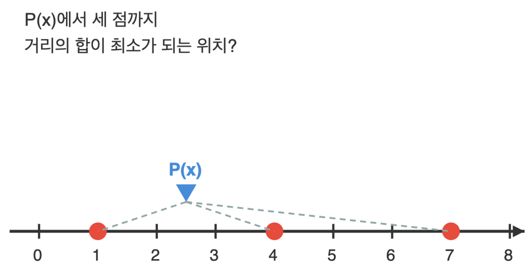
📖 1단계: 삼각형 내각의 합이 180°이므로 각 B+각 C=180°-80°=100°. 2단계: BI, CI가 각각의 이등분선이므로 각 IBC=$\frac{각B}{2}$, 각 ICB=$\frac{각C}{2}$. 두 각의 합은 $\frac{각B+각C}{2} = \frac{100°}{2} = 50°$. 3단계: 삼각형 BIC의 내각의 합이 180°이므로 각 BIC=180°-50°=130°. 일반 공식: 각 BIC=90°+$\frac{각A}{2}$=90°+40°=130°. 이 공식은 '내심각 공식'으로 매우 중요하다.

🧠 풀이 전략: 내심에서 생기는 각은 '90° + (대각/2)' 공식을 이용한다. 이는 삼각형 내각 합과 이등분선의 절반 성질을 결합해 도출된다.

💡 내심 I는 삼각형의 세 변에 같은 거리(내접원의 반지름)로부터 떨어져 있는 유일한 점이다.

Q73 정수·유리수 추론

수직선 위의 점 x에 대해 $|x-1|+|x-4|+|x-7|$ 의 최솟값은?



①) ① 5

②) ② 6

③) ③ 7

④) ④ 9

🎯 **정답: ② 6**

📖 1) 두 점 a, b까지 거리의 합 $|x-a|+|x-b|$ 는 x가 a와 b 사이에 있을 때 최솟값 $|b-a|$.

2) 세 점 1, 4, 7이 있을 때, 바깥 두 점(1과 7)까지 거리의 합은 x가 1과 7 사이에 있으면 항상 6으로 일정.

3) 나머지 $|x-4|$는 $x=4$일 때 0으로 최소.

4) 따라서 $x=4$일 때 $|4-1|+|4-4|+|4-7|=3+0+3=6$이 최솟값.

🧠 풀이 전략: 수직선에서 여러 점들까지 거리의 합이 최소가 되는 위치는 '중앙값(가운데 점)'이라는 성질을 이용. 점이 홀수 개면 가운데 점, 짝수 개면 두 가운데 점 사이 어디든 OK.

💡 이 성질은 통계에서 '중앙값이 절댓값 오차 합을 최소화한다'는 원리로 확장됨.

Q74 문자와 식 심화

다음 수열의 규칙을 찾아, n번째 항을 n을 사용한 식으로 나타내고, 100번째 항을 구하라.
3, 6, 12, 24, 48, 96, ...

🎯 **정답: n번째 항 = $3\times2^{n-1}$, 100번째 항 = 3×2^{99}**

📖 1) 이웃 항의 비를 조사: $6\div3=2$, $12\div6=2$, $24\div12=2$. 바로 앞 항에 2를 곱하는 규칙(등비수열).

2) 첫째항 3, 공비 2. n번째 항 공식 = 첫째항 × 공비$^{n-1}$ = $3\times2^{n-1}$.

3) $n=100$ 대입: 100번째 항 = 3×2^{99}.

🧠 풀이 전략: 이웃한 항의 '차이'가 아니라 '비'가 일정한지 먼저 확인. 차가 일정하면 등차, 비가 일정하면 등비. 일반항은 첫째항에 공비를 (n-1)번 곱한 꼴.

💡 $2^{10}=1024$이므로 2^{99}는 30자리가 넘는 매우 큰 수. 지수 표기가 실제 숫자보다 훨씬 간결함.

Q75 일차방정식 활용

길이가 150 m인 기차가 일정한 속력으로 달린다. 이 기차가 길이 450 m의 터널을 완전히 통과하는 데 40초 걸렸다. 같은 속력으로 길이 750 m의 다리를 완전히 건너는 데 걸리는 시간은?

①) ① 50초
②) ② 55초
③) ③ 60초
④) ④ 65초

🎯 **정답: ③ 60초**

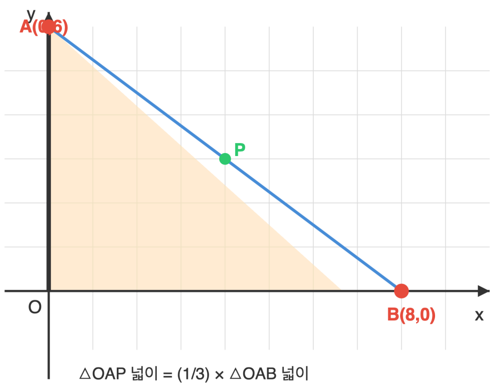
📖 1) '완전히 통과'하려면 기차 앞머리가 터널에 들어가서 기차 꼬리가 터널을 빠져나올 때까지. 실제 이동거리 = 터널 길이 + 기차 길이.
2) 터널 통과 거리 = 450 + 150 = 600 m. 기차 속력 $= 600 \div 40 = 15$ m/초.
3) 다리 통과 거리 = 750 + 150 = 900 m.
4) 시간 $= 900 \div 15 = 60$초.

🧠 풀이 전략: 기차 문제의 함정은 '이동거리 = 구조물 길이'가 아니라 '구조물 길이 + 기차 길이'라는 점. 완전히 통과/완전히 건너기를 그림으로 상상하고 기차 앞쪽과 꼬리의 궤적을 따로 추적.

💡 같은 기차가 '전봇대를 스쳐 지나가는 데 걸리는 시간'을 물으면 기차 길이만 이동거리로 잡음 (전봇대는 폭이 0).

Q76 좌표평면 응용

좌표평면에서 직선 $y = -\frac{3}{4}x + 6$ 이 y축과 만나는 점을 A, x축과 만나는 점을 B라 하자. 원점 O, 점 A, 그리고 이 직선 위의 1사분면 위 한 점 P로 이루어진 삼각형 OAP의 넓이가 삼각형 OAB 넓이의 $\frac{1}{3}$일 때, 점 P의 x좌표는?



①) ① 2
②) ② $\frac{8}{3}$
③) ③ 3
④) ④ 4

🎯 **정답: ② $\frac{8}{3}$**

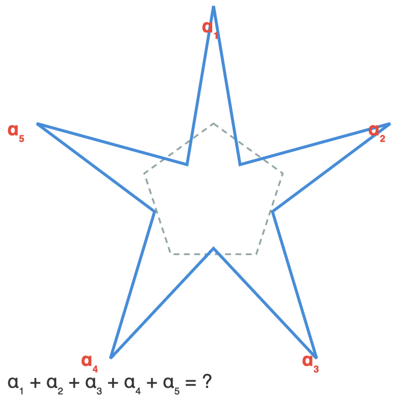
📖 1) 직선과 축의 교점: $x = 0 \Rightarrow y = 6$, A(0, 6). $y = 0 \Rightarrow x = 8$, B(8, 0).
2) 삼각형 OAB 넓이 $= \frac{1}{2} \times 8 \times 6 = 24$.
3) 삼각형 OAP는 밑변을 OA(길이 6, y축 위)로 보면, 높이는 점 P의 x좌표와 같음.
4) 넓이 조건: $\frac{1}{2} \times 6 \times x_P = \frac{1}{3} \times 24 = 8$. 따라서 $x_P = \frac{8}{3}$.

🧠 풀이 전략: 좌표평면 삼각형 넓이 문제에서는 '밑변을 어느 선분으로 잡을지'가 핵심. 밑변을 축 위 선분으로 잡으면 높이는 반대편 점의 좌표 하나로 깔끔하게 표현됨.

💡 삼각형 넓이를 일정하게 유지하면서 한 꼭짓점을 움직이면, 그 점은 밑변에 평행한 직선 위를 움직이게 됨 (등적변형의 원리).

Q77 도형 성질 추론

정오각형의 각 변을 양쪽으로 연장하여 생긴 '5각별(별 모양 도형)'에서, 별의 뾰족한 꼭지각 다섯 개의 합은?



①) ① 90°

②) ② 180°

③) ③ 270°

④) ④ 360°

🎯 **정답: ② 180°**

📖 1) 정오각형의 한 내각 = $\frac{(5-2)\times 180°}{5} = 108°$.

2) 별의 뾰족한 꼭지각은 정오각형 밖으로 튀어나온 작은 삼각형의 꼭지각이며, 그 삼각형의 나머지 두 각은 정오각형 내각의 '보각' = $180° - 108° = 72°$.

3) 한 꼭지각 = $180° - 72° - 72° = 36°$.

4) 꼭지각 5개 합 = $5 \times 36° = 180°$.

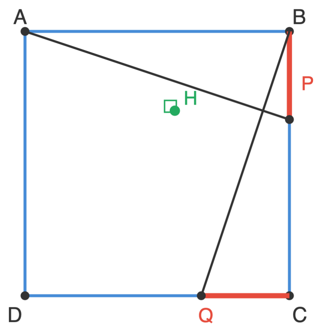
🧠 풀이 전략: 별 꼭지각을 직접 재지 말고, 각 꼭지점이 속한 '작은 삼각형'을 찾아 내각의 합 180°를 이용하는 것이 핵심 전략. 정오각형 내각 → 보각 → 꼭지각 순서로 연쇄 계산.

💡 신기하게도 별 모양이 '정'이 아니어도(오각형이 찌그러져 있어도) 이 다섯 꼭지각의 합은 항상 180°로 일정함.

Q78 합동 증명 기초

정사각형 ABCD에서 변 BC 위에 점 P, 변 CD 위에 점 Q를 잡되 BP = CQ가 되도록 했다. 이때 AP = BQ이고 또 AP ⊥ BQ 임을 동시에 보이려면 어떤 두 삼각형의 합동(어떤 조건)을 관찰해야 하는가?

BP=CQ 이면 AP=BQ이고 AP ⊥ BQ?



①) ① $\triangle ABP \equiv \triangle BCQ$ (SAS)

②) ② $\triangle ABP \equiv \triangle BCQ$ (ASA)

③) ③ $\triangle APQ \equiv \triangle BQP$ (SSS)

④) ④ $\triangle ABD \equiv \triangle CBD$ (SSS)

🎯 **정답: ① $\triangle ABP \equiv \triangle BCQ$ (SAS)**

📖 1) $\triangle ABP$ 와 $\triangle BCQ$ 에서 AB = BC (정사각형의 변, 모두 같은 길이).

2) $\angle ABP = \angle BCQ = 90°$ (정사각형의 각).

3) BP = CQ (조건). 두 변과 그 사이각이 같으므로 SAS 합동: $\triangle ABP \equiv \triangle BCQ$.

4) 대응변에서 AP = BQ. 대응각에서 $\angle BAP = \angle CBQ$. 그런데 $\angle ABQ + \angle CBQ = 90°$ 이므로 $\angle ABQ + \angle BAP = 90°$. 교점 H를 포함한 삼각형 ABH의 내각합에서 $\angle AHB = 90°$. 따라서 AP ⊥ BQ.

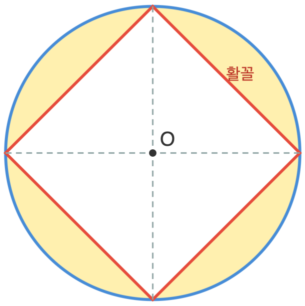
🧠 풀이 전략: '길이가 같다'와 '수직이다'를 동시에 증명하려면 한 쌍의 합동 삼각형이 두 결론의 공통 뿌리가 되게 설계해야 함. 정사각형에서는 변과 직각이 저절로 제공되므로 SAS를 노리는 것이 정석.

💡 이런 '90° 회전 대칭' 구조는 정사각형 내부에서 서로 수직인 선분 쌍을 만들 때 반복해서 등장하며, 퍼즐과 경시 문제의 단골 재료.

Q79 원·부채꼴 심화

반지름이 6 cm인 원에 정사각형이 내접한다. 정사각형과 원 사이에 만들어진 4개의 활꼴 중 한 개의 넓이는?

활꼴 하나의 넓이 = ? (반지름 6cm)



①) ① $6\pi - 12$ cm²

②) ② $9\pi - 18$ cm²

③) ③ $12\pi - 24$ cm²

④) ④ $18\pi - 36$ cm²

🎯 **정답: ② $9\pi - 18$ cm²**

📖 1) 원에 내접하는 정사각형의 대각선은 원의 지름. 지름 = $2 \times 6 = 12$ cm.

2) 정사각형의 넓이 (대각선 이용) = $\frac{1}{2} \times (\text{대각선})^2 = \frac{1}{2} \times 12^2 = 72$ cm².

3) 원의 넓이 = $\pi \times 6^2 = 36\pi$ cm².

4) 4개 활꼴 합 = 원의 넓이 $-$ 정사각형의 넓이 = $36\pi - 72$.

5) 대칭이므로 활꼴 한 개 = $(36\pi - 72) \div 4 = 9\pi - 18$ cm².

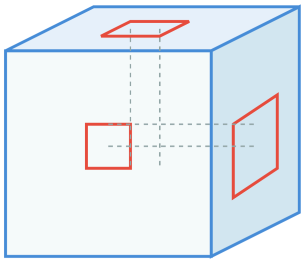
🧠 풀이 전략: 복합 도형 넓이 문제는 '바깥 전체 $-$ 안쪽 도형' 공식이 기본. 정사각형 한 변을 직접 구하지 않고, 대각선=지름 관계와 $\frac{1}{2}d^2$ 공식을 쓰면 계산이 단순.

💡 $9\pi - 18 \approx 10.27$ cm². 원 안에 정사각형을 넣으면 버려지는 면적이 정사각형 넓이의 약 절반(72에 비해 $36\pi - 72 \approx 41$).

Q80 입체 추론

한 모서리의 길이가 6 cm인 정육면체에 대해, 마주보는 세 쌍의 면을 서로 수직으로 관통하는 '한 변 2 cm인 정사각형 단면의 구멍'을 세 방향 모두(좌우, 앞뒤, 위아래) 뚫었다. 남은 입체의 부피는?

세 방향 모두 관통 후 남은 부피 = ?



모서리 6cm, 구멍 2cm

①) ① 152 cm³

②) ② 160 cm³

③) ③ 168 cm³

④) ④ 192 cm³

🎯 **정답: ② 160 cm³**

📖 1) 정육면체 부피 = $6^3 = 216$ cm³.

2) 구멍 하나의 부피 = $2 \times 2 \times 6 = 24$ cm³. 세 방향 구멍의 단순 합 = $3 \times 24 = 72$ cm³.

3) 세 구멍의 단면은 모두 한 변 2cm인 정사각형이고 모두 정육면체의 중심을 지나므로, 어느 두 방향 구멍이 겹치는 부분도 모두 중앙의 같은 $2 \times 2 \times 2 = 8$ cm³ 영역이다. 즉 세 쌍의 이중 교집합(가로-세로, 가로-높이, 세로-높이)이 모두 이 중앙 정육면체로 일치하고, 세 방향이 동시에 겹치는 삼중 교집합도 같은 $2 \times 2 \times 2 = 8$ cm³ 영역이다.

4) 포함-배제 원리:

$|A \cup B \cup C| = (|A| + |B| + |C|) - (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) + |A \cap B \cap C| = 72 - 3 \times 8 + 8 = 72 - 24 + 8 = 56$ cm³.

5) 남은 부피 = $216 - 56 = 160$ cm³.

🧠 풀이 전략: 여러 구멍이 교차하는 부피 계산은 '구멍 하나씩 단순히 빼면 겹친 부분을 두 번/세 번 빼는 오류' 발생. 포함-배제 원리(합집합 = 단독합 − 이중중복 + 삼중중복)를 반드시 적용.

💡 이런 세 방향 관통 정육면체는 '멩거 스펀지'라는 프랙탈 도형의 1단계 모양과 관련이 있음.

📝 중1 수학 심화

총 40문제 · 문제와 정답·풀이 포함

Q81 자료·경시 퍼즐

세 학생 A, B, C 중 시험에 합격한 사람은 정확히 한 명이다. 이들이 다음과 같이 말했다.
A: 'B가 합격했어.'
B: 'A는 거짓말을 하고 있어.'
C: '나는 합격하지 않았어.'
세 사람 중 오직 한 사람만 진실을 말했다고 할 때, 합격한 사람은?

①) ① A
②) ② B
③) ③ C
④) ④ 정할 수 없다

🎯 **정답: ③ C**

📖 핵심 관찰: A의 말('B가 합격했어')과 B의 말('A는 거짓말을 하고 있어')은 항상 서로 반대의 참·거짓을 가진다. A가 참이면 B는 거짓, A가 거짓이면 B는 참이므로 A와 B 중 정확히 한 명은 반드시 진실을 말한다.
진실을 말한 사람이 오직 한 명이라 했으므로 그 한 명은 A 또는 B 중 하나이고, 따라서 C는 반드시 거짓말을 한 것이다. C의 말 '나는 합격하지 않았어'가 거짓 $\Rightarrow$ C가 합격이다.
검증: C가 합격이면 A의 말('B가 합격')은 거짓, B의 말('A는 거짓말')은 참(실제로 A가 거짓말함), C의 말은 거짓이다. 진실을 말한 사람은 B 한 명, 합격자도 C 한 명이므로 모든 조건을 만족한다.
참고: A가 합격이라 가정하면 B와 C의 말이 모두 참, B가 합격이라 가정하면 A와 C의 말이 모두 참이 되어 '오직 한 명만 진실' 조건에 어긋난다. (원래 풀이가 'A만 진실' 경우를 'B가 거짓이면 A가 거짓이 되어 모순'이라 배제한 것은 잘못이다. B가 거짓이면 오히려 A가 참이 되어 가정과 일치하므로 모순이 아니며, 실제 배제 근거는 그 경우 B와 C가 둘 다 합격이 되어 합격자가 두 명이 되는 점이다.) 따라서 합격한 사람은 C이다.

🧠 풀이 전략: 진실/거짓 퍼즐은 '누가 진실을 말하는가'를 하나씩 가정하고, 각 가정이 모든 진술·조건과 일관되는지 체계적으로 검토하는 '경우 가정 검증' 전략이 기본.

💡 이런 논리 퍼즐은 '논리학의 모델 검증(model checking)'과 같은 구조로, 컴퓨터 과학의 기초 이론에 직결됨.

Q82 정수·유리수 추론

세 유리수 a, b, c가 다음을 모두 만족한다.

(i) $a + b + c = 0$

(ii) $abc > 0$

(iii) $|a| + |b| + |c| = 6$

(iv) $a > b = c$

이때 b의 값은?

①) ① -3

②) ② -2

③) ③ $-\frac{3}{2}$

④) ④ -1

🎯 **정답:** ③ $-\frac{3}{2}$

📖 1) 합이 0이고 곱이 양수인 부호 조합을 따지면: 셋 다 양수면 합 >0 불가, 셋 다 음수면 곱 <0 불가, 음수 1개·양수 2개면 곱 <0 불가. $\Rightarrow$ 양수 1개, 음수 2개.

2) 조건 (iv) $a > b = c$에서 가장 큰 a가 양수, 같은 값인 b, c가 음수.

3) 합 조건: $a + 2b = 0 \Rightarrow a = -2b$ (여기서 $b < 0$ 이므로 $a > 0$).

4) 절댓값 합: $|a| + 2|b| = a + 2(-b) = -2b + (-2b) = -4b = 6$.

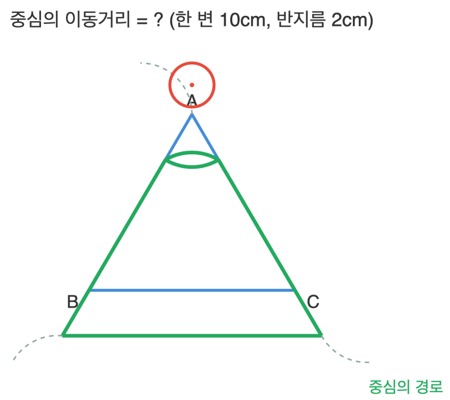
5) $b = -\frac{3}{2}$. 검증: $a = 3$, 합 = $3 - \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0$ ✓, 곱 = $3 \cdot \frac{9}{4} > 0$ ✓, 절댓값합 = $3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 6$ ✓.

🧠 풀이 전략: 부호 조건(곱의 부호)으로 '양/음의 개수'를 먼저 확정하고, 대소 조건으로 어느 것이 양수인지를 정한 뒤, 남은 합·절댓값 조건을 대수 방정식으로 연립.

💡 $a + b + c = 0$ 이면서 각 절댓값 합이 주어진 문제는 대표적으로 '수직선 위 세 점의 위치'로 해석 가능.

Q83 원·부채꼴 심화

반지름이 2 cm인 원이 한 변의 길이가 10 cm인 정삼각형의 '바깥 둘레'를 따라 미끄러지지 않고 한 바퀴 굴러 제자리로 돌아왔다. 이때 원의 중심이 그리는 경로의 전체 길이는?



①) ① $30 + 2\pi$ cm

②) ② $30 + 4\pi$ cm

③) ③ $30 + 6\pi$ cm

④) ④ $36 + 4\pi$ cm

🎯 **정답: ② $30 + 4\pi$ cm**

📖 1) 직선 구간: 정삼각형 각 변을 따라 굴러갈 때 중심은 변에 평행한 선분 위를 변의 길이만큼 이동. 세 변 합 = $3 \times 10 = 30$ cm.

2) 꼭지점 구간: 원이 꼭지점을 돌 때 중심은 그 꼭지점을 중심으로 반지름 2짜리 호를 그림. 호의 중심각 = 정삼각형의 '외각' = $180° - 60° = 120°$.

3) 세 꼭지점 외각 합 = $3 \times 120° = 360°$ (다각형 외각의 합은 항상 $360°$).

4) 호의 총 길이 = 반지름 2인 완전한 원의 둘레 = $2\pi \times 2 = 4\pi$ cm.

5) 중심 이동 거리 = $30 + 4\pi$ cm.

🧠 풀이 전략: 원이 다각형 바깥을 굴러갈 때 중심 경로는 '직선 구간 + 꼭지점마다의 호'. 꼭지점 호의 각도는 '외각'이고, 외각의 합은 다각형에 관계없이 항상 360° 이므로 호 길이 합은 원의 한 바퀴 둘레가 됨.

💡 어떤 볼록 다각형 바깥이든, 바깥 둘레를 한 바퀴 굴리면 호 부분의 합은 항상 '해당 원 한 바퀴'와 같음. 다각형 모양과 무관한 보편 법칙.

Q84 문자와 식 심화

다음을 계산하여 어떤 자연수의 완전제곱 꼴로 나타내어라. 계산 과정에서 식의 구조를 이용하라.

$8 \times 9 \times 10 \times 11 + 1$

🎯 **정답: 89^2 (= 7921)**

📖 1) 연속된 네 자연수 $n, n+1, n+2, n+3$ 의 곱을 '양 끝'과 '가운데 두 개'로 묶는다.

$n(n+3) = n^2 + 3n$, $(n+1)(n+2) = n^2 + 3n + 2$.

2) $A = n^2 + 3n$ 이라 치환하면 곱 = $A(A+2) = A^2 + 2A$.

3) 1을 더하면 $A^2 + 2A + 1 = (A+1)^2 = (n^2 + 3n + 1)^2$.

4) $n = 8$ 대입: $A + 1 = 8^2 + 3 \times 8 + 1 = 64 + 24 + 1 = 89$.

5) 따라서 $8 \times 9 \times 10 \times 11 + 1 = 89^2 = 7921$ (검증: $8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 = 7920$ ✓).

🧠 풀이 전략: 연속 자연수의 곱을 바로 계산하기보다, '적절한 묶기'로 공통 부분식을 만들어 치환하는 것이 핵심. 양끝 곱과 가운데 곱이 서로 2만큼만 차이나는 구조를 이용.

💡 $n(n+1)(n+2)(n+3) + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2$ 은 모든 자연수 n에 대해 성립하는 항등식이어서, 연속 네 수의 곱은 언제나 '어떤 정수의 제곱에서 1을 뺀 수'가 됨.

Q85 일차방정식 활용

농도 15%인 소금물 400g이 있다. 이 소금물에서 물만 x g을 증발시켰더니 농도가 20%가 되었다. x의 값은?

①) ① 80g
②) ② 100g
③) ③ 120g
④) ④ 150g

🎯 **정답: ② 100g**

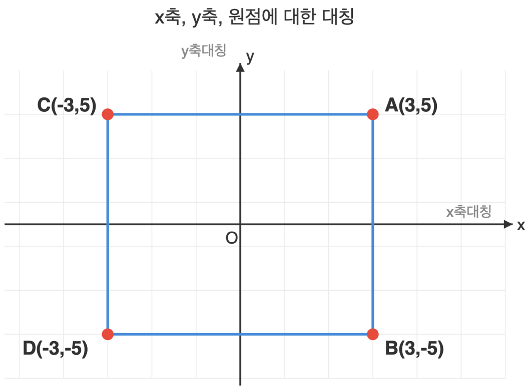
📖 1단계. 원래 소금의 양을 구한다. 400 × 0.15 = 60(g). 증발하는 것은 물만이므로 소금의 양은 변하지 않는다.
2단계. 증발 후 소금물의 양은 (400-x) g이고 농도가 20%이므로 그때 소금의 양은 (400-x) × 0.2 이다.
3단계. 소금의 양이 일정하다는 조건으로 등식을 만든다. 60 = 0.2(400-x) = 80 - 0.2x. 이를 풀면 0.2x = 20, x = 100.

🧠 풀이 전략: 농도 변화 문제에서는 '변하지 않는 양'을 기준으로 식을 세우는 것이 핵심이다. 여기서는 물만 증발하므로 소금의 양이 그대로이다. 증발 전 소금 = 증발 후 소금 으로 등식을 만들면 간단히 풀 수 있다.

💡 바다에서 소금을 얻는 염전은 이 원리를 이용한다. 바닷물을 햇빛에 증발시켜 농도를 높이고 마지막에 결정을 거둔다.

Q86 좌표평면 응용

좌표평면 위의 점 A(3, 5)를 x축, y축, 원점에 대하여 각각 대칭이동한 점을 B, C, D라 하자. 네 점 A, B, C, D를 꼭짓점으로 하는 도형의 넓이는?



①) ① 30
②) ② 45
③) ③ 60
④) ④ 90

🎯 **정답: ③ 60**

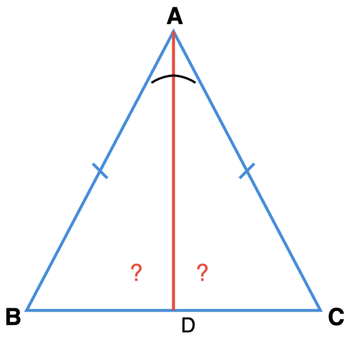
📖 1단계. 대칭이동한 점들의 좌표를 구한다. x축 대칭 B(3, -5), y축 대칭 C(-3, 5), 원점 대칭 D(-3, -5).
2단계. 네 점을 좌표평면에 표시하면 네 꼭짓점의 x좌표는 3 또는 -3, y좌표는 5 또는 -5 이므로 변이 좌표축에 평행한 직사각형을 이룬다.
3단계. 가로 길이 = 3 - (-3) = 6, 세로 길이 = 5 - (-5) = 10. 따라서 넓이 = 6 × 10 = 60.

🧠 풀이 전략: 점의 대칭이동을 기하학적으로 해석하는 문제이다. 한 점과 그 x축, y축, 원점 대칭점 세 개는 언제나 좌표축에 평행한 직사각형의 네 꼭짓점이 된다. 좌표만 찾으면 가로와 세로 길이 곱으로 넓이를 구할 수 있다.

💡 원점에 대하여 대칭이동하는 것은 x축 대칭과 y축 대칭을 연이어 적용한 결과와 같다. 이것은 원점을 중심으로 180° 회전한 것과도 완전히 동일하다.

Q87 합동 증명 기초

이등변삼각형 ABC에서 AB = AC 이다. 꼭짓점 A에서 그은 각의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D라 할 때, 삼각형 ABD와 삼각형 ACD가 합동임을 이용하여 AD ⊥ BC 임을 증명하시오.



🎯 **정답: AD ⊥ BC, 즉 ∠ADB = ∠ADC = 90°**

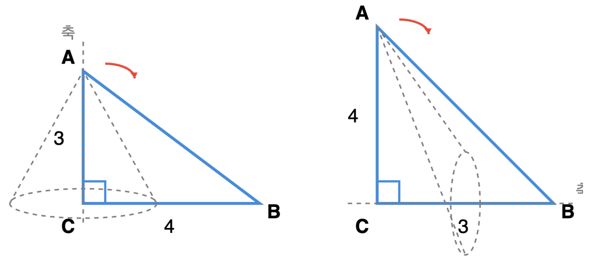
📖 1단계. 두 삼각형 ABD 와 ACD의 대응 요소를 확인한다. AB = AC (이등변삼각형 조건), ∠BAD = ∠CAD (AD가 각 A의 이등분선이므로), AD 는 두 삼각형의 공통변.
2단계. 두 변의 길이가 같고 그 끼인각이 같으므로 두 변과 끼인각 조건에 의해 삼각형 ABD 와 삼각형 ACD는 합동이다. 따라서 대응각 ∠ADB = ∠ADC 이다.
3단계. 점 D가 선분 BC 위에 있으므로 ∠ADB + ∠ADC = 180° (일직선 위 이웃한 각의 합). 두 각이 서로 같고 합이 180°이므로 각각의 크기는 90°. 따라서 AD ⊥ BC.

🧠 풀이 전략: 합동 증명 문제에서는 두 삼각형의 대응 요소 세 쌍을 찾아 합동 조건(세 변, 두 변과 끼인각, 한 변과 양 끝각) 중 하나에 맞추는 것이 기본 전략이다. 합동으로부터 얻은 각의 관계를 직선 위 이웃한 각의 성질에 연결하여 수직을 이끌어낸다.

💡 이등변삼각형의 이 성질은 유클리드 원론 1권 명제 5에 실려 있으며, 예로부터 초보자가 처음으로 부딪히는 어려운 관문이라는 뜻에서 '당나귀 다리'라 불렸다.

Q88 입체 추론

직각삼각형 ABC 에서 $\angle C = 90°$, $AC = 3$, $BC = 4$ 이다. 이 삼각형을 변 AC를 회전축으로 하여 한 바퀴 회전시킨 입체의 부피를 V_1, 변 BC를 회전축으로 하여 한 바퀴 회전시킨 입체의 부피를 V_2 라 할 때, $V_1 : V_2$ 를 가장 간단한 자연수의 비로 나타내시오.



①) ① 3 : 4

②) ② 4 : 3

③) ③ 9 : 16

④) ④ 16 : 9

🎯 **정답: ② 4 : 3**

📖 1단계. 변 AC를 축으로 회전하면 BC가 밑면의 반지름이 되고 AC가 높이가 된다. 밑면 반지름 4, 높이 3인 원뿔이 생긴다. $V_1 = (1/3) \times \pi \times 4^2 \times 3 = 16\pi$.

2단계. 변 BC를 축으로 회전하면 AC가 밑면의 반지름이 되고 BC가 높이가 된다. 밑면 반지름 3, 높이 4인 원뿔이 생긴다. $V_2 = (1/3) \times \pi \times 3^2 \times 4 = 12\pi$.

3단계. 따라서 $V_1 : V_2 = 16\pi : 12\pi = 16 : 12 = 4 : 3$.

🧠 풀이 전략: 직각삼각형을 한 직각변 축으로 회전시키면 원뿔이 만들어진다. 축이 된 변이 원뿔의 높이이고, 다른 직각변이 밑면 반지름이 됨을 파악한다. 원뿔 부피는 $(1/3) \times \pi \times (\text{반지름})^2 \times$ 높이 이므로 반지름이 제곱으로 작용한다. 그래서 같은 삼각형이라도 축을 바꾸면 부피가 달라진다.

💡 부피 식에서 반지름은 제곱이므로, 반지름을 크게 하는 쪽이 부피가 유리하다. 같은 둘레를 가진 도형 중에서는 원이 가장 넓은 넓이를 가지는 것도 같은 원리이다.

Q89 일차방정식 활용

정지된 물에서 일정한 속력으로 달리는 배가 있다. 이 배가 강에서 A지점에서 B지점까지 흐름을 따라 내려갈 때는 2시간이 걸리고, 같은 거리를 B지점에서 A지점으로 거슬러 올라갈 때는 3시간이 걸린다. 강물의 속력이 시속 3km일 때, 정지된 물에서의 배의 속력은?

①) ① 시속 12km
②) ② 시속 15km
③) ③ 시속 18km
④) ④ 시속 21km

🎯 **정답: ② 시속 15km**

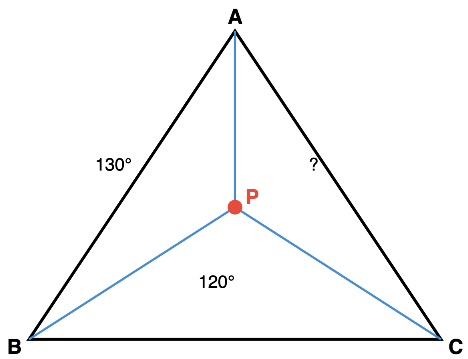
📖 1단계. 정지된 물에서 배의 속력을 시속 x km 라 하자. 강을 따라 내려갈 때 실제 속력은 (x + 3) km/h, 거슬러 올라갈 때 실제 속력은 (x - 3) km/h 이다.
2단계. A와 B 사이의 거리는 같으므로 (내려갈 때 속력) × 2 = (올라갈 때 속력) × 3 으로 식을 세운다. 즉 (x + 3) × 2 = (x - 3) × 3.
3단계. 식을 전개하면 2x + 6 = 3x - 9. 정리하면 x = 15. 따라서 배의 속력은 시속 15km.

🧠 풀이 전략: 흐름이 있는 강 위 배 문제에서는 '실제 속력 = 배 자체 속력 ± 흐름 속력'을 먼저 정리한다. A와 B 사이 거리가 같다는 조건을 이용해 (속력 × 시간)을 양변에 두고 방정식을 만든다. 거리를 따로 문자로 놓지 않아도 된다.

💡 조선 시대에는 한강의 물살을 이용해 서울에서 화성까지 배로 화물을 빠르게 내려보냈다. 올라올 때는 돛과 사람의 힘을 함께 써야 했기에 시간이 훨씬 더 걸렸다고 한다.

Q90 도형 성질 추론

삼각형 ABC 의 내부에 점 P 가 있다. 점 P에서 세 꼭짓점에 선분을 그었더니 ∠APB = 130°, ∠BPC = 120° 가 되었다. 이때 ∠CPA 의 크기를 구하시오.



①) ① 100°
②) ② 110°
③) ③ 120°
④) ④ 130°

🎯 **정답: ② 110°**

📖 1단계. 점 P 둘레를 이루는 세 각 ∠APB, ∠BPC, ∠CPA 는 점 P를 중심으로 하는 한 바퀴를 완전히 이룬다. 따라서 세 각의 합은 360° 이다.
2단계. ∠APB + ∠BPC + ∠CPA = 360°. 주어진 값을 대입하면 130° + 120° + ∠CPA = 360°.
3단계. 따라서 ∠CPA = 360° - 130° - 120° = 110°.

🧠 풀이 전략: 도형 내부의 한 점에서 여러 방향으로 선분을 그으면 그 점 둘레의 각들의 합은 반드시 360° 가 된다. 이 '한 바퀴는 360°' 원리가 핵심이다. 삼각형 내각 합 180° 와 혼동하지 않도록 '점 주위'인지 '삼각형 내각'인지를 구분한다.

💡 한 점 둘레의 각이 모두 120° 로 같은 경우를 '페르마 점' 이라 한다. 이 점에서 삼각형 세 꼭짓점까지의 거리 합이 가장 짧아진다. 건축과 네트워크 설계에서 실제로 쓰이는 최적화 개념이다.

Q91 자료·경시 퍼즐

서로 다른 5개의 자연수로 이루어진 자료의 평균이 10 이고 중앙값이 8 이다. 이 자료의 최댓값이 될 수 있는 값 중에서 가장 큰 수를 구하시오.

①) ① 26
②) ② 28
③) ③ 30
④) ④ 32

🎯 **정답: ③ 30**

📖 1단계. 5개 자료를 작은 순서대로 a, b, c, d, e 라 하자. 중앙값이 8이므로 가운데 값 c = 8. 평균이 10이므로 합은 5 × 10 = 50. 따라서 a + b + 8 + d + e = 50, 즉 a + b + d + e = 42.
2단계. 최댓값 e 를 가장 크게 하려면 나머지 a, b, d 를 가능한 한 작게 잡아야 한다. a < b < 8 이고 서로 다른 자연수이므로 a 와 b 의 최솟값은 각각 1, 2.
3단계. 또 8 < d < e 이고 d 는 자연수이므로 d 의 최솟값은 9. 따라서 최댓값 e = 42 - 1 - 2 - 9 = 30.

🧠 풀이 전략: '어떤 값이 가질 수 있는 최댓값' 을 묻는 문제는 '다른 값들을 모두 최소로 만드는' 전략을 쓴다. 합이 고정된 상태에서 한 변수를 크게 하려면 나머지를 작게 해야 한다. 여기서는 '서로 다른 자연수', '중앙값', '대소 관계' 세 가지 조건이 각 변수의 하한을 만들어 준다.

💡 평균과 중앙값 차이가 클수록 자료가 한쪽으로 치우쳐 있다고 본다. 이 문제처럼 최댓값이 극단적으로 큰 자료는 평균이 중앙값보다 많이 커져서 '오른쪽으로 기울었다' 고 한다.

Q92 정수·유리수 추론

0이 아닌 세 유리수 a, b, c 에 대하여 $\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}+\frac{abc}{|abc|}$ 의 값이 될 수 없는 것은?

①) ① 4
②) ② 2
③) ③ 0
④) ④ -4

🎯 **정답: ② 2**

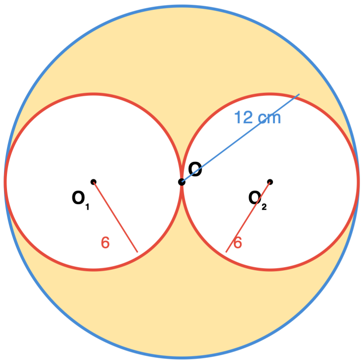
📖 1단계. 각 항 $\frac{x}{|x|}$ 는 x가 양수이면 +1, 음수이면 -1 이다. a, b, c 중 음수의 개수에 따라 경우를 나눈다.
2단계. 음수 0개이면 처음 세 항 합은 +3, abc는 양수이므로 +1, 총합 +4. 음수 1개이면 처음 세 항 합은 +1, abc는 음수이므로 -1, 총합 0. 음수 2개이면 처음 세 항 합은 -1, abc는 양수이므로 +1, 총합 0. 음수 3개이면 처음 세 항 합은 -3, abc는 음수이므로 -1, 총합 -4.
3단계. 따라서 가능한 값은 4, 0, -4 뿐이다. 보기 중 2 는 절대 나올 수 없다.

🧠 풀이 전략: $\frac{x}{|x|}$ 꼴은 부호를 +1 또는 -1 로 바꾸는 '부호 판별기' 이다. 경우의 수를 음수의 개수(0개, 1개, 2개, 3개)로 나누는 분류 전략을 쓴다. 특히 홀수 개 음수이면 곱 abc가 음수, 짝수 개 음수이면 abc가 양수가 됨을 활용한다.

💡 이런 함수를 '부호 함수 (sign function)' 라 하고 sgn(x) 라 쓴다. 공학과 전자 회로에서 신호가 양극인지 음극인지 판별하는 데 실제로 쓰이는 기본 함수이다.

Q93 원·부채꼴 심화

반지름이 12 cm 인 큰 원의 내부에 반지름이 6 cm 인 작은 원 두 개가 서로 외접하면서 큰 원에 내접한다. 큰 원의 내부에서 두 작은 원을 제외한 부분의 넓이를 구하시오.



①) ① 54π cm²
②) ② 72π cm²
③) ③ 90π cm²
④) ④ 108π cm²

🎯 **정답: ② 72π cm²**

📖 1단계. 큰 원의 넓이를 구한다. $\pi \times 12^2 = 144\pi$ (cm²).
2단계. 작은 원 하나의 넓이는 $\pi \times 6^2 = 36\pi$ (cm²). 작은 원 두 개의 넓이는 $2 \times 36\pi = 72\pi$ (cm²).
3단계. 구하는 영역은 큰 원에서 두 작은 원을 제외한 부분이므로 넓이 $= 144\pi - 72\pi = 72\pi$ (cm²).

🧠 풀이 전략: 복합 도형의 넓이는 '전체 - 제외' 전략이 기본이다. 큰 원의 지름(24 cm)과 두 작은 원의 지름 합(12 + 12 = 24 cm)이 정확히 같다는 것을 확인하면 배치가 성립함을 알 수 있다. 공통 접점이나 접선 위치를 먼저 상상해야 배치가 선명해진다.

💡 반지름이 절반인 원을 두 개 넣으면 넓이는 원래의 절반이 된다. 반지름이 1/3 이면 9개, 1/n 이면 n^2 개의 작은 원이 있어야 큰 원과 같은 넓이가 된다. 원 넓이는 반지름의 제곱에 비례하기 때문이다.

