

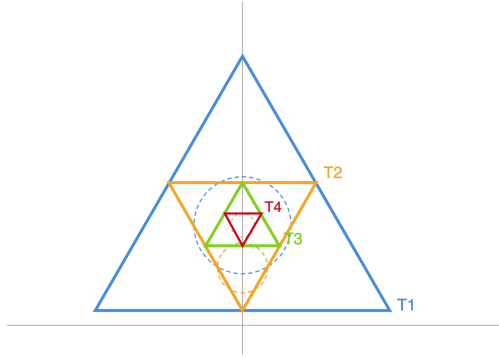
고3 수학 심화

총 40문제 · 문제와 정답·풀이 포함

Q1 수열 극한·급수 심화

그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정삼각형 T_1 의 각 변의 중점을 이어 만든 정삼각형을 T_2 라 하고, T_2 의 각 변의 중점을 이어 만든 정삼각형을 T_3 이라 한다. 이와 같은 방법으로 정삼각형 T_n 을 만들 때, T_n 의 내접원의 넓이를 S_n 이라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 의 값은?

한 변 길이 비 1 : 1/2 : 1/4 : ...



- ① ① $\frac{\pi}{3}$
- ② ② $\frac{2\pi}{3}$
- ③ ③ $\frac{4\pi}{9}$
- ④ ④ $\frac{8\pi}{9}$

정답: ③

[1단계] 정삼각형의 한 변의 중점을 이어 만들면 새 정삼각형의 한 변의 길이는 원래의 $\frac{1}{2}$. 따라서 T_n 의 한 변의 길이는

$$a_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

[2단계] 한 변의 길이가 a 인 정삼각형의 내접원 반지름은 $r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$ 이므로 $S_n = \pi r^2 = \frac{\pi a_n^2}{12}$.

[3단계] $a_n^2 = 4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ 이므로 $S_n = \frac{\pi}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$. 이는 첫째항 $\frac{\pi}{3}$, 공비 $\frac{1}{4}$ 인 무한등비급수.

$$[4단계] \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\pi/3}{1-1/4} = \frac{\pi/3}{3/4} = \frac{4\pi}{9}$$

풀이 전략: 핵심 아이디어는 '뿔음비'다. 중점연결정리로 변의 길이가 매번 $\frac{1}{2}$ 배이므로 넓이는 $\frac{1}{4}$ 배. 내접원 넓이도 동일한 비율로 축소되므로 공비 $\frac{1}{4}$ 인 무한등비급수로 귀결된다. 함정은 공비를 $\frac{1}{2}$ 로 착각하는 것.

이 구조는 시에르핀스키 삼각형의 기초 모델이며, 프랙탈 차원 계산의 시작점이다.

Q2 초월함수 미분 심화

함수 $f(x) = (x^2 + ax + b)e^{-x}$ 가 $x = 1$ 에서 극댓값 $\frac{3}{e}$ 를 가질 때, $f(x)$ 의 극솟값은? (단, a, b 는 실수이다.)

- ① ① $-\frac{1}{e^3}$
- ② ② 1
- ③ ③ $-\frac{1}{e^4}$
- ④ ④ $-\frac{3}{e^4}$

정답: ②

풀이 $f'(x) = (2x + a)e^{-x} - (x^2 + ax + b)e^{-x} = e^{-x}\{-x^2 + (2-a)x + (a-b)\}$. $x = 1$ 에서 극값이므로 $f'(1) = 0$:

$-1 + (2-a) + (a-b) = 1 - b = 0$ 에서 $b = 1$. 또 $f(1) = (1 + a + b)e^{-1} = \frac{a+2}{e} = \frac{3}{e}$ 에서 $a = 1$. 따라서

$f(x) = (x^2 + x + 1)e^{-x}$ 이고 $f'(x) = e^{-x}(-x^2 + x) = -x(x-1)e^{-x}$. $f'(x) = 0$ 