Q94 문자와 식 심화

일정한 규칙으로 막대를 쌓는다. 1층에 3개, 2층에 5개, 3층에 7개, ... 처럼 위로 한 층 올라갈 때마다 막대를 2개씩 더 쌓는다. 이렇게 n 층까지 쌓았을 때 사용한 막대의 총 개수를 n 에 대한 식으로 나타내시오.

①) ① n^2
②) ② $n^2 + n$
③) ③ $n^2 + 2n$
④) ④ $2n^2 + n$

🎯 **정답: ③ $n^2 + 2n$**

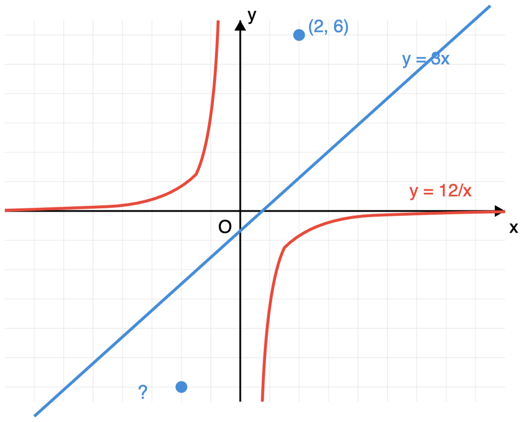
📖 1단계. k 층에 쌓는 막대의 개수 규칙을 찾는다. 1층 = 3, 2층 = 5, 3층 = 7 이므로 k 층에 놓는 막대는 $2k + 1$ 개.
2단계. n 층까지 총 막대의 개수는 $3 + 5 + 7 + ... + (2n + 1)$ 이다. 이 합은 첫 항 3, 끝 항 $2n + 1$ 인 등차수열 합이므로 합 = (첫 항 + 끝 항) × 항수 ÷ 2 $= (3 + 2n + 1) \times n \div 2 = (2n + 4) \times n \div 2 = n^2 + 2n$.
3단계. 검산. n = 1 이면 1 + 2 = 3 ✓, n = 2 이면 4 + 4 = 8 = 3 + 5 ✓, n = 3 이면 9 + 6 = 15 = 3 + 5 + 7 ✓. 따라서 총 개수는 $n^2 + 2n$.

🧠 풀이 전략: 수열 규칙 문제는 '한 항의 식' 을 먼저 구하고 그 다음 '합의 식' 을 만든다. 등차수열 합 공식 = (첫 항 + 끝 항) × 항수 ÷ 2 를 활용한다. 답 후보를 실제 작은 n 값에 대입해 검산하면 함정 선지에 속지 않는다.

💡 $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$ 은 유명한 공식이다. 이 문제의 수열은 그 공식에서 첫 항을 빼고 뒤에 3, 5, 7, ... 로 시작하는 변형 버전이라 결과도 n^2에 보정항 2n 이 붙는다.

Q95 좌표평면 응용

좌표평면에서 정비례 그래프 $y = ax$ 와 반비례 그래프 $y = 12/x$ 가 만나는 두 교점 중 한 점이 (2, 6) 이다. 다른 한 교점의 좌표를 구하시오.



①) ① (-2, -6)

②) ② (-2, 6)

③) ③ (2, -6)

④) ④ (-6, -2)

🎯 **정답: ① (-2, -6)**

📖 1단계. 점 (2, 6) 이 $y = ax$ 위에 있으므로 $6 = 2a$, $a = 3$. 따라서 정비례 그래프는 $y = 3x$.

2단계. 교점 조건은 $y = 3x$ 와 $y = 12/x$ 를 동시에 만족해야 하므로 $3x = 12/x$, 즉 $3x^2 = 12$, $x^2 = 4$.

3단계. $x = 2$ 또는 $x = -2$. $x = 2$ 이면 $y = 6$ 이고 이는 이미 알고 있는 교점. $x = -2$ 이면 $y = 3 \times (-2) = -6$. 따라서 다른 교점은 (-2, -6).

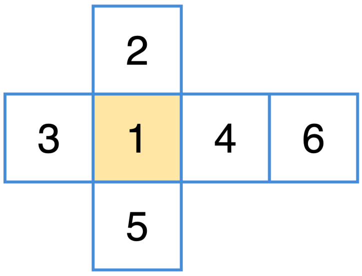
🧠 풀이 전략: 정비례 $y = ax$ 와 반비례 $y = k/x$ 는 모두 원점에 대하여 대칭인 그래프이다. 그래서 두 그래프의 교점도 반드시 원점에 대하여 대칭인 두 점으로 나타난다. 한 교점이 (p, q) 이면 다른 교점은 자동으로 (-p, -q). 이 대칭성을 알면 방정식 없이도 답을 짐작할 수 있다.

💡 정비례와 반비례는 모두 '원점 대칭 함수' 이다. 두 그래프의 교점들의 중점은 항상 원점이 된다. 이런 대칭성은 함수 그래프의 모양을 빠르게 판단하는 데 유용하다.

Q96 입체 추론

그림은 주사위의 전개도이다. 십자 모양의 가운데 정사각형에 1 이 있고, 위에 2, 아래에 5, 왼쪽에 3, 오른쪽에 4, 그리고 4의 오른쪽에 6 이 있다. 이 전개도를 접어 주사위를 만들 때, 숫자 1 의 맞은편 면에 오는 숫자는?

주사위 전개도 (1번 칸 기준)



십자 모양 + 오른쪽 한 칸 추가

①) ① 2
②) ② 4
③) ③ 5
④) ④ 6

🎯 **정답: ④ 6**

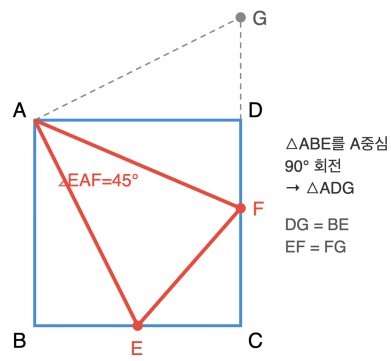
📖 1단계. 가운데 1 이 들어있는 칸을 바닥면으로 고정하고 주변 면을 접어 올린다고 상상한다. 1 의 위쪽 2 는 뒤쪽 벽으로, 아래쪽 5 는 앞쪽 벽으로 접힌다. 즉 2 와 5 는 서로 맞은편 면이 된다.
2단계. 1 의 왼쪽 3 은 왼쪽 벽, 오른쪽 4 는 오른쪽 벽이 된다. 따라서 3 과 4 도 서로 맞은편 면.
3단계. 6 은 4 와 한 변으로 붙어 있다. 4 가 오른쪽 벽이 된 뒤 6 을 더 접으면 6 은 4 의 건너편으로 말려 올라가 바닥면 1 의 반대쪽, 즉 천장 면이 된다. 따라서 1 의 맞은편은 6.

🧠 풀이 전략: 전개도 문제는 '기준 면을 하나 고정한 뒤 나머지 면이 어느 방향 벽이 되는지 순서대로 접기' 전략을 쓴다. 여기서는 1 이 들어간 가운데 칸을 바닥으로 두는 것이 가장 쉽다. 또한 일직선으로 네 면이 붙어 있는 경우, 양 끝 두 면은 서로 맞은편이 됨을 기억하면 6 의 위치를 쉽게 알 수 있다.

💡 표준 주사위는 마주 보는 두 면의 눈 합이 항상 7 이 되도록 만든다. 1 ↔ 6, 2 ↔ 5, 3 ↔ 4. 이 전개도의 배치 결과도 그 규칙과 일치한다.

Q97 합동 증명 기초

정사각형 ABCD의 변 BC, CD 위에 각각 점 E, F가 있고, ∠EAF = 45°이다. 이때 BE + DF = EF 임을 증명하려고 한다. 삼각형 ABE를 점 A를 중심으로 시계방향으로 90° 회전시켜 삼각형 ADG를 얻었을 때, 다음 중 증명 과정에서 **틀린** 것은? (단, G는 CD의 연장선 위의 점)



①) ① 삼각형 ABE ≡ 삼각형 ADG (회전이동이므로 대응변·각 모두 일치)

②) ② AE = AG 이고 ∠BAE = ∠DAG 이다

③) ③ ∠GAF = ∠DAG + ∠DAF = ∠BAE + ∠DAF = 90° - 45° = 45° = ∠EAF

④) ④ 삼각형 AEF ≡ 삼각형 AGF (SSS 합동)이므로 EF = GF = BE + DF

🎯 **정답: ④**

📖 1단계: ①②③은 모두 옳다. 회전이동 결과 삼각형 ABE ≡ 삼각형 ADG이고, ∠BAD = 90°, ∠EAF = 45°이므로 ∠BAE + ∠DAF = 45°. 따라서 ∠GAF = ∠DAG + ∠DAF = ∠BAE + ∠DAF = 45° = ∠EAF.

2단계: ④에서 삼각형 AEF와 삼각형 AGF를 비교하면 AE = AG, AF는 공통, ∠EAF = ∠GAF = 45°이다. 이는 SSS가 아니라 **SAS 합동 조건**이다.

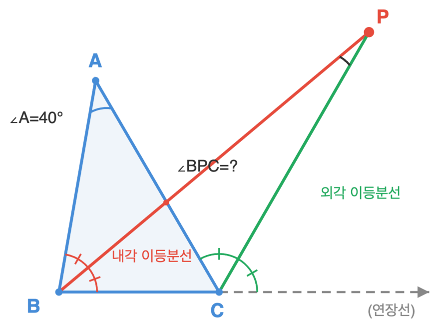
3단계: SAS에 의해 EF = GF = DG + DF = BE + DF이므로 결론 자체는 옳지만, ④에서 제시한 **합동 조건의 이름('SSS')이 틀렸다**. 따라서 잘못된 설명은 ④.

🧠 풀이 전략: 정사각형의 90° 회전대칭을 이용해 떨어져 있는 선분 BE와 DF를 한 직선 위로 '붙이는' 전략. 회전 후 ∠EAF = ∠GAF를 보이고, 공통변 AF를 끼고 있으므로 SAS 합동을 적용해야 한다. 보기에서 합동 조건의 '이름'이 맞는지까지 꼼꼼히 확인하는 것이 핵심.

💡 이 '정사각형 45° 회전' 기법은 중국·한국 영재 교육에서 자주 등장하는 고전 문제로, 대학 입시의 기하 증명에서도 응용된다.

Q98 도형 성질 추론

삼각형 ABC에서 ∠A = 40°이고, ∠B의 이등분선과 ∠C의 **외각**의 이등분선이 점 P에서 만난다. ∠BPC의 크기는?



①) ① 20°

②) ② 25°

③) ③ 30°

④) ④ 40°

🎯 **정답: ① 20°**

📖 1단계: ∠B = 2β, ∠C = 2γ라 하자. △ABC의 내각의 합에서 40° + 2β + 2γ = 180°이므로 β + γ = 70°이다.
2단계: BP는 ∠B의 이등분선이므로 △BPC에서 ∠PBC = β이다.
3단계: 점 C에서 BC를 연장하여 만든 외각(크기 180° - 2γ)을 CP가 이등분하므로 CP는 BC의 연장선과 (180° - 2γ)/2 = 90° - γ의 각을 이룬다. 그런데 △BPC의 내각 ∠PCB는 연장선이 아니라 그 반대 방향인 변 CB와 CP가 이루는 각이므로 ∠PCB = 180° - (90° - γ) = 90° + γ이다.
4단계: △BPC의 내각의 합에서 ∠BPC = 180° - ∠PBC - ∠PCB = 180° - β - (90° + γ) = 90° - (β + γ) = 90° - 70° = 20°이다.
(즉 한 내각의 이등분선과 다른 꼭짓점의 외각의 이등분선이 이루는 각은 나머지 꼭짓점 각의 절반, ∠A/2 = 20°이다.)

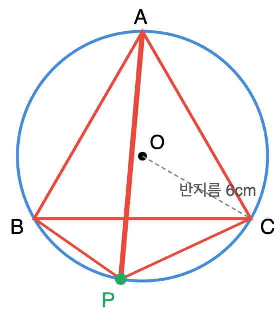
🧠 풀이 전략: 삼각형에서 한 꼭짓점의 내각이등분선과 다른 꼭짓점의 외각이등분선이 이루는 각은 항상 나머지 꼭짓점 각의 절반이라는 공식을 유도·기억하는 문제. ∠A/2 공식을 외각의 성질(외각 = 두 내대각의 합)로부터 유도하는 것이 핵심.

💡 이 공식은 방접원(삼각형 밖에서 한 변과 다른 두 변의 연장선에 접하는 원)의 중심을 찾는 데 사용된다.

Q99 원·부채꼴 심화

반지름이 6cm인 원 O에 내접하는 정삼각형 ABC가 있다. 원 위에서 호 BC(꼭짓점 A를 포함하지 않는 쪽) 위의 임의의 점 P에 대해 PA, PB, PC를 그었을 때, 다음 중 **항상 성립하는** 관계는?

원 O에 내접하는 정삼각형 ABC



P는 호 BC 위의 점 (A 미포함 호)

①) ① PA = PB + PC (프톨레마이오스)

②) ② $PA^2 = PB^2 + PC^2$

③) ③ PA = 2·(PB + PC)

④) ④ PA·BC = PB + PC

🎯 **정답: ①**

📖 1단계: 원에 내접하는 사각형 ABPC(순서대로 A-B-P-C가 원 위에 놓임, B와 C 사이 호에 P 있음)를 생각하자. 정삼각형 ABC이므로 AB = BC = CA.

2단계: **프톨레마이오스 정리**에 의해 원에 내접하는 사각형 ABPC에서 (대각선의 곱) = (마주보는 변의 곱의 합)이 성립: PA · BC = AB · PC + AC · PB.

3단계: AB = BC = CA = L로 놓으면 PA · L = L · PC + L · PB, 양변을 L로 나누면 **PA = PB + PC**. 따라서 ①이 정답. (참고: ②는 직각이 아닌 일반적 경우에는 성립하지 않는다.)

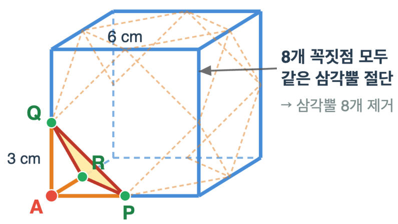
🧠 풀이 전략: 원에 내접하는 도형의 관계는 '프톨레마이오스 정리'를 의심해본다. 정삼각형의 세 변이 모두 같다는 점이 핵심. 보기 ②는 피타고라스 정리와 혼동하도록 만든 함정으로, P가 호의 중점일 때조차 성립하지 않는다.

💡 이 '반 데르 베르던 정리'라고도 불리는 결과는 1200년대 초 이슬람 수학자 알투시에 의해 이미 알려져 있었다.

Q100 입체 추론

한 모서리가 6cm인 정육면체가 있다. 꼭짓점 A에서 만나는 세 모서리의 중점을 각각 P, Q, R이라 하고, 이 세 점을 지나는 평면으로 정육면체를 잘라 생긴 작은 삼각뿔(A-PQR)을 떼어냈다. 이와 같이 정육면체의 **모든 8개 꼭짓점**에서 같은 방식으로 삼각뿔을 떼어낼 때, 남은 입체의 부피는?

8개 꼭짓점에서 삼각뿔 절단 → 남은 입체의 부피?



정육면체 $6^3 = 216$ cm³, 삼각뿔 1개 = $(1/6)\cdot3\cdot3\cdot3 = 9/2$ cm³

8개 제거 = $8 \cdot 9/2 = 36$ cm³ → $216 - 36 =$ **180 cm³**

🎯 **정답: 180 cm³**

📖 1단계: 원래 정육면체의 부피 = $6^3 = 216$ cm³.

2단계: 꼭짓점 A에서 떼어내는 삼각뿔 A-PQR은 A에서 만나는 세 모서리 AP, AQ, AR이 모두 3cm(모서리의 절반)이고 서로 수직인 직각 삼각뿔이다. 밑면 삼각형 PQR은 세 변이 모두 $3\sqrt{2}$ cm인 정삼각형(넓이 = $(\sqrt{3}/4)\cdot(3\sqrt{2})^2 = 9\sqrt{3}/2$ cm²)이지만, 삼각뿔의 부피는 서로 수직인 세 모서리를 이용한 공식 $V = (1/6)\cdot a\cdot b\cdot c$로 계산하면 더 쉽다. $V_1 = (1/6)\cdot3\cdot3\cdot3 = 27/6 = 9/2$ cm³.

3단계: 8개 꼭짓점에서 같은 삼각뿔을 떼어내는데, **절단면들이 서로 겹치지 않는지 확인**. 각 모서리의 중점에서 두 이웃 꼭짓점의 절단이 만난다(정확히 중점에서). 따라서 떼어내는 총 부피 = $8 \cdot (9/2) = 36$ cm³.

4단계: 남은 입체의 부피 = 216 - 36 = **180 cm³**.

🧠 풀이 전략: 직각삼각뿔 부피 공식 $V = (1/6)abc$ 를 활용하는 문제. 핵심은 '8개의 절단이 겹치지 않는가?' 확인하는 것. 각 모서리의 중점에서 양쪽 꼭짓점의 절단면이 정확히 만나므로 겹침이 없어 단순 뺄셈이 가능하다. 겹침을 의심하지 않으면 포함배제를 쓰게 되는 함정에 빠진다.

💡 이렇게 8개 모서리를 잘라낸 입체를 '꼭지 잘린 정육면체(truncated cube)'라고 하며, 정육면체의 모서리 중점을 모두 잘라내면 정팔면체의 쌍대 관계인 입방팔면체(cuboctahedron)가 된다.

Q101 정수·유리수 추론

절댓값 방정식 $|2x+3|=7$의 모든 해의 곱을 구하시오.

①) ①-10

②) ②-7

③) ③7

④) ④10

🎯 **정답: ①-10**

📖 1단계: 절댓값의 정의에 의해 $2x+3=7$ 또는 $2x+3=-7$ 두 경우로 나눈다. 2단계: 첫 번째 식에서 $2x=4$이므로 $x=2$, 두 번째 식에서 $2x=-10$이므로 $x=-5$. 3단계: 두 해 2와 -5의 곱은 $2\times(-5)=-10$이다. 함정: 절댓값을 그대로 풀어 7과 7만 곱하거나 부호를 무시하면 +10이 나오기 쉬우니 부호 추적이 핵심이다.

🧠 풀이 전략: 절댓값 방정식은 '절댓값 안의 식 = 양수' 또는 '절댓값 안의 식 = 음수' 두 경우로 나누어 푸는 경우 분리 전략을 사용한 뒤, 각 해를 정확한 부호와 함께 결합한다.

💡 $|x|$는 수직선에서 0과 x 사이의 거리를 뜻하므로 항상 0 이상이다.

Q102 문자와 식 심화

어떤 수에 5를 더한 결과의 2배가, 그 수에서 1을 뺀 결과의 3배와 같다. 이 어떤 수를 구하시오.

①) ①11
②) ②12
③) ③13
④) ④14

🎯 **정답: ③13**

📖 1단계: 어떤 수를 x라 하면 식은 2(x+5)=3(x-1). 2단계: 좌변을 전개하면 2x+10, 우변을 전개하면 3x-3이므로 2x+10=3x-3. 3단계: 양변에서 2x를 빼면 10=x-3이고 양변에 3을 더하면 x=13. 함정: '5를 더한 결과의 2배'를 2x+5처럼 괄호 없이 쓰면 항상 틀린다.

🧠 풀이 전략: 한국어 문장의 두 양이 같다는 관계를 식으로 옮기는 식 세우기 전략. '~의 ~배'를 반드시 괄호로 묶어 곱셈을 분리해야 한다.

💡 좌변과 우변을 각각 단순화한 뒤 같다 놓으면 일차방정식 한 줄로 정리된다.

Q103 일차방정식 활용

A지점에서 B지점까지 자전거를 타고 시속 12km로 갔고, 같은 길을 시속 8km로 돌아왔다. 이 자전거 라이더의 왕복 평균 속력은? (단위 km/h)

①) ①8.5
②) ②9.6
③) ③10
④) ④10.4

🎯 **정답: ②9.6**

📖 1단계: A에서 B까지 거리를 d km라 하면 가는 시간은 d/12 시간, 오는 시간은 d/8 시간이다. 2단계: 총 시간 = d/12 + d/8 = (2d+3d)/24 = 5d/24 시간이고, 총 거리는 2d km. 3단계: 평균 속력 = 총 거리 ÷ 총 시간 = 2d ÷ (5d/24) = 48/5 = 9.6 km/h. 함정: 12와 8의 산술평균 10 km/h를 답하기 쉽지만, 같은 거리에 다른 속력이 적용되면 시간이 다르므로 산술평균은 틀린다.

🧠 풀이 전략: 왕복 평균 속력은 '총 거리 ÷ 총 시간'으로 계산하는 조화평균 전략을 사용한다. 거리를 미지수 d로 두고 시간을 식으로 표현한 뒤 d가 약분되도록 만드는 것이 요령이다.

💡 갈 때 a, 올 때 b의 속력일 때 왕복 평균 속력은 항상 산술평균 (a+b)/2보다 작은 조화평균 2ab/(a+b)이다.

Q104 일차방정식 활용

A호스로만 채우면 6시간, B호스로만 채우면 12시간 걸리는 빈 물탱크가 있다. 처음 t시간 동안은 A호스만 열고, 그 다음에는 두 호스를 동시에 열어 총 5시간 만에 가득 찼다. t의 값을 구하시오. (단위 시간)

①) ①2
②) ②2.5
③) ③3
④) ④3.5

🎯 **정답: ③3**

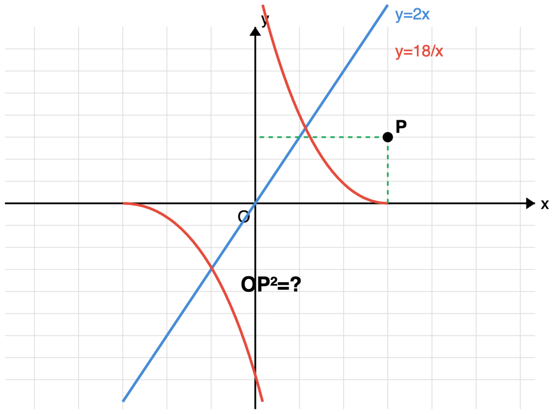
📖 1단계: 1시간당 채워지는 비율은 A가 1/6, B가 1/12이고 두 호스를 동시에 열면 1/6+1/12=1/4. 2단계: A 단독으로 t시간 + (A+B)로 (5-t)시간 = 가득(1)이므로 (1/6)·t + (1/4)·(5-t) = 1. 3단계: 양변에 12를 곱하면 2t + 3(5-t) = 12, 즉 2t+15-3t=12이므로 -t=-3, t=3.

🧠 풀이 전략: 일률(시간당 작업량) 문제는 단위시간당 작업 비율을 분수로 표현한 뒤 '비율×시간 = 작업량'으로 식을 세우는 전략이다. 작업이 단계별로 다르면 각 구간을 따로 계산해 합한다.

💡 두 호스의 합산 일률 1/4은 둘이 함께 4시간이면 다 채울 수 있다는 뜻이다.

Q105 좌표평면 응용

좌표평면 위에서 정비례 그래프 y=2x와 반비례 그래프 y=18/x의 1사분면 위 교점을 P라 하자. 원점 O와 점 P 사이의 거리의 제곱 (OP^2)을 구하시오.



①) ①25

②) ②36

③) ③45

④) ④54

🎯 **정답: ③45**

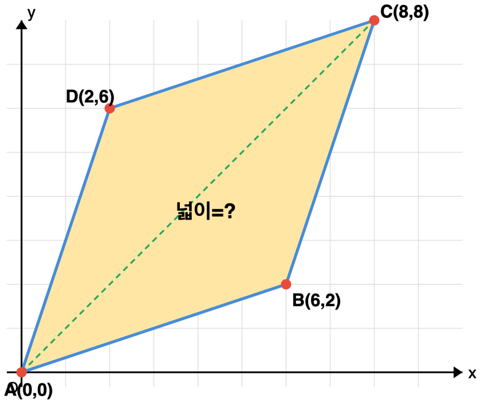
📖 1단계: 교점은 두 식을 동시에 만족하므로 2x=18/x. 양변에 x를 곱하면 $2x^2=18$, 즉 $x^2=9$. 2단계: 1사분면 조건이므로 x>0이고 x=3, y=2·3=6이다. 따라서 P(3, 6). 3단계: 원점에서의 거리의 제곱은 $OP^2 = 3^2 + 6^2 = 9 + 36 = 45$.

🧠 풀이 전략: 직선과 쌍곡선의 교점은 두 식을 같다 놓고 분수를 정리하면 이차 형태가 된다. 사분면 조건으로 부호를 결정한 뒤 거리의 제곱은 피타고라스 정리(좌표 거리 공식)로 구하는 전략을 사용한다.

💡 정비례와 반비례의 교점은 항상 원점에 대해 점대칭으로 두 개 존재한다.

Q106 좌표평면 응용

좌표평면 위 네 점 A(0,0), B(6,2), C(8,8), D(2,6)을 꼭짓점으로 하는 사각형 ABCD의 넓이를 구하시오.



①) ①28

②) ②32

③) ③36

④) ④40

🎯 **정답: ②32**

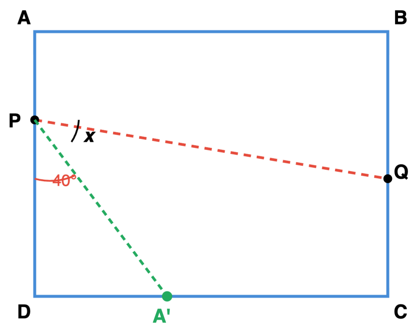
📖 1단계: 대각선 AC를 그어 사각형을 두 삼각형 ABC와 ACD로 나눈다. 2단계: 삼각형 ABC의 넓이는 좌표공식으로 1/2·|0·(2-8) + 6·(8-0) + 8·(0-2)| = 1/2·|0+48-16| = 16. 3단계: 삼각형 ACD의 넓이는 1/2·|0·(8-6) + 8·(6-0) + 2·(0-8)| = 1/2·|0+48-16| = 16. 사각형의 넓이는 16+16=32.

🧠 풀이 전략: 좌표 위 다각형은 대각선으로 삼각형으로 분할한 뒤 좌표 활용 삼각형 넓이 공식(신발끈)을 적용하는 전략을 사용한다. AB 벡터와 DC 벡터가 같음을 확인하면 평행사변형 구조도 보인다.

💡 확인해 보면 B-A=(6,2)이고 C-D=(6,2)이므로 사각형 ABCD는 평행사변형이다.

Q107 도형 성질 추론

직사각형 모양 종이 ABCD에서 변 AD 위의 점 P와 변 BC 위의 점 Q를 잇는 선분 PQ를 따라 종이를 접었더니 점 A가 변 CD 위의 점 A'로 옮겨갔다. ∠DPA'=40°일 때, ∠APQ의 크기를 구하시오.



①) ①60°

②) ②65°

③) ③70°

④) ④75°

정답: ③70°

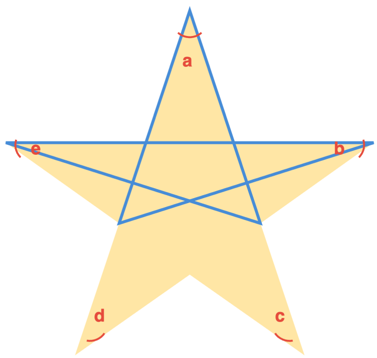
1단계: 점 P는 변 AD 위에 있으므로 ∠APD=180°(평각). 2단계: PQ는 접는 선이고 A가 PQ 대칭으로 A'에 대응하므로 ∠APQ=∠A'PQ이고, 따라서 ∠APA' = 2·∠APQ. 3단계: 평각의 분할 ∠APA' + ∠A'PD = 180°이므로 2·∠APQ + 40° = 180°. 즉 2·∠APQ=140°, ∠APQ=70°.

풀이 전략: 종이접기 문제는 '접힘선을 기준으로 접힌 각과 원래 각이 같다'는 대칭 성질을 이용해 평각을 두 영역으로 분할 비교하는 전략을 사용한다.

점 A가 옮겨간 위치 A'는 PQ에 대한 A의 대칭점이므로 PA=PA'가 항상 성립한다.

Q108 도형 성질 추론

오각별(별 모양 ★)의 다섯 뾰족한 꼭짓점에서 만들어지는 각의 크기의 합을 구하시오.



①) ①90°

②) ②180°

③) ③270°

④) ④360°

🎯 **정답: ②180°**

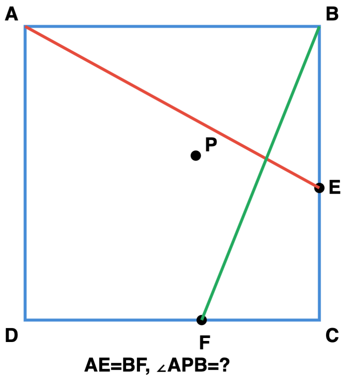
📖 1단계: 별의 안쪽에는 작은 오각형이 만들어지고, 이 오각형의 한 꼭짓점에서는 별의 변 두 개가 교차한다. 그 꼭짓점과 양옆 별 꼭짓점 두 개로 작은 삼각형을 만들 수 있다. 2단계: 삼각형의 외각 정리에 의해 (안쪽 오각형 한 꼭짓점에서의 외각) = (양옆 별 꼭짓점 두 각의 합)이 5번 성립한다. 3단계: 안쪽 오각형의 다섯 외각의 합은 항상 360°이고, 위 식 5개를 더하면 별의 다섯 꼭짓점 각이 정확히 두 번씩 등장하므로 (별 꼭짓각의 합)·2 = 360°. 따라서 별 꼭짓각의 합 = 180°.

🧠 풀이 전략: 별 모양의 꼭짓각 합은 안쪽 오각형의 외각과 별 꼭짓점을 외각 정리로 연결하고, '다각형 외각의 합 = 360°'를 활용해 두 배로 환산하는 외각 추적 전략으로 구한다.

💡 이 결과는 별이 정오각별이든 일그러진 별이든, 다섯 점이 한 번씩 연결된 별이라면 항상 180°이다.

Q109 합동 증명 기초

정사각형 ABCD에서 변 BC 위의 점 E와 변 CD 위의 점 F를 잡았더니 AE = BF가 되었다. 두 선분 AE와 BF가 만나서 이루는 각의 크기를 구하시오.



①) ①45°

②) ②60°

③) ③90°

④) ④∠BAE의 크기에 따라 다름

🎯 **정답: ③90°**

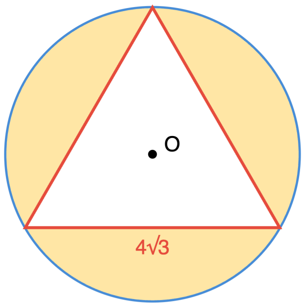
📖 1단계: 두 직각삼각형 ABE와 BCF에서 AB=BC(정사각형의 변), ∠ABE=∠BCF=90°(정사각형의 내각), AE=BF(가정)이다. 직각삼각형의 빗변과 다른 한 변이 같으므로 RHS 합동 △ABE ≡ △BCF가 성립한다. 2단계: 합동의 대응각으로 ∠BAE = ∠CBF. 3단계: 두 선분의 교점을 P라 할 때 △ABP에서 내각의 합은 180°이고, ∠ABP = ∠ABC - ∠CBF = 90° - ∠BAE이다. 따라서 ∠APB = 180° - ∠BAE - (90° - ∠BAE) = 90°. 즉 AE와 BF는 항상 수직으로 만난다.

🧠 풀이 전략: 등변·등각 조건을 갖춘 두 삼각형에서 RHS 합동을 통해 한 각을 다른 각으로 옮기는 회전 대칭 구조를 활용한다. 직각이 등장하면 합동 후 보각 관계로 90°(수직)을 유도하는 전략을 쓴다.

💡 이 성질 덕분에 정사각형 안에서는 'E의 위치와 무관하게 AE=BF이면 두 선분은 항상 수직'이 성립하는 회전 합동 구조가 숨어 있다.

Q110 원·부채꼴 심화

반지름 4cm인 원에 정삼각형이 내접해 있다. 이때 정삼각형의 한 변의 길이는 $4\sqrt{3}$cm이다. 원의 내부에서 정삼각형의 바깥쪽 영역(활꼴 3개의 합)의 넓이를 구하시오.



활꼴 3개 합 넓이=?

①) ①$16\pi - 8\sqrt{3}$ (cm²)

②) ②$16\pi - 12\sqrt{3}$ (cm²)

③) ③$16\pi - 18\sqrt{3}$ (cm²)

④) ④$16\pi - 24\sqrt{3}$ (cm²)

🎯 **정답: ②$16\pi - 12\sqrt{3}$ (cm²)**

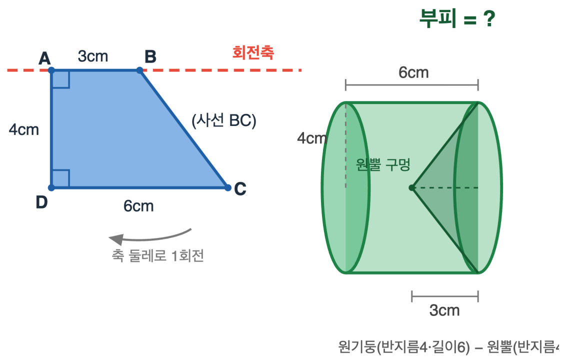
📖 1단계: 원의 넓이는 $\pi \cdot 4^2 = 16\pi$ (cm²). 2단계: 한 변이 $4\sqrt{3}$인 정삼각형의 넓이는 $(\sqrt{3}/4)\cdot(4\sqrt{3})^2 = (\sqrt{3}/4)\cdot 48 = 12\sqrt{3}$ (cm²). 3단계: 활꼴 3개의 합은 (원의 넓이) - (정삼각형의 넓이) = $16\pi - 12\sqrt{3}$ (cm²).

🧠 풀이 전략: 원에 내접한 다각형의 외부 활꼴 영역은 '원 - 다각형'의 차분 전략으로 구한다. 정삼각형 넓이 공식 $(\sqrt{3}/4)\cdot$(한 변)^2 을 정확히 적용하는 것이 핵심이다.

💡 반지름 r인 원에 내접하는 정삼각형의 한 변은 $r\sqrt{3}$, 넓이는 $(3\sqrt{3}/4)\cdot r^2$이다.

Q111 입체 추론

평행한 두 변의 길이가 각각 3cm와 6cm이고 높이가 4cm인 직각사다리꼴이 있다. 이 사다리꼴을 짧은 평행변(길이 3cm 변)을 포함하는 직선을 회전축으로 하여 한 바퀴 회전시켜 만든 입체의 부피를 구하시오. (π는 그대로 둔다)



①) ①48π cm³

②) ②56π cm³

③) ③64π cm³

④) ④80π cm³

🎯 **정답: ④80π cm³**

📖 1단계: 회전축은 길이 3cm인 짧은 평행변을 포함하는 직선이고, 사다리꼴은 회전축으로부터 최대 4cm 떨어진 영역이다. 2단계: 회전체를 둘로 나눈다. (i) 위 평행변 길이 3cm 구간: 사다리꼴이 회전축과 4cm 거리로 평행하게 떨어져 있는 직사각형 부분이므로, 반지름 4cm·높이 3cm 원기둥이 만들어진다. 부피 = $\pi \cdot 4^2 \cdot 3 = 48\pi$. (ii) 회전축 방향으로 더 나아간 6-3=3cm 구간: 이 부분은 바닥의 긴 변 DC(축에서 거리 4cm로 일정)와 사선 변 BC 사이의 직각삼각형 영역이다. 사선 BC는 축에서의 거리가 0cm에서 4cm로 늘어나므로, 회전시키면 원뿔이 아니라 '반지름 4cm·높이 3cm 원기둥에서 반지름 4cm·높이 3cm 원뿔을 도려낸' 입체가 된다. 부피 = $\pi \cdot 4^2 \cdot 3 - (1/3) \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 3 = 48\pi - 16\pi = 32\pi$. 3단계: 두 부피를 더하면 $48\pi + 32\pi = 80\pi$ (cm³). (검산: 파푸스 정리로 사다리꼴 넓이 $(1/2)(3+6) \cdot 4 = 18$, 무게중심의 축까지 거리 = 20/9이므로 부피 = $2\pi \cdot (20/9) \cdot 18 = 80\pi$.)

🧠 풀이 전략: 회전체의 부피는 원래 평면도형을 회전축에 대한 거리가 일정한 부분(원기둥)과 변하는 부분(원뿔)으로 분할한 뒤 각 부분의 부피 공식을 적용해 더하는 분할 전략을 사용한다.

💡 회전체에서 회전축에 수직인 어떤 단면도 원이 된다는 것이 회전체를 다루는 핵심 성질이다.

Q112 자료·경시 퍼즐

1부터 100까지의 자연수가 한 장에 하나씩 적힌 카드 100장이 있다. 카드에 적힌 수의 양의 약수의 개수가 홀수인 카드를 '특별 카드'라 하자. 특별 카드는 모두 몇 장인가?

①) ①8장

②) ②9장

③) ③10장

④) ④12장

🎯 **정답: ③10장**

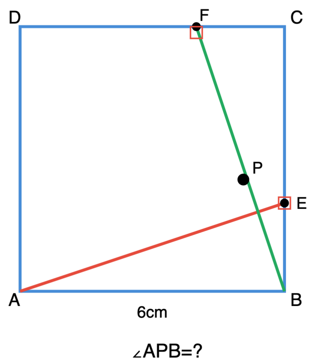
📖 1단계: 자연수 n의 양의 약수는 $n = a \times b$ $(a \le b)$ 꼴로 짝지을 수 있어 일반적으로 짝수 개이다. 2단계: 단, n이 완전제곱수일 때만 a = b가 되는 경우(예: $n = a^2$)가 한 번 발생해 짝이 안 되는 약수가 한 개 남으므로 약수의 개수가 홀수가 된다. 3단계: 1부터 100까지의 완전제곱수는 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100으로 총 10개. 따라서 특별 카드는 10장이다.

🧠 풀이 전략: 약수의 짝짓기 구조를 분석해 어떤 자연수에서 약수의 개수가 홀수가 되는지 판별하는 약수 페어링 전략. 핵심은 '완전제곱수만 약수 개수가 홀수'라는 성질의 발견이다.

💡 36의 약수는 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36으로 9개이며, 가운데 6이 자기 자신과 짝을 이뤄 약수의 개수가 홀수가 된다.

Q113 합동 증명 기초

한 변의 길이가 6cm인 정사각형 ABCD의 변 BC 위에 점 E, 변 CD 위에 점 F가 있어 BE=CF이다. 선분 AE와 선분 BF의 교점을 P라 할 때, ∠APB의 크기를 구하시오.



①) ①60°

②) ②75°

③) ③90°

④) ④120°

🎯 **정답: 90°**

📖 1단계) △ABE와 △BCF에서 AB=BC(정사각형의 변), ∠ABE=∠BCF=90°(정사각형의 내각), BE=CF(주어진 조건)이다. 따라서 △ABE ≡ △BCF (SAS 합동). 2단계) 합동인 두 삼각형의 대응각이므로 ∠BAE=∠CBF. 3단계) ∠ABC=90°이고 BF는 ∠ABC를 ∠ABF와 ∠CBF로 나눈다. △ABP의 내각의 합에서 ∠BAP+∠ABP=∠BAE+(90°-∠CBF)=∠BAE+90°-∠BAE=90°. 따라서 ∠APB=180°-90°=90°.

🧠 풀이 전략: 두 선분 AE, BF가 만드는 각을 직접 계산하기 어렵다. 두 선분 각각이 두 삼각형의 빗변임을 보고, 그 두 삼각형이 SAS 합동임을 찾아 대응각이 같다는 사실을 이용한다. 그 다음 정사각형의 직각(90°)과 합쳐 △ABP의 두 밑각의 합이 90°가 됨을 보이는 전략을 쓴다.

💡 이 결과는 'BE=CF'라는 등거리 조건만 있으면 E, F 위치와 무관하게 항상 AE⊥BF임을 의미한다. 정사각형의 회전 대칭(90° 회전이 자기 자신으로) 덕분이다.

Q114 정수·유리수 추론

$|x+3|+|x-2|=7$ 을 만족하는 모든 정수 x의 합을 구하시오.

①) ①-7

②) ②-1

③) ③0

④) ④7

🎯 **정답: -1**

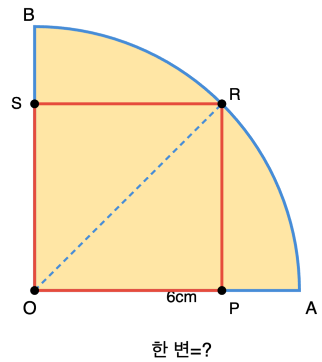
📖 1단계) $|x+3|+|x-2|$는 수직선에서 x로부터 점 -3과 점 2까지의 거리의 합이다. -3과 2 사이의 거리는 5이므로, $-3\le x\le 2$일 때 항상 합이 5(=거리)이다. 5≠7이므로 이 구간에는 해가 없고, 따라서 x는 구간 [-3, 2] 외부에 있다. 2단계) $x<-3$일 때 $|x+3|=-(x+3)$, $|x-2|=-(x-2)$. 합$=-2x-1=7 \Rightarrow x=-4$. 검증: $-4<-3$ ✓. 3단계) $x>2$일 때 $|x+3|=x+3$, $|x-2|=x-2$. 합$=2x+1=7 \Rightarrow x=3$. 검증: $3>2$ ✓. 정수해는 x=-4, 3 두 개이고, 그 합은 -4+3=-1.

🧠 풀이 전략: 절댓값 합 $|x-a|+|x-b|$를 '수직선 위 거리의 합'으로 해석하는 전략. 두 기준점 a, b 사이 구간에서는 거리가 일정(=$|a-b|$)하고, 외부에서는 거리가 1차식으로 늘어난다. 외부 두 영역에서만 1차방정식을 풀어 해를 구한다.

💡 $|x-a|+|x-b|$의 최솟값은 $|a-b|$이며, x가 a와 b 사이일 때 항상 이 값을 갖는다. 이 성질은 거리합 최소 문제(예: 마을 사이 우체국 위치)의 핵심 원리이다.

Q115 원·부채꼴 심화

중심 O, 반지름 6cm, 중심각 90°인 부채꼴 OAB가 있다(OA⊥OB). 정사각형 OPRS의 한 변 OP는 변 OA 위에, 한 변 OS는 변 OB 위에 놓이고, 꼭짓점 R은 호 AB 위에 있다. 정사각형의 한 변의 길이를 구하시오.



①) ①3

②) ②$2\sqrt{3}$

③) ③$3\sqrt{2}$

④) ④$3\sqrt{3}$

🎯 **정답: ③$3\sqrt{2}$**

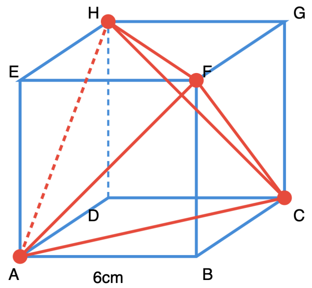
📖 1단계) 한 변의 길이를 a라 하자. O를 원점, OA를 x축, OB를 y축으로 두면 P=(a,0), S=(0,a), R=(a,a). 2단계) R이 호 AB 위에 있으므로 OR=6, 즉 $\sqrt{(a^2+a^2)}=6$. 3단계) $2a^2=36$, $a^2=18$, $a=3\sqrt{2}$ (a>0).

🧠 풀이 전략: 부채꼴의 두 반지름이 직각을 이루므로 중심을 원점, 두 반지름을 좌표축으로 잡으면 정사각형의 꼭짓점 좌표가 (a,a)로 떨어진다. 이 점이 호 위(원 위)에 있다는 조건을 'OR=반지름'으로 바꾸어 피타고라스 정리로 a를 구한다.

💡 부채꼴 안에 내접하는 정사각형의 한 변은 반지름의 $\sqrt{2}/2$배이다. 이는 정사각형의 대각선이 부채꼴 반지름과 같다는 것과 동치이다.

Q116 입체 추론

한 모서리의 길이가 6cm인 정육면체 ABCD-EFGH에서 네 꼭짓점 A, C, F, H를 잇는 도형은 정사면체를 이룬다. 이때 (정육면체의 부피) : (정사면체 ACFH의 부피)를 가장 간단한 정수비로 나타내시오.



부피비=?

①) ①2:1
②) ②3:1
③) ③4:1
④) ④3:2
⑤) ⑤6:1

🎯 **정답: 3:1**

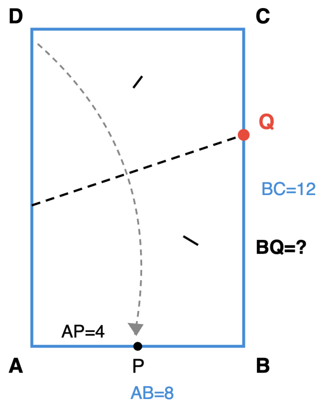
📖 1단계) 정사면체의 한 모서리는 정육면체 한 면의 대각선이므로 길이=$6\sqrt{2}$. 즉 ACFH는 한 변 $6\sqrt{2}$인 정사면체이다. 2단계) 정육면체에서 정사면체 ACFH를 빼면 4개의 합동인 직각이등변삼각뿔이 남는다. 각 뿔의 꼭짓점은 B, D, E, G이고, 각 뿔의 밑면은 직각이등변삼각형(다리 6cm), 높이는 6cm이다. 한 뿔의 부피=(1/3)×(1/2×6×6)×6=36. 4개 합=144. 3단계) 정육면체 부피=6^3=216. 정사면체 부피=216-144=72. 비=216:72=3:1.

🧠 풀이 전략: 정육면체의 8개 꼭짓점을 두 그룹으로 나누면 각각 정사면체를 이룬다는 고전적 사실에서 출발한다. 정사면체 부피를 직접 공식으로 구하기보다는 '정육면체에서 4개의 모서리 직각뿔을 잘라낸 것'으로 보는 분해 전략이 중1 수준에서 가장 깔끔하다.

💡 정육면체 안에 들어가는 가장 큰 정사면체가 바로 이것이며, 부피는 정육면체의 정확히 1/3이다. 이를 이용하면 정사면체 부피 공식 $V=a^3\sqrt{2}/12$를 한 변 $a=6\sqrt{2}$ 대입으로도 같은 결과(72)가 나온다.

Q117 도형 성질 추론

가로 8cm, 세로 12cm인 직사각형 종이 ABCD(AB=8, BC=12)에서 꼭짓점 D를 변 AB 위 점 P로 접었다. AP=4cm일 때, 접는 선이 변 BC와 만나는 점을 Q라 한다. 선분 BQ의 길이를 구하시오.



①) ①6

②) ②7

③) ③8

④) ④9

🎯 **정답: ③8**

📖 1단계) 종이를 접으면 길이가 보존되므로 DQ=PQ. 2단계) BQ=x로 두면 △PBQ는 ∠B=90°인 직각삼각형이고 PB=AB-AP=8-4=4, BQ=x이므로 $PQ^2=16+x^2$. 한편 △DCQ는 ∠C=90°인 직각삼각형이고 DC=AB=8, CQ=BC-BQ=12-x이므로 $DQ^2=64+(12-x)^2$. 3단계) $DQ^2=PQ^2$ 에서 $64+(12-x)^2=16+x^2$. $64+144-24x+x^2=16+x^2$. 208-24x=16. 24x=192. x=8.

🧠 풀이 전략: 접기 문제의 핵심 원리는 '접기는 거리를 보존한다'는 것이다. 접힌 후 D가 P로 옮겨지므로, 접는 선 위의 임의의 점 Q에 대해 DQ=PQ가 성립한다. Q에서 직사각형의 두 직각이 만들어내는 두 직각삼각형(△DCQ, △PBQ)에 피타고라스 정리를 적용하여 미지수 x에 대한 방정식을 세운다.

💡 접는 선은 항상 D와 P를 잇는 선분의 수직이등분선이다. 이 사실로부터도 같은 결과를 얻을 수 있다.

Q118 문자와 식 심화

두 자리 자연수 N의 십의 자리 숫자를 a, 일의 자리 숫자를 b라 한다(N=10a+b). a+b가 9의 배수이면 N도 9의 배수임을 식을 사용하여 보이시오. 또한 N=72에 대해 이 사실이 성립하는지 확인하시오.

🎯 **정답: 증명: N=10a+b=9a+(a+b)이고 a+b=9k, 9a=9·a 모두 9의 배수이므로 N=9(a+k)는 9의 배수이다. 검증: N=72일 때 a=7, b=2, a+b=9=9×1(9의 배수)이고 72=9×8이므로 9의 배수. 성립한다.**

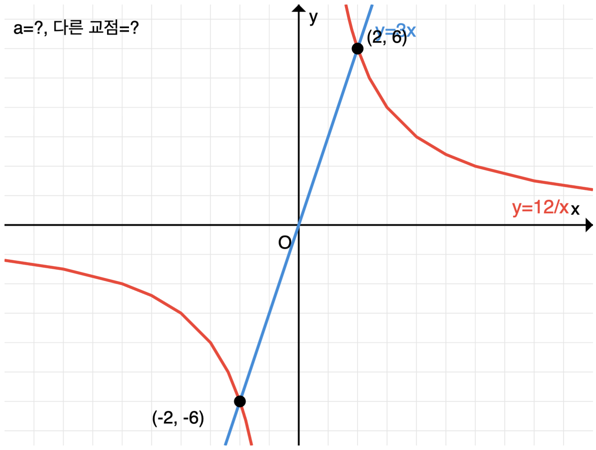
📖 1단계) N을 식으로 분해한다. N=10a+b=9a+a+b=9a+(a+b). 2단계) 9a는 a가 자연수이면 항상 9의 배수이다. 따라서 N이 9의 배수가 될 조건은 (a+b)가 9의 배수가 되는 것과 동치이다. 가정에서 a+b=9k(어떤 자연수 k)이므로 N=9a+9k=9(a+k). 즉 N은 9의 배수이다. 3단계) N=72의 경우 a=7, b=2, a+b=9=9×1이므로 a+b는 9의 배수. 그리고 N=72=9×8은 9의 배수. 따라서 명제가 성립한다.

🧠 풀이 전략: '9의 배수 판정법'의 가장 단순한 형태(두 자리 수)에 대한 증명 문제. 자릿값 표현 N=10a+b를 9·(어떤 식) + (자리 숫자 합) 으로 분해하는 것이 핵심 아이디어. 10=9+1을 활용하면 자연스럽게 9가 인수로 떨어진다.

💡 이 성질은 세 자리 이상으로 일반화된다. 100=99+1, 1000=999+1처럼 10^n=9·(99...9)+1 형태로 분해되므로 N=(9의 배수)+(자릿값 숫자들의 합)이 되어, 자릿값 숫자 합이 9의 배수면 N도 9의 배수가 된다.

Q119 좌표평면 응용

정비례 그래프 y=ax (a>0)와 반비례 그래프 y=12/x가 좌표평면에서 두 점에서 만난다. 두 교점 중 한 점의 좌표가 (m, 6)이라고 할 때, a의 값과 또 다른 교점의 좌표를 구하시오.



①) ①a=2, (-2,-6)

②) ②a=3, (-2,-6)

③) ③a=3, (2,-6)

④) ④a=2, (-3,-4)

🎯 **정답: ②a=3, (-2,-6)**

📖 1단계) 점 (m, 6)이 반비례 y=12/x 위에 있으므로 6=12/m, 따라서 m=2. 한 교점은 (2, 6). 2단계) (2, 6)이 정비례 y=ax 위에도 있으므로 6=2a, 따라서 a=3. 3단계) y=3x와 y=12/x를 연립하면 3x=12/x, 즉 $3x^2=12$, $x^2=4$, x=±2. x=-2일 때 y=3·(-2)=-6이므로 다른 교점은 (-2, -6).

🧠 풀이 전략: 한 교점의 부분 좌표(y값)만 주어졌다. 한 점이 두 그래프 모두에 속한다는 사실을 이용해 미지수를 단계적으로 줄인다. 먼저 반비례식에 대입해 m을, 그 후 정비례식에 대입해 a를 결정한 뒤, 두 식을 연립하여 모든 교점을 찾는다. 정비례·반비례의 교점은 항상 원점에 대해 대칭임을 활용해도 좋다.

💡 y=ax(a>0)와 y=k/x(k>0)의 두 교점은 언제나 원점에 대해 대칭이다. 두 식 모두 원점 대칭(y가 -x에서 -y가 됨)이기 때문이다.

Q120 일차방정식 활용

어떤 일을 A 혼자서 하면 6시간, B 혼자서 하면 9시간이 걸린다. 이 일을 처음에는 A와 B가 함께 시작했지만 도중에 A가 그만두었고, 이후 B 혼자서 마무리하여 시작한 지 정확히 5시간 만에 일을 끝냈다. A가 일한 시간을 구하시오.

①) ①2시간

②) ②2시간 30분

③) ③2시간 40분

④) ④3시간

🎯 **정답: ③2시간 40분**

📖 1단계) 한 시간에 하는 일의 양은 A=1/6, B=1/9. B는 처음부터 끝까지 일했으므로 5시간 동안 일한다. A가 일한 시간을 t시간이라 하자(이때 A는 시작부터 t시간 동안만 함께 일함). 2단계) (A의 일량)+(B의 일량)=1. (1/6)t + (1/9)·5 = 1. 즉 t/6 + 5/9 = 1. 3단계) 양변에 18을 곱하면 3t + 10 = 18, 3t = 8, t = 8/3시간 = 2시간 40분.

🧠 풀이 전략: 일률 문제는 '한 시간에 하는 일의 양'을 분수로 표현하는 것이 출발점. B가 5시간 내내 일한다는 사실을 먼저 고정해 B의 일량을 상수로 만든 뒤, A의 일한 시간 t를 미지수로 두고 '두 사람이 한 일의 합 = 1(전체)' 식을 세우는 전략.

💡 이 결과를 이용하면 'A가 마지막에 빠진 후 B 혼자 일한 시간'은 5 - 8/3 = 7/3시간 ≈ 2시간 20분이다. A와 B가 함께 일한 시간(8/3)이 B 혼자 일한 시간(7/3)보다 약간 길다.

📝 중1 수학 심화

총 40문제 · 문제와 정답·풀이 포함

Q121 자료·경시 퍼즐

1부터 100까지의 자연수 중에서 임의로 51개의 수를 고른다. 이때 차이가 1인(연속된) 두 자연수가 반드시 존재함을 증명하시오.

🎯 **정답: 증명: 1~100을 50개의 연속 쌍 {1,2}, {3,4}, ..., {99,100}으로 분할한다. 51개의 수를 50개 쌍에 분배하면 비둘기집 원리에 의해 적어도 한 쌍에는 두 수가 모두 포함되므로, 그 쌍 안의 두 수는 차이가 1인 연속 자연수이다.**

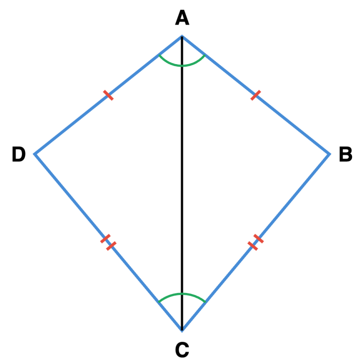
📖 1단계) 1부터 100까지의 자연수를 차이가 1인 연속 두 수의 쌍으로 묶어 50개의 그룹으로 분할한다: {1,2}, {3,4}, {5,6}, ..., {99,100}. 어느 자연수도 정확히 하나의 그룹에 속한다. 2단계) 51개의 수를 50개의 그룹에 나누어 넣는다고 보면, 비둘기집 원리(51>50)에 의해 적어도 한 그룹에는 2개 이상의 수가 들어간다. 그런데 한 그룹은 정확히 2개의 원소를 가지므로, 그 그룹의 두 수가 모두 51개 안에 포함된다. 3단계) 그 두 수는 같은 그룹 안에서 정의상 차이가 1인 연속 자연수이다. 따라서 51개의 수 중에는 반드시 차이 1인 두 수가 존재한다.

🧠 풀이 전략: '51개 중에 무언가를 보장한다'는 형태의 문제는 비둘기집 원리(pigeonhole) 적용 후보. 보장하고 싶은 성질('차이가 1인 두 수')을 한 그룹의 정의로 만들어 그룹 수가 보장 임계값 - 1 (=50) 이 되도록 분할을 설계하는 것이 핵심.

💡 50개를 고르면 차이 1인 두 수가 없도록 만들 수도 있다(예: 홀수 50개 1, 3, 5, ..., 99). 따라서 '51개'라는 임계값은 정확히 최소 보장값이며, 50개로는 보장되지 않는다.

Q122 합동 증명 기초

사각형 ABCD에서 AB=AD이고 CB=CD이다(이러한 사각형을 '연꼴'이라 한다). 대각선 AC가 ∠BAD와 ∠BCD를 모두 이등분함을 증명하시오.



AC가 두 각을 이등분하는가?

🎯 **정답: 증명: △ABC와 △ADC에서 AB=AD, CB=CD, AC=AC(공통)이므로 SSS 합동. 따라서 ∠BAC=∠DAC, ∠BCA=∠DCA이고 AC는 ∠BAD와 ∠BCD를 모두 이등분한다.**

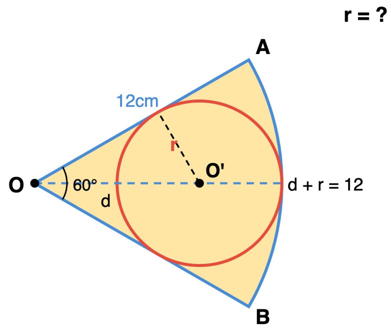
📖 1단계) 대각선 AC를 그어 사각형을 두 삼각형 △ABC와 △ADC로 나눈다. 2단계) 두 삼각형의 변을 비교한다. AB=AD(주어진 조건), CB=CD(주어진 조건), AC=AC(공통변). 따라서 세 쌍의 변이 모두 같으므로 △ABC ≡ △ADC (SSS 합동). 3단계) 합동인 두 삼각형의 대응각이 같으므로 ∠BAC=∠DAC이고 ∠BCA=∠DCA이다. 즉 대각선 AC는 ∠BAD를 ∠BAC와 ∠DAC로 이등분하고, ∠BCD를 ∠BCA와 ∠DCA로 이등분한다.

🧠 풀이 전략: 두 각이 동시에 이등분된다는 결론을 한 번에 끌어내는 가장 간단한 도구는 합동이다. 두 각의 정점(A와 C)을 지나는 대각선 AC를 보조선으로 그리면 자연스럽게 두 삼각형이 생기고, 이 두 삼각형이 서로 거울상이라는 사실이 SSS로 즉시 보장된다. '한 합동으로 두 결론을 동시에' 얻는 효율적 전략.

💡 같은 논리로 연꼴의 두 대각선은 서로 수직이다(△ABC와 △ADC의 대응각이 같으므로 다른 대각선 BD를 AC가 수직이등분한다).

Q123 원·부채꼴 심화

중심 O, 반지름 12cm, 중심각 60°인 부채꼴 OAB의 두 반지름 OA, OB와 호 AB에 모두 접하는 원이 부채꼴 내부에 있다. 이 원의 반지름을 구하시오.



①) ①3

②) ②4

③) ③5

④) ④6

🎯 **정답: ②4**

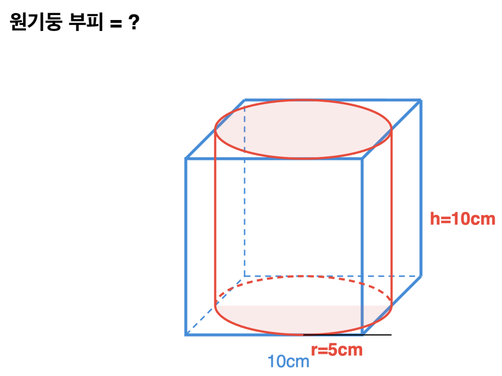
📖 1단계) 원의 중심을 O'이라 하고 반지름을 r이라 하자. O'은 두 반지름 OA, OB에서 모두 거리가 r이므로 ∠AOB의 이등분선 위에 놓인다. 2단계) ∠AOB의 이등분각은 30°이다. 직각삼각형(O'에서 OA에 내린 수선과 OO')에서 r=OO'·sin30°=OO'·(1/2). 즉 OO'=2r. 3단계) 호 AB에 접하므로 O가 부채꼴의 중심이고 OO'+r=12(부채꼴 반지름). 따라서 2r+r=12, 3r=12, r=4.

🧠 풀이 전략: 내접원 문제의 표준 접근: '원의 중심은 두 직선에 동시에 접하면 두 직선의 각의 이등분선 위에 있다'를 이용한다. 이등분선 위 거리를 d로 두고, 두 반지름과의 접조건(직각삼각형의 사인비)으로 d=2r을 얻는다. 호와의 접조건은 'OO' + r = R(부채꼴 반지름)' 이라는 단순한 1차식이 된다.

💡 중심각이 2θ인 부채꼴(반지름 R)의 내접원 반지름은 r=R·sinθ/(1+sinθ)이다. θ=30°일 때 sin30°=1/2이므로 r=R·(1/2)/(3/2)=R/3. R=12이면 r=4가 된다.

Q124 입체 추론

부피가 1000cm³인 정육면체가 있다. 이 정육면체 안에 들어갈 수 있는 가장 큰 원기둥(밑면이 정육면체의 한 면에 내접하고, 축이 그 면과 수직)의 부피를 구하시오. (π는 그대로 둔다.)



①) ①100π cm³

②) ②200π cm³

③) ③250π cm³

④) ④500π cm³

🎯 **정답: 250π cm³**

📖 1단계) 정육면체 부피가 1000cm³이므로 한 모서리 길이 = ∛1000 = 10cm. 2단계) 한 면(한 변 10cm 정사각형)에 내접하는 가장 큰 원의 반지름은 정사각형 한 변의 절반이므로 r=5cm. 이 원을 밑면, 정육면체의 모서리 방향을 축으로 두면 높이 h=10cm인 가장 큰 원기둥이 만들어진다. 3단계) 부피 = $\pi r^2 h = \pi \times 5^2 \times 10 = 250\pi$ cm³.

🧠 풀이 전략: '부피'에서 한 모서리 길이를 먼저 역산한다(∛1000=10). 정육면체 안에 들어가는 가장 큰 원기둥은 한 모서리에 평행한 축을 가질 때이며, 밑면은 정사각형 단면에 내접하는 최대원이다. 정사각형 한 변 a에 내접하는 원의 지름이 a, 즉 반지름이 a/2임을 이용해 r과 h를 결정한 뒤 부피 공식 $\pi r^2 h$를 적용.

💡 정육면체 안에 든 이 원기둥의 부피는 정육면체의 약 78.5%(=π/4)이다. 즉 모서리에 잘라내는 4개 구석의 합은 정육면체의 약 21.5%에 해당한다.

Q125 정수·유리수 추론

수직선 위에서 |x-3|+|x+5|=10을 만족하는 모든 정수 x의 합을 구하시오.

①) ① -4

②) ② -2

③) ③ 0

④) ④ 2

🎯 **정답: ② -2**

📖 1단계: |x-3|+|x+5|는 수직선 위 점 x에서 3까지의 거리와 -5까지의 거리의 합으로 해석할 수 있다. 두 점 -5와 3 사이의 거리는 8이므로, x가 [-5, 3] 안에 있으면 합은 항상 8로 일정해 10이 될 수 없다.
2단계: 따라서 x는 [-5, 3] 바깥에 있어야 한다. x ≥ 3일 때 (x-3)+(x+5)=2x+2=10이므로 x=4. x ≤ -5일 때 -(x-3)-(x+5)=-2x-2=10이므로 x=-6.
3단계: 두 정수 해는 4와 -6뿐이고, 합은 4+(-6)=-2.

🧠 풀이 전략: 절댓값을 '거리'로 해석하는 전략을 쓴다. 두 고정점 사이 구간 안과 바깥에서 식의 값이 어떻게 변하는지 나누어 생각하면, 부호를 일일이 따지지 않고도 어디서 해가 나오는지 빠르게 파악할 수 있다.

💡 |x-a|+|x-b|의 최솟값은 |a-b|이며, 이 최솟값은 x가 a와 b 사이에 있을 때 항상 유지된다.

Q126 일차방정식 활용

어떤 일을 A는 혼자 10일, B는 혼자 15일에 마칠 수 있다. 두 사람이 함께 시작했지만 도중에 A가 빠지고, 남은 일을 B가 혼자 5일 더 하여 일을 마쳤다. 두 사람이 함께 일한 날 수를 구하시오.

①) ① 3일

②) ② 4일

③) ③ 5일

④) ④ 6일

🎯 **정답: ② 4일**

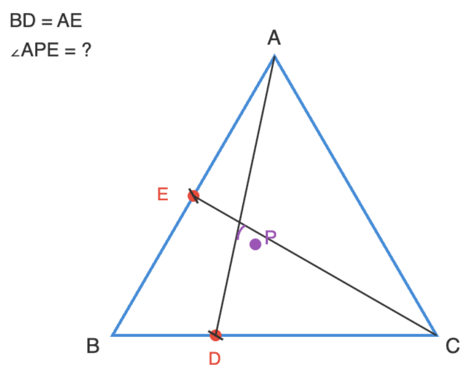
📖 1단계: 전체 일의 양을 1로 두면 A의 1일 작업량은 1/10, B의 1일 작업량은 1/15이다.
2단계: 함께 일한 날 수를 x라 하면 함께 일한 양은 x(1/10+1/15)=x×(1/6)이고, B가 혼자 5일 일한 양은 5×(1/15)=1/3.
3단계: x/6 + 1/3 = 1을 풀면 x/6 = 2/3, x = 4. 따라서 두 사람이 함께 일한 날은 4일이다.

🧠 풀이 전략: 일률 문제는 '전체 일=1'로 두고 각 사람의 1일 작업량을 분수로 표현한 뒤, 시간 구간별로 작업량을 더해 1로 맞추는 방정식을 세운다. 핵심은 'A가 빠진 후 B 혼자' 한 양도 잊지 말고 합산하는 것.

💡 두 사람이 함께 일하면 1/A+1/B=1/T로 평균 일률이 결정되며, 이를 '조화평균 형태'라 부른다.

Q127 합동 증명 기초

정삼각형 ABC에서 변 BC 위의 점 D와 변 AB 위의 점 E를 BD=AE가 되도록 잡았다. 두 선분 AD와 CE의 교점을 P라 할 때, ∠APE의 크기를 구하시오.



①) ① 45°

②) ② 60°

③) ③ 72°

④) ④ 90°

🎯 **정답: ② 60°**

📖 1단계: △ABD와 △CAE를 비교한다. 정삼각형이므로 AB=CA, ∠ABD=∠CAE=60°이고, 조건에서 BD=AE이다. 따라서 SAS합동에 의해 △ABD≡△CAE.
2단계: 합동에서 ∠BAD=∠ACE이다. 이 각을 α라 두면, △APC에서 ∠PAC=∠BAC-∠BAD=60°-α, ∠ACP=∠ACE=α이다.
3단계: △APC의 내각 합으로 ∠APC=180°-(60°-α)-α=120°. ∠APE는 직선 CE 위에서 ∠APC와 보각이므로 ∠APE=180°-120°=60°.

🧠 풀이 전략: 두 선분 AD, CE가 만나는 각을 직접 구하기는 어렵다. 대신 '한 도형이 다른 도형의 회전상'임을 SAS합동으로 보이고, 합동에서 등각을 뽑은 뒤 삼각형 내각의 합으로 교각을 추적한다. '회전합동→대응각이동' 패턴.

💡 정삼각형 안에서 같은 길이로 잘라낸 두 선분의 교각은 항상 60°이며, 이는 정삼각형이 60° 회전 대칭을 갖기 때문이다.

Q128 자료·경시 퍼즐

1부터 9까지의 서로 다른 자연수를 3×3 표 안에 한 번씩 써넣어, 가로 세 줄, 세로 세 줄, 대각선 두 줄의 합이 모두 같도록 하였다. 한 모서리 칸에 6이 놓였을 때, 그 칸과 대각선으로 마주보는 모서리 칸의 수를 구하시오.

①) ① 1
②) ② 3
③) ③ 4
④) ④ 8

🎯 **정답: ③ 4**

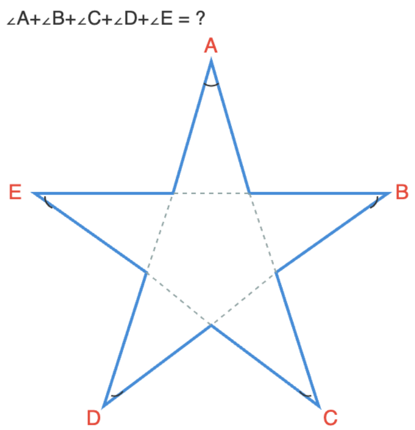
📖 1단계: 1부터 9까지의 합은 45이므로, 가로 세 줄의 합이 모두 같다면 각 줄의 합은 45÷3=15이다.
2단계: 가운데 칸의 수를 m이라 하자. 가운데를 지나는 4개의 직선(가로1, 세로1, 대각선2)을 모두 더하면 합은 4×15=60이다. 이 합에는 가운데 칸 m이 4번 들어가고, 나머지 8개 칸은 각 1번 들어간다. 즉 4m+(45-m)=60이므로 3m=15, m=5이다.
3단계: 한 대각선의 합은 15이고 가운데가 5이므로 두 모서리(꼭짓점)의 합은 15-5=10이다. 따라서 6의 대각선 반대쪽 모서리는 10-6=4이다. 실제로 2,7,6 / 9,5,1 / 4,3,8 마방진에서도 모서리 6의 대각선 맞은편은 4로 확인된다.

🧠 풀이 전략: 마방진 문제는 '전체 합 추출 + 중심을 통과하는 줄을 여러 번 더해 중심값을 분리'하는 식으로 접근한다. 모서리 두 칸이 같은 대각선에 놓이면 합이 2×중심으로 묶이는 점이 핵심.

💡 3차 마방진(뤄슈 마방진)은 중국 고대에서 거북이 등딱지 무늬에서 발견되었다고 전해지며, 가운데 수는 항상 5이다.

Q129 도형 성질 추론

오른쪽 그림과 같이 다섯 점을 별 모양으로 이은 도형에서, 다섯 꼭지각 ∠A+∠B+∠C+∠D+∠E의 합을 구하시오.



①) ① 180°
②) ② 270°
③) ③ 360°
④) ④ 540°

🎯 **정답: ① 180°**

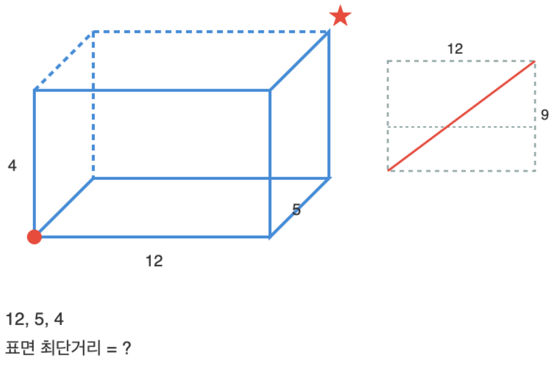
📖 1단계: 별의 다섯 뾰족한 부분은 안쪽 정오각형의 한 변을 밑변으로 하는 다섯 개의 삼각형이다. 다섯 삼각형 내각의 총합은 5×180°=900°.
2단계: 안쪽 오각형의 각 꼭짓점에서는 별의 두 직선이 교차하므로 'X자' 형태가 되고, 그 꼭짓점에 모인 두 삼각형 내각은 각각 (180°-오각형 내각)이다. 다섯 꼭짓점에서 이런 각들의 합은 2×(5×180°-540°)=720°.
3단계: 따라서 다섯 꼭지각의 합 = 900°-720°=180°.

🧠 풀이 전략: 별 자체는 비표준 다각형이라 직접 내각 공식이 안 통한다. '다섯 삼각형으로 쪼개기'와 '안쪽 오각형 활용'을 결합해 전체 각의 합에서 내부 영역 각을 빼는 전략을 쓴다.

💡 별 모양의 꼭지각 합 180°는 별이 정형이든 일그러진 모양이든 항상 같다. 이는 다각형 위상학적 성질에서 기인한다.

Q130 입체 추론

가로 12cm, 세로 5cm, 높이 4cm인 직육면체의 한 꼭짓점에 있던 개미가 그 꼭짓점과 가장 멀리 떨어진 반대쪽 꼭짓점까지 직육면체의 표면을 따라 이동한다. 개미가 갈 수 있는 최단거리를 구하시오.



①) ① 13 cm

②) ② 14 cm

③) ③ 15 cm

④) ④ √281 cm

🎯 **정답: ③ 15 cm**

📖 1단계: 직육면체 표면 위 두 점 사이 최단거리는 두 점이 놓인 면들을 평면으로 펼쳐 직선 거리를 잰 값이다. 펼치는 방법은 어느 두 면을 사용하느냐에 따라 세 가지가 있다.

2단계: 세 경우의 거리:

- 가로(12)와 세로(5)를 이어붙여 펼치면 $\sqrt{(12+5)^2+4^2}=\sqrt{305}$
- 세로(5)와 높이(4)를 이어붙여 펼치면 $\sqrt{(5+4)^2+12^2}=\sqrt{81+144}=\sqrt{225}=15$
- 가로(12)와 높이(4)를 이어붙여 펼치면 $\sqrt{(12+4)^2+5^2}=\sqrt{281}$

3단계: 세 값 중 가장 작은 것은 15. 따라서 개미가 갈 수 있는 표면 최단거리는 15 cm.

🧠 풀이 전략: 입체 위 최단경로 문제는 '평면 전개 후 직선'으로 환원한다. 단, 어느 두 면을 펼치느냐에 따라 길이가 달라지므로 세 가지 경우를 모두 계산해 최솟값을 골라야 한다.

💡 개미가 가장 짧게 가는 길은 항상 '세로+높이를 합쳐 가로와 직각으로 펼친 길'이라고 단정할 수 없다. 세 변의 비례에 따라 최적 경로가 바뀐다.

Q131 정수·유리수 추론

연속된 다섯 개의 자연수의 합이 105일 때, 이 다섯 수 중 가장 큰 수와 가장 작은 수의 곱을 구하시오.

①) ① 380

②) ② 399

③) ③ 437

④) ④ 483

🎯 **정답: ③ 437**

📖 1단계: 다섯 수의 한가운데 수(중앙값)를 m이라 하면 연속된 다섯 수는 m-2, m-1, m, m+1, m+2이고 합은 5m이다. 5m=105이므로 m=21.

2단계: 다섯 수는 19, 20, 21, 22, 23이고 가장 큰 수는 23, 가장 작은 수는 19이다.

3단계: 곱은 $23\times19=(21+2)(21-2)=21^2-2^2=441-4=437$.

🧠 풀이 전략: 연속된 홀수 개 수의 합 문제는 '한가운데 수'를 미지수로 잡으면 식이 가장 깔끔해진다. 양 끝 수의 곱은 $(m+k)(m-k)=m^2-k^2$ 형태로 합차 공식을 이용하면 빠르다.

💡 연속된 n개 자연수의 합은 가운데 수의 n배(홀수 개일 때) 또는 양 끝 평균의 n배이다.

Q132 일차방정식 활용

잔잔한 호수에서 일정한 속력으로 움직이는 배가 있다. 이 배는 강물에서 상류 방향으로 12km를 가는 데 3시간이 걸리고, 같은 거리를 하류 방향으로 가는 데 2시간이 걸린다. 배 자체의 속력과 강물의 속력을 차례로 구하시오.

①) ① 4km/h, 2km/h
②) ② 5km/h, 1km/h
③) ③ 6km/h, 2km/h
④) ④ 7km/h, 1km/h

🎯 **정답: ② 5km/h, 1km/h**

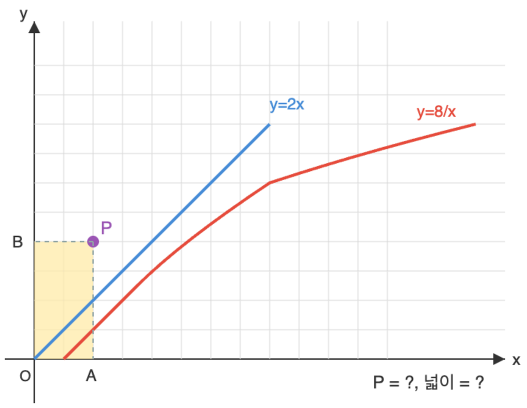
📖 1단계: 배 자체의 속력을 a km/h, 강물의 속력을 b km/h라 한다. 상류로 갈 때는 강물이 배의 진행을 거꾸로 밀어내므로 실제 속력은 a-b, 하류로 갈 때는 a+b가 된다.
2단계: 거리=속력×시간이므로 12=(a-b)×3에서 a-b=4. 12=(a+b)×2에서 a+b=6.
3단계: 두 식을 더하면 2a=10이므로 a=5. 빼면 2b=2이므로 b=1. 따라서 배 자체 속력은 5km/h, 강물 속력은 1km/h.

🧠 풀이 전략: 강물 위 배 문제는 '실제 이동속력=배 속력±강물 속력'으로 두 미지수를 잡는다. 상류와 하류 두 식으로 연립해 속력의 합과 차로 동시에 푸는 패턴.

💡 같은 거리를 왕복할 때, 평균 속력은 산술평균이 아니라 조화평균$(2v_1v_2)/(v_1+v_2)$로 결정된다.

Q133 좌표평면 응용

좌표평면에서 정비례 그래프 y=2x와 반비례 그래프 y=8/x의 교점 중 제1사분면에 있는 점을 P라 한다. 점 P에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 A, B라 할 때, 직사각형 OAPB의 넓이를 구하시오. (단, O는 원점)



①) ① 4
②) ② 6
③) ③ 8
④) ④ 16

🎯 **정답: ③ 8**

📖 1단계: 두 그래프의 교점은 2x=8/x를 푼다. 양변에 x를 곱하면 $2x^2=8$, $x^2=4$, x=±2. 1사분면이므로 x=2, y=2×2=4. 즉 P(2, 4).
2단계: P에서 x축에 내린 수선의 발 A=(2, 0), y축에 내린 수선의 발 B=(0, 4)이다. 직사각형 OAPB의 가로는 OA=2, 세로는 OB=4.
3단계: 직사각형 OAPB의 넓이=2×4=8.

🧠 풀이 전략: 두 그래프의 교점 좌표를 먼저 구한다. 그 다음 좌표 자체가 직사각형의 두 변 길이를 직접 알려주므로 곱하면 된다. 핵심 통찰: y=k/x 위 어떤 점에서 만든 직사각형 넓이는 항상 |k|로 일정.

💡 y=k/x 그래프 위 임의의 점 (x, k/x)에서 두 좌표축에 내린 수선으로 만든 직사각형의 넓이는 점의 위치에 관계없이 항상 |k|이다.

Q134 자료·경시 퍼즐

7^2026의 일의 자리 숫자를 구하시오.

①) ① 1

②) ② 3

③) ③ 7

④) ④ 9

🎯 **정답: ④ 9**

📖 1단계: 7의 거듭제곱의 일의 자리만 추적한다. $7^1=7$, $7^2=49$(끝 9), $7^3=343$(끝 3), $7^4=2401$(끝 1), $7^5=16807$(끝 7). 일의 자리가 7, 9, 3, 1을 주기 4로 반복한다.

2단계: 지수 2026을 4로 나눈 나머지를 본다. 2024는 4의 배수이므로 2026=4×506+2, 나머지는 2.

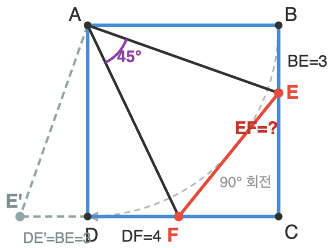
3단계: 나머지 2에 해당하는 것은 주기에서 두 번째인 9. 따라서 7^2026의 일의 자리 숫자는 9.

🧠 풀이 전략: 큰 거듭제곱의 일의 자리는 직접 계산할 수 없다. '일의 자리만 보면 주기가 생긴다'는 성질을 발견하고 지수를 주기로 나눈 나머지로 위치를 알아내는 모듈러 사고.

💡 모든 자연수 a에 대해 a의 거듭제곱의 일의 자리는 항상 주기를 가지며, 주기 길이는 1, 2, 또는 4 중 하나다.

Q135 합동 증명 기초

정사각형 ABCD에서 점 E를 변 BC 위에, 점 F를 변 CD 위에 잡아 ∠EAF=45°가 되도록 한다. 이때 EF=BE+DF임을 보이고, BE=3, DF=4일 때 EF의 길이를 구하시오.



△ADE' : △ABE 를 A 중심 90° 시계방향 회전 (B→D)

E'F = DE' + DF = 3 + 4 = 7 = EF

①) ① 5

②) ② 6

③) ③ 7

④) ④ $\sqrt{7}$

🎯 **정답: ③ 7**

📖 1단계: △ABE를 점 A를 중심으로 시계 방향으로 90° 회전시키면 변 AB가 변 AD에 겹쳐지고 점 B는 D로 옮겨진다. 점 E의 상을 E'이라 하면 E'은 변 DC를 D 바깥으로 연장한 직선 위에 있다. 회전이므로 AE=AE', BE=DE'.

2단계: ∠BAD=90°와 ∠EAF=45°에서 ∠BAE+∠DAF=90°-45°=45°. 회전에 의해 ∠DAE'=∠BAE이므로 ∠E'AF=∠DAE'+∠DAF=∠BAE+∠DAF=45°=∠EAF.

3단계: △AEF와 △AE'F에서 AE=AE', ∠EAF=∠E'AF=45°, AF는 공통이므로 SAS합동. 따라서 EF=E'F=DE'+DF=BE+DF. BE=3, DF=4이므로 EF=3+4=7.

🧠 풀이 전략: 두 변의 합이 한 변과 같다는 등식을 이끌려면 '두 변을 한 직선 위로 모으는 회전'이 자주 통한다. 정사각형의 90° 대칭성을 활용해 한 삼각형을 회전시키고, ∠EAF=45°가 정확히 절반이라는 점을 결합 각의 일치로 연결하는 패턴.

💡 이 결과는 일본 에도 시대 화산(和算) 기하 문제에서도 등장하는 고전적 정리로, 회전 합동의 가장 우아한 응용 중 하나로 꼽힌다.

Q136 정수·유리수 추론

어떤 자연수를 6으로 나누면 나머지가 4이고, 8로 나누면 나머지가 6이다. 이러한 자연수 중에서 두 자리 수에 해당하는 가장 작은 수를 구하시오.

①) ① 14
②) ② 22
③) ③ 30
④) ④ 46

🎯 **정답: ② 22**

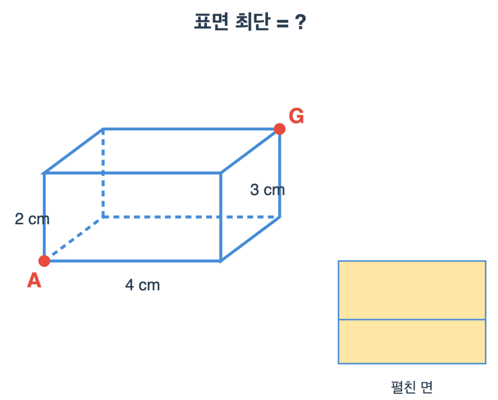
📖 1단계: 두 나머지의 모자란 양을 본다. 6으로 나눈 나머지 4는 6보다 2 작고, 8로 나눈 나머지 6도 8보다 2 작다. 즉 자연수 n에 2를 더한 n+2는 6의 배수이면서 동시에 8의 배수.
2단계: 6과 8의 최소공배수는 24이므로 n+2는 24의 배수다. 따라서 n+2=24, 48, 72, ... 즉 n=22, 46, 70, ...
3단계: 이 중 가장 작은 두 자리 수는 22. (확인: 22÷6=3 나머지 4, 22÷8=2 나머지 6.)

🧠 풀이 전략: 나누는 수와 나머지의 차가 일정하면 'n에 같은 양을 더해 동시에 두 수의 배수로 만들기' 전략이 통한다. 두 모자란 양이 같다는 점을 발견하는 게 핵심.

💡 중국 고대 수학서 '손자산경'에 나오는 한자어 '한신점병'은 이런 동시 나머지 조건의 자연수를 빠르게 찾는 방법을 다룬다.

Q137 입체 추론

가로 4 cm, 세로 3 cm, 높이 2 cm인 직육면체의 한 꼭짓점 A에서 출발하여 표면을 따라 대각선의 반대쪽 꼭짓점 G까지 가는 최단 거리를 구하시오.



①) ① √29 cm
②) ② √41 cm
③) ③ √45 cm
④) ④ √53 cm

🎯 **정답: ② √41 cm**

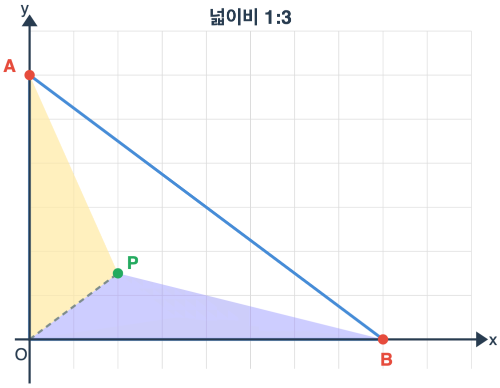
📖 1단계: 표면 최단거리는 두 면을 한 평면 위로 펼쳐서 직선거리로 환원한다. 어느 두 면을 펼치느냐에 따라 거리가 달라지므로 가능한 모든 경우를 비교한다. 2단계: 세 가지 펼침 방식을 따져본다. ① 앞면+윗면을 펼치면 직사각형 (4+2)×3 → 대각선 = $\sqrt{(6^2+3^2)}$ = √45. ② 앞면+옆면을 펼치면 (4+3)×2 → 대각선 = $\sqrt{(7^2+2^2)}$ = √53. ③ 옆면+윗면을 펼치면 (3+2)×4 → 대각선 = $\sqrt{(5^2+4^2)}$ = √41. 3단계: 세 값 √45, √53, √41 중 가장 작은 값은 √41. 따라서 표면 최단거리는 √41 cm.

🧠 풀이 전략: 공간 위 표면 최단경로 문제는 '입체 → 평면 전개도'로 바꾸어 직선거리로 환원하는 것이 핵심. 어떻게 펼치느냐에 따라 결과가 달라지므로 가능한 펼침 경우를 모두 계산해서 비교한다.

💡 이 유형은 1903년 영국의 수학 퍼즐가 헨리 듀드니가 제시한 '거미와 파리(Spider and Fly)' 문제의 기본형이다.

Q138 좌표평면 응용

좌표평면 위 세 점 O(0, 0), A(0, 6), B(8, 0)이 있다. 선분 AB 위의 점 P가 △OPA의 넓이와 △OPB의 넓이의 비를 1 : 3으로 만들 때, 점 P의 좌표를 구하시오.



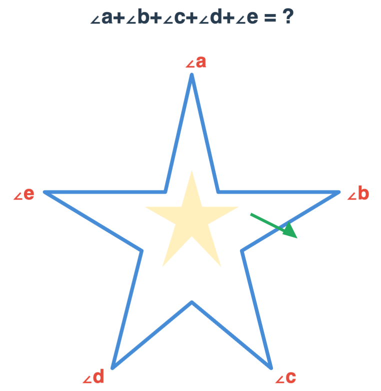
🎯 **정답: P(2, 9/2)**

📖 1단계: △OAB의 넓이 = (1/2)×8×6 = 24. △OPA + △OPB = △OAB = 24이고 비가 1 : 3이므로 △OPA = 6, △OPB = 18. 2단계: 두 삼각형 △OPA, △OPB는 모두 점 O를 한 꼭짓점으로 가지며 밑변 PA, PB가 같은 직선 AB 위에 놓여 있다. 따라서 점 O에서 직선 AB까지의 거리(높이)가 공통이므로 넓이 비 = 밑변 비, 즉 PA : PB = 1 : 3. 3단계: P는 선분 AB를 A에서부터 1 : 3으로 내분하는 점이다. 내분점 공식으로 P = ((1·8 + 3·0)/(1+3), (1·0 + 3·6)/(1+3)) = (8/4, 18/4) = (2, 9/2).

🧠 풀이 전략: 두 삼각형이 한 꼭짓점을 공유하고 마주보는 변(밑변)이 한 직선 위에 있을 때, 넓이의 비 = 밑변의 비. 이 성질을 발견하면 좌표 계산은 단순한 내분점 공식으로 끝난다.

Q139 도형 성질 추론

오각형의 꼭짓점을 한 칸씩 건너뛰며 이어 그린 별 모양(★)에서, 다섯 뾰족한 끝점에서의 안쪽 각의 합을 구하시오.



①) ① 90°

②) ② 180°

③) ③ 270°

④) ④ 360°

🎯 **정답: ② 180°**

📖 1단계: 별 모양 ★의 윤곽을 한 점에서 출발하여 다섯 변을 따라 따라가면, 출발점에 같은 방향으로 돌아올 때까지 펜은 항상 같은 방향(예: 시계 반대 방향)으로 두 바퀴, 즉 720°만큼 회전한다. 2단계: 회전이 일어나는 곳은 다섯 뾰족 끝점뿐이며, 한 뾰족 끝점에서의 회전각(외각) = 180° - (그 점에서의 안쪽 각). 다섯 외각의 합이 720°이다. 3단계: (5×180°) - (다섯 끝각의 합) = 720° → 다섯 끝각의 합 = 900° - 720° = 180°.

🧠 풀이 전략: 다각형의 꼭짓점 각의 합 문제는 '윤곽을 따라 한 바퀴 돌 때의 총 회전각'을 외각의 합으로 보는 것이 강력하다. 일반 다각형은 한 바퀴(360°)지만 별 모양은 두 바퀴(720°)를 회전한다는 사실이 핵심.

💡 이 결과는 별이 정오각별이 아니라도, 다섯 점이 어떻게 놓이든 항상 180°로 같다.

Q140 문자와 식 심화

현재 형의 나이는 동생 나이의 2배에서 1을 뺀 값이다. 5년 후 형의 나이는 동생 나이의 1.5배가 된다고 한다. 현재 동생의 나이는 몇 살인가?

①) ① 5살

②) ② 6살

③) ③ 7살

④) ④ 8살

🎯 **정답: ③ 7살**

📖 1단계: 동생의 현재 나이를 x살이라 하면, 형의 현재 나이는 (2x-1)살이다. 2단계: 5년 후 형의 나이는 (2x-1+5) = (2x+4)살, 동생의 나이는 (x+5)살. 조건 '5년 후 형의 나이 = 동생 나이의 1.5배'에서 2x+4 = 1.5(x+5). 3단계: 우변 전개 1.5x+7.5. 식 정리 2x+4 = 1.5x+7.5 → 0.5x = 3.5 → x = 7. 검산: 동생 7살, 형 13살. 5년 후 형 18, 동생 12 → 18÷12 = 1.5 ✓.

🧠 풀이 전략: 두 시점(현재, 5년 후)의 관계를 한 미지수로 표현하는 식 세우기 문제. '시간이 흘러도 형과 동생의 나이 차이는 일정하다'는 사실을 검산 도구로 활용하면 실수를 줄일 수 있다.

Q141 일차방정식 활용

4시와 5시 사이에 시계의 시침과 분침이 정반대 방향(즉 일직선상에서 180°를 이룸)이 되는 시각을 구하시오.

🎯 **정답: 4시 54와 6/11분 (= 4시 (600/11)분)**

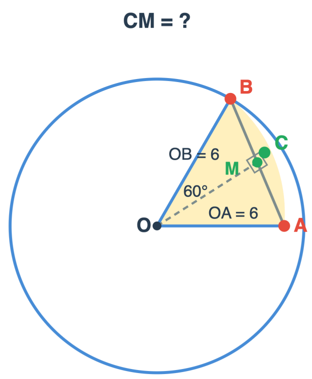
📖 1단계: 4시 정각에 시침은 12시 방향에서 시계 방향으로 120°(시침은 1시간에 30°), 분침은 0°에 있다. 시침은 1분에 0.5°, 분침은 1분에 6° 움직인다. 2단계: 4시 t분일 때 시침의 각도는 (120 + 0.5t)°, 분침의 각도는 (6t)°. 두 바늘이 정반대(180° 차이)가 되려면 분침이 시침보다 180° 앞서야 한다: 6t - (120 + 0.5t) = 180. 3단계: 5.5t = 300 → t = 600/11 = 54와 6/11. 따라서 시각은 4시 54와 6/11분이다. 검산: 4시 정각에 두 바늘 차이 120°, 1분당 분침이 5.5° 더 빨리 가므로 (180-120)/5.5 분이 아니라 0에서 시작이 아니므로 위와 같이 계산해야 함.

🧠 풀이 전략: 시계 바늘 문제는 '두 바늘의 분당 회전각 차이(분침-시침 = 5.5°)'가 일정하다는 점을 이용해 일차방정식을 세우는 문제. 시작 시각의 두 바늘 위치를 정확히 잡는 것이 가장 흔한 함정 포인트.

💡 12시간 동안 시침과 분침이 일직선(반대 방향)이 되는 횟수는 정확히 11번이다.

Q142 원·부채꼴 심화

중심이 O이고 반지름이 6 cm인 원에서 중심각이 60°인 부채꼴 OAB를 잡았다. 호 AB의 중점을 C, 현 AB의 중점을 M이라 할 때, 선분 CM의 길이를 구하시오.



🎯 **정답: (6 - 3√3) cm**

📖 1단계: 부채꼴 OAB에서 ∠AOB = 60°, OA = OB = 6이므로 △OAB는 정삼각형이고 AB = 6. 2단계: O에서 현 AB에 내린 수선의 발은 AB의 중점 M이며, OM은 ∠AOB의 이등분선 위에 있다. 직각삼각형 OMA에서 ∠AOM = 30°이므로 OM = OA·cos30° = 6 × (√3/2) = 3√3. 3단계: 호 AB의 중점 C도 ∠AOB의 이등분선 위에 있고 OC = 6(반지름). 따라서 점 O, M, C는 한 직선 위에 있고 CM = OC - OM = 6 - 3√3 cm.

🧠 풀이 전략: 호의 중점과 현의 중점이 모두 '중심각의 이등분선 위'에 있다는 대칭성을 이용한다. 이등변삼각형의 꼭지각 이등분선이 밑변을 수직이등분한다는 성질로 OM의 길이를 구하면, 같은 직선 위에서 길이 차로 답을 얻는다.

Q143 정수·유리수 추론

식 $|x - 1| + |x - 5|$의 값이 최소가 될 때, 그 최솟값을 구하시오. 또한 어떤 x의 범위에서 최솟값이 달성되는지도 답하시오.

①) ① 2

②) ② 3

③) ③ 4

④) ④ 5

🎯 **정답: ③ 4 ($1 \le x \le 5$에서 달성)**

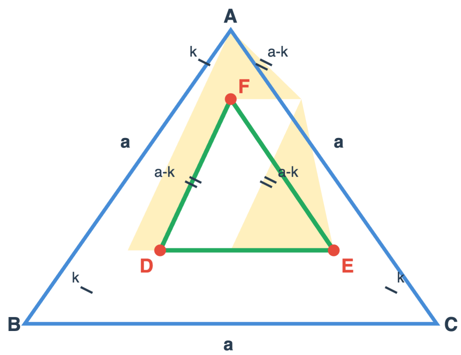
📖 1단계: $|x-1|$은 수직선 위 점 x에서 점 1까지의 거리, $|x-5|$는 점 x에서 점 5까지의 거리이다. 따라서 식의 값 = '점 x에서 점 1과 점 5까지의 거리의 합'. 2단계: 점 x가 점 1과 점 5 사이(즉 $1 \le x \le 5$)에 있으면, 두 거리의 합은 곧 1과 5 사이의 거리 4로 일정하다. 3단계: x가 1과 5 사이를 벗어나면 합은 4보다 커진다. 예: x=0이면 1+5=6, x=6이면 5+1=6, x=10이면 9+5=14. 따라서 최솟값은 4이고, $1 \le x \le 5$인 모든 실수 x에서 달성된다.

🧠 풀이 전략: 절댓값을 단순한 부호 처리로 보지 않고 '수직선 위의 거리'로 해석하는 것이 핵심. 두 정점에서의 거리 합을 최소화하는 점은 두 정점 사이라는 기하적 직관으로 풀린다.

💡 $|x-a|+|x-b|+|x-c|$ 처럼 점이 3개로 늘어나면 최솟값은 가운데 점에서 달성된다.

Q144 합동 증명 기초

한 변의 길이가 a인 정삼각형 ABC의 변 BC, CA, AB 위에 각각 점 D, E, F를 BD = CE = AF = k가 되도록 잡았다. 이때 삼각형 DEF는 어떤 삼각형이 되는지 합동을 이용하여 설명하시오. (단, $0 < k < a$)



🎯 **정답: 삼각형 DEF는 정삼각형이다.**

📖 1단계: 정삼각형 ABC에서 AB = BC = CA = a, ∠A = ∠B = ∠C = 60°. 점들의 위치에서 AF = k, BD = k, CE = k이고, 따라서 BF = AB - AF = a - k, CD = BC - BD = a - k, AE = CA - CE = a - k. 즉 AE = BF = CD = a - k. 2단계: 세 작은 삼각형 △AFE, △BDF, △CED를 비교한다. △AFE: AF = k, AE = a-k, 끼인각 ∠A = 60°. △BDF: BD = k, BF = a-k, 끼인각 ∠B = 60°. △CED: CE = k, CD = a-k, 끼인각 ∠C = 60°. SAS(두 변과 끼인각) 합동 조건에 의해 △AFE ≡ △BDF ≡ △CED. 3단계: 합동인 삼각형의 대응변이 같으므로 FE = DF = ED. 삼각형 DEF의 세 변이 모두 같으므로 DEF는 정삼각형이다.

🧠 풀이 전략: 정삼각형의 회전대칭성을 합동으로 표현하는 문제. 같은 길이가 한 변씩 균등하게 잘려나간 세 모서리 삼각형이 SAS로 서로 합동임을 보이는 단계가 핵심이고, 그 결과로 안쪽 삼각형의 세 변이 같음을 얻는다.

💡 k = a/3일 때 안쪽 삼각형 DEF의 넓이는 원래 정삼각형 ABC의 1/3이 된다.

Q145 자료·경시 퍼즐

1부터 100까지의 자연수 중에서 약수의 개수가 정확히 3개인 수를 모두 찾고, 그 합을 구하시오. 또 그 형태가 어떤 꼴인지도 설명하시오.

🎯 **정답: 4 + 9 + 25 + 49 = 87 (소수의 제곱 꼴)**

📖 1단계: 자연수 N의 약수가 정확히 3개라는 것은, 약수 집합이 {1, d, N} 같은 3원소 집합이라는 뜻이다. 2단계: 약수 개수가 3이 되려면 N의 소인수분해가 어떤 소수 p에 대해 $N = p^2$ 꼴이어야 한다. 이유: N이 두 개 이상의 서로 다른 소인수를 가지면 약수가 4개 이상, 또 N = p^k(k ≥ 3)이면 약수가 4개 이상이 된다. 오직 p^2만이 약수 1, p, p^2의 3개를 가진다. 3단계: 100 이하의 소수의 제곱은 $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, $5^2 = 25$, $7^2 = 49$(다음은 $11^2 = 121 > 100$). 합 = 4 + 9 + 25 + 49 = 87.

🧠 풀이 전략: 약수의 개수를 따질 때는 항상 '소인수분해 꼴'에서 출발한다. N = p_1^a · p_2^b · ... 의 약수 개수는 (a+1)(b+1)... 이므로, 3을 만들려면 곱이 3이 되어야 하고 3은 소수이므로 한 소수의 제곱 꼴 외에는 불가능하다.

💡 약수가 정확히 4개인 자연수는 p^3 꼴이거나 두 서로 다른 소수의 곱 p·q 꼴, 두 가지 형태가 있다.

Q146 자료·경시 퍼즐

1부터 9까지의 숫자를 한 번씩만 사용하여 세 자리 자연수 세 개를 만들 때, 세 수의 합으로 가능한 가장 큰 값을 구하시오.

🎯 **정답: 2556**

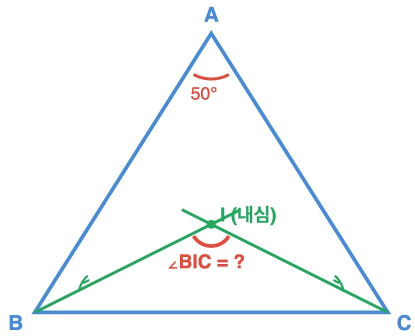
📖 1단계: 세 자리 수 세 개의 합을 자릿값별로 분리하면, 합 = 100×(세 백의 자리 숫자의 합) + 10×(세 십의 자리 숫자의 합) + 1×(세 일의 자리 숫자의 합). 1부터 9까지의 합은 45로 고정이므로 어느 자리에 어떤 숫자를 배치하느냐가 결과를 좌우한다. 2단계: 가중치가 가장 큰 백의 자리(×100)에 가장 큰 숫자 7, 8, 9를 배치, 다음으로 큰 십의 자리(×10)에 4, 5, 6, 가장 작은 가중치인 일의 자리(×1)에 1, 2, 3을 둔다. 어느 자리 안에서의 순서는 합에 영향을 주지 않는다. 3단계: 합 = 100×(7+8+9) + 10×(4+5+6) + 1×(1+2+3) = 100×24 + 10×15 + 6 = 2400 + 150 + 6 = 2556.

🧠 풀이 전략: 조합 최적화 문제는 '큰 가중치 자리에 큰 숫자를 배치한다'는 단순하지만 강력한 원리를 따른다. 자릿값(100, 10, 1)이 다르므로 같은 숫자라도 어느 자리에 두느냐로 100배까지 차이가 난다.

💡 같은 규칙으로 합의 최솟값을 구하면 100×(1+2+3) + 10×(4+5+6) + (7+8+9) = 600 + 150 + 24 = 774이다.

Q147 도형 성질 추론

삼각형 ABC에서 ∠B의 이등분선과 ∠C의 이등분선이 만나는 점을 I라 하자. ∠A = 50°일 때 ∠BIC의 크기를 구하고, 일반적으로 ∠BIC = 90° + (1/2)∠A 임을 보이시오.



🎯 **정답: ∠BIC = 115° (일반: ∠BIC = 90° + (1/2)∠A)**

📖 1단계: 삼각형 ABC의 내각의 합이 180°이므로 ∠B + ∠C = 180° - ∠A. 2단계: BI는 ∠B의 이등분선이므로 ∠IBC = (1/2)∠B. CI는 ∠C의 이등분선이므로 ∠ICB = (1/2)∠C. 삼각형 BIC의 내각의 합은 180°이므로 ∠BIC = 180° - ∠IBC - ∠ICB = 180° - (1/2)(∠B + ∠C) = 180° - (1/2)(180° - ∠A) = 180° - 90° + (1/2)∠A = 90° + (1/2)∠A. 3단계: ∠A = 50° 대입 → ∠BIC = 90° + 25° = 115°.

🧠 풀이 전략: 두 각 이등분선이 만들어 내는 새로운 삼각형 BIC의 내각의 합 180°에 주목하는 것이 출발점. ∠B와 ∠C를 ∠A로 표현하고, 이등분 효과로 절반만 들어간다는 점을 결합하면 ∠A 한 변수의 식으로 깔끔하게 정리된다.

💡 점 I는 삼각형의 '내심(incenter)'이라 부르며, 삼각형 세 변까지의 거리가 모두 같아 삼각형에 내접하는 원의 중심이다.

Q148 일차방정식 활용

정지된 물에서의 속력이 시속 12 km인 배가 어느 강을 따라 같은 거리를 내려가는 데 2시간, 거슬러 올라오는 데 3시간 걸렸다. 이 강물의 속력은 시속 몇 km인가?

①) ① 시속 1.5 km

②) ② 시속 2 km

③) ③ 시속 2.4 km

④) ④ 시속 3 km

🎯 **정답: ③ 시속 2.4 km**

📖 1단계: 강물의 속력을 시속 v km로 놓는다. 강을 따라 내려갈 때(순방향)의 배의 속력은 (12 + v) km/h, 거슬러 올라갈 때(역방향)는 (12 - v) km/h. 2단계: 두 경로의 거리가 같으므로 (속력)×(시간)이 같다. (12 + v)×2 = (12 - v)×3. 3단계: 좌변 24 + 2v, 우변 36 - 3v. 정리: 24 + 2v = 36 - 3v → 5v = 12 → v = 2.4. 따라서 강물의 속력은 시속 2.4 km. 검산: 거리 = (12 + 2.4)×2 = 28.8 km, (12 - 2.4)×3 = 9.6×3 = 28.8 km ✓.

🧠 풀이 전략: 강물 흐름 문제는 '강물 속력이 배 속력에 더해지거나 빠진다'는 합/차 모형이 핵심. 두 경로의 거리가 같다는 한 줄짜리 식으로 일차방정식이 세워지고, 검산은 거리 일치로 확인한다.

Q149 정수·유리수 추론

방정식 |x+1| + |x-3| = 6 을 만족하는 모든 정수해의 합은?

①) ① 0

②) ② 2

③) ③ 4

④) ④ 6

🎯 **정답: ② 2**

📖 1단계: |x+1|+|x-3|는 수직선 위에서 점 -1과 점 3까지의 거리의 합으로 해석한다.
2단계: -1과 3 사이에 x가 있으면 두 거리의 합은 항상 4이므로 6이 될 수 없다.
3단계: -1보다 왼쪽일 때 -(x+1)-(x-3)=6 → -2x+2=6 → x=-2. 3보다 오른쪽일 때 (x+1)+(x-3)=6 → 2x-2=6 → x=4.
4단계: 정수해는 -2와 4이므로 합은 -2+4=2.

🧠 풀이 전략: 절댓값을 '거리'로 해석하면 두 정점 -1, 3 사이는 항상 거리 합이 4(고정), 외부에서 대칭으로 6이 됨을 직관적으로 파악한다.

💡 |x-a|+|x-b|=k 꼴 식은 거리합 그래프가 V자 모양으로 휘어진 절댓값 함수의 합이라 구간별로 풀이가 갈린다.

Q150 문자와 식 심화

두 수 a, b에 대하여 새 연산을 a★b = 2a + b - ab 로 약속한다. 이때 (3★4)★2 의 값은?

①) ① -2

②) ② 0

③) ③ 2

④) ④ 4

🎯 **정답: ③ 2**

📖 1단계: 안쪽 괄호 먼저. 3★4 = 2·3 + 4 - 3·4 = 6 + 4 - 12 = -2.
2단계: 결과를 다시 ★ 연산에 대입. (-2)★2 = 2·(-2) + 2 - (-2)·2.
3단계: = -4 + 2 + 4 = 2.

🧠 풀이 전략: 새 연산 정의식을 그대로 대입하되, 괄호 안쪽부터 단계별로 계산. 음수 대입 시 부호 처리(곱셈에서 음·음=양)에 주의한다.

💡 이런 사용자 정의 연산은 수학경시에서 자주 등장하며, 결합법칙·교환법칙이 성립하지 않는 경우가 많다.

Q151 일차방정식 활용

집에서 학교까지 거리는 1500m이다. 동생이 분속 60m로 학교를 향해 출발한 뒤 5분이 지나서 형이 분속 90m로 같은 길을 따라 출발하였다. 형이 동생을 따라잡는 지점은 학교에서 몇 m 떨어진 곳인가?

①) ① 300m

②) ② 450m

③) ③ 600m

④) ④ 900m

🎯 **정답: ③ 600m**

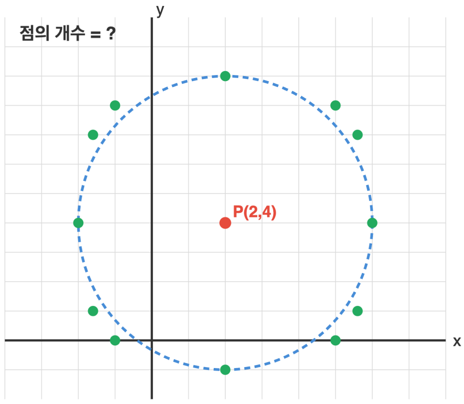
📖 1단계: 형이 출발하는 순간 동생은 이미 60·5 = 300m 앞서 있다.
2단계: 형이 동생을 따라잡으려면 매 분 90-60 = 30m씩 거리를 좁혀야 하므로 300÷30 = 10분 걸린다.
3단계: 형이 10분 동안 이동한 거리 = 90·10 = 900m. 즉 출발점에서 900m 지점에서 만난다.
4단계: 학교까지 남은 거리 = 1500 - 900 = 600m.

🧠 풀이 전략: 두 사람의 속도차를 이용한 추격 문제. '동생의 선두 거리'를 '두 사람의 속도 차'로 나누어 따라잡는 시간을 구한 후, 형의 이동거리를 학교까지 거리에서 빼는 2단계 추론.

💡 이 문제는 만나는 시각이 동생 출발 후 15분, 정확히 학교 도착 5분 전이다.

Q152 좌표평면 응용

좌표평면 위의 점 P(2, 4)와 거리가 정확히 5인 격자점(x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점)의 개수는?



①) ① 4

②) ② 8

③) ③ 12

④) ④ 16

🎯 **정답: ③ 12**

📖 1단계: 격자점 (x, y)와 P(2, 4)의 거리가 5이려면 $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 25$ 를 만족해야 한다.

2단계: 25를 두 제곱수의 합으로 표현하는 경우는 $25 = 0^2 + 5^2 = 3^2 + 4^2 = 4^2 + 3^2 = 5^2 + 0^2$ 네 가지.

3단계: (x-2, y-4)의 가능한 값: (0, ±5), (±5, 0) → 4개 / (±3, ±4) → 4개 / (±4, ±3) → 4개. 총 12개.

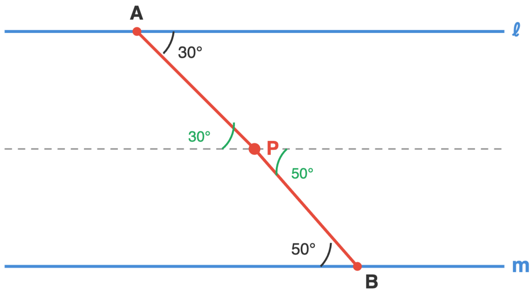
4단계: 따라서 격자점은 12개.

🧠 풀이 전략: '25를 두 제곱수의 합으로 분해'하는 정수해 탐색 전략. 단순히 원 위 점 셈이 아니라 25=0+25=9+16 두 형태와 부호 조합을 빠짐없이 따져야 한다.

💡 피타고라스 수 (3,4,5)는 가장 작은 원시 피타고라스 세쌍둥이로, 반지름 5인 원이 가장 많은 격자점(12개)을 통과하는 작은 원 중 하나다.

Q153 도형 성질 추론

평행한 두 직선 ℓ과 m 사이에 점 P가 놓여 있다. ℓ 위의 점 A에서 PA를 그었을 때 ℓ과 PA가 이루는 각의 크기가 30°이고, m 위의 점 B에서 PB를 그었을 때 m과 PB가 이루는 각의 크기가 50°이다. (단, A와 B는 P 기준 같은 쪽 방향에 있다.) ∠APB의 크기는?



∠APB = 30° + 50°

①) ① 60°

②) ② 70°

③) ③ 80°

④) ④ 90°

🎯 **정답: ③ 80°**

📖 1단계: 점 P를 지나며 ℓ과 평행한 보조선 n을 긋는다. 그러면 n은 m과도 평행하다.

2단계: 보조선 n과 PA가 이루는 각은 ℓ과 PA가 이루는 각과 엇각이므로 30°.

3단계: 보조선 n과 PB가 이루는 각은 m과 PB가 이루는 각과 엇각이므로 50°.

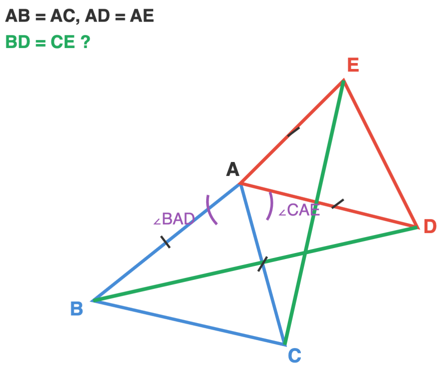
4단계: ∠APB는 보조선 n에 의해 두 부분으로 나뉘므로 ∠APB = 30° + 50° = 80°.

🧠 풀이 전략: 꺾인 점에서 평행선 사이 각을 구할 때는 '꺾인 점을 지나며 두 평행선과 평행한 보조선 긋기' 전략이 핵심. 보조선이 각을 두 엇각으로 분리해 준다.

💡 이 보조선 기법은 '평행선 보조선 정리'라 불리며 중·고교 도형 문제에서 가장 많이 쓰이는 도구 중 하나다.

Q154 합동 증명 기초

한 평면 위에 정삼각형 ABC와 정삼각형 ADE가 있고, 두 삼각형은 점 A를 공유한다(점 D는 점 B와 같은 쪽이 아닌 위치, 점 E는 평면 위 임의의 위치). 이때 BD = CE 임을 합동을 이용하여 증명하시오.



🎯 **정답: △ABD ≡ △ACE (SAS합동) 이므로 BD = CE.**

📖 1단계: 변 비교. 정삼각형 ABC에서 AB = AC. 정삼각형 ADE에서 AD = AE.

2단계: 사잇각 비교. ∠BAD = ∠BAC + ∠CAD = 60° + ∠CAD. ∠CAE = ∠CAD + ∠DAE = ∠CAD + 60°. 따라서 ∠BAD = ∠CAE.

3단계: △ABD와 △ACE에서 AB=AC, AD=AE, 사잇각 ∠BAD=∠CAE 이므로 SAS 합동.

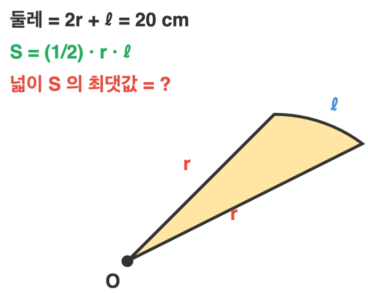
4단계: 합동인 두 삼각형의 대응 변이 같으므로 BD = CE.

🧠 풀이 전략: 공통 꼭짓점 A를 중심으로 한 정삼각형 두 개에서는 '한 각을 공통 부분으로 분리하여 같은 60°를 더하는' 방법으로 두 사잇각이 같음을 보인다. 이것이 회전 합동의 핵심 원리.

💡 이런 구도는 '나폴레옹 정리' '페르마 점' 등 유명한 정삼각형 회전 합동 정리의 출발점이 된다.

Q155 원·부채꼴 심화

둘레의 길이가 20cm인 부채꼴이 있다. (반지름 두 개의 합과 호의 길이를 더한 것이 20cm) 이 부채꼴의 넓이가 최대일 때, 그 최댓값은?



①) ① $20cm^2$

②) ② $25cm^2$

③) ③ $30cm^2$

④) ④ $36cm^2$

🎯 **정답: ② $25cm^2$**

📖 1단계: 부채꼴 둘레 식 $2r + \ell = 20$ 에서 $\ell = 20 - 2r$ (단 $0 < r < 10$).

2단계: 부채꼴 넓이 $S = (1/2)\cdot r\cdot \ell = (1/2)\cdot r\cdot(20-2r) = 10r - r^2$.

3단계: 평방완성하면 $S = -(r^2 - 10r) = -(r-5)^2 + 25$.

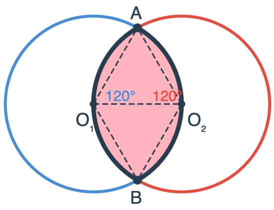
4단계: $r = 5cm$ 일 때 최댓값 $25cm^2$ 를 갖는다. (이때 $\ell = 10cm$)

🧠 풀이 전략: 호 길이를 둘레 식으로 반지름의 식으로 바꾼 뒤 넓이를 r에 대한 이차식으로 표현하고, 평방완성으로 최댓값을 찾는 전략.

💡 $r = 5$, $\ell = 10$일 때 부채꼴의 중심각은 $\ell/r = 2$ 라디안 ≒ 114.6°이며, 이는 면적 최대화를 위한 '황금 비율'이다.

Q156 원·부채꼴 심화

반지름이 6cm인 두 원이 서로 상대방의 중심을 지나도록 겹쳐 있다. 이때 두 원이 겹쳐서 만든 렌즈(눈) 모양의 둘레의 길이는?



반지름 6, 중심거리 O_1O_2=6

①) ① 4π cm

②) ② 6π cm

③) ③ 8π cm

④) ④ 12π cm

🎯 **정답: ③ 8π cm**

📖 1단계: 두 원의 교점을 A, B라 하자. $O_1A = O_2A = O_1O_2 = 6$ 이므로 $\triangle O_1O_2A$ 는 정삼각형이고 $\angle AO_1O_2 = 60°$.

2단계: 점 B는 O_1O_2에 대해 A의 대칭점이므로 $\angle AO_1B = 2 \cdot 60° = 120°$. 같은 이유로 $\angle AO_2B = 120°$.

3단계: 렌즈 모양은 두 원에서 떼어낸 두 호로 둘러싸여 있다. 한 호의 길이 = $2\pi \cdot 6 \cdot (120°/360°) = 4\pi$ cm.

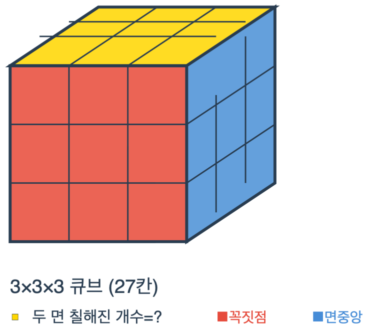
4단계: 두 호의 길이 합 = $4\pi + 4\pi = 8\pi$ cm.

🧠 풀이 전략: 두 원의 교점을 잡으면 두 중심과 함께 정삼각형이 만들어진다는 점을 발견하는 것이 핵심. 정삼각형의 60°에서 중심각 120°를 유도하면 호 길이 공식으로 마무리.

💡 이 도형은 'vesica piscis(물고기 부레)'라고 불리며, 고대 종교 미술과 수학 도해에 자주 등장한다.

Q157 입체 추론

한 모서리의 길이가 3cm인 정육면체의 모든 겉면을 빨간색으로 칠한 후, 1cm 정육면체로 27등분하였다. 이 작은 정육면체들 중 정확히 두 면이 빨간색으로 칠해진 것의 개수는?



①) ① 6

②) ② 8

③) ③ 12

④) ④ 24

🎯 **정답: ③ 12**

📖 1단계: 작은 정육면체가 두 면 칠해지려면 큰 정육면체의 한 모서리에 닿아 있되 꼭짓점은 아니어야 한다.

2단계: 큰 정육면체의 모서리는 총 12개. 한 모서리는 3개의 작은 정육면체로 나뉘는데, 양 끝은 꼭짓점(세 면 칠), 가운데 1개만 두 면 칠해짐.

3단계: 따라서 두 면 칠해진 작은 정육면체 = 12개의 모서리 × 1개 = 12개.

4단계: 검산: 세 면 칠 8개(꼭짓점) + 두 면 칠 12개(모서리 가운데) + 한 면 칠 6개(면 가운데) + 안 칠 1개(정중앙) = 27개. ✓

🧠 풀이 전략: '몇 면이 칠해졌는가'는 곧 '큰 정육면체의 어느 위치에 닿아 있는가'와 같다. 꼭짓점=3면, 모서리(꼭짓점 제외)=2면, 면(모서리 제외)=1면, 내부=0면 으로 위치별 분류.

💡 n×n×n 정육면체에서 두 면 칠해진 작은 정육면체 수는 항상 12(n-2)개이다. n=3일 때 12개, n=4일 때 24개.

Q158 자료·경시 퍼즐

외관이 똑같은 동전 9개 중 1개가 가짜이며, 가짜 동전은 진짜 동전보다 약간 가볍다. 양팔저울로 무게를 비교하여 가짜 동전을 반드시 찾아내려면 최소 몇 번 측정해야 하는가? (방법도 함께 설명)

①) ① 1번
②) ② 2번
③) ③ 3번
④) ④ 4번

🎯 **정답: ② 2번**

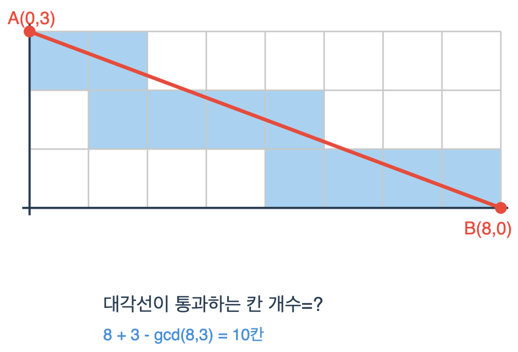
📖 1단계 (1차 측정): 동전 9개를 3개씩 세 그룹 A, B, C로 나눈다. A 3개 vs B 3개를 저울에 올린다.
· 평형 → 가짜는 C 그룹.
· A가 가벼움 → 가짜는 A 그룹.
· B가 가벼움 → 가짜는 B 그룹.
2단계 (2차 측정): 가짜가 들어 있는 그룹의 3개 동전 중 임의로 1개 vs 1개를 저울에 올린다.
· 평형 → 가짜는 저울에 올리지 않은 동전.
· 한쪽이 가벼움 → 그 가벼운 동전이 가짜.
3단계: 따라서 2번의 측정으로 반드시 가짜를 찾아낼 수 있다.
4단계: 1번으로는 불가능. 1회 측정의 결과는 (왼쪽 가벼움, 오른쪽 가벼움, 평형) 세 가지뿐이라 9가지 후보를 결정할 수 없다.

🧠 풀이 전략: 양팔저울 한 번 측정의 정보량은 '3가지 결과'이므로 $3^0=1$, $3^1=3$, $3^2=9$ ... 식으로 후보 수가 3의 거듭제곱을 따른다. 9개는 3^2이므로 2번이면 충분.

💡 동전 27개라면 $3^3=27$이므로 똑같이 3번 측정으로 반드시 찾을 수 있다. 이 원리는 '3진 탐색'으로 알려져 있다.

Q159 좌표평면 응용

좌표평면 위의 점 A(0, 3)에서 점 B(8, 0)으로 선분을 그었을 때, 이 선분이 통과하는 1×1 격자 정사각형 칸의 개수는? (단, 격자 모서리에 단순히 닿기만 하는 경우는 제외하고, 칸 내부를 가로지르는 경우만 센다.)



①) ① 8
②) ② 10
③) ③ 11
④) ④ 12

🎯 **정답: ② 10**
📖 1단계: 선분이 새 칸으로 진입하는 순간은 가로 격자선 또는 세로 격자선을 가로지르는 순간이다.
2단계: A(0,3)에서 B(8,0)까지 선분은 x좌표가 0→8로 변하면서 세로선 x=1,2,...,7 을 7번 가로지르고, y좌표가 3→0으로 변하면서 가로선 y=1, 2를 2번 가로지른다.
3단계: 만약 선분이 격자점 (정수 좌표)을 지나면 가로선과 세로선을 동시에 통과하므로 진입을 한 번 적게 센다. 통과하는 격자점 수 = gcd(8, 3) - 1 = 1 - 1 = 0.
4단계: 새 칸 진입 횟수 = (가로 통과 + 세로 통과 - 동시 통과) + 1 = (7 + 2 - 0) + 1 = 10. 따라서 10개 칸을 통과한다.

🧠 풀이 전략: '선분이 m개 가로 + n개 세로 격자선을 통과하면 m+n+1 개 칸을 지난다(겹치지 않을 때)'. 격자점에서 동시 통과한 횟수만큼 빼야 하며, 그 수는 gcd(가로 변화량, 세로 변화량) - 1.

💡 일반적으로 (0,0)에서 (a,b)까지 가는 선분이 통과하는 1×1 칸 수는 a + b - gcd(a, b) 다. 이는 컴퓨터그래픽스의 '브레젠험 직선 알고리즘'과도 관련 있다.

Q160 문자와 식 심화

세 자리 자연수 N의 백의 자리 숫자가 a, 십의 자리 숫자가 b, 일의 자리 숫자가 c 이며 $a \neq c$ 이다. N의 자릿수를 거꾸로 뒤집은 수를 N' 이라 할 때, 보기에 주어진 수 중에서 (a, b, c 의 값에 관계없이) N - N' 이 항상 그 수의 배수가 되는 가장 큰 자연수는? 그 자연수와 그 이유를 식으로 보이시오.

①) ① 9의 배수

②) ② 11의 배수

③) ③ 99의 배수

④) ④ 999의 배수

🎯 **정답: ③ 99의 배수**

📖 1단계: 세 자리 자연수 N을 자릿값으로 나타내면 N = 100a + 10b + c.

2단계: 자릿수를 뒤집은 수 N' = 100c + 10b + a.

3단계: 두 수의 차를 계산하면 N - N' = (100a + 10b + c) - (100c + 10b + a) = 99a - 99c = 99(a - c).

4단계: a, c는 정수이므로 a - c도 정수이고, 따라서 N - N' 은 항상 99의 배수이다. 99 = 9 × 11이므로 9의 배수이자 11의 배수이기도 하지만, 보기 중 a, b, c의 값에 관계없이 항상 성립하는 가장 큰 수는 99이다.

5단계: 한편 999의 배수는 아니다. 999 = 27 × 37인데, N - N' = 9 × 11 × (a - c)에서 $a \neq c$이고 $|a - c| \leq 9$이므로 a - c는 37의 배수가 될 수 없어 999를 인수로 가질 수 없다. 그러므로 정답은 ③ 99이다.

🧠 풀이 전략: 자릿수가 등장하는 문제에서는 '100a + 10b + c' 형태의 자릿값 분해 식으로 변환하는 것이 핵심. 십의 자리 b가 차에서 사라지는 점에 주목하면 99(a-c)가 자연스럽게 도출된다.

💡 네 자리 수에서 같은 방법을 쓰면 (1000a+100b+10c+d) - (1000d+100c+10b+a) = 999(a-d) + 90(b-c)가 되어 더 복잡한 형태가 나온다.

📝 중1 수학 심화

총 40문제 · 문제와 정답·풀이 포함

Q161 정수·유리수 추론

수직선 위 점 P(x)에서 점 A(-2)까지의 거리와 점 B(5)까지의 거리의 합이 9일 때, 조건을 만족하는 모든 정수 x의 값의 합은?

①) ① -3

②) ② 0

③) ③ 3

④) ④ 6

🎯 **정답: ③ 3**

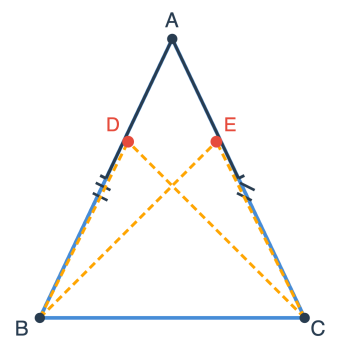
📖 단계1: 두 점 A(-2), B(5) 사이 거리는 5-(-2)=7. 점 P가 A와 B 사이([-2, 5])에 있으면 거리합은 항상 7이므로 9가 될 수 없다.
단계2: x < -2인 경우 |x+2| + |x-5| = -(x+2) + -(x-5) = -2x+3 = 9, 따라서 x = -3.
단계3: x > 5인 경우 |x+2| + |x-5| = (x+2) + (x-5) = 2x-3 = 9, 따라서 x = 6.
단계4: 정수해는 -3과 6이고, 두 값의 합은 -3 + 6 = 3.

🧠 풀이 전략: 절댓값을 거리로 해석하여 수직선 위에서 위치별로 경우를 나누는 전략. 두 점 A,B 사이 거리(=7)가 9보다 작으므로, P는 두 점의 바깥쪽에 있어야 함을 먼저 파악하는 것이 핵심.

💡 |x-a|+|x-b|는 점 P에서 A,B까지 거리의 합으로 해석하면, 그래프가 V자가 아니라 양 끝이 직선이고 가운데가 평평한 형태가 된다.

Q162 합동 증명 기초

이등변삼각형 ABC에서 AB=AC이고, 변 AB 위의 점 D, 변 AC 위의 점 E를 BD=CE가 되도록 잡았다. 선분 BE와 CD를 그었을 때 BE=CD가 성립하는 이유로 옳은 것은?



①) ① 삼각형 ABE와 ACD가 SSS 합동

②) ② 삼각형 ABE와 ACD가 SAS 합동(공통각 ∠A)

③) ③ 삼각형 BDE와 CED가 ASA 합동

④) ④ 삼각형 BCE와 CBD가 AAS 합동

🎯 **정답: ② 삼각형 ABE와 ACD가 SAS 합동(공통각 ∠A)**

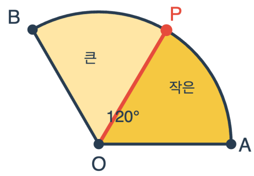
📖 단계1: AB=AC (이등변), BD=CE (조건)이므로 AD = AB-BD = AC-CE = AE.
단계2: 두 삼각형 ABE와 ACD에서 AB=AC, ∠A는 공통, AE=AD가 성립한다.
단계3: 두 변과 그 끼인각이 같으므로 SAS 합동(△ABE ≡ △ACD).
단계4: 합동인 삼각형의 대응변이므로 BE = CD.

🧠 풀이 전략: 이등변삼각형의 두 등변에서 같은 길이만큼 잘라낸 점들로 이루어지는 두 삼각형에 공통각을 끼인각으로 하는 SAS 합동을 적용하는 전략. AB=AC와 BD=CE에서 AD=AE를 끌어내는 단계가 핵심 다리이다.

💡 이등변삼각형은 대칭축에 의해 SAS 합동이 자연스럽게 만들어지는 도형이라, 이런 류의 증명에서 자주 등장한다.

Q163 원·부채꼴 심화

반지름 6cm, 중심각 120°인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위에 점 P를 잡아 선분 OP를 그어 두 부채꼴 OAP, OBP로 나누었다. 두 부채꼴 중 큰 것의 넓이가 작은 것의 넓이의 2배일 때, 작은 부채꼴의 호의 길이는?



반지름 6cm, 중심각 120°
큰 것 = 작은 것 × 2
작은 호 AP의 길이 = ?

①) ① π cm
②) ② 4π/3 cm
③) ③ 2π cm
④) ④ 8π/3 cm

🎯 **정답: ② 4π/3 cm**

📖 단계1: 작은 부채꼴의 중심각을 θ°라 하면 큰 부채꼴 중심각은 (120-θ)°.
단계2: 같은 원에서 부채꼴 넓이는 중심각에 비례한다. 큰 것이 작은 것의 2배이므로 (120-θ) = 2θ, 따라서 3θ = 120, θ = 40°.
단계3: 작은 부채꼴 호의 길이 = 2π·6·(40/360) = 12π·(1/9) = 4π/3 cm.

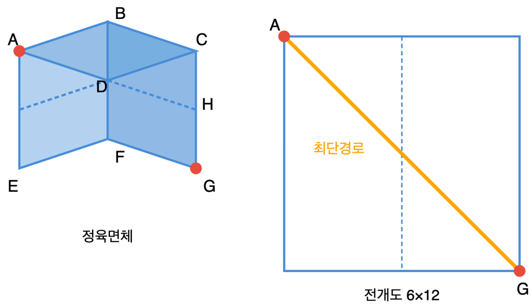
🧠 풀이 전략: 같은 원의 부채꼴은 넓이/호의 길이/중심각이 모두 정비례한다는 핵심 사실을 이용해 비례식을 중심각 식으로 옮기고, 호의 길이 공식을 적용하는 전략. 함정은 '2배'를 넓이가 아닌 호로 직접 잡으려다 식을 잘못 세우는 것.

💡 같은 원에서는 호의 길이, 부채꼴의 넓이, 중심각이 모두 동일한 비를 가지므로 셋 중 하나만 알면 나머지를 즉시 알 수 있다.

Q164 입체 추론

한 모서리의 길이가 6cm인 정육면체 ABCD-EFGH에서, 꼭짓점 A에서 출발하여 정육면체의 표면(겉면)을 따라 마주 보는 꼭짓점 G까지 가는 최단 경로의 길이는?

A→G 표면 최단거리=?



①) ① $6\sqrt{2}$ cm

②) ② $6\sqrt{3}$ cm

③) ③ $6\sqrt{5}$ cm

④) ④ 12 cm

🎯 **정답: ③ $6\sqrt{5}$ cm**

📖 단계1: 다면체 표면의 최단 경로 문제는 두 면을 평면으로 펼친 전개도 위에서 직선거리를 재면 된다 (펼친 후의 직선이 표면 위 측지선).

단계2: A를 포함하는 윗면(ABCD)과 G를 포함하는 옆면(CDHG)을 한 평면으로 펼치면 가로 6cm, 세로 12cm인 직사각형이 만들어지고, A와 G는 마주 보는 두 꼭짓점이 된다.

단계3: 따라서 최단거리 = $\sqrt{(6^2 + 12^2)} = \sqrt{(36+144)} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$ cm.

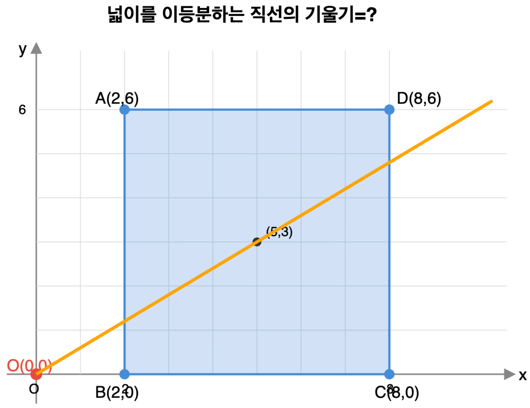
단계4: (참고) 공간 대각선 $6\sqrt{3} \approx 10.39$ cm는 정육면체 내부를 통과하므로 표면 경로가 아님. $6\sqrt{5} \approx 13.42$ cm가 표면 위 진짜 최단경로.

🧠 풀이 전략: 곡면이 아닌 평면 다면체에서 표면 최단거리는 '전개도로 펼쳐서 직선거리'라는 핵심 전략. 어느 두 면을 펼치든 6×12 직사각형이 되어 결과는 동일하므로 한 가지만 펼쳐보면 충분하다.

💡 곤충이 정육면체 한 모퉁이에서 반대 모퉁이로 가는 가장 짧은 길은 표면을 따라가는 $6\sqrt{5}$cm이지, 모서리들을 따라가는 18cm가 아니다.

Q165 좌표평면 응용

좌표평면 위의 네 점 A(2, 6), B(2, 0), C(8, 0), D(8, 6)을 꼭짓점으로 하는 직사각형이 있다. 원점 O를 지나면서 이 직사각형의 넓이를 이등분하는 직선의 기울기는?



①) ① 1/2

②) ② 3/5

③) ③ 2/3

④) ④ 3/4

🎯 **정답: ② 3/5**

📖 단계1: 직사각형은 점대칭 도형이고, 점대칭 도형의 넓이를 이등분하는 직선은 반드시 그 대칭의 중심(=두 대각선의 교점)을 지나야 한다.

단계2: 직사각형 ABCD의 중심 = 마주 보는 꼭짓점 A(2,6)와 C(8,0)의 중점 = ((2+8)/2, (6+0)/2) = (5, 3).

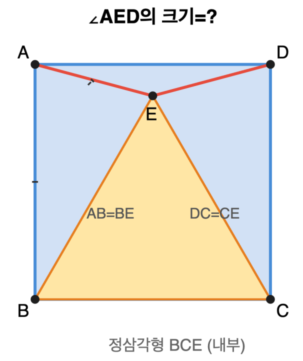
단계3: 원점 O(0,0)과 점 (5,3)을 지나는 직선의 기울기 = (3-0)/(5-0) = 3/5.

🧠 풀이 전략: '직사각형의 넓이를 이등분하는 직선은 항상 중심을 지난다'는 점대칭 성질이 핵심. 따라서 문제는 '원점과 중심을 잇는 직선의 기울기'로 환원되고, 좌표만 구하면 끝난다. 이 성질을 모르면 적분으로 헤매기 쉬운 함정.

💡 이 성질은 직사각형뿐 아니라 모든 평행사변형(점대칭인 도형)에서 성립한다.

Q166 도형 성질 추론

정사각형 ABCD의 변 BC를 한 변으로 하는 정삼각형 BCE를 정사각형의 안쪽에 그렸다. 이때 ∠AED의 크기는?



①) ① 120°

②) ② 135°

③) ③ 150°

④) ④ 165°

🎯 **정답: ③ 150°**

📖 단계1: 정사각형의 변 = 정삼각형의 변이므로 AB = BE, DC = CE. 따라서 △ABE와 △DCE는 모두 이등변삼각형이다.

단계2: ∠ABE = ∠ABC - ∠EBC = 90° - 60° = 30°. 그러므로 △ABE에서 ∠BAE = ∠BEA = (180°-30°)/2 = 75°. 같은 논리로 △DCE에서 ∠CED = 75°.

단계3: 점 E 주위의 각의 합은 360°이므로 ∠AED = 360° - ∠AEB - ∠BEC - ∠CED = 360° - 75° - 60° - 75° = 150°.

🧠 풀이 전략: '정사각형 변 = 정삼각형 변'에서 두 개의 이등변삼각형이 만들어진다는 점을 발견하고, 한 점을 둘러싼 각의 합은 360°라는 사실로 마무리하는 전략. 함정은 ∠AED를 직접 구하려다 외각만 보는 것.

💡 같은 그림에서 △ADE도 사실 이등변삼각형이고, AE=DE이며 정사각형의 한 변과 비교해 정확한 길이도 계산할 수 있다.

Q167 문자와 식 심화

한 변에 점이 n개씩 놓이도록 정사각형 모양의 테두리에 점들을 같은 간격으로 배열했다. 정사각형의 둘레 위에 놓인 점의 총 개수를 n에 관한 식으로 나타낸 것은? (단, $n \geq 2$)

①) ① 4n

②) ② 4n - 4

③) ③ 4n + 4

④) ④ n^2

🎯 **정답: ② 4n - 4**

📖 단계1: 정사각형 한 변에 점이 n개씩이므로 단순히 4 × n = 4n으로 세면, 4개의 꼭짓점이 두 변에 동시에 속해 있어 한 번씩 중복 카운트된다.

단계2: 꼭짓점 4개를 각각 1번씩 빼주어야 하므로 둘레 점의 개수 = 4n - 4.

단계3: 검증) n=2이면 한 변에 2개(꼭짓점만) → 4×2-4 = 4개. 실제 꼭짓점 4개와 일치.

단계4: 검증) n=4이면 4×4-4 = 12개. 실제로 한 변마다 양 끝 꼭짓점 포함 4개씩이고 꼭짓점 중복 4개를 빼면 12개로 일치.

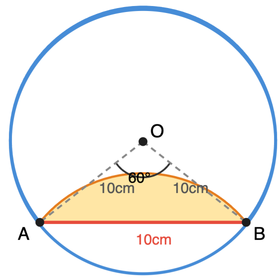
🧠 풀이 전략: 꼭짓점이 두 변에 동시에 속해 중복 카운트되는 점을 빼는 '포함배제 기초' 전략. n=2 같은 작은 값으로 검증하는 습관이 함정 보기 ①을 거르는 데 필수적이다.

💡 이를 일반화하면 정다각형의 한 변에 n개씩 놓을 때 둘레 점의 수는 변 개수 k에 대해 kn - k = k(n-1)이 된다.

Q168 원·부채꼴 심화

반지름이 10cm인 원 O 위에 길이가 10cm인 현 AB를 그었다. 현 AB와 짧은 호 AB로 둘러싸인 활꼴의 넓이는? (π는 그대로 둘 것)

활꼴 넓이=?



활꼴 = 부채꼴 - 정삼각형

①) ① 50π/3 - 25 cm²

②) ② 50π/3 - 25√3 cm²

③) ③ 25π - 25√3 cm²

④) ④ 50π - 100√3 cm²

🎯 **정답: ② 50π/3 - 25√3 cm²**

📖 단계1: OA = OB = AB = 10cm이므로 △OAB는 세 변이 모두 같은 정삼각형. 따라서 ∠AOB = 60°.

단계2: 부채꼴 OAB의 넓이 = π·10²·(60/360) = 100π·(1/6) = 50π/3 cm².

단계3: 정삼각형 OAB의 넓이 = (√3/4)·10² = 25√3 cm².

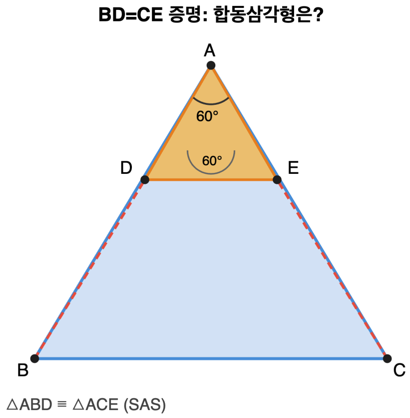
단계4: 활꼴 넓이 = 부채꼴 넓이 - 삼각형 넓이 = 50π/3 - 25√3 cm².

🧠 풀이 전략: '현의 길이 = 반지름' 조건이 '정삼각형 → 중심각 60°'를 끌어내는 핵심 단서. 활꼴은 '부채꼴 - 삼각형'으로 분해하는 표준 전략을 적용한다.

💡 현의 길이가 반지름과 같으면 항상 중심각이 60°이므로, 같은 원 위에 6개의 점을 같은 간격으로 찍으면 각 점 사이 거리가 정확히 반지름과 같아진다.

Q169 합동 증명 기초

정삼각형 ABC와 정삼각형 ADE가 꼭짓점 A를 공유하고 있다(두 정삼각형의 크기는 다를 수 있고, △ADE는 △ABC를 점 A 중심으로 회전시킨 모양이다). 이때 항상 BD = CE가 성립한다. 이를 증명하는 데 사용되는 합동인 두 삼각형은?



①) ① △ABD ≡ △ACE (SAS)

②) ② △ABD ≡ △AEC (SSS)

③) ③ △ADC ≡ △AEB (ASA)

④) ④ △BDC ≡ △CEB (AAS)

🎯 **정답: ① △ABD ≡ △ACE (SAS)**

📖 단계1: AB = AC (정삼각형 ABC의 두 변), AD = AE (정삼각형 ADE의 두 변).

단계2: ∠BAD = ∠BAC - ∠DAC = 60° - ∠DAC, 그리고 ∠CAE = ∠DAE - ∠DAC = 60° - ∠DAC. 따라서 ∠BAD = ∠CAE.

단계3: 두 변 (AB=AC, AD=AE)과 그 끼인각(∠BAD = ∠CAE)이 모두 같으므로 △ABD ≡ △ACE (SAS 합동).

단계4: 합동삼각형의 대응변이므로 BD = CE.

🧠 풀이 전략: 두 정삼각형이 한 꼭짓점을 공유할 때, '한 정삼각형의 변과 다른 정삼각형의 변을 짝지어' SAS 합동을 만든다. 핵심은 '60° - 공통각 = 60° - 공통각'에서 두 끼인각이 같음을 보이는 것이다.

💡 이 구조는 △ABC를 점 A를 중심으로 △DAC가 △EAC가 되도록 회전시킨 것으로 해석할 수 있어 '회전합동'이라 부른다.

Q170 자료·경시 퍼즐

30명의 선수가 토너먼트 방식으로 우승자 1명을 가리는 대회를 한다. 한 번이라도 지면 즉시 탈락하며, 인원이 홀수일 때는 한 명에게 부전승이 부여된다(부전승 선수는 그 라운드에 경기를 치르지 않음). 우승자가 결정될 때까지 치러지는 경기 수는 총 몇 회인가?

①) ① 15회

②) ② 16회

③) ③ 29회

④) ④ 30회

🎯 **정답: ③ 29회**

📖 단계1: 토너먼트 한 경기가 끝나면 정확히 1명이 탈락한다(부전승은 경기를 치르지 않으므로 탈락도 발생하지 않음).

단계2: 우승자 1명을 제외한 나머지 모든 선수가 탈락해야 우승자가 결정되므로, 탈락자는 총 30 - 1 = 29명.

단계3: 따라서 경기 수 = 탈락자 수 = 29회.

단계4: 이 결과는 부전승이 몇 번 일어나든, 대진표가 어떻게 짜이든 항상 동일하다는 점이 핵심이다.

🧠 풀이 전략: '경기 수 = 탈락자 수 = 전체 인원 - 1'이라는 일대일 대응 전략. 한 경기마다 정확히 한 명이 탈락한다는 불변량을 잡는 것이 본질. 부전승 때문에 라운드별 계산을 시도하면 헷갈리도록 만든 함정 문제.

💡 이 논리는 n명 토너먼트의 경기 수가 항상 n-1이라는 것을 보장하므로, 대회 운영자는 인원만 알면 경기 수를 미리 정확히 알 수 있다.

Q171 입체 추론

가로, 세로, 높이의 길이가 모두 자연수인 직육면체가 있다. 세 모서리 길이의 합이 12cm일 때, 직육면체의 부피가 가질 수 있는 최댓값은?

①) ① 36 cm^3
②) ② 48 cm^3
③) ③ 60 cm^3
④) ④ 64 cm^3

🎯 **정답: ④ 64 cm^3**

📖 단계1: a+b+c=12 (a, b, c는 자연수)인 (a, b, c) 조합에서 부피 abc를 비교한다.
단계2: 대표 경우의 부피: (1,1,10)→10, (1,2,9)→18, (2,2,8)→32, (2,3,7)→42, (3,3,6)→54, (3,4,5)→60, (2,4,6)→48, (4,4,4)→64.
단계3: 그중 (4, 4, 4)일 때 부피 = 4 × 4 × 4 = 64 cm^3로 가장 크다.
단계4: 직관적으로 합이 일정할 때 곱은 세 수가 같을수록 커진다. 자연수 조건에서 12를 정확히 3등분(4,4,4)할 수 있으므로 이것이 최댓값임이 보장된다.

🧠 풀이 전략: '합이 일정할 때 곱은 같은 값일수록 커진다'는 산술-기하 평균 직관(AM-GM)을 자연수 범위에서 적용. 모든 분할을 체계적으로 표로 만들어 비교하되, '가능한 한 균등하게'라는 힌트를 먼저 활용해 후보를 압축하는 전략.

💡 이 사실은 '둘레가 같은 직사각형 중 정사각형의 넓이가 최대'라는 2차원 사실의 3차원 버전이다.

Q172 정수·유리수 추론

1부터 100까지의 자연수 중에서 3의 배수도 아니고 5의 배수도 아닌 수의 개수는?

①) ① 47개
②) ② 50개
③) ③ 53개
④) ④ 60개

🎯 **정답: ③ 53개**

📖 단계1: 1-100 중 3의 배수의 개수 = 100을 3으로 나눈 몫 = 33개.
단계2: 1-100 중 5의 배수의 개수 = 100을 5로 나눈 몫 = 20개.
단계3: 3과 5의 공배수(=15의 배수)의 개수 = 100을 15로 나눈 몫 = 6개.
단계4: 포함배제 원리로 '3의 배수 또는 5의 배수'의 개수 = 33 + 20 - 6 = 47개. 따라서 둘 다 아닌 수의 개수 = 100 - 47 = 53개.

🧠 풀이 전략: 포함배제 원리(A 또는 B = A + B - A이고B)와 여집합 사고를 결합하는 전략. 함정은 33 + 20 = 53을 그대로 답으로 고르거나, 100에서 단순히 33+20=53을 빼서 47이라 잘못 답하는 경우.

💡 이 비율(53/100)은 큰 N에 대해 (1 - 1/3)(1 - 1/5) = (2/3)·(4/5) = 8/15 ≈ 0.533... 으로 수렴한다.

Q173 정수·유리수 추론

수직선 위의 점 P의 좌표를 x라 하자. 식 $|x-1| + |x-5|$의 값이 가장 작아지는 x의 범위와 그때의 최솟값을 옳게 짝지은 것은?

①) ① $1 \le x \le 5$, 최솟값 4

②) ② $x = 3$, 최솟값 4

③) ③ $1 < x < 5$, 최솟값 6

④) ④ $x = 3$, 최솟값 6

🎯 **정답: ①**

📖 1단계: $|x-1|$은 점 P와 점 1 사이의 거리, $|x-5|$는 점 P와 점 5 사이의 거리로 해석한다. 따라서 $|x-1|+|x-5|$는 'P에서 1과 5까지 두 거리의 합'이다.
2단계: P가 1과 5 사이($1 \le x \le 5$)에 있으면, 두 거리의 합은 두 점 사이의 거리 그대로 $5-1 = 4$가 된다.
3단계: P가 그 구간 밖에 있으면, 한쪽으로 d만큼 벗어날 때 거리 합이 $4 + 2d$로 더 커진다. 그러므로 최솟값은 4이고, 그 값을 주는 x의 범위는 $1 \le x \le 5$이다.

🧠 풀이 전략: 절댓값을 '수직선 위 거리'로 해석하는 전략을 쓴다. $|x-a|+|x-b|$ 꼴의 최솟값은 a와 b 사이의 거리와 같고, P가 두 점 사이에 있을 때 등호가 성립한다는 사실을 이용한다.

💡 이 원리는 도로변에 가게를 세울 때 두 마을에서의 이동 거리 합을 가장 짧게 하는 위치를 찾는 문제와 똑같다.

Q174 문자와 식 심화

연속한 세 홀수의 합이 99일 때, 이 세 홀수의 곱은 얼마인가? (가운데 홀수를 a로 놓고 식을 세워 풀이하라.)

①) ① 35673

②) ② 35805

③) ③ 35937

④) ④ 35973

🎯 **정답: ②**

📖 1단계: 가운데 홀수를 a라 하면, 그 앞뒤 홀수는 $a-2$, $a+2$이다. 세 수의 합은 $(a-2) + a + (a+2) = 3a$이므로 $3a = 99$, $a = 33$.
2단계: 세 홀수의 곱은 $(a-2) \cdot a \cdot (a+2) = a(a^2-4) = a^3 - 4a$이다. 즉 '$a^3$보다 4a만큼 작은 값'이다.
3단계: $a = 33$을 대입하면, $a^3 = 33^3 = 35937$, $4a = 132$. 따라서 곱 $= 35937 - 132 = 35805$.

🧠 풀이 전략: 세 연속 홀수를 '$a-2$, a, $a+2$'로 대칭 설정하면 합·곱이 깔끔해진다. 합 조건으로 a를 구한 뒤, 곱을 $(a-2)(a+2) = a^2-4$ 항등식으로 줄여 a^3-4a 꼴로 만든다.

💡 세 연속 홀수의 곱은 항상 가운데 수의 세제곱에서 가운데 수의 4배를 뺀 값이다. 이 식은 모든 홀수 중간값에 대해 성립한다.

Q175 일차방정식 활용

현재 어머니의 나이는 아들 나이의 4배이다. 6년 후에는 어머니의 나이가 아들 나이의 2.5배가 된다고 한다. 현재 아들의 나이는 몇 살인가?

①) ① 4세
②) ② 6세
③) ③ 8세
④) ④ 10세

🎯 **정답: ②**

📖 1단계: 현재 아들 나이를 x세로 놓으면, 어머니 나이는 4x세이다.
2단계: 6년 후 아들은 (x+6)세, 어머니는 (4x+6)세. 조건 '어머니가 아들의 2.5배'에서 $4x + 6 = 2.5(x + 6)$.
3단계: 우변을 풀면 $4x + 6 = 2.5x + 15$, 양변에서 2.5x를 빼면 $1.5x = 9$, 따라서 $x = 6$. 검산: 현재 아들 6세, 어머니 24세. 6년 후 아들 12세, 어머니 30세 = 12×2.5. ✓

🧠 풀이 전략: 비율이 다른 두 시점의 조건을 모두 같은 미지수 x로 표현해 등식을 만든다. '몇 년 후' 문제에서는 두 사람 모두에게 같은 수를 더해야 한다는 점이 핵심이며, 비율은 시간이 지나면 작아진다는 직관도 함께 검증한다.

💡 부모와 자식의 나이 비는 시간이 지날수록 점점 1에 가까워진다. 무한히 시간이 지나면 모든 비는 1에 수렴한다.

Q176 일차방정식 활용

잔잔한 물에서 시속 10 km로 가는 배가 일정하게 흐르는 강을 따라 24 km 떨어진 두 지점 사이를 왕복하는 데 모두 5시간이 걸렸다. 강물의 속력(시속)은 얼마인가?

①) ① 시속 1 km
②) ② 시속 2 km
③) ③ 시속 3 km
④) ④ 시속 4 km

🎯 **정답: ②**

📖 1단계: 강물의 속력을 시속 v km라 하자. 하류(흐름 방향)로 갈 때 속력은 (10+v), 상류로 갈 때 속력은 (10-v)이다. 시간 = 거리 ÷ 속력이므로 하류 시간 = 24/(10+v), 상류 시간 = 24/(10-v).
2단계: 왕복 시간이 5이므로 $24/(10+v) + 24/(10-v) = 5$. 양변에 $(10+v)(10-v) = 100-v^2$을 곱하면 $24(10-v) + 24(10+v) = 5(100 - v^2)$, 즉 $480 = 500 - 5v^2$.
3단계: $5v^2 = 20$, $v^2 = 4$, $v = 2$ (속력은 양수). 검산: 하류 시속 12 → 24/12 = 2시간, 상류 시속 8 → 24/8 = 3시간, 합 5시간. ✓

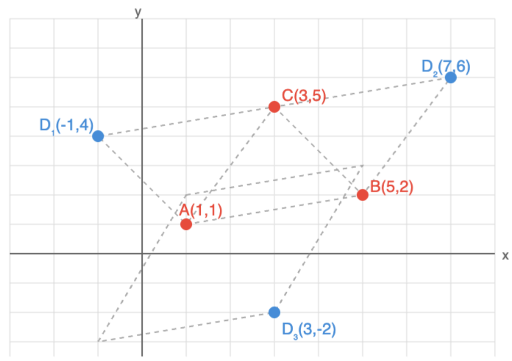
🧠 풀이 전략: 왕복 문제는 '시간 = 거리/속력'을 두 구간에서 따로 세우고 합이 주어진 시간이라는 식을 만든다. 분수식이 나오면 양변에 공통분모인 $(10+v)(10-v) = 100-v^2$을 곱해 v에 대한 이차식으로 정리한다.

💡 왕복 평균 속력은 산술평균이 아니라 조화평균이다. 같은 거리를 다른 속력으로 가면 항상 평균 속력이 두 속력의 산술평균보다 작아진다.

Q177 좌표평면 응용

좌표평면 위에 세 점 A(1, 1), B(5, 2), C(3, 5)가 있다. 이 세 점과 또 다른 한 점 D를 꼭짓점으로 하는 평행사변형을 만들 수 있도록 하는 점 D는 모두 몇 개이며, 그 중 한 점의 좌표는 어떻게 되는가?

D는 모두 몇 개?



①) ① 1개, D(-1, 4)

②) ② 2개, D(7, 6)

③) ③ 3개, D(-1, 4)

④) ④ 3개, D(2, 3)

🎯 **정답: ③**

📖 1단계: 평행사변형은 두 쌍의 변이 평행하고 길이가 같다. 점 D의 위치는 어느 변이 어느 변과 마주 보느냐에 따라 세 가지 경우가 있다.

2단계: 평행사변형에서 마주 보는 두 변이 평행하고 같으려면, 두 대각선이 같은 중점을 가져야 한다. 즉 어느 두 점이 한 쌍의 대각 꼭짓점이 되는가에 따라 세 가지 D가 정해진다.

· 경우 1 (B와 D가 대각): D = A + C - B = (1+3-5, 1+5-2) = (-1, 4).

· 경우 2 (A와 D가 대각): D = B + C - A = (5+3-1, 2+5-1) = (7, 6).

· 경우 3 (C와 D가 대각): D = A + B - C = (1+5-3, 1+2-5) = (3, -2).

3단계: 따라서 가능한 D는 모두 3개이고, 그 중 하나는 D(-1, 4)이다.

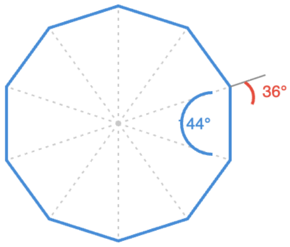
🧠 풀이 전략: '평행사변형의 두 대각선은 서로를 이등분한다'는 사실이 핵심 도구. 미지의 D를 'A, B, C 중 어느 것과 대각인가'로 경우를 나눠 중점이 같다는 식 (D + 한 점)/2 = (다른 두 점의 중점)으로 D를 계산한다.

💡 세 점이 한 직선 위에 있지 않으면 네번째 점은 항상 정확히 3개 존재한다. 세 점이 일직선이면 평행사변형은 만들 수 없다.

Q178 도형 성질 추론

한 정다각형의 한 내각의 크기가 한 외각의 크기의 4배일 때, 이 정다각형의 변의 개수 n과 모든 외각의 합을 차례로 구하면?

정십각형: 내각 = 4 × 외각



중심에 모인 외각의 합 = 360°

①) ① n = 8, 외각합 = 360°

②) ② n = 10, 외각합 = 360°

③) ③ n = 10, 외각합 = 720°

④) ④ n = 12, 외각합 = 1440°

🎯 **정답: ②**

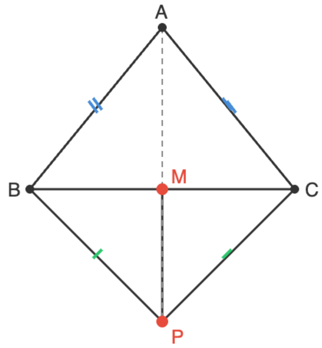
📖 1단계: 정다각형에서 한 꼭짓점의 내각과 외각은 보각 관계이므로 (한 내각) + (한 외각) = 180°이다.
2단계: 한 내각이 한 외각의 4배이므로, 한 외각을 x라 하면 4x + x = 180°, x = 36°. 즉 한 외각은 36°.
3단계: 정다각형의 모든 외각의 합은 변의 개수와 무관하게 항상 360°이다. 따라서 한 외각이 36°인 정n각형의 n은 360 ÷ 36 = 10. 결론: n = 10, 외각의 합 = 360°.

🧠 풀이 전략: 두 가지 사실을 동시에 쓴다. ① 한 꼭짓점에서 내각과 외각의 합은 180°(보각). ② 다각형의 외각의 합은 모양과 변의 수에 상관없이 항상 360°. 외각을 미지수로 두는 편이 식이 깔끔하다.

💡 외각의 합이 항상 360°라는 것은, 다각형 둘레를 한 바퀴 도는 동안 진행 방향이 정확히 한 바퀴(360°) 회전한다는 직관과 같다.

Q179 합동 증명 기초

이등변삼각형 ABC에서 AB = AC이다. 변 BC의 외부(꼭짓점 A의 반대쪽)에 PB = PC인 점 P를 잡았다. 변 BC의 중점을 M이라 할 때, 세 점 A, M, P의 위치 관계와 이 점들을 잇는 직선과 BC와의 관계는?



①) ① A, M, P는 한 직선 위, AP는 BC와 평행

②) ② A, M, P는 한 직선 위, AP는 BC를 수직이등분

③) ③ A, M, P는 한 직선 위가 아니다

④) ④ A, M, P는 한 직선 위, AP와 BC가 60°를 이룬다

🎯 **정답: ②**

📖 1단계: 삼각형 ABM과 삼각형 ACM에서 AB = AC(가정), BM = CM(M이 중점), AM 공통이므로 SSS합동이다. 따라서 ∠AMB = ∠AMC. 두 각의 합이 180°(평각)이므로 각각 90°. 즉 AM ⊥ BC.

2단계: 삼각형 PBM과 삼각형 PCM에서 PB = PC(가정), BM = CM, PM 공통이므로 SSS합동. 마찬가지로 ∠PMB = ∠PMC = 90°. 즉 PM ⊥ BC.

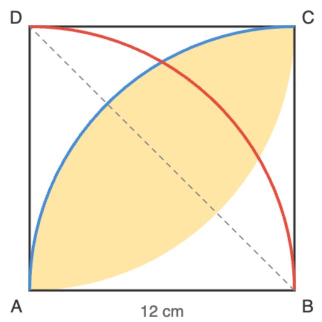
3단계: AM과 PM이 모두 점 M에서 BC와 수직이고, 한 점에서 한 직선에 수직인 직선은 단 하나이므로 AM과 PM은 같은 직선이다. 따라서 A, M, P는 한 직선 위에 있고, 이 직선은 BC를 점 M에서 수직으로 만나고 BM = CM이므로 BC를 수직이등분한다.

🧠 풀이 전략: '두 변에서 같은 거리에 있는 점은 그 두 변의 수직이등분선 위에 있다'는 자취 성질이 본질이지만, 중1 수준에서는 같은 보조선 AM, PM에 대해 SSS합동 두 번을 적용해 90°를 끌어내는 정공법을 쓴다. 한 점에서 직선에 내린 수선의 유일성으로 일직선임을 마무리한다.

💡 이 결과는 '두 점에서 같은 거리에 있는 점들의 자취는 두 점을 잇는 선분의 수직이등분선'이라는 더 일반적인 사실의 특수한 경우이다.

Q180 원·부채꼴 심화

한 변의 길이가 12 cm인 정사각형 ABCD에서 꼭짓점 A를 중심으로 반지름 12 cm인 사분원을, 꼭짓점 C를 중심으로 반지름 12 cm인 사분원을 정사각형 내부에 그렸다. 두 사분원이 정사각형 내부에서 겹치는 영역의 넓이는 얼마인가?



①) ① $36\pi - 72$ cm²

②) ② $72\pi - 144$ cm²

③) ③ $144 - 36\pi$ cm²

④) ④ $144\pi - 72$ cm²

🎯 **정답: ②**

📖 1단계: 두 사분원의 두 호는 정사각형의 또 다른 두 꼭짓점 B와 D를 모두 지나며, 두 호로 둘러싸인 겹친 영역은 대각선 BD에 대해 좌우 대칭이다. 따라서 겹친 영역은 대각선 BD에 의해 합동인 두 부분으로 나뉜다.

2단계: 한쪽(예: 꼭짓점 A쪽 절반)의 넓이를 구하자. 이 부분은 꼭짓점 C를 중심으로 하는 호와 현 BD로 둘러싸인 활꼴이다. 중심 C에서 본 $\angle BCD = 90°$(정사각형의 한 각)이므로 부채꼴 CBD의 넓이 $= (90/360) \times \pi \times 12^2 = 36\pi$. 삼각형 CBD $= (1/2) \times 12 \times 12 = 72$. 활꼴 $= 36\pi - 72$.

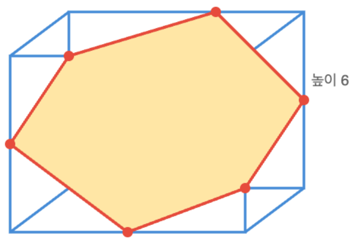
3단계: 다른 쪽(꼭짓점 C쪽 절반)도 대칭이므로 똑같이 $36\pi - 72$. 따라서 겹친 영역의 전체 넓이 $= 2(36\pi - 72) = 72\pi - 144$ cm².

🧠 풀이 전략: 두 호로 둘러싸인 렌즈형 영역은 두 호가 만나는 점들을 잇는 현으로 둘로 가른 뒤, 각 절반을 '부채꼴 - 삼각형' 꼴 활꼴로 계산해 합치는 전략. 두 호의 교점이 정사각형의 꼭짓점 B, D임을 알아채는 것이 출발점이다.

💡 이 렌즈 모양은 두 원이 서로의 중심을 지날 때 생기는 'vesica piscis' 모양과 닮아 있다. 두 원이 서로의 중심을 지나는 경우 그 모양은 더 길쭉해진다.

Q181 입체 추론

가로 4 cm, 세로 5 cm, 높이 6 cm인 직육면체를 한 평면으로 잘랐다. 이 평면이 직육면체의 어느 꼭짓점도 지나지 않으면서 모서리 6개와 모두 만난다고 할 때, 단면(잘린 면)의 모양은 무엇인가?



①) ① 삼각형 (3변)

②) ② 사각형 (4변)

③) ③ 오각형 (5변)

④) ④ 육각형 (6변)

🎯 **정답: ④**

📖 1단계: 직육면체는 6개의 면으로 이루어져 있다. 한 평면이 직육면체를 자르면, 단면의 각 변은 직육면체의 한 면 위에 놓인 선분이다. 즉 단면의 변의 개수는 평면이 가로지르는 면의 개수와 같다.

2단계: 단면의 변의 개수는 동시에 평면이 만나는 모서리의 개수와도 같다(연속한 두 변은 한 모서리에서 만나기 때문). 문제에서 평면이 모서리 6개와 모두 만난다고 했으므로 단면의 변은 6개.

3단계: 따라서 단면의 모양은 육각형이다. 직육면체의 마주 보는 면들은 평행하므로, 단면 위에서 마주 보는 변끼리도 서로 평행하다. 즉 이 육각형은 마주 보는 변끼리 평행한 '육각형'이다.

🧠 풀이 전략: 단면의 각 변은 '평면 ∩ 직육면체의 한 면'이라는 점에서 출발한다. 만나는 모서리의 수와 단면의 변의 수가 같다는 일대일 대응, 그리고 마주 보는 두 면은 평행이라는 사실을 같이 쓴다. 직육면체의 단면은 최대 육각형까지 가능함도 함께 기억한다.

💡 정육면체의 평면 단면은 삼각형, 사각형, 오각형, 육각형까지 모두 나올 수 있지만, 칠각형 이상은 절대로 만들 수 없다. 면이 6개뿐이기 때문이다.

Q182 자료·경시 퍼즐

겉모습이 똑같은 동전 9개가 있다. 그 중 하나는 다른 8개보다 가벼운 가짜이다. 양팔저울만 사용해서 가짜 동전을 반드시 찾아내려고 할 때, 저울을 최소 몇 번 사용해야 하는가? (양팔저울은 한 번에 두 더미의 무게를 비교만 한다.)

①) ① 1번

②) ② 2번

③) ③ 3번

④) ④ 4번

🎯 **정답: ②**

📖 1단계: 9개의 동전을 3개씩 세 더미 A, B, C로 나눈다. 첫 번째 사용에서 A와 B를 양팔에 올린다. 결과는 세 가지 중 하나이다.
· A가 가벼우면 가짜는 A 안에 있다.
· B가 가벼우면 가짜는 B 안에 있다.
· 평형이면 가짜는 C 안에 있다.
어느 경우든 가짜를 포함하는 3개짜리 더미가 정해진다.
2단계: 가짜가 있는 3개의 동전을 다시 1개, 1개, 1개로 나눈다. 두 번째 사용에서 그 중 두 동전을 양팔에 올린다. 가벼운 쪽이 가짜이고, 평형이면 남은 한 개가 가짜이다.
3단계: 따라서 두 번 사용으로 반드시 가짜를 찾을 수 있다. 한 번만 사용해서는 부족함도 확인하자. 한 번 사용으로 구별 가능한 결과는 '왼쪽 가벼움/오른쪽 가벼움/평형'의 세 가지뿐인데, 후보 동전이 9개이므로 3가지 결과로는 9개를 1개로 좁힐 수 없다.

🧠 풀이 전략: 양팔저울 한 번이 주는 정보는 '왼쪽이 가볍다 / 오른쪽이 가볍다 / 평형'의 3가지 결과뿐이다. 따라서 n번 사용으로 구별할 수 있는 가짓수는 최대 3^n개. $9 = 3^2$이므로 2번이면 충분하다는 상한과, 후보를 매번 정확히 1/3로 줄이는 3등분 전략이 핵심.

💡 같은 원리로 27개에서는 3번, 81개에서는 4번, 일반적으로 3^n개에서는 n번이면 충분하다. 정보가 3가지로 나뉘는 양팔저울에 가장 자연스러운 진법이 3진법이다.

Q183 일차방정식 활용

방정식 3x + 5y = 60을 만족하는 자연수 (x, y)의 순서쌍은 모두 몇 개인가? (자연수는 1 이상의 정수이다.)

①) ① 2개

②) ② 3개

③) ③ 4개

④) ④ 5개

🎯 **정답: ②**

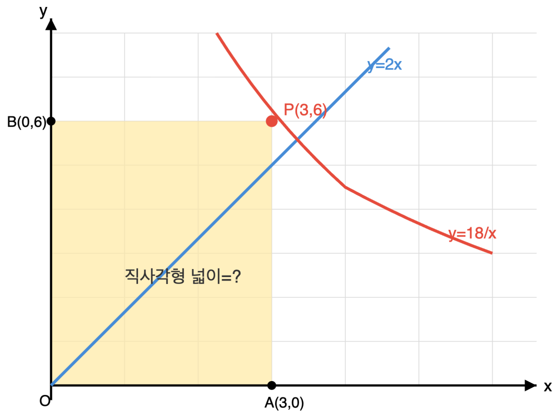
📖 1단계: 식을 y에 대해 정리하면 y = (60 - 3x) / 5 = (60 - 3x)/5. y가 정수가 되려면 분자 60 - 3x가 5의 배수여야 한다.
2단계: 60은 이미 5의 배수이므로, 3x가 5의 배수여야 한다. 3과 5는 서로소이므로 x가 5의 배수여야 한다. 즉 x ∈ {5, 10, 15, 20, ...}.
3단계: y가 자연수(1 이상)이려면 60 - 3x ≥ 5, 즉 x ≤ 55/3 = 18.33...이고, 동시에 x도 자연수여야 한다. 5의 배수이면서 1 ≤ x ≤ 18인 x는 5, 10, 15. 각각의 y값을 계산하면 (5, 9), (10, 6), (15, 3). 따라서 순서쌍은 모두 3개이다. (x = 20을 넣으면 y = 0이 되어 자연수가 아니므로 제외한다.)

🧠 풀이 전략: 부정방정식의 자연수해는 두 단계로 구한다. ① 정수해가 존재할 조건(x의 주기성)을 약수·배수 관계로 찾는다. 3x가 5의 배수여야 하니 3과 5의 서로소성에서 x가 5의 배수. ② '자연수' 조건(양수, 1 이상)으로 x의 상한과 하한을 정해 후보를 유한 개로 줄인다.

💡 ax + by = c 꼴의 자연수해 개수는 a, b의 최대공약수가 c를 나눌 때만 존재하고, 그 개수는 대략 c/(ab) 정도로 변한다. 격자점을 세는 더 깊은 조합론으로 이어진다.

Q184 좌표평면 응용

제1사분면에서 정비례 관계 $y = 2x$의 그래프와 반비례 관계 $y = 18/x$의 그래프가 만나는 점을 P라 하자. 점 P에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 A, B라 할 때, 직사각형 OAPB의 넓이는 얼마인가? (O는 원점)



①) ① 9

②) ② 12

③) ③ 18

④) ④ 36

🎯 **정답: ③**

📖 1단계: 두 그래프의 교점 P의 좌표를 구한다. $y = 2x$와 $y = 18/x$를 같다고 놓으면 $2x = 18/x$. 양변에 x를 곱하면 $2x^2 = 18$, $x^2 = 9$. $x > 0$(제1사분면)이므로 $x = 3$. 따라서 $y = 2 \times 3 = 6$, P(3, 6).
2단계: 점 P에서 x축에 내린 수선의 발은 A(3, 0), y축에 내린 수선의 발은 B(0, 6)이다. 직사각형 OAPB의 가로 OA = 3, 세로 OB = 6.
3단계: 직사각형의 넓이 = 가로 × 세로 = 3 × 6 = 18. 참고로, 반비례 관계 $y = k/x$ 그래프 위의 어떤 점에서 양 축에 수선을 내려 만든 직사각형의 넓이는 항상 $|k|$이다. 여기서 $k = 18$이므로 18로 일치하는 것을 확인할 수 있다.

🧠 풀이 전략: 두 그래프의 교점은 두 식을 연립해 구한다. 정비례·반비례의 만남은 자연스럽게 이차식 $x^2 =$ (양의 상수) 꼴이 되며, 사분면 조건으로 부호를 결정한다. 그 후 점 P(a, b)에서 양 축에 내린 수선이 만드는 직사각형의 넓이는 $a \cdot b$이고, 반비례 그래프에서는 이 값이 비례상수 k와 같다는 일반 사실을 함께 음미한다.

💡 반비례 그래프 $y = k/x$ 위의 모든 점에 대해 '점에서 두 축에 내린 수선과 두 축으로 둘러싸인 직사각형'의 넓이가 항상 $|k|$로 일정하다는 성질은, 반비례 관계의 정의 그 자체와 같은 의미이다.

Q185 정수·유리수 추론

부등식 $|x-2| + |x+3| \le 7$을 만족시키는 정수 x의 개수를 구하시오.

①) ① 6개

②) ② 7개

③) ③ 8개

④) ④ 9개

🎯 **정답: ③ 8개**

📖 1단계: $|x-2|$는 수직선에서 x와 2 사이의 거리, $|x+3|$은 x와 -3 사이의 거리이다. 두 거리의 합이 7 이하가 되어야 한다. 2단계: $-3 \le x \le 2$일 때 두 거리의 합은 항상 -3과 2 사이의 거리인 5로 일정하므로 7 이하 조건을 만족. 정수 6개 (-3, -2, -1, 0, 1, 2). 3단계: $x > 2$일 때 $(x-2)+(x+3) = 2x+1 \le 7$에서 $x \le 3$, 정수 $x = 3$. 4단계: $x < -3$일 때 $(2-x)+(-x-3) = -2x-1 \le 7$에서 $x \ge -4$, 정수 $x = -4$. 5단계: 모든 정수해는 -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3으로 총 8개.

🧠 풀이 전략: 절댓값을 단순 계산하지 않고 '수직선 위 두 점까지의 거리'로 해석한다. 두 절댓값을 더한 식의 값이 두 기준점 사이에서는 항상 일정하므로 구간을 셋으로 나누어 케이스 분석을 한다.

💡 $|x-a|+|x-b|$의 최솟값은 항상 $|a-b|$이며, x가 a와 b 사이에 있을 때 그 값에 도달한다.

Q186 문자와 식 심화

2a - b = 5, b - 3c = 2일 때, 4a - 6c의 값을 구하시오.

①) ① 10

②) ② 12

③) ③ 14

④) ④ 16

🎯 **정답: ③ 14**

📖 1단계: 4a - 6c를 주어진 두 식의 일차결합으로 표현하는 것이 핵심이다. 2단계: 첫 번째 식 양변에 2를 곱하면 4a - 2b = 10. 3단계: 두 번째 식 양변에 2를 곱하면 2b - 6c = 4. 4단계: 두 식을 변끼리 더하면 (4a - 2b) + (2b - 6c) = 10 + 4, 즉 4a - 6c = 14.

🧠 풀이 전략: 각 변수를 따로 구하지 않고, 목표식 4a - 6c를 주어진 두 식의 일차결합으로 분해해 b를 소거하는 전략. 식의 계수만 비교해 적절한 배수를 찾는다.

💡 식의 일차결합으로 미지수를 소거하는 방법은 가우스 소거법의 시작이며, 고등학교의 행렬·연립방정식 풀이로 자연스럽게 이어진다.

Q187 일차방정식 활용

4x + 7y = 100을 만족시키는 양의 정수해 (x, y)의 쌍의 개수를 구하시오.

①) ① 2쌍

②) ② 3쌍

③) ③ 4쌍

④) ④ 5쌍

🎯 **정답: ② 3쌍**

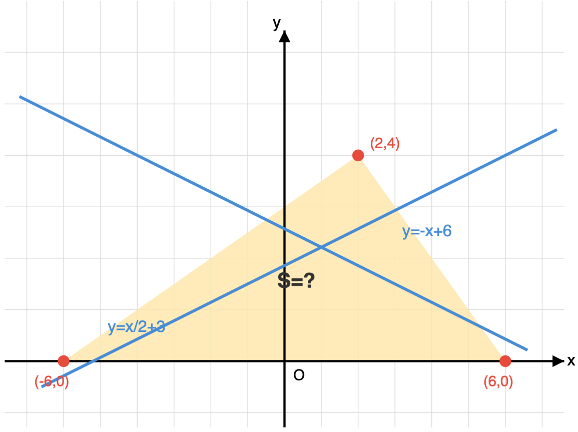
📖 1단계: y = (100 - 4x)/7이 양의 정수가 되려면 100 - 4x가 7의 양의 배수여야 한다. 2단계: 100을 7로 나누면 나머지가 2. 따라서 4x ≡ 2 (mod 7), 양변을 2로 나누면 2x ≡ 1 (mod 7). 3단계: 2 × 4 = 8 ≡ 1 (mod 7)이므로 x ≡ 4 (mod 7). 즉 x = 4, 11, 18, 25, ... 4단계: x = 4 → y = 12, x = 11 → y = 8, x = 18 → y = 4, x = 25 → y = 0(양의 정수 아님). 5단계: 양의 정수해는 (4, 12), (11, 8), (18, 4)로 총 3쌍.

🧠 풀이 전략: 부정방정식의 양의 정수해 문제는 한쪽 변수에 대해 푼 뒤 정수가 되는 조건을 합동식(mod)으로 분석한다. 7로 나눈 나머지를 따져 가능한 x의 형태를 결정한 뒤, x의 범위(양의 정수)에서 케이스를 나열한다.

💡 ax + by = c 꼴의 부정방정식은 그리스 수학자 디오판토스가 체계적으로 연구해 '디오판토스 방정식'이라 불린다.

Q188 좌표평면 응용

좌표평면에서 두 직선 $y = (1/2)x + 3$과 $y = -x + 6$, 그리고 x축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 구하시오.



①) ① 18

②) ② 20

③) ③ 24

④) ④ 30

🎯 **정답: ③ 24**

📖 1단계: 두 직선의 교점을 구한다. $(1/2)x + 3 = -x + 6 \rightarrow (3/2)x = 3 \rightarrow x = 2$, $y = 4$. 따라서 교점은 (2, 4). 2단계: $y = (1/2)x + 3$과 x축의 교점은 $y = 0$일 때 $x = -6$, 즉 (-6, 0). 3단계: $y = -x + 6$과 x축의 교점은 $y = 0$일 때 $x = 6$, 즉 (6, 0). 4단계: 삼각형의 밑변은 x축 위 두 점 사이 거리 = 6 - (-6) = 12, 높이는 교점의 y좌표 = 4. 5단계: 넓이 = (1/2) × 12 × 4 = 24.

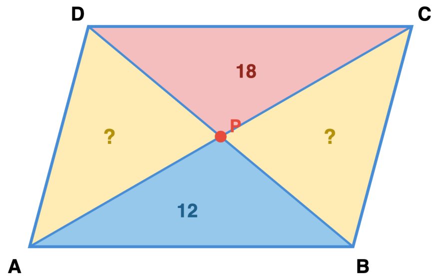
🧠 풀이 전략: 좌표평면에서 직선들로 둘러싸인 삼각형 문제는 (1) 모든 꼭짓점을 교점으로 구하고, (2) x축이나 y축이 한 변이면 그 위의 두 점 사이 거리를 밑변으로 잡으며, (3) 나머지 점의 좌표가 자연스럽게 높이가 된다는 흐름으로 접근한다.

💡 세 꼭짓점이 (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3)일 때 삼각형 넓이는 $(1/2)|x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)|$로 일반화된다.

Q189 도형 성질 추론

평행사변형 ABCD의 내부에 한 점 P가 있다. △PAB의 넓이가 12, △PCD의 넓이가 18일 때, △PAD와 △PBC의 넓이의 합을 구하시오.

AB ∥ DC, AD ∥ BC



①) ① 15
②) ② 30
③) ③ 36
④) ④ 60

🎯 **정답: ② 30**

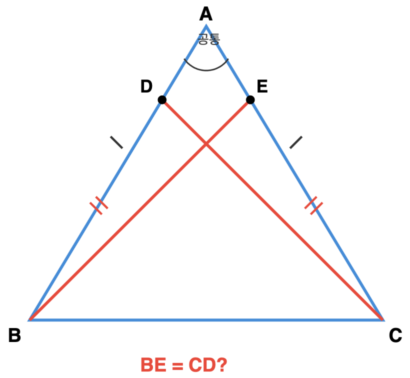
📖 1단계: 평행사변형에서 AB와 CD는 평행하고 길이가 같다. 점 P에서 직선 AB까지의 거리를 h_1, CD까지의 거리를 h_2라 하면 $h_1 + h_2$는 평행사변형의 높이 h와 같다. 2단계: △PAB의 넓이 = (1/2) × AB × h_1, △PCD의 넓이 = (1/2) × CD × h_2이므로 두 넓이의 합 = (1/2) × AB × ($h_1 + h_2$) = (1/2) × AB × h = 평행사변형 넓이의 절반. 3단계: 따라서 평행사변형 ABCD의 넓이 = 2 × (12 + 18) = 60. 4단계: 같은 논리를 평행한 변 AD, BC에 적용하면 △PAD + △PBC = 평행사변형 넓이의 절반 = 30.

🧠 풀이 전략: 점 P의 정확한 위치를 모르는데도 답이 정해지는 비결은 '평행한 두 변까지의 거리의 합 = 평행사변형 높이'라는 보존량 때문이다. 따라서 마주보는 두 변 위 삼각형들의 넓이 합은 항상 평행사변형 넓이의 절반.

💡 이 결과는 평행사변형뿐 아니라 정사각형, 직사각형, 마름모에서도 같은 방식으로 성립한다.

Q190 합동 증명 기초

이등변삼각형 ABC에서 AB = AC이다. 변 AB 위의 점 D와 변 AC 위의 점 E를 BD = CE가 되도록 잡았을 때, BE = CD임을 합동을 이용하여 증명하시오.



🎯 **정답: △ABE ≡ △ACD (SAS 합동)이므로 대응변 BE = CD.**

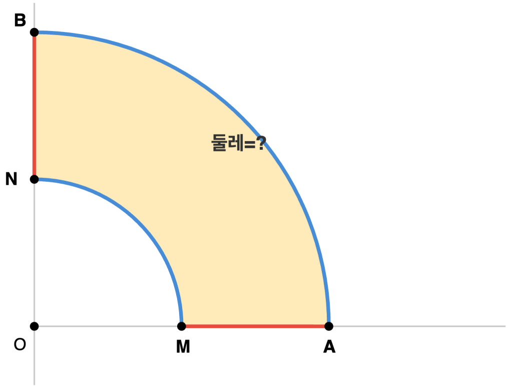
📖 1단계: △ABE와 △ACD를 비교한다. ∠A는 두 삼각형의 공통각. 2단계: 가정에서 AB = AC. 3단계: AD = AB - BD, AE = AC - CE인데 AB = AC이고 BD = CE이므로 AD = AE. 4단계: 두 변 AB와 AE, AC와 AD의 끼인각이 ∠A로 같으므로 SAS 합동: △ABE ≡ △ACD. 5단계: 합동인 두 삼각형의 대응변은 같으므로 BE = CD. 증명 끝.

🧠 풀이 전략: 두 선분의 길이가 같음을 증명할 때는 그 선분을 변으로 갖는 두 삼각형을 찾아 합동을 보이는 전략을 쓴다. AB = AC와 BD = CE가 주어지면 빼서 AD = AE를 만들고, 공통각 ∠A를 끼인각으로 사용하여 SAS를 적용한다.

💡 이등변삼각형의 좌우 대칭성은 SAS 합동을 가장 자연스럽게 보여주는 사례다.

Q191 원·부채꼴 심화

중심이 O이고 반지름이 8 cm인 원에서 중심각이 90°인 부채꼴 OAB가 있다. 반지름 OA, OB의 중점을 각각 M, N이라 하고, 중심 O와 반지름 4 cm로 호 MN을 그렸다. 호 AB, 호 NM, 그리고 두 선분 MA, NB로 둘러싸인 영역(고리 모양 부채꼴)의 둘레를 구하시오.



①) ① $4\pi + 8$

②) ② $6\pi + 4$

③) ③ $6\pi + 8$

④) ④ $8\pi + 8$

🎯 **정답: ③ $6\pi + 8$**

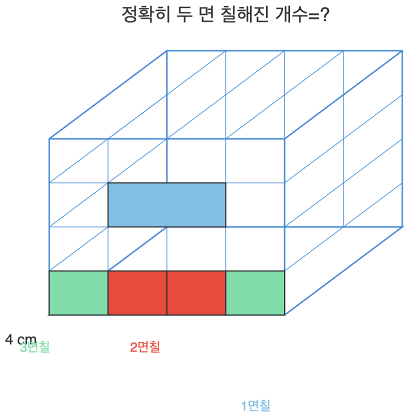
📖 1단계: 큰 호 AB의 길이는 $2\pi \times 8 \times (90/360) = 4\pi$ cm. 2단계: 작은 호 NM의 길이는 $2\pi \times 4 \times (90/360) = 2\pi$ cm. 3단계: 직선 부분 두 곳, 즉 MA = OA - OM = 8 - 4 = 4 cm, NB = OB - ON = 8 - 4 = 4 cm. 4단계: 둘레 = $4\pi + 2\pi + 4 + 4 = 6\pi + 8$ (cm).

🧠 풀이 전략: 고리 모양 부채꼴의 둘레는 '바깥 호 + 안쪽 호 + 두 직선 부분'으로 분리해 각각 구한 뒤 합한다. 호의 길이는 $2\pi r \times$ (중심각/360)에 비례하므로 반지름이 절반이면 호의 길이도 절반.

💡 호의 길이 $\ell = r\theta$는 θ가 라디안($90° = \pi/2$ rad)일 때의 식으로, 같은 중심각이라면 호 길이는 반지름에 정비례한다.

Q192 입체 추론

한 모서리의 길이가 4 cm인 정육면체의 모든 면에 페인트를 칠한 후, 한 모서리가 1 cm인 작은 정육면체 64개로 잘랐다. 이때 정확히 두 면이 칠해진 작은 정육면체의 개수를 구하시오.



①) ① 12
②) ② 16
③) ③ 24
④) ④ 36

🎯 **정답: ③ 24**

📖 1단계: 각 작은 정육면체가 칠해진 면의 개수는 위치에 따라 0, 1, 2, 3개로 분류된다. 정확히 두 면이 칠해진 것은 큰 정육면체의 모서리 위(꼭짓점 제외)에 위치한 것들이다. 2단계: 한 모서리에 놓인 작은 정육면체는 4개이고, 그중 양 끝 2개는 꼭짓점에 위치해 세 면이 칠해진다. 따라서 한 모서리에서 두 면만 칠해진 작은 정육면체는 4 - 2 = 2개. 3단계: 정육면체의 모서리는 12개이므로 두 면이 칠해진 작은 정육면체의 총 개수는 12 × 2 = 24개.

🧠 풀이 전략: 칠해진 면의 개수에 따라 위치를 분류한다: 꼭짓점(3면)·모서리 내부(2면)·면 내부(1면)·정육면체 내부(0면). '두 면'은 모서리에 있되 꼭짓점은 아닌 위치만 세면 된다.

💡 4×4×4 정육면체에서 칠해진 면이 각각 0, 1, 2, 3개인 작은 정육면체의 수는 8, 24, 24, 8로 합이 64다.

Q193 자료·경시 퍼즐

양의 약수의 개수가 정확히 5개인 100 이하의 자연수의 개수를 구하시오.

①) ① 1
②) ② 2
③) ③ 3
④) ④ 4

🎯 **정답: ② 2**

📖 1단계: 자연수 N의 소인수분해가 N = p_1^a × p_2^b × ...일 때 양의 약수의 개수는 (a+1)(b+1)...이다. 약수의 개수가 5가 되려면 (a+1) = 5, 즉 a = 4인 경우만 가능(5는 소수이므로 두 수 이상의 곱으로 표현되지 않음). 따라서 N = p^4 꼴(p는 소수). 2단계: p = 2일 때 N = 2^4 = 16 ≤ 100 만족. 3단계: p = 3일 때 N = 3^4 = 81 ≤ 100 만족. 4단계: p = 5일 때 N = 5^4 = 625 > 100 불가. 5단계: 따라서 100 이하의 자연수 중 약수가 5개인 것은 16과 81로 총 2개.

🧠 풀이 전략: 약수의 개수 공식 d(N) = (a+1)(b+1)...과 5가 소수임을 결합한다. 5의 약수쌍 분해는 5 = 5 × 1 뿐이므로 N은 한 소수의 4제곱 형태에 한정된다. 그 후 p에 작은 소수를 대입해 100 이하인 것만 센다.

💡 약수의 개수가 홀수인 자연수는 항상 어떤 자연수의 제곱(완전제곱수). $p^4 = (p^2)^2$이므로 $16 = 4^2$, $81 = 9^2$.

Q194 정수·유리수 추론

연속된 세 짝수의 합이 90일 때, 이 세 수 중 가장 큰 수의 제곱과 가장 작은 수의 제곱의 차를 구하시오.

①) ① 120

②) ② 180

③) ③ 240

④) ④ 360

🎯 **정답: ③ 240**

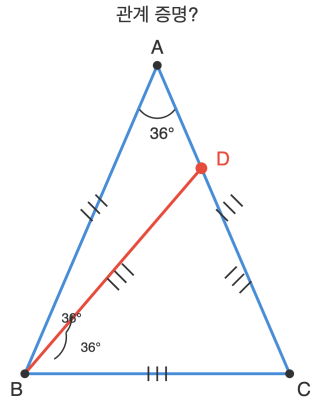
📖 1단계: 연속된 세 짝수를 n - 2, n, n + 2로 놓는다. 2단계: 합 = (n - 2) + n + (n + 2) = 3n = 90이므로 n = 30. 가장 작은 수는 28, 가장 큰 수는 32. 3단계: 가장 큰 수의 제곱과 가장 작은 수의 제곱의 차는 $(n + 2)^2 - (n - 2)^2 = (n + 2 + n - 2)(n + 2 - (n - 2)) = (2n)(4) = 8n$. 4단계: 8 × 30 = 240.

🧠 풀이 전략: 연속된 짝수를 중앙 항을 기준으로 n-2, n, n+2로 놓아 합을 단번에 정리한다. 제곱의 차는 곧바로 계산하지 말고 $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ 인수분해 공식을 사용해 식을 단순화한 뒤 마지막에 대입하면 실수가 줄어든다.

💡 연속된 세 정수(짝수든 홀수든)의 합은 항상 가운데 수의 3배. 평균이 곧 가운데 수다.

Q195 도형 성질 추론

이등변삼각형 ABC에서 AB = AC이고 ∠A = 36°이다. ∠B의 이등분선이 변 AC와 만나는 점을 D라 할 때, AD = BD = BC가 성립함을 보이시오.



🎯 **정답: △ABD에서 ∠BAD = ∠ABD = 36°이므로 AD = BD, △BDC에서 ∠BDC = ∠BCD = 72°이므로 BD = BC. 따라서 AD = BD = BC.**

📖 1단계: AB = AC이므로 두 밑각이 같다. ∠ABC = ∠ACB = (180° - 36°)/2 = 72°. 2단계: BD가 ∠ABC의 이등분선이므로 ∠ABD = ∠DBC = 36°. 3단계: △ABD에서 ∠BAD = 36°, ∠ABD = 36°이므로 ∠ADB = 180° - 36° - 36° = 108°. 두 밑각 ∠BAD = ∠ABD이므로 △ABD는 이등변이고 따라서 AD = BD. 4단계: △BDC에서 ∠DBC = 36°, ∠BCD = 72°이므로 ∠BDC = 180° - 36° - 72° = 72°. ∠BDC = ∠BCD이므로 △BDC도 이등변이고 따라서 BD = BC. 5단계: 두 결과를 합치면 AD = BD = BC.

🧠 풀이 전략: 길이가 같은 선분을 직접 재기 어려운 경우, 그 선분을 변으로 갖는 작은 삼각형의 두 밑각이 같음(이등변삼각형)을 보여 간접 증명한다. 36°-72°-72° 구조에서 각 이등분선이 만들어내는 두 작은 삼각형이 모두 이등변이라는 점이 핵심.

💡 36°-72°-72° 이등변삼각형은 황금비(약 1.618)와 깊이 연관되어 있고 정오각형 안에서도 자주 등장해 '황금삼각형'이라 불린다.

Q196 자료·경시 퍼즐

4시 정각 직후 시침과 분침이 처음으로 정확히 일치하는 시각을 구하시오. (분 단위로 분수까지 정확히 답할 것)

①) ① 4시 20분

②) ② 4시 21과 9/11분

③) ③ 4시 21과 8/11분

④) ④ 4시 22분

🎯 **정답: ② 4시 21과 9/11분**

📖 1단계: 시침은 한 시간(60분)에 30°를 움직이므로 1분에 0.5°. 분침은 1분에 6°를 움직인다. 2단계: 4시 정각의 위치는 시침 120°(= 4 × 30°), 분침 0°. t분 후 시침 위치는 120 + 0.5t (도), 분침 위치는 6t (도). 3단계: 두 바늘이 일치하려면 6t = 120 + 0.5t → 5.5t = 120 → t = 120 ÷ 5.5 = 240/11. 4단계: 240 ÷ 11 = 21 나머지 9이므로 t = 21과 9/11분. 따라서 4시 21과 9/11분에 처음으로 일치한다.

🧠 풀이 전략: 시계 바늘 문제는 두 바늘의 1분당 각속도(시침 0.5°/분, 분침 6°/분)와 시작 위치를 식으로 세운다. '일치' 조건은 두 각도가 같다는 방정식이고, 이는 일차방정식으로 풀린다.

💡 시침과 분침은 12시간 동안 정확히 11번 일치한다(12번이 아니다). 그래서 분모가 11이 되는 분수가 자주 등장한다.

Q197 문자와 식 심화

두 자리 자연수 N의 십의 자리 숫자와 일의 자리 숫자를 서로 바꾸어 만든 수를 N′이라 하자. N + N′ = 110이고 N - N′ = 36일 때, N의 두 자릿수의 곱은?

①) ① 12

②) ② 18

③) ③ 21

④) ④ 24

🎯 **정답: ③ 21**

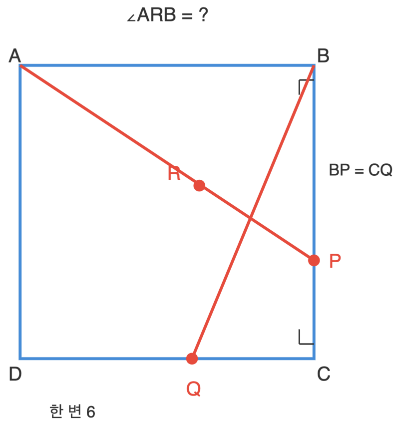
📖 1단계: N의 십의 자리 숫자를 a, 일의 자리 숫자를 b라 하면 N = 10a + b, N′ = 10b + a로 둘 수 있다. 2단계: N + N′ = (10a+b)+(10b+a) = 11(a+b) = 110에서 a + b = 10. 또한 N - N′ = 9(a-b) = 36에서 a - b = 4. 3단계: 두 식을 연립하면 a = 7, b = 3이므로 N = 73, N′ = 37이고 두 자릿수의 곱은 7 × 3 = 21.

🧠 풀이 전략: 두 자리 자연수를 자릿수 a, b의 일차식으로 표현한 뒤, '합은 11(a+b), 차는 9(a-b)'라는 성질을 활용해 연립일차방정식으로 환원한다.

💡 두 자리 수와 자릿수 바꾼 수의 합은 항상 11의 배수, 차는 항상 9의 배수가 된다. 이는 자릿값 10이 만들어내는 대칭 덕분이다.

Q198 합동 증명 기초

정사각형 ABCD에서 변 BC 위의 점 P와 변 CD 위의 점 Q를 BP = CQ가 되도록 잡았다. 선분 AP와 BQ가 점 R에서 만날 때, ∠ARB의 크기는?



①) ① 60°

②) ② 75°

③) ③ 90°

④) ④ 120°

🎯 **정답: ③ 90°**

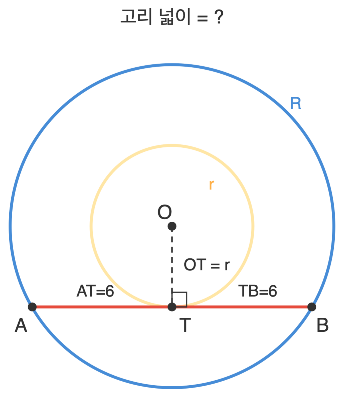
📖 1단계: △ABP와 △BCQ를 비교한다. AB = BC(정사각형의 변), ∠ABP = ∠BCQ = 90°, BP = CQ(조건). 따라서 SAS 합동에 의해 △ABP ≡ △BCQ. 2단계: 합동에서 대응각이 같으므로 ∠BAP = ∠CBQ. 3단계: 삼각형 ABR의 두 각의 합 = ∠RAB + ∠RBA = ∠BAP + (90° - ∠CBQ) = ∠BAP + 90° - ∠BAP = 90°. 따라서 ∠ARB = 180° - 90° = 90°.

🧠 풀이 전략: 두 삼각형이 90° 회전한 모양임을 알아채고 SAS 합동을 적용한 뒤, '대응각의 합 = 직각'이라는 사실로부터 교각이 직각이 됨을 유도한다.

💡 정사각형은 중심을 기준으로 90° 회전대칭이므로, 회전으로 AP가 BQ로 옮겨가고 두 선분은 항상 수직으로 만난다.

Q199 원·부채꼴 심화

두 동심원에서 큰 원의 어떤 현이 작은 원에 접하고, 그 현의 길이가 12cm이다. 두 원 사이의 영역(고리 모양)의 넓이는?



🎯 **정답: 36π cm²**

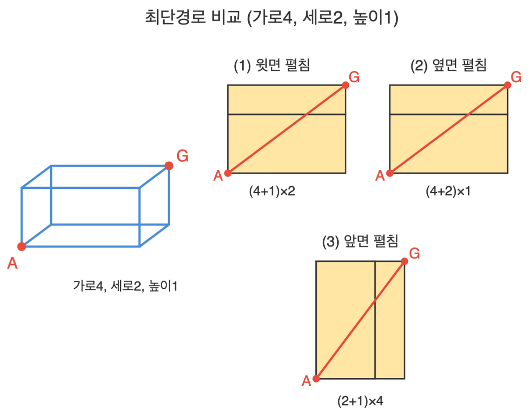
📖 1단계: 작은 원의 반지름을 r, 큰 원의 반지름을 R이라 하자. 현 AB가 작은 원에 접하므로 접점 T는 현의 중점이고, 반지름 OT는 현 AB와 수직이다. 따라서 AT = 6cm. 2단계: 직각삼각형 OTA에서 피타고라스 정리에 의해 $R^2 = r^2 + 6^2$, 즉 $R^2 - r^2 = 36$. 3단계: 고리 영역의 넓이 = $\pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2) = 36\pi$ cm².

🧠 풀이 전략: R, r의 개별 값을 구하려 하지 말고 '$R^2 - r^2$'를 한 덩어리로 처리한다. '접선과 반지름은 수직'이라는 성질로 직각삼각형을 만든 뒤 피타고라스 정리로 한 번에 답이 나온다.

💡 이 고리의 넓이는 두 반지름의 구체적인 값과 무관하다. 큰 원의 현이 작은 원에 접한다는 조건만 있으면 그 현의 길이만으로 결정된다.

Q200 입체 추론

가로 4cm, 세로 2cm, 높이 1cm인 직육면체의 한 꼭짓점 A에서 대각선 방향의 반대편 꼭짓점 G까지 직육면체 표면을 따라가는 최단거리는?



①) ① √29 cm

②) ② 5 cm

③) ③ √37 cm

④) ④ 7 cm

🎯 **정답: ② 5 cm**

📖 1단계: 직육면체 표면을 따른 최단경로는 두 면을 평면 위에 펼친 전개도에서 두 점을 잇는 직선이다. 어느 두 면을 펼치느냐에 따라 거리가 달라지므로 모든 경우를 비교해야 한다. 2단계: 세 가지 펼침 방식에 대한 직선거리는 $\sqrt{(4+1)^2 + 2^2} = \sqrt{29}$, $\sqrt{(4+2)^2 + 1^2} = \sqrt{37}$, $\sqrt{(2+1)^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$. 3단계: 셋 중 가장 짧은 거리는 $\sqrt{25} = 5$cm.

🧠 풀이 전략: 3차원 표면 거리 문제는 '전개도 위 직선'으로 환원한다. 직육면체는 펼치는 방법이 본질적으로 세 가지 있으므로 세 경우의 $\sqrt{(\text{두 변의 합})^2 + (\text{나머지 변})^2}$을 모두 계산해 최솟값을 고른다.

💡 이 문제의 원형은 영국 수학자 헨리 듀드니가 제안한 '거미와 파리 문제'다. 방 모서리를 따라 거미가 파리를 잡으러 가는 최단경로를 묻는 고전 퍼즐.

📝 중1 수학 심화

총 40문제 · 문제와 정답·풀이 포함

Q201 일차방정식 활용

시계의 분침은 1분에 6°, 시침은 1분에 0.5° 회전한다. 3시 정각 이후, 시침과 분침이 처음으로 정확히 겹치는 시각은 3시 몇 분인가?

①) ① 3시 15분

②) ② 3시 16과 4/11분

③) ③ 3시 16과 5/11분

④) ④ 3시 17분

🎯 **정답: ② 3시 16과 4/11분**

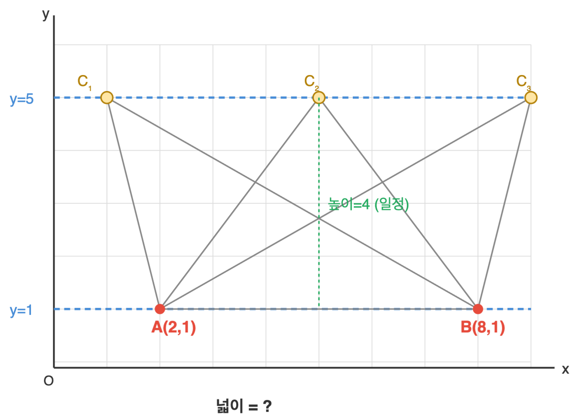
📖 1단계: 분침은 1분에 6°, 시침은 1분에 0.5° 움직이므로 분침이 시침을 1분에 5.5°씩 따라잡는다. 2단계: 3시 정각에 분침은 0°(12 위치), 시침은 90°(3 위치). 분침이 시침을 따라잡으려면 90°를 더 가야 한다. 3단계: 따라잡는 데 걸리는 시간을 t분이라 하면 5.5t = 90이므로 t = 90 ÷ 5.5 = 180/11 = 16과 4/11분. 따라서 3시 16과 4/11분에 처음으로 겹친다.

🧠 풀이 전략: 두 바늘의 각속도 차이(5.5°/분)를 '상대속도'로 보고, 따라잡아야 할 각도(90°)를 시간으로 환산한다. 거리·속력 문제와 동일한 구조: 거리 ÷ 상대속력 = 시간.

💡 12시간 동안 시침과 분침은 정확히 11번 겹친다. 그래서 두 번 겹치는 사이의 시간 간격은 12/11시간 = 약 1시간 5분 27초로 항상 일정하다.

Q202 좌표평면 응용

좌표평면 위 직선 y = 1 위의 두 점 A(2, 1), B(8, 1)에 대하여, 점 C는 직선 y = 5 위를 자유로이 움직인다. 점 C의 위치가 어디든지 삼각형 ABC의 넓이는 일정함을 보이고, 그 값을 구하라.



🎯 **정답: 12**

📖 1단계: 밑변 AB의 길이는 두 점이 같은 직선 y=1 위에 있으므로 |8 - 2| = 6cm. 2단계: 점 C는 직선 y = 5 위에 있으므로 C에서 직선 y = 1(밑변 AB가 놓인 직선)까지의 수직 거리(즉 삼각형의 높이)는 항상 |5 - 1| = 4. C의 x좌표가 어떤 값이든 높이는 4로 일정하다. 3단계: 따라서 삼각형 ABC의 넓이 = (1/2) × 밑변 × 높이 = (1/2) × 6 × 4 = 12. C의 위치와 무관하게 항상 12.

🧠 풀이 전략: 평행한 두 직선 사이에 있는 삼각형은 한 변(밑변)의 길이와 평행선 사이 거리(높이)만으로 넓이가 결정된다. 꼭짓점이 평행선을 따라 옮겨도 높이는 변하지 않으므로 넓이는 불변임을 인식하는 것이 핵심.

💡 이 성질은 '등적변형'의 기본 원리로, 삼각형의 한 꼭짓점을 밑변과 평행한 직선 위에서 옮겨도 넓이는 변하지 않는다. 도형 분할이나 작도 문제에서 자주 활용된다.

Q203 정수·유리수 추론

방정식 $|x - 3| + |x + 5| = 10$을 만족하는 정수 x의 개수는?

①) ① 1개

②) ② 2개

③) ③ 3개

④) ④ 무수히 많다

🎯 **정답: ② 2개**

📖 1단계: 수직선 위에서 $|x - 3| + |x + 5|$는 점 x로부터 두 점 3과 -5까지의 거리의 합이다. 두 점 사이 거리는 $|3 - (-5)| = 8$. 2단계: x가 두 점 사이($-5 \le x \le 3$)에 있을 때 거리의 합 = 8(일정). 두 점 바깥에 있을 때 합 > 8이고, 한쪽으로 1만큼 벗어날 때마다 합은 2씩 증가. 합이 10이 되려면 한쪽 끝에서 1만큼 더 떨어진 점이어야 한다. 3단계: $x = 3 + 1 = 4$ 또는 $x = -5 - 1 = -6$. 검산: $|4-3|+|4+5| = 1 + 9 = 10$ ✓, $|-6-3|+|-6+5| = 9 + 1 = 10$ ✓. 정수 해는 -6, 4 두 개.

🧠 풀이 전략: 절댓값의 합을 '두 기준점에서의 거리의 합'으로 기하적으로 해석하면, 두 점 사이에서는 일정값이 되고 바깥에서만 늘어난다. 식을 구간별로 나눠 푸는 정공법보다 훨씬 빠르다.

💡 평면에서 '두 점까지 거리의 합이 일정'한 점들의 자취는 타원이 된다. 1차원 수직선에서는 그 자취가 두 점 사이의 선분(같은 합) 또는 양 끝의 두 점뿐!

Q204 자료·경시 퍼즐

서로 다른 5개의 자연수의 평균이 14이고, 가장 큰 수와 가장 작은 수의 차가 13이다. 가장 큰 수가 가질 수 있는 값의 최댓값은?

①) ① 20

②) ② 22

③) ③ 23

④) ④ 25

🎯 **정답: ③ 23**

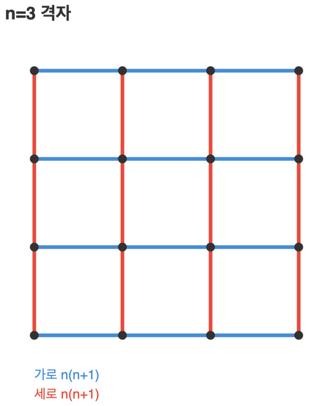
📖 1단계: 다섯 수의 합은 $14 \times 5 = 70$. 가장 작은 수를 a, 가장 큰 수를 a+13이라 하면 나머지 세 수는 모두 서로 다른 자연수로 a보다 크고 a+13보다 작다. 2단계: 나머지 세 수의 합 = $70 - a - (a+13) = 57 - 2a$. 이 세 수의 최솟값 합은 $(a+1)+(a+2)+(a+3) = 3a+6$. 부등식 $3a+6 \le 57 - 2a$를 풀면 $5a \le 51$, 즉 $a \le 10.2$이므로 $a \le 10$. 3단계: $a = 10$이면 나머지 세 수의 합은 37. 예를 들어 11, 12, 14는 모두 10과 23 사이의 서로 다른 자연수이고 합이 37이므로 가능. 따라서 가장 큰 수의 최댓값 = 10 + 13 = 23.

🧠 풀이 전략: 가장 큰 수를 키우려면 차이가 13으로 고정이므로 가장 작은 수도 같이 키워야 한다. 그러려면 나머지 세 수가 작아야 하는데, 서로 다른 자연수이므로 최소 합은 3a+6. 이 최소 합이 실제 합 이하라는 부등식에서 a의 상한이 결정된다.

💡 평균(중심)과 범위(최대-최소)라는 두 통계량만으로도 데이터의 양 끝값에 강한 제약이 걸린다. 통계의 첫 두 가지 정보가 데이터를 얼마나 좁히는지 보여주는 좋은 예.

Q205 문자와 식 심화

한 변에 작은 정사각형이 n개씩 놓이는 정사각형 격자(가로 n칸, 세로 n칸)를 성냥개비로 만들 때 필요한 성냥개비의 개수를 n에 관한 식으로 나타내고, n = 10일 때의 개수를 구하라.



n	개수
1	4
2	12
3	24
4	40

총 = 2n(n+1)

①) ① 2n(n+1), 220개

②) ② n(n+1), 110개

③) ③ $2n^2 + 1$, 201개

④) ④ $(n+1)^2$, 121개

🎯 **정답: ① 2n(n+1), 220개**

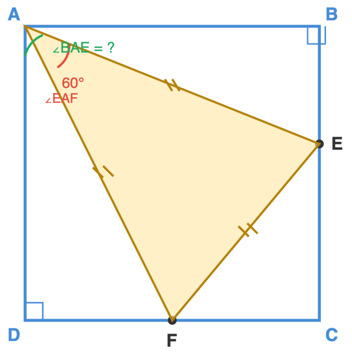
📖 1단계: 가로 방향 성냥개비는 가로줄이 (n+1)개 있고, 각 줄에 n개씩 놓이므로 n(n+1)개. 2단계: 세로 방향 성냥개비도 같은 원리로 (n+1)개의 세로줄에 각 n개씩이므로 n(n+1)개. 3단계: 두 방향을 합하면 총 n(n+1) + n(n+1) = 2n(n+1)개. n = 10을 대입하면 2 × 10 × 11 = 220개.

🧠 풀이 전략: 전체를 한꺼번에 세지 말고 가로 방향과 세로 방향으로 분리해서 각각 '몇 줄에 몇 개씩'을 곱셈으로 일반화한 뒤 더한다. 분리하여 세는 것이 식 일반화의 핵심.

💡 식 2n(n+1)은 'n번째 직사각형 수의 2배'로 해석할 수 있다. 또한 1+2+3+...+n = n(n+1)/2이므로, 성냥개비 수는 1부터 n까지 합의 4배와 같다.

Q206 합동 증명 기초

한 변의 길이가 a인 정사각형 ABCD의 변 BC 위에 점 E, 변 CD 위에 점 F를 잡았더니 삼각형 AEF가 정삼각형이 되었다. 이때 ∠BAE의 크기는?



정사각형 ABCD, △AEF 정삼각형

①) ① 10°

②) ② 15°

③) ③ 20°

④) ④ 30°

🎯 **정답: ② 15°**

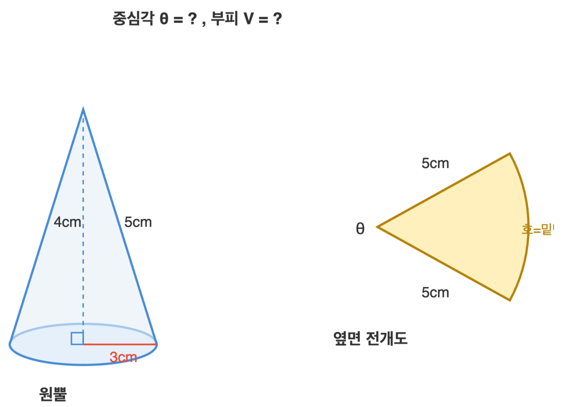
📖 1단계: △ABE와 △ADF를 비교한다. AB = AD(정사각형의 변), AE = AF(정삼각형의 변), ∠ABE = ∠ADF = 90°(정사각형의 내각). 직각삼각형의 빗변과 다른 한 변이 각각 같으므로 RHS 합동에 의해 △ABE ≡ △ADF. 2단계: 합동에서 대응각이 같으므로 ∠BAE = ∠DAF. 3단계: ∠BAE + ∠EAF + ∠FAD = ∠BAD = 90°이고 ∠EAF = 60°이므로 ∠BAE + ∠DAF = 30°. ∠BAE = ∠DAF이므로 각각 15°. 따라서 ∠BAE = 15°.

🧠 풀이 전략: 정사각형의 90° 각을 세 부분(∠BAE, ∠EAF, ∠FAD)으로 나눠 본다. 양쪽 두 직각삼각형의 RHS 합동으로 끝의 두 각이 같음을 보인 뒤, 가운데 60°를 빼고 절반을 취하면 답.

💡 정사각형 안에 한 꼭짓점을 공유하는 정삼각형을 끼워넣는 이 구도는 경시대회와 작도 문제의 단골 주제. 양쪽 직각삼각형이 합동이라는 사실이 모든 풀이의 출발점이 된다.

Q207 원·부채꼴 심화

옆면이 부채꼴인 원뿔에서 모선의 길이가 5cm이고 밑면의 반지름이 3cm이다. 이 원뿔의 옆면 부채꼴의 중심각의 크기와 원뿔의 부피를 각각 구하라.



🎯 **정답: 중심각: 216°, 부피: 12π cm³**

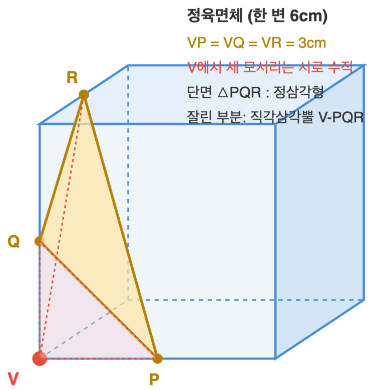
📖 1단계: 옆면 부채꼴의 호의 길이는 원뿔 밑면 원의 둘레와 같다. 즉 $(\theta/360) \times 2\pi \times 5 = 2\pi \times 3$에서 $(\theta/360) \times 10 = 6$, $\theta/360 = 3/5$, 따라서 $\theta = 216°$. 2단계: 원뿔의 높이를 h라 하면 모선² = 반지름² + 높이²에서 $5^2 = 3^2 + h^2$, $h^2 = 16$, $h = 4$cm. 3단계: 부피 = $(1/3) \times$ (밑면 넓이) $\times$ (높이) = $(1/3) \times \pi \times 3^2 \times 4 = 12\pi$ cm³.

🧠 풀이 전략: 원뿔 옆면 전개도(부채꼴)의 호 길이가 밑면 원의 둘레와 같다는 등식을 세워 중심각을 비례로 구한다. 그리고 모선·반지름·높이가 직각삼각형을 이루므로 피타고라스 정리로 높이를 구해 부피 공식에 대입.

💡 모선 ℓ과 밑면 반지름 r인 원뿔의 옆면 부채꼴의 중심각은 항상 $(r/\ell) \times 360°$. 비율 하나만 알면 단숨에 중심각이 나온다.

Q208 입체 추론

한 모서리의 길이가 6cm인 정육면체에서, 한 꼭짓점 V에 모이는 세 모서리의 중점 P, Q, R을 잇는 평면으로 잘랐을 때, 잘려나가는 작은 입체(꼭짓점 V를 포함하는 직각삼각뿔)의 부피는?



①) ① 4.5 cm³
②) ② 9 cm³
③) ③ 13.5 cm³
④) ④ 27 cm³

🎯 **정답: ① 4.5 cm³**

📖 1단계: 정육면체에서 한 꼭짓점 V에 모이는 세 모서리는 서로 수직이고, 그 중점까지의 길이는 모두 6 ÷ 2 = 3cm이다. 따라서 잘려나가는 입체는 V를 직각으로 하는 '세 직각변이 모두 3cm인 직각삼각뿔'. 2단계: 밑면을 △VPQ(직각변 VP=3, VQ=3인 직각삼각형)로 두면 밑면 넓이 = (1/2) × 3 × 3 = 9/2 cm^2. 높이는 VR = 3cm(밑면에 수직). 3단계: 부피 = (1/3) × 밑면 넓이 × 높이 = (1/3) × (9/2) × 3 = 9/2 = 4.5 cm^3.

🧠 풀이 전략: 정육면체의 꼭짓점에서 모이는 세 모서리가 서로 수직이라는 점을 이용해 잘려나간 입체를 '세 직각변이 같은 직각삼각뿔'로 인식한다. 직각삼각뿔의 부피는 (1/6) × (세 직각변의 곱) = (1/6) × 3 × 3 × 3 = 4.5로 한 번에 계산할 수도 있다.

💡 정육면체의 8개 꼭짓점을 모두 같은 방식으로 잘라내면 절단 정육면체(truncated cube)가 되고, 더 깊이 자르면 정팔면체에 도달한다. 이 변형 과정에서 아르키메데스 입체들이 차례로 나타난다.

Q209 정수·유리수 추론

두 정수 x, y에 대해 |x-3| + |y+5| = 0이 성립한다. 이때 xy의 값은?

①) ① -15
②) ② -8
③) ③ 8
④) ④ 15

🎯 **정답: ① -15**

📖 1단계: 절댓값은 항상 0 이상의 값을 가진다. 즉 |x-3|≥0이고 |y+5|≥0. 2단계: 0 이상인 두 수의 합이 0이 되려면 두 수가 모두 0이어야만 한다. 따라서 |x-3|=0이고 |y+5|=0. 3단계: |x-3|=0에서 x=3, |y+5|=0에서 y=-5. 따라서 xy = 3 × (-5) = -15.

🧠 풀이 전략: 이 문제는 '절댓값은 음수가 아니다'라는 핵심 성질을 활용하는 전략으로 접근한다. 두 절댓값의 합이 0이라는 강한 조건은 각각이 0이어야만 함을 의미한다.

💡 절댓값이 음이 아니라는 성질 덕분에 |a|+|b|=0이라는 짧은 식 하나가 a=0과 b=0이라는 두 정보를 동시에 준다.

Q210 문자와 식 심화

세 자리 자연수의 백의 자리 숫자를 a, 십의 자리 숫자를 b, 일의 자리 숫자를 c라 하자(단, a>c). 이 수에서 백의 자리 숫자와 일의 자리 숫자만 서로 바꾼 수를 뺀 차를 a, c로 나타내면?

①) ① 9(a-c)

②) ② 11(a-c)

③) ③ 99(a-c)

④) ④ 100(a-c)

🎯 **정답: ③ 99(a-c)**

📖 1단계: 원래 수를 자리수로 표현하면 100a + 10b + c. 2단계: 백의 자리와 일의 자리만 바꾼 수는 100c + 10b + a. 3단계: 두 수의 차 = (100a + 10b + c) - (100c + 10b + a) = 99a - 99c = 99(a-c). 따라서 항상 99의 배수이다.

🧠 풀이 전략: 이 문제는 '자리수의 의미는 위치마다의 가중치(100, 10, 1)'라는 사실을 식으로 표현하는 전략으로 접근한다. 십의 자리는 변하지 않으므로 식에서 사라진다.

💡 99 = 9 × 11이므로 이 차는 9의 배수이자 11의 배수이기도 합니다. 11로 나누어떨어지는지 확인하는 빠른 방법의 근거이기도 합니다.

Q211 일차방정식 활용

민수와 영희는 둘레가 800m인 원형 트랙의 같은 지점에서 동시에 출발하여 서로 반대 방향으로 일정한 빠르기로 걷는다. 민수는 분속 60m, 영희는 분속 40m로 걸을 때, 두 사람이 처음으로 다시 만나는 것은 출발 후 몇 분 뒤인가?

①) ① 4분

②) ② 8분

③) ③ 10분

④) ④ 16분

🎯 **정답: ② 8분**

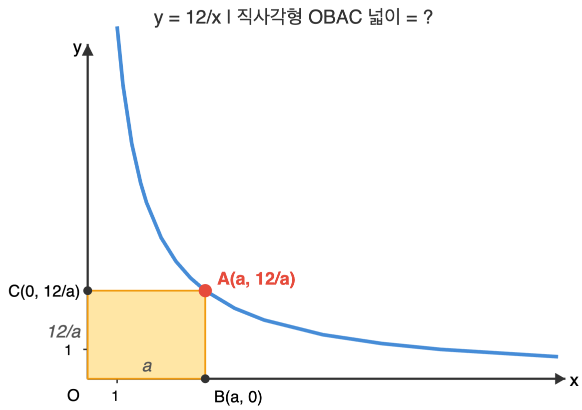
📖 1단계: 두 사람이 반대 방향으로 걸으면 둘 사이의 거리가 줄어드는 빠르기는 두 속도의 합과 같다. 2단계: 속도의 합 = 60 + 40 = 100m/분. 3단계: 두 사람이 둘레 800m를 함께 걸어 처음 만나려면 800 ÷ 100 = 8분이 걸린다.

🧠 풀이 전략: 이 문제는 '반대 방향에서는 속도의 합, 같은 방향에서는 속도의 차로 거리가 좁혀진다'는 상대속도 전략으로 접근한다. 한 명이 한 바퀴 도는 시간(800/60≈13.3분)으로 함정에 빠지지 않도록 주의.

💡 같은 방향이었다면 속도의 차 20m/분으로 만나는 데 800/20=40분이 걸려, 무려 5배의 시간 차이가 납니다.

Q212 좌표평면 응용

좌표평면에서 함수 y = 12/x (x>0) 위의 임의의 한 점 A를 잡고, A에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 B, C라 한다. 직사각형 OBAC의 넓이는? (단, O는 원점)



①) ① 6

②) ② 12

③) ③ 24

④) ④ a값에 따라 변한다

🎯 **정답: ② 12**

📖 1단계: A의 좌표를 (a, 12/a)로 놓는다(a>0). 2단계: 수선의 발 B=(a, 0), C=(0, 12/a)이므로 직사각형 OBAC의 두 변의 길이는 OB=a, OC=12/a. 3단계: 넓이 = OB × OC = a × (12/a) = 12. 즉 점 A의 위치(a값)와 무관하게 항상 12로 일정하다.

🧠 풀이 전략: 이 문제는 '반비례 함수 y=k/x 위의 점 (x, y)에서는 x×y=k가 항상 일정하다'는 핵심 성질을 활용하는 전략으로 접근한다.

💡 반비례 그래프 위의 어떤 점에서 두 좌표축에 내린 수선으로 만든 직사각형의 넓이는 항상 |k|로 일정합니다. 이것이 반비례를 시각적으로 정의하는 한 방법이기도 합니다.

Q213 도형 성질 추론

바늘이 있는 일반 시계가 4시 20분을 정확하게 가리킬 때, 시침과 분침이 이루는 각 중 작은 쪽의 각의 크기는? (단, 시침은 분에 비례하여 연속적으로 움직인다.)

①) ① 5°

②) ② 10°

③) ③ 15°

④) ④ 20°

🎯 **정답: ② 10°**

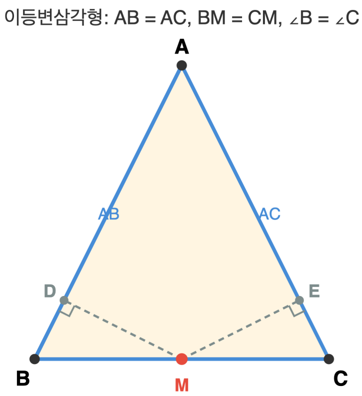
📖 1단계: 시침은 12시간(360°)에 한 바퀴 도므로 1시간에 30°, 1분에 0.5° 움직인다. 2단계: 4시 20분에서 시침의 위치(12시 기준 시계방향 각도) = 4×30 + 20×0.5 = 120 + 10 = 130°. 3단계: 분침의 위치 = 20×6 = 120°(분침은 1분에 6°). 4단계: 두 바늘 사이의 각 = 130° - 120° = 10°.

🧠 풀이 전략: 이 문제는 '시침은 정확히 숫자 위에만 있는 것이 아니라 분에 비례해 함께 움직인다'는 사실을 잊지 않는 것이 전략의 핵심이다. 단순히 4와 4(20분 위치)를 비교하는 함정을 피해야 한다.

💡 시침은 1시간(60분)에 30°를 도므로 1분에 0.5°씩 이동합니다. 단, 정각이 아닌 시각의 시침 위치를 잊으면 거의 항상 함정에 빠집니다.

Q214 합동 증명 기초

이등변삼각형 ABC에서 AB=AC이고 BC의 중점을 M이라 한다. 점 M에서 변 AB, AC에 내린 수선의 발을 각각 D, E라 할 때, MD=ME임을 △MBD와 △MCE의 합동을 이용하여 보이려고 한다. 가장 알맞은 합동 조건은?



①) ① SSS(세 변)

②) ② SAS(두 변과 끼인각)

③) ③ 빗변과 한 예각이 같다

④) ④ 빗변과 다른 한 변이 같다

🎯 **정답: ③ 빗변과 한 예각이 같다**

📖 1단계: △MBD와 △MCE는 모두 직각삼각형이다(∠MDB=∠MEC=90°). 2단계: M이 BC의 중점이므로 BM=CM. 직각삼각형에서 빗변은 직각의 대변이므로 BM, CM이 각각 △MBD, △MCE의 빗변이다. 3단계: 이등변삼각형의 두 밑각이 같으므로 ∠B=∠C(예각). 4단계: 빗변 BM=CM과 한 예각 ∠B=∠C가 같으므로 RHA(빗변과 한 예각) 조건으로 △MBD≡△MCE. 따라서 MD=ME.

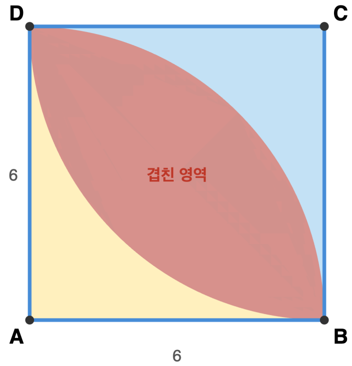
🧠 풀이 전략: 이 문제는 '직각삼각형의 합동 조건은 일반 삼각형의 합동 조건보다 약한 정보로도 가능하다'는 사실에 주목하는 전략으로 접근한다. 직각이 이미 한 정보를 주기 때문이다.

💡 이등변삼각형의 밑변 중점에서 두 옆변까지의 거리는 항상 같습니다. 이는 '대칭축 위의 점은 두 대칭 변에 대해 같은 거리'라는 더 일반적인 사실의 한 사례입니다.

Q215 원·부채꼴 심화

한 변의 길이가 6cm인 정사각형 ABCD에서 꼭짓점 A를 중심으로 반지름이 6cm인 사분원, 그리고 대각 꼭짓점 C를 중심으로 반지름이 6cm인 사분원을 각각 정사각형 내부에 그렸다. 두 사분원이 동시에 덮는 영역(겹치는 부분)의 넓이는?

정사각형 ABCD (한 변 = 6): 두 사분원이 겹친 영역의 넓이 = ?



①) ① 9π-18

②) ② 9π+18

③) ③ 18π-36

④) ④ 36-9π

🎯 **정답: ③ 18π-36**

📖 1단계: 두 사분원의 넓이의 합 = $(1/4)\pi \times 6^2 + (1/4)\pi \times 6^2 = 9\pi + 9\pi = 18\pi$. 2단계: 정사각형 내부의 모든 점은 A 또는 C 중 적어도 한 쪽으로부터 거리가 6 이하이다(거리의 제곱의 합이 항상 72 이하이므로 둘 중 하나는 36 이하). 따라서 두 사분원 영역의 합집합은 정사각형 전체와 같아 그 넓이는 36. 3단계: 포함배제 원리에 의해 (사분원1)+(사분원2) = (합집합) + (교집합). 즉 18π = 36 + (겹치는 영역). 4단계: 겹치는 영역 = 18π - 36 (cm^2).

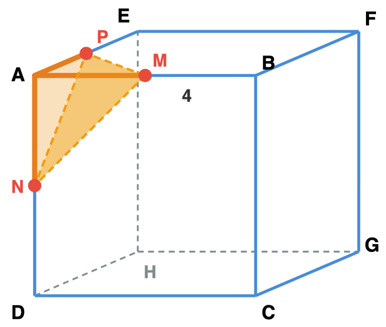
🧠 풀이 전략: 이 문제는 '두 영역의 합 = 합집합 + 교집합'이라는 포함배제 원리를 활용하는 전략으로 접근한다. 합집합이 정사각형 전체임을 보이는 핵심 관찰이 필요하다.

💡 정사각형 한 변과 같은 반지름의 두 대각선 사분원은 정사각형을 빈틈없이 덮습니다. 이 성질이 겹친 부분의 넓이를 한 방에 계산하게 해 줍니다.

Q216 입체 추론

한 모서리의 길이가 4인 정육면체에서 한 꼭짓점 A를 자른다. A에서 출발하는 세 모서리의 중점 M, N, P를 모두 지나는 평면으로 자를 때, 잘려 나간 작은 입체(사면체 A-MNP)의 부피는?

정육면체 ABCD-EFGH (모서리 4): △MNP 단면, 작은 사면체 A-MNP



①) ① 2/3

②) ② 4/3

③) ③ 8/3

④) ④ 4

🎯 **정답: ② 4/3**

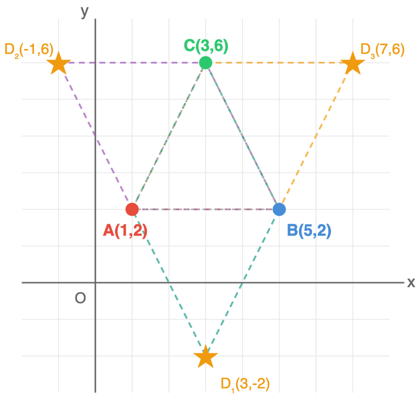
📖 1단계: A에서 출발하는 세 모서리는 서로 수직이고 각 길이는 4. M, N, P는 그 중점이므로 AM=AN=AP=2. 2단계: 사면체 A-MNP는 A에서 만나는 세 모서리가 서로 수직인 '직각 사면체'이다. 3단계: 직각 사면체의 부피 공식 V = (1/6) × a × b × c = (1/6) × 2 × 2 × 2 = 8/6 = 4/3. (밑면 △AMN의 넓이 (1/2)·2·2=2, 높이 AP=2, 부피 (1/3)·2·2=4/3로도 같음.)

🧠 풀이 전략: 이 문제는 '정육면체 한 꼭짓점에서 만나는 세 모서리는 서로 수직'이라는 사실을 이용해 직각 사면체로 환원하는 전략으로 접근한다. 일반 사면체 공식 대신 (1/6)abc로 빠르게 계산.

💡 세 모서리가 서로 수직인 직각 사면체의 부피는 (1/6)abc로 표현되며, 정육면체의 8개 꼭짓점을 모두 같은 방식으로 자르면 작은 사면체 8개와 정팔면체로 분해할 수 있습니다.

Q217 좌표평면 응용

좌표평면 위의 세 점 A(1, 2), B(5, 2), C(3, 6)을 세 꼭짓점으로 하는 평행사변형의 네 번째 꼭짓점이 될 수 있는 점은 모두 몇 개이며, 그 점들의 y좌표의 총합은?



①) ① 2개, 합 4

②) ② 3개, 합 4

③) ③ 3개, 합 10

④) ④ 4개, 합 12

🎯 **정답: ③ 3개, 합 10**

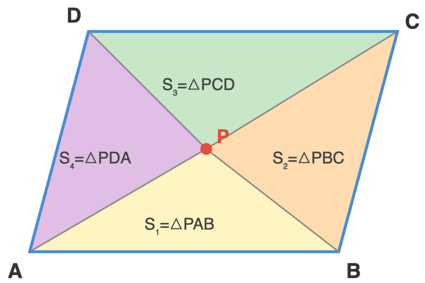
📖 1단계: 세 점이 평행사변형의 세 꼭짓점이라는 것은 셋 중 어느 두 점을 대각선의 양 끝으로 놓을지에 따라 세 가지 경우가 있다는 뜻이다. 2단계: 평행사변형의 대각선은 서로의 중점에서 만나므로, '대각선 양 끝의 좌표 합'은 같다. 따라서 네 번째 점 D는 (D = 두 끝의 좌표 합 - 나머지 한 점)으로 구한다. 경우 1: AB가 대각선이면 D = A+B-C = (1+5-3, 2+2-6) = (3, -2). 경우 2: AC가 대각선이면 D = A+C-B = (1+3-5, 2+6-2) = (-1, 6). 경우 3: BC가 대각선이면 D = B+C-A = (5+3-1, 2+6-2) = (7, 6). 3단계: 세 후보 모두 서로 다르므로 가능한 네 번째 점은 3개. y좌표 합 = (-2) + 6 + 6 = 10.

🧠 풀이 전략: 이 문제는 '평행사변형은 두 대각선이 서로의 중점에서 만난다'는 성질을 이용해 네 번째 점 D = (양 끝 좌표 합) - (나머지 한 점)으로 한 번에 구하는 전략으로 접근한다.

💡 세 점이 일직선 위에 있지 않을 때, 그 셋을 꼭짓점으로 하는 평행사변형의 네 번째 꼭짓점은 항상 정확히 3개입니다.

Q218 도형 성질 추론

평행사변형 ABCD의 내부에 임의의 점 P를 잡았다. 네 삼각형 △PAB, △PBC, △PCD, △PDA의 넓이를 차례로 S_1, S_2, S_3, S_4 라 할 때, 다음 중 점 P의 위치에 관계없이 항상 성립하는 관계식은?



①) ① $S_1+S_2 = S_3+S_4$

②) ② $S_1+S_3 = S_2+S_4$

③) ③ $S_1 = S_3$이고 $S_2 = S_4$

④) ④ $S_1 \times S_3 = S_2 \times S_4$

🎯 **정답: ② $S_1+S_3 = S_2+S_4$**

📖 1단계: 평행사변형에서 변 AB와 CD는 평행하고 길이가 같다(AB=CD). 2단계: △PAB의 높이(P에서 AB까지의 거리)를 h_1, △PCD의 높이(P에서 CD까지의 거리)를 h_3라 하면, h_1+h_3 = AB와 CD 사이의 거리 d(평행선 사이 거리). 따라서 $S_1+S_3 = (1/2)\cdot AB\cdot h_1 + (1/2)\cdot CD\cdot h_3 = (1/2)\cdot AB\cdot(h_1+h_3) = (1/2)\cdot AB\cdot d$ = (1/2)×(평행사변형 넓이). 3단계: 같은 논리로 변 BC와 DA에 대해 S_2+S_4 = (1/2)×(평행사변형 넓이). 4단계: 따라서 $S_1+S_3 = S_2+S_4$ (둘 다 평행사변형 넓이의 절반).

🧠 풀이 전략: 이 문제는 '평행한 두 변에 대해 한 점에서 두 변까지의 수직거리 합은 두 평행선 사이 거리로 일정하다'는 성질을 이용하는 전략으로 접근한다. 마주 보는 두 삼각형의 넓이 합이 평행사변형 넓이의 절반이라는 결론으로 이어진다.

💡 이 성질은 점 P가 평행사변형 내부 어디에 있든 똑같이 성립합니다. 심지어 변 위에 놓아도 식이 그대로 유지됩니다.

Q219 자료·경시 퍼즐

어떤 다각형의 대각선의 개수가 그 다각형의 변의 개수의 5배일 때, 이 다각형의 변의 개수는?

①) ① 8

②) ② 10

③) ③ 13

④) ④ 15

🎯 **정답: ③ 13**

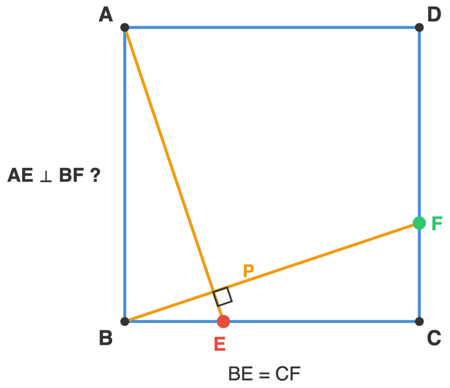
📖 1단계: n각형의 대각선 개수 공식은 n(n-3)/2 (한 꼭짓점에서 자신과 양옆을 뺀 (n-3)개의 대각선을 그을 수 있고, n개 꼭짓점에서 그은 후 중복 2번을 보정). 2단계: 조건에 의해 n(n-3)/2 = 5n. 3단계: n≥3이므로 양변을 n으로 나누면 (n-3)/2 = 5, 따라서 n-3 = 10, n = 13.

🧠 풀이 전략: 이 문제는 'n각형 대각선 공식 n(n-3)/2를 떠올리고, 변의 개수 n과의 비례식을 풀어 n을 구한다'는 전략으로 접근한다. 양변을 n으로 나누는 단계에서 n=0을 배제할 수 있어 식이 깔끔해진다.

💡 한 꼭짓점에서 그을 수 있는 대각선은 (n-3)개이므로, '한 꼭짓점 대각선 = 변의 10배' 같은 식으로 묻는 변형도 자주 나옵니다.

Q220 합동 증명 기초

정사각형 ABCD에서 변 BC 위의 점 E와 변 CD 위의 점 F를 BE=CF가 되도록 잡았다(단, E는 B, C가 아니고 F는 C, D가 아니다). 두 선분 AE와 BF에 관한 다음 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은? ㄱ. AE의 길이와 BF의 길이는 같다. ㄴ. AE와 BF는 서로 수직이다. ㄷ. ∠BAE = ∠CBF이다.



①) ① ㄱ만

②) ② ㄱ, ㄴ

③) ③ ㄱ, ㄷ

④) ④ ㄱ, ㄴ, ㄷ

🎯 **정답: ④ ㄱ, ㄴ, ㄷ**

📖 1단계: △ABE와 △BCF를 비교한다. AB=BC(정사각형의 변), ∠ABE=∠BCF=90°(정사각형의 내각), BE=CF(주어진 조건). 따라서 SAS 합동에 의해 △ABE ≡ △BCF. (이로부터 ㄱ: AE=BF, ㄷ: ∠BAE=∠CBF 동시 성립.) 2단계: ∠ABF = ∠ABC - ∠FBC = 90° - ∠CBF. 한편 ㄷ에서 ∠BAE = ∠CBF. 3단계: AE와 BF의 교점을 P라 하면 △ABP에서 ∠PAB + ∠PBA = ∠BAE + ∠ABF = ∠CBF + (90° - ∠CBF) = 90°. 따라서 ∠APB = 90°, 즉 AE ⊥ BF (ㄴ도 성립). 결론: ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

🧠 풀이 전략: 이 문제는 '정사각형의 두 인접 변 위에 같은 길이로 점을 찍으면 90° 회전 합동이 생긴다'는 통찰로 SAS 합동을 적용하는 전략으로 접근한다. 길이 같음(ㄱ), 각의 같음(ㄷ)은 합동에서 즉시 얻고, 수직(ㄴ)은 삼각형 내각의 합 180°와 직각의 분해로 도출한다.

💡 정사각형을 변 BC와 CD가 만나는 직각 주위로 90° 돌리면 BE는 CF와 정확히 겹치고, 그래서 AE와 BF가 90° 차이 나게 됩니다. 이것이 두 선분이 수직인 깊은 이유입니다.

Q221 문자와 식 심화

$\frac{2x-1}{3} - \frac{x+2}{4}$ 를 한 분수로 정리한 식을 A라 할 때, x=10에서의 A의 값은?

①) ① 10/3

②) ② 13/3

③) ③ 25/6

④) ④ 4/3

🎯 **정답: ① 10/3**

📖 1단계(통분): 분모 3과 4의 최소공배수 12로 통분하면 $A = \frac{4(2x-1)-3(x+2)}{12}$.

2단계(전개): 분자를 풀면 $\frac{8x-4-3x-6}{12} = \frac{5x-10}{12}$.

3단계(대입): x=10을 대입하면 $\frac{50-10}{12} = \frac{40}{12} = \frac{10}{3}$.

🧠 풀이 전략: 분수식 문제는 '통분 → 정리 → 대입' 순서가 핵심. 부호 실수가 많은 단계는 분자에서 -3(x+2)를 전개할 때이므로, 괄호 풀이를 정확히 하는 것에 집중한다.

💡 분수식의 통분은 식의 값을 바꾸지 않고 모양만 바꾼다. 같은 식을 여러 형태로 표현할 수 있는 것은 등식의 기본 성질이다.

Q222 정수·유리수 추론

정수 a, b가 |a-2|=4, |b+1|=3 을 모두 만족한다. a+b의 가능한 값 중 최댓값과 최솟값의 차는?

①) ① 10

②) ② 12

③) ③ 14

④) ④ 16

🎯 **정답: ③ 14**

📖 1단계(a 구하기): |a-2|=4 ⇒ a-2=4 또는 a-2=-4 ⇒ a=6 또는 a=-2.
2단계(b 구하기): |b+1|=3 ⇒ b+1=3 또는 b+1=-3 ⇒ b=2 또는 b=-4.
3단계(조합): a+b의 모든 경우는 6+2=8, 6+(-4)=2, -2+2=0, -2+(-4)=-6. 최댓값은 8, 최솟값은 -6, 차는 8-(-6)=14.

🧠 풀이 전략: 절댓값 방정식은 반드시 '+' 와 '-' 두 경우로 분기. a, b가 각각 두 값을 가지므로 a+b는 최대 4가지 조합. 모든 경우를 표로 나열한 뒤 최대·최소를 비교하는 것이 안전.

💡 절댓값은 '거리' 개념이라 항상 0 이상이므로, |x|=k 꼴 방정식은 k>0이면 두 해, k=0이면 한 해를 가진다.

Q223 일차방정식 활용

시계의 분침과 시침이 3시와 4시 사이에 처음으로 일직선(180° 정반대 방향)을 이루는 시각을 구하시오. (분 단위로, 분수로 답하시오.)

🎯 **정답: 3시 49와 1/11분 (=540/11분)**

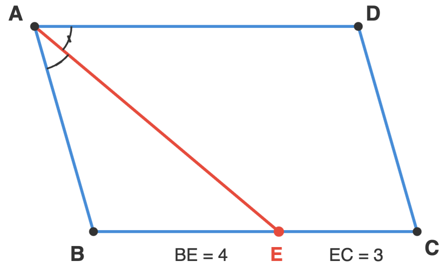
📖 1단계(각도 표현): 3시 x분일 때, 분침의 위치는 6x°, 시침의 위치는 90°+0.5x° (시침은 1분당 0.5°씩 이동).
2단계(방정식): 두 바늘이 정반대를 가리키려면 분침이 시침보다 정확히 180° 앞서야 하므로 6x - (90+0.5x) = 180.
3단계(풀이): 5.5x = 270 ⇒ x = 270/5.5 = 540/11 = 49와 1/11. 따라서 3시 49와 1/11분.

🧠 풀이 전략: 시계 문제의 핵심은 두 바늘의 '각속도 차'. 분침은 분당 6°, 시침은 분당 0.5°. 차이는 분당 5.5°. 정반대(180° 차이) 또는 일치(0° 차이)는 모두 이 각속도 차로 시간을 구한다.

💡 시침과 분침이 일직선이 되는 일은 12시간에 11번뿐이다. 1시간에 정확히 한 번이 아니라 12/11시간마다 한 번씩 발생한다.

Q224 도형 성질 추론

평행사변형 ABCD에서 ∠A의 이등분선이 변 BC와 점 E에서 만난다. BE=4cm, EC=3cm일 때, 평행사변형 ABCD의 둘레의 길이는?



①) ① 18
②) ② 20
③) ③ 22
④) ④ 24

🎯 **정답: ③ 22**

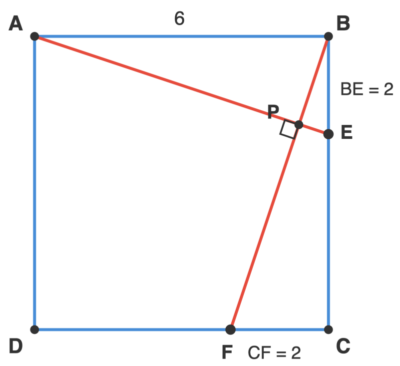
📖 1단계(엇각): AD ∥ BC이므로 ∠DAE = ∠AEB (엇각).
2단계(이등변 발견): AE가 ∠A의 이등분선이므로 ∠DAE = ∠BAE. 따라서 ∠BAE = ∠AEB가 되어 삼각형 ABE는 이등변삼각형이고 AB = BE = 4.
3단계(둘레): AD = BC = BE + EC = 4+3 = 7. 평행사변형 둘레 = 2(AB+AD) = 2(4+7) = 22.

🧠 풀이 전략: 평행선과 각이등분선이 만나면 거의 항상 이등변삼각형이 생긴다는 정형 패턴. 엇각으로 두 각이 같음을 보인 뒤 마주보는 변의 길이가 같음을 활용.

💡 평행사변형의 마주보는 변은 길이가 같으므로, 한 쌍의 변 길이만 알면 둘레가 결정된다.

Q225 합동 증명 기초

한 변의 길이가 6인 정사각형 ABCD에서 변 BC 위의 점 E와 변 CD 위의 점 F가 BE=CF=2를 만족한다. 두 선분 AE와 BF가 만나는 점을 P라 할 때, ∠APB의 크기는?



①) ① 60°

②) ② 75°

③) ③ 90°

④) ④ 120°

🎯 **정답: ③ 90°**

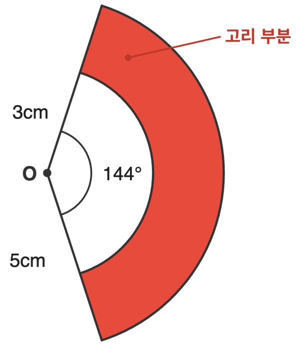
📖 1단계(합동): 삼각형 ABE와 삼각형 BCF에서 AB=BC=6, BE=CF=2, ∠ABE=∠BCF=90°이므로 SAS 합동.
2단계(각 옮김): 합동에서 ∠BAE = ∠CBF.
3단계(직각 유도): 삼각형 ABP에서 ∠APB = 180° - ∠PAB - ∠PBA = 180° - ∠BAE - (90° - ∠CBF) = 180° - ∠BAE - 90° + ∠BAE = 90°.

🧠 풀이 전략: 정사각형 안에서 '같은 길이만큼 옮겨진' 두 선분은 SAS 합동을 만들기 좋은 구조. 합동으로 각의 크기를 이전한 뒤, 삼각형 내각합 180°와 직각 90°을 결합해 결과 각을 유도.

💡 이 결과(AE⊥BF)는 BE=CF의 길이가 얼마든 항상 성립한다. 정사각형의 90° 회전 대칭성 때문이다.

Q226 원·부채꼴 심화

중심이 같은 두 부채꼴이 있다. 작은 부채꼴은 반지름 3cm, 큰 부채꼴은 반지름 5cm이며, 두 부채꼴의 중심각은 모두 144°이다. 두 부채꼴 사이(고리 모양 부채꼴)의 넓이는?



①) ① 16π/5

②) ② 28π/5

③) ③ 32π/5

④) ④ 8π

🎯 **정답: ③ 32π/5**

📖 1단계(큰 부채꼴 넓이): (144/360)·π·5^2 = (2/5)·25π = 10π.

2단계(작은 부채꼴 넓이): (144/360)·π·3^2 = (2/5)·9π = 18π/5.

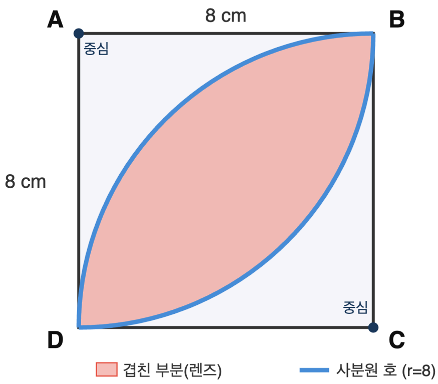
3단계(차): 10π - 18π/5 = 50π/5 - 18π/5 = 32π/5.

🧠 풀이 전략: 같은 중심각의 두 부채꼴 사이는 단순히 큰 것에서 작은 것을 빼면 된다. 144/360을 약분하면 2/5로 단순해진다는 점이 계산을 깔끔하게 만든다.

💡 부채꼴의 넓이는 (중심각/360)·πr^2로 항상 원 넓이의 비율로 표현된다.

Q227 원·부채꼴 심화

한 변의 길이가 8cm인 정사각형 ABCD에서, A를 중심으로 반지름 8인 사분원(꼭짓점 B에서 D까지 호)과, C를 중심으로 반지름 8인 사분원(꼭짓점 B에서 D까지 호)을 그렸다. 정사각형 내부에서 두 사분원이 겹치는 부분(렌즈 모양)의 넓이는?



①) ① $32\pi - 64$

②) ② $16\pi - 32$

③) ③ $64 - 16\pi$

④) ④ 32π

🎯 **정답: ① $32\pi - 64$**

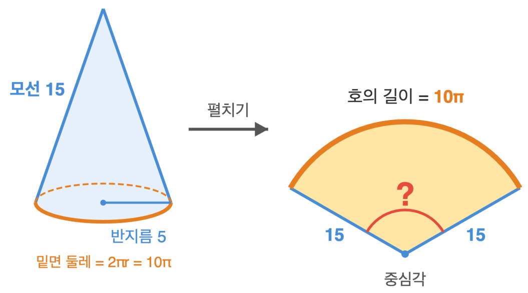
📖 1단계(두 사분원 넓이의 합): $2 \times (\pi \cdot 8^2/4) = 2 \times 16\pi = 32\pi$.
2단계(합집합 영역): A 중심 사분원과 C 중심 사분원의 합집합은 정사각형 ABCD 전체를 덮는다(두 호가 정사각형의 모든 내부 점을 적어도 한 번 포함). 즉 합집합 = 64.
3단계(교집합): 합 - 합집합 = 두 영역이 겹친 부분 = $32\pi - 64$.

🧠 풀이 전략: 포함배제: $|A| + |C| = |A \cup C| + |A \cap C|$. 두 사분원이 정사각형을 빈틈없이 덮는다는 관찰이 핵심. 따라서 두 영역의 합에서 정사각형 넓이를 빼면 곧 겹친 부분의 넓이.

💡 이 렌즈 모양은 '베시카 피시스(Vesica Piscis)'와 비슷한 구조로, 고대 기하 작도의 출발점이며 정삼각형, 정육각형 작도에 활용되었다.

Q228 입체 추론

밑면의 반지름이 5cm, 모선의 길이가 15cm인 원뿔의 옆면(곡면)을 평면 위에 펼치면 부채꼴이 된다. 이 부채꼴의 중심각의 크기는?



①) ① 90°

②) ② 108°

③) ③ 120°

④) ④ 135°

🎯 **정답: ③ 120°**

📖 1단계(호 길이): 옆면을 펼친 부채꼴의 호 길이는 원뿔 밑면의 둘레와 같다. 따라서 호 길이 = $2\pi \cdot 5 = 10\pi$.

2단계(부채꼴 반지름): 부채꼴의 반지름은 원뿔의 모선 길이와 같으므로 15.

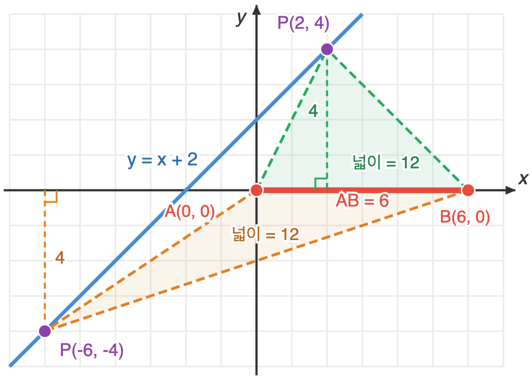
3단계(중심각): 호의 길이 공식 $2\pi \cdot 15 \cdot (\theta/360°) = 10\pi$에서 $\theta/360° = 10\pi/30\pi = 1/3$. 따라서 $\theta = 120°$.

🧠 풀이 전략: 원뿔 전개도 문제는 '호 길이 = 밑면 둘레', '반지름 = 모선'이라는 두 관계가 핵심. 이 두 식만 세우면 중심각은 비례 한 번으로 구해진다.

💡 원뿔의 부채꼴 중심각은 (밑면 반지름)/(모선) × 360°라는 공식으로도 바로 계산할 수 있다. 5/15 × 360° = 120°.

Q229 좌표평면 응용

좌표평면 위 두 점 A(0,0), B(6,0)이 있다. 직선 y = x + 2 위의 점 P에 대해 삼각형 ABP의 넓이가 12일 때, 점 P의 좌표를 모두 구하시오.



🎯 **정답: P(2, 4) 또는 P(-6, -4)**

📖 1단계(밑변 설정): 점 A와 B는 모두 x축 위에 있으므로 AB를 밑변으로 두면 AB = 6.
2단계(높이 조건): 삼각형 넓이 = (1/2) × 밑변 × 높이 = (1/2) × 6 × |y_P| = 12 ⇒ |y_P| = 4.
3단계(점 찾기): y_P = 4인 경우 직선 y=x+2에서 x+2=4 ⇒ x=2, P(2,4). y_P = -4인 경우 x+2=-4 ⇒ x=-6, P(-6,-4).

🧠 풀이 전략: 밑변을 좌표축 위에 두면 높이는 점의 좌표 절댓값이 된다. 절댓값 조건이므로 양·음 두 경우를 모두 검토해 빠뜨리지 않는 것이 중요.

💡 동일한 밑변에 대해 일정한 넓이를 갖는 점들의 자취는 밑변에 평행한 두 직선이다. 이를 '등적변환'이라고 한다.

Q230 자료·경시 퍼즐

1부터 200까지의 자연수 중에서 3의 배수도 아니고 5의 배수도 아닌 수의 개수는?

①) ① 100
②) ② 107
③) ③ 113
④) ④ 94

🎯 **정답: ② 107**

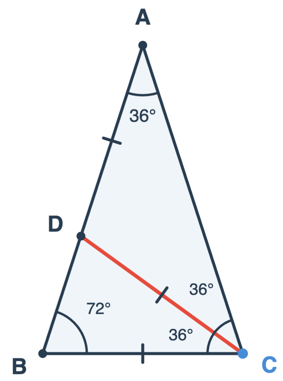
📖 1단계(3의 배수): 200÷3 = 66.6...이므로 1~200에는 3의 배수가 66개.
2단계(5의 배수와 15의 배수): 5의 배수는 200÷5 = 40개. 15의 배수(둘 다 해당)는 200÷15 = 13.3...이므로 13개.
3단계(포함배제): '3 또는 5의 배수' 개수 = 66 + 40 - 13 = 93. 따라서 '둘 다 아닌 수' = 200 - 93 = 107.

🧠 풀이 전략: 'A도 아니고 B도 아닌' = 전체 - (A 또는 B). A∪B를 구할 때 |A|+|B|에서 |A∩B|를 한 번 빼주는 포함배제 원리가 핵심.

💡 포함배제 원리는 '오일러-드모르간'의 일반화로, 집합이 늘어날수록 빼고 더하는 항이 번갈아 등장한다.

Q231 도형 성질 추론

이등변삼각형 ABC에서 AB=AC이고 ∠BAC=36°이다. 변 AB 위의 점 D를 CD=CB가 되도록 잡았다. 다음 중 옳지 않은 것은?



①) ① ∠ABC = 72°

②) ② ∠BCD = 36°

③) ③ AD = CB

④) ④ AD = AC

🎯 **정답: ④ AD = AC**

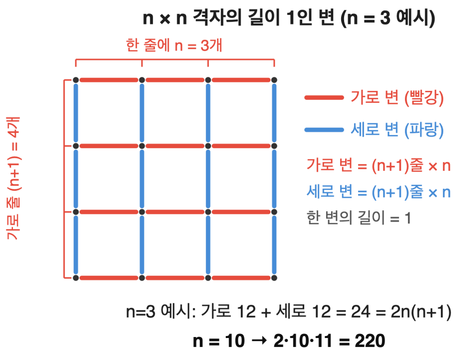
📖 1단계(밑각): △ABC에서 AB=AC, ∠BAC=36°이므로 ∠ABC = ∠ACB = (180°-36°)/2 = 72°. ① 옳음.
2단계(△BCD): CB=CD인 이등변, ∠DBC = ∠ABC = 72°이므로 ∠BDC = 72°. ∠BCD = 180°-72°-72° = 36°. ② 옳음.
3단계(△ACD 분석): ∠ACD = ∠ACB - ∠BCD = 72°-36° = 36°. △ACD에서 ∠CAD = 36°, ∠ACD = 36°이므로 이등변(AD = CD). CD=CB였으므로 AD = CB. ③ 옳음.
4단계(④ 검토): AC = AB이고 D는 변 AB 위 내부 점이므로 AD < AB = AC. 따라서 AD ≠ AC. ④ 옳지 않음.

🧠 풀이 전략: 36-72-72 삼각형에서 한 밑각의 이등분선이나 변 위 점이 만들어내는 닮음·이등변 관계를 추적. 각도를 차근차근 계산하면서 같은 길이 관계를 연쇄적으로 끌어낸다.

💡 36-72-72 황금비 삼각형에서는 AB:CB = (1+$\sqrt{5}$):2 (황금비)가 성립한다. 이는 정오각형 작도의 핵심 도구이다.

Q232 문자와 식 심화

한 변이 1인 정사각형들로 가로 n개, 세로 n개의 정사각형 격자(n×n)를 만들었다. 격자에 그어진 길이 1짜리 변(가로 변과 세로 변)의 총 개수를 n에 대한 식으로 나타내고, n=10일 때의 값을 구하시오.



①) ① 200
②) ② 210
③) ③ 220
④) ④ 240

🎯 **정답: ③ 220**

📖 1단계(가로 변): 격자의 가로 줄은 위·아래를 포함해 (n+1)줄이고, 각 줄에는 길이 1짜리 가로 변이 n개씩 있다. 따라서 가로 변의 개수 = n(n+1).
2단계(세로 변): 같은 방법으로 세로 줄 (n+1)개에 각 n개씩 있으므로 세로 변의 개수 = n(n+1).
3단계(합과 대입): 총 변 개수 = 2n(n+1). n=10이면 2·10·11 = 220.

🧠 풀이 전략: 격자 문제는 '줄의 개수'와 '한 줄당 변의 개수'를 분리해서 곱한다. n×n 격자에서 줄은 n+1개이고 변은 n개라는 차이를 명확히 구분하는 것이 핵심.

💡 이 식 2n(n+1)은 두 연속하는 자연수의 곱의 두 배이므로 항상 4의 배수다. 격자 문제는 그래프 이론의 '격자 그래프(grid graph)'의 가장 기본 사례이다.

Q233 정수·유리수 추론

|x+3| + |x-5|의 값을 최소로 만드는 x의 범위와 그때의 최솟값을 구하시오.

①) ① -3 ≤ x ≤ 5, 최솟값 8
②) ② x = 1, 최솟값 8
③) ③ -3 ≤ x ≤ 5, 최솟값 5
④) ④ x = 0, 최솟값 4

🎯 **정답: ①**

📖 1단계: |x+3|은 수직선에서 점 x와 -3 사이의 거리, |x-5|는 점 x와 5 사이의 거리이다. 2단계: 두 거리의 합 |x+3|+|x-5|는 점 x가 -3과 5 사이(양 끝 포함)에 있을 때 가장 작아지며, 이때의 합은 두 점 사이의 거리인 5-(-3)=8이다. 3단계: x가 이 범위 밖에 있으면 한 쪽 거리가 늘어나므로 합은 8보다 커진다. 따라서 -3 ≤ x ≤ 5에서 최솟값 8.

🧠 풀이 전략: 절댓값을 '수직선 위 거리'로 해석하는 전략. |x-a|+|x-b| (a<b)는 a와 b 사이 모든 점에서 일정하게 최소이며 그 값은 b-a이다.

💡 이 원리는 1차원 페르마 점 문제로, 도시들 사이 최적 위치를 찾는 입지 문제의 가장 단순한 형태이다.

Q234 문자와 식 심화

1부터 n까지의 자연수의 합이 105일 때, 자연수 n의 값을 구하시오.

🎯 **정답: 14**

📖 1단계: 1부터 n까지 자연수의 합 공식 $\frac{n(n+1)}{2}$을 적용한다. 2단계: $\frac{n(n+1)}{2} = 105$이므로 n(n+1) = 210. 3단계: 두 연속한 자연수의 곱이 210인 쌍은 14·15뿐이므로 n = 14.

🧠 풀이 전략: 등차수열 합 공식을 식으로 세운 후, 두 연속 자연수의 곱이 주어진 값이 되는 n을 찾는다.

💡 가우스가 어린 시절 1부터 100까지 빠르게 더했다는 일화에서 유도된 공식이다.

Q235 일차방정식 활용

오후 1시 정각이 지난 후, 시침과 분침이 처음으로 직각(90°)을 이루는 시각은 1시 몇 분인지 구하시오.

🎯 **정답: 1시 21과 9/11분**

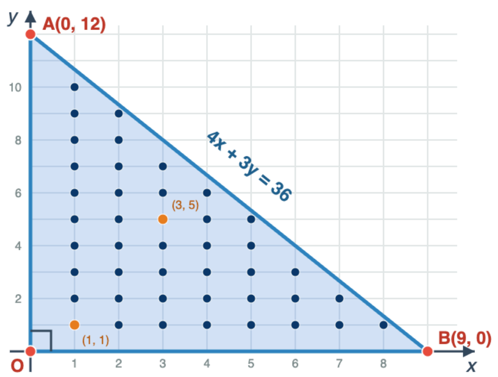
📖 1단계: 1시 정각에 시침은 30°, 분침은 0°에 위치하여 사이각은 30°이고 분침이 시침을 추격하는 상태이다. 2단계: t분 후 분침의 각도는 6t°, 시침의 각도는 30+0.5t°. 분침이 시침보다 90° 앞서야 하므로 6t - (30 + 0.5t) = 90. 3단계: 5.5t = 120 → t = $\frac{240}{11}$ = 21과 $\frac{9}{11}$분. 따라서 1시 21과 9/11분.

🧠 풀이 전략: 분침과 시침의 분당 각속도(분침 6°/분, 시침 0.5°/분)를 이용해 두 바늘의 사이각을 t의 일차식으로 나타낸 뒤 방정식을 푼다.

💡 12시간 동안 시침과 분침이 직각을 이루는 횟수는 정확히 22번으로, 평균 약 32분 44초마다 한 번씩 일어난다.

Q236 좌표평면 응용

좌표평면에서 두 점 A(0, 12), B(9, 0)과 원점 O로 이루어진 직각삼각형 OAB의 내부(꼭짓점과 변 위는 제외)에 있는 격자점(x좌표와 y좌표가 모두 자연수인 점)의 개수를 구하시오.



🎯 **정답: 43**

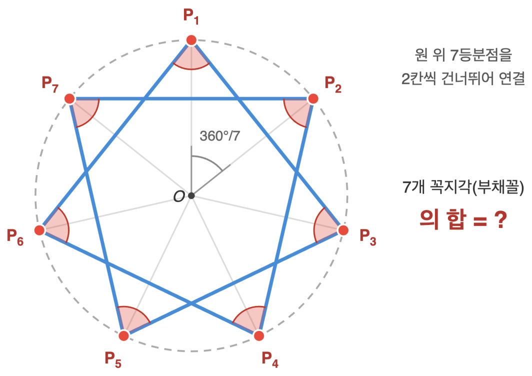
📖 1단계: 두 점 A(0,12), B(9,0)을 지나는 직선 AB의 방정식은 $\frac{x}{9} + \frac{y}{12} = 1$, 즉 4x+3y=36이다. 2단계: 삼각형 내부 격자점은 x ≥ 1, y ≥ 1 자연수이고 4x+3y < 36을 만족해야 한다. 3단계: x를 1부터 8까지 차례로 대입해 가능한 y 자연수 개수를 세면 10, 9, 7, 6, 5, 3, 2, 1이고, 합은 10+9+7+6+5+3+2+1 = 43개.

🧠 풀이 전략: 빗변의 직선 방정식을 먼저 세우고, x를 자연수로 고정한 채 부등식 4x+3y<36을 만족하는 자연수 y의 개수를 차례로 세어 합산한다.

💡 삼각형 내부와 경계 위 격자점 개수에 대해서는 픽의 정리(Pick's theorem)라는 우아한 공식이 존재한다.

Q237 도형 성질 추론

원 위에 같은 간격으로 7개의 점을 찍은 후, 각 점에서 두 칸 건너뛴 점과 선분으로 이으면 7각별이 만들어진다. 이 7각별의 7개 뾰족한 꼭지점에서의 각의 합을 구하시오.



①) ① 180°

②) ② 360°

③) ③ 540°

④) ④ 720°

🎯 **정답: ③**

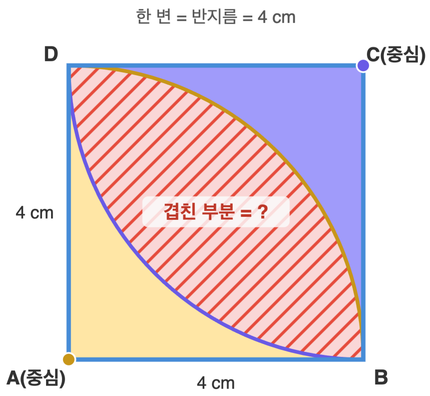
📖 1단계: 원 위 7개 점은 같은 간격으로 배치되어 있으므로 인접한 두 점 사이의 호의 중심각은 $\frac{360^\circ}{7}$이다. 2단계: 두 칸 건너뛰며 만든 별의 한 꼭지각은 공식 $\frac{(n-2m)\cdot 180^\circ}{n}$로 구해지며 (n=7, m=2), 한 꼭지각 = $\frac{(7-4)\cdot 180^\circ}{7}$ = $\frac{540^\circ}{7}$. 3단계: 꼭지점이 7개이므로 각의 합 = 7 × $\frac{540^\circ}{7}$ = 540°.

🧠 풀이 전략: 원에 균등 분할된 점들로 만든 별의 꼭지각 합 공식 (n-2m)·180°를 적용한다. m은 건너뛴 칸 수이다. 5각별이 180°인 사실의 일반화로 추론한다.

💡 5각별(n=5, m=2)의 꼭지각 합은 (5-4)·180° = 180°로, 우리에게 친숙한 '별 모양 각의 합 180°'의 일반화된 형태이다.

Q238 원·부채꼴 심화

한 변의 길이가 4cm인 정사각형 ABCD가 있다. 마주보는 두 꼭짓점 A와 C를 각각 중심으로 반지름 4cm인 사분원을 정사각형 안쪽으로 그렸을 때, 두 사분원이 겹치는 부분의 넓이를 구하시오. (π는 그대로 둔다.)



🎯 **정답: (8π - 16) cm²**

📖 1단계: 사분원 한 개의 넓이 = $\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 4^2 = 4\pi$. 두 사분원의 넓이의 합 = 8π. 2단계: 정사각형 내부의 임의의 점 (x, y)는 점 A까지의 거리 또는 점 C까지의 거리 중 적어도 하나가 4 이하이다(꼭짓점 B와 D는 각각 두 중심에서 거리 4). 즉 두 사분원의 합집합은 정사각형 전체이고 그 넓이는 16. 3단계: 포함-배제 원리에 의해 겹친 부분 넓이 = (사분원 합) - (합집합) = 8π - 16.

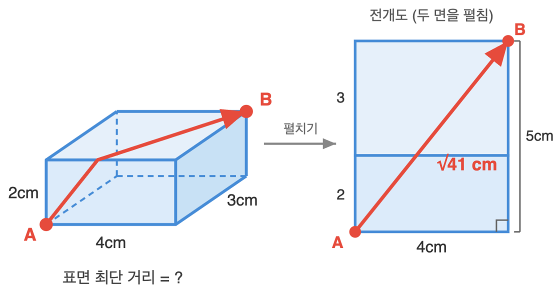
🧠 풀이 전략: 두 영역의 합집합과 합을 비교하는 포함-배제 원리를 적용한다. 합집합이 정사각형 전체임을 보이기 위해 임의의 점이 두 중심 중 적어도 하나에서 반지름 이내에 있음을 확인한다.

💡 정사각형 안에 마주보는 꼭짓점에서 그린 두 사분원의 곡선 경계는 미술과 건축에서 자주 사용되는 곡선 무늬이다.

Q239 입체 추론

가로 4cm, 세로 3cm, 높이 2cm인 직육면체에서 한 꼭짓점 A에서 마주보는(공간 대각선 끝의) 꼭짓점 B까지 직육면체 표면을 따라 이동할 때 가장 짧은 거리를 구하시오.

직육면체 표면 최단 거리 (A→B)



세 가지 전개 중 최단: √41 < √45 < √53 → √41 cm

🎯 **정답: √41 cm**

📖 1단계: 직육면체 표면을 펼쳐 두 면을 평면으로 만들면 표면 거리는 그 평면 위의 직선 거리와 같다. A에서 B로 가는 펼침은 세 가지가 있다. 2단계: (앞면 + 옆면 펼침) $\sqrt{(4+3)^2+2^2} = \sqrt{53}$. (앞면 + 윗면 펼침) $\sqrt{(4+2)^2+3^2} = \sqrt{45}$. (옆면 + 윗면 펼침) $\sqrt{(3+2)^2+4^2} = \sqrt{41}$. 3단계: 세 값을 비교하면 $\sqrt{41} < \sqrt{45} < \sqrt{53}$ 이므로 최단 거리는 $\sqrt{41}$ cm.

🧠 풀이 전략: 표면 위의 최단 경로는 두 면을 평면으로 펼쳤을 때의 직선 거리와 같다는 원리를 이용해, 가능한 펼침 방법 세 가지의 거리를 모두 계산하고 최솟값을 택한다.

💡 이 류의 표면 최단 경로 문제는 헨리 듀드니의 '거미와 파리(Spider and Fly)' 퍼즐로 100년 전부터 유명하다.

Q240 자료·경시 퍼즐

한 학급 학생 7명이 시험을 봤다. 모든 학생의 점수가 1점 이상 100점 이하인 서로 다른 자연수이고 평균이 50점일 때, 가장 높은 점수의 최솟값을 구하시오.

🎯 **정답: 53**

📖 1단계: 점수의 총합은 $50 \times 7 = 350$. 가장 높은 점수 k의 최솟값을 구하려면 나머지 6명의 점수 합을 가능한 한 크게 만들어야 한다. 2단계: 6명의 점수는 모두 k 미만의 서로 다른 자연수이므로, 가장 큰 6개 값은 $k-1, k-2, ..., k-6$이고 그 합은 $6k - 21$. 3단계: $k + (6k - 21) = 7k - 21 = 350 \rightarrow 7k = 371 \rightarrow k = 53$. 점수 분포 (47, 48, 49, 50, 51, 52, 53)는 모두 1~100 범위이고 서로 다르므로 조건을 만족한다.

🧠 풀이 전략: 가장 큰 값의 최솟값 문제는 '나머지 값들을 최대로 채워 그 큰 값을 끌어내리는' 전략을 쓴다. 서로 다른 자연수의 합 최대는 연속한 큰 값 6개로 만든다.

💡 이 풀이는 '극값 최적화 = 나머지 변수를 극단으로 보내기'라는 경시 대회의 표준 사고법이다.

📝 중1 수학 심화

총 10문제 · 문제와 정답·풀이 포함

Q241 정수·유리수 추론

$|a| + |b| = 4$를 만족하는 정수 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하시오.

🎯 **정답: 16개**

📖 1단계: $|a|$와 $|b|$는 모두 0 이상 정수이고 합이 4이므로, ($|a|$, $|b|$)는 (0,4), (1,3), (2,2), (3,1), (4,0) 다섯 가지이다. 2단계: $|a| = k$일 때 a의 부호 가능 수는 k = 0이면 1가지(0뿐), k ≥ 1이면 2가지(+k 또는 -k)이다. b도 마찬가지이다. 3단계: 각 경우의 (a, b) 순서쌍 수 - (0,4): 1·2=2, (1,3): 2·2=4, (2,2): 2·2=4, (3,1): 2·2=4, (4,0): 2·1=2. 총합 = 2+4+4+4+2 = 16개.

🧠 풀이 전략: 절댓값이 0인 경우와 0이 아닌 경우의 부호 선택 가능 수가 다름을 인식한다. $|a|+|b|=4$를 만족하는 비음수쌍을 먼저 분류한 뒤 각 변수의 부호를 곱해서 합산한다.

💡 $|a|+|b|=4$를 만족하는 (a, b) 점들은 좌표평면에서 (4,0), (0,4), (-4,0), (0,-4)을 꼭짓점으로 하는 정사각형(45° 회전)의 변 위 격자점이다.

Q242 문자와 식 심화

세 자리 자연수 N의 백의 자리 숫자를 a, 십의 자리를 b, 일의 자리를 c라 하자. N의 백의 자리와 일의 자리 숫자를 서로 바꾼 새 세 자리 수에서 N을 뺀 값이 198이라면, c - a의 값을 구하시오.

🎯 **정답: 2**

📖 1단계: N = 100a + 10b + c. 백·일 자리를 바꾼 수 N' = 100c + 10b + a. 2단계: 두 수의 차 N' - N = (100c + 10b + a) - (100a + 10b + c) = 99c - 99a = 99(c - a). 3단계: 99(c - a) = 198이므로 c - a = 2.

🧠 풀이 전략: 세 자리 수를 자릿값(자릿수 분해)으로 나타낸 후 차를 계산하면 십의 자리 b는 소거되고 99(c-a) 형태가 됨을 이용한다.

💡 3자리 수의 자릿수 바꾸기 차이는 항상 99의 배수이며, 이는 9의 배수 판정법과 같은 뿌리에서 나온다.

Q243 자료·경시 퍼즐

서로 다른 다섯 자연수의 합이 25일 때, 다섯 수 중 가장 큰 수가 가질 수 있는 최댓값과 최솟값의 차를 구하시오.

🎯 **정답: 8**

📖 1단계: 가장 큰 수 a_5를 최대로 하려면 나머지 네 수의 합을 최소로 한다. 서로 다른 자연수의 가장 작은 4개는 1, 2, 3, 4이고 합은 10. 따라서 a_5의 최댓값 = 25 - 10 = 15((1, 2, 3, 4, 15) 가능). 2단계: a_5를 최소로 하려면 다섯 수가 가능한 한 평균 5 근처에 모여야 한다. (3, 4, 5, 6, 7)은 합이 25, $a_5 = 7$. 만약 $a_5 = 6$이면 다섯 수 모두 6 이하 서로 다른 자연수, 최대 합 = 2+3+4+5+6 = 20 < 25 (불가능). 3단계: a_5의 최댓값은 15, 최솟값은 7. 따라서 차는 15 - 7 = 8.

🧠 풀이 전략: 한 변수의 최댓값/최솟값을 구할 때는 나머지 변수들의 합을 각각 최소/최대화하는 극값 전략을 쓴다. 서로 다른 자연수 조건과 합 조건을 동시에 만족할 수 있는지 검증한다.

💡 이런 균등 분배 문제는 평균값 정리의 이산 버전이며, 분배 최적화에서 자주 등장한다.

Q244 일차방정식 활용

어떤 책의 정가에서 25%를 할인하여 9000원에 팔았다. 이 책의 원가는 정가의 60%일 때, 책 한 권을 팔 때 얻는 이익은 얼마인가?

①) ①1500원
②) ②1800원
③) ③2100원
④) ④2400원

🎯 **정답: ②1800원**

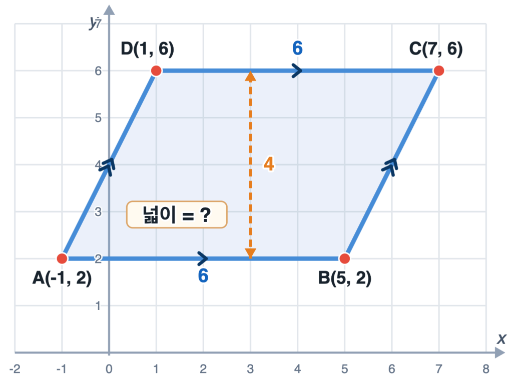
📖 1단계: 정가를 x원이라 하면, 25% 할인 후 판매가는 0.75x원이다. 0.75x = 9000을 풀면 x = 12000원.
2단계: 원가는 정가의 60%이므로 12000 × 0.6 = 7200원.
3단계: 이익 = 판매가 - 원가 = 9000 - 7200 = 1800원.

🧠 풀이 전략: 정가, 판매가, 원가의 관계를 비율식으로 정리한 뒤, 미지수를 정가로 두고 일차방정식을 푸는 2단계 전략. 핵심은 '판매가는 정가의 75%, 원가는 정가의 60%'를 정확히 구분해 식을 세우는 것.

💡 할인율(25%)과 마진율(40%)은 서로 곱셈 관계가 아니라 각각 정가에 대한 비율이라는 점이 함정이다.

Q245 좌표평면 응용

좌표평면 위 네 점 A(-1, 2), B(5, 2), C(7, 6), D(1, 6)으로 이루어진 사각형 ABCD가 있다. 이 사각형의 종류와 넓이를 차례로 구하라.



①) ①사다리꼴, 24
②) ②평행사변형, 24
③) ③직사각형, 24
④) ④마름모, 30

🎯 **정답: ②평행사변형, 24**

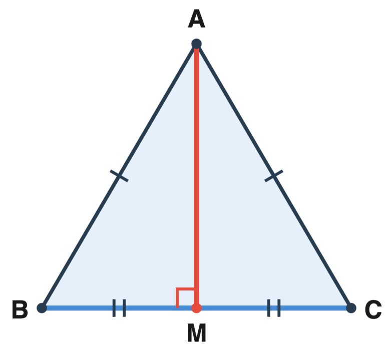
📖 1단계: AB의 길이는 5-(-1)=6, DC의 길이는 7-1=6. 두 변 모두 수평선(y=2, y=6) 위에 있으므로 평행하고 길이가 같다. 두 쌍의 대변이 평행하고 길이가 같으므로 평행사변형이다.
2단계: 직사각형이려면 이웃변이 수직이어야 하는데, AD의 좌우 변화 2, 상하 변화 4이므로 수직이 아니다(기울기 2). 마름모는 네 변의 길이가 같아야 하는데 AB=6, AD는 직각삼각형 빗변이므로 6과 다르다.
3단계: 평행사변형의 넓이 = 밑변 × 높이 = AB × (두 평행선 사이 거리) = 6 × (6-2) = 24.

🧠 풀이 전략: 좌표평면 도형 판별은 (1) 변의 평행 여부(좌표차 비교), (2) 변의 길이, (3) 이웃변의 수직 여부 순서로 검토하는 전략. 평행사변형 넓이는 한 쌍의 평행한 밑변과 두 평행선 사이 수직거리(높이)로 구한다.

💡 두 쌍의 대변이 평행하면 평행사변형, 추가로 한 각이 90°이면 직사각형, 네 변이 같으면 마름모, 둘 다 만족하면 정사각형으로 위계가 정해진다.

Q246 합동 증명 기초

이등변삼각형 ABC에서 AB=AC이다. 변 BC의 중점을 M이라 하고 선분 AM을 그었을 때, △ABM과 △ACM의 합동조건과 ∠AMB의 크기를 차례로 구하라.



①) ①SAS, 60°

②) ②SSS, 90°

③) ③ASA, 90°

④) ④SSS, 60°

🎯 **정답: ②SSS, 90°**

📖 1단계: △ABM과 △ACM에서 AB=AC(이등변삼각형의 가정), BM=MC(M이 BC의 중점), AM은 공통변. 세 변이 각각 같으므로 SSS합동.

2단계: 합동인 두 삼각형의 대응각이므로 ∠AMB=∠AMC.

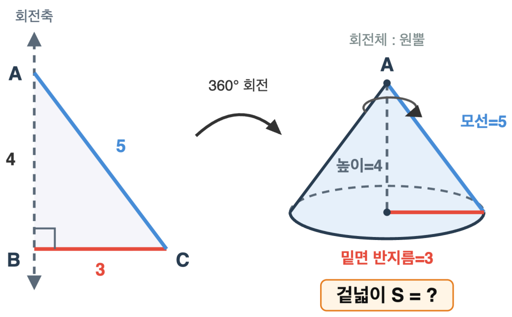
3단계: 한편 ∠AMB와 ∠AMC는 직선 BC 위에서 이루어진 보각이므로 ∠AMB+∠AMC=180°. 두 각이 같고 합이 180°이므로 ∠AMB = 90°. 즉 AM은 BC의 수직이등분선이다.

🧠 풀이 전략: 주어진 조건이 '두 변이 같고 + 한 점이 중점'이므로 두 삼각형에서 SSS를 우선 검토하는 것이 핵심. 합동 결과로부터 두 각이 보각을 이루며 같다는 사실을 결합해 90°를 도출하는 2단계 추론.

💡 이등변삼각형에서는 (가) 꼭지각의 이등분선, (나) 밑변의 수직이등분선, (다) 밑변의 중선, (라) 꼭지점에서 내린 수선이 모두 동일한 한 직선이 된다.

Q247 입체 추론

직각삼각형 ABC에서 ∠B=90°, AB=4cm, BC=3cm일 때 빗변 AC=5cm이다. 변 AB를 회전축으로 하여 이 직각삼각형을 한 바퀴 회전시켰을 때 만들어지는 회전체의 겉넓이를 구하라.



①) ①18π cm²

②) ②21π cm²

③) ③24π cm²

④) ④27π cm²

🎯 **정답: ③24π cm²**

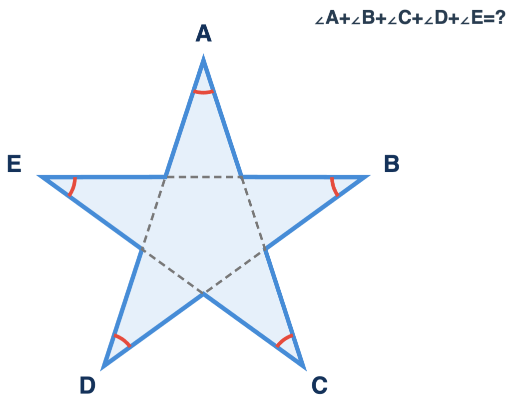
📖 1단계: 변 AB(길이 4)를 회전축으로 하면 이와 수직인 변 BC(길이 3)가 원의 반지름이 되고 빗변 AC(길이 5)가 모선이 된다. 만들어지는 입체는 밑면 반지름 3, 높이 4, 모선 5인 원뿔이다.
2단계: 밑면(원)의 넓이 = $\pi \times 3^2 = 9\pi$ cm².
3단계: 옆면(부채꼴)의 넓이 = π × (밑면 반지름) × (모선) = $\pi \times 3 \times 5 = 15\pi$ cm². 따라서 겉넓이 = $9\pi + 15\pi = 24\pi$ cm².

🧠 풀이 전략: 회전축에 평행한 변은 길이 그대로 원뿔의 높이가 되고, 수직인 변이 원의 반지름, 빗변이 모선이 된다는 대응을 먼저 세우는 전략. 그 후 원뿔 겉넓이 공식 $\pi r^2 + \pi r\ell$을 적용한다.

💡 원뿔의 옆면을 평면에 펼치면 부채꼴이 되며, 그 호의 길이는 밑면 원의 둘레와 같다. 따라서 부채꼴의 중심각 비율은 (반지름 ÷ 모선)과 일치한다.

Q248 도형 성질 추론

오른쪽 그림과 같이 별 모양(★)을 이루는 다섯 꼭짓점 A, B, C, D, E의 각의 합 ∠A+∠B+∠C+∠D+∠E를 구하라. (별의 가운데에는 작은 오목오각형이 형성된다.)



①) ①90°
②) ②180°
③) ③270°
④) ④360°

🎯 **정답: ②180°**

📖 1단계: 가운데 오각형의 한 꼭짓점에서 외각 정리(삼각형의 한 외각은 다른 두 내각의 합)를 적용한다. 가운데 오각형의 꼭짓점은 별의 두 변과 만나며, 그 외각은 별의 두 인접한 꼭짓점 각의 합과 같다.
2단계: 가운데 오각형의 다섯 꼭짓점에서 각각 외각 정리를 적용하고 더하면, 별의 각 꼭짓점 각이 정확히 두 번씩 등장한다. 즉 (오각형 외각 합) = 2 × (∠A+∠B+∠C+∠D+∠E).
3단계: 어떤 다각형이든 외각의 합은 360°이므로 2 × (∠A+∠B+∠C+∠D+∠E) = 360°. 따라서 ∠A+∠B+∠C+∠D+∠E = 180°.

🧠 풀이 전략: 별 5각 합 문제는 외각 정리를 가운데 오각형의 다섯 꼭짓점에 차례로 적용하여, 별의 꼭짓점 각이 두 번씩 등장한다는 사실로 환원하는 전략. 다각형 외각 합 360°를 활용해 일정한 답 180°를 얻는다.

💡 정오각형으로 만든 별이든, 일그러진 별이든, 다섯 꼭짓점 각의 합은 항상 180°로 일정하다. 이는 삼각형 한 개의 내각 합과 같다.

Q249 자료·경시 퍼즐

어떤 모임에서 모든 사람이 자기 외 다른 사람들과 정확히 한 번씩 악수를 했더니 총 악수 횟수가 28번이었다. 이때 새로운 한 사람이 더 합류하여 기존 사람 모두와 한 번씩 악수한다면, 추가로 일어날 악수의 횟수는?

①) ①7번
②) ②8번
③) ③9번
④) ④10번

🎯 **정답: ②8번**

📖 1단계: 사람 수를 n명이라 하면, 모두가 서로 한 번씩 악수했을 때 총 횟수는 n명 중 2명을 뽑는 경우의 수와 같으므로 n(n-1)/2 이다.
2단계: n(n-1)/2 = 28 → n(n-1) = 56. 7 × 8 = 56이므로 n = 8명.
3단계: 새 한 명이 합류해 기존 8명 모두와 한 번씩 악수하면 추가 악수는 8번이다.

🧠 풀이 전략: n명에서 임의의 두 명이 만나는 경우의 수 n(n-1)/2 공식을 떠올리고 방정식을 세워 n을 구한 뒤, 새 인원이 합류했을 때의 추가 악수는 기존 인원수와 같음을 인식하는 2단계 전략.

💡 n명에서 (n+1)명으로 한 명 늘면 악수 횟수의 증가량은 정확히 n이다. 그래서 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, ... 처럼 차가 점점 1씩 커지는 수열이 만들어진다(삼각수).

Q250 정수·유리수 추론

수직선 위에서 점 P의 좌표를 x라 할 때, 점 P에서 좌표 3인 점까지의 거리와 좌표 -2인 점까지의 거리의 합이 7이다. 즉 $|x-3| + |x+2| = 7$을 만족한다. 이때 가능한 x의 값을 모두 구하라.

①) ①$x=4$ 또는 $x=-3$

②) ②$x=5$ 또는 $x=-2$

③) ③$x=4$ (1개만)

④) ④$x=-3$ (1개만)

🎯 **정답: ①x=4 또는 x=-3**

📖 1단계: 좌표 -2와 3 사이의 거리는 5이다. 점 P가 두 점 사이에 있으면 거리의 합은 항상 5(고정)이며 7이 될 수 없다. 따라서 x는 두 점의 바깥, 즉 $x>3$ 또는 $x<-2$ 영역에 있어야 한다.

2단계: $x>3$인 경우 $|x-3|+|x+2| = (x-3)+(x+2) = 2x-1 = 7 \rightarrow x = 4$. $4>3$이므로 적합.

3단계: $x<-2$인 경우 $|x-3|+|x+2| = (3-x)+(-2-x) = 1-2x = 7 \rightarrow x = -3$. $-3<-2$이므로 적합. 따라서 답은 $x = 4$ 또는 $x = -3$.

🧠 풀이 전략: 절댓값을 거리의 의미로 해석하면, 두 고정점 거리 5보다 큰 합 7이 주어진 경우 점 P는 반드시 두 점 바깥에 있어야 함을 먼저 추론한다. 그 후 영역별로 절댓값을 풀어 일차방정식을 푸는 전략.

💡 두 고정점에서의 거리 합은 두 점 사이 거리를 최솟값으로 가지며, 합이 일정한 점들의 자취는 후에 타원의 정의로 이어진다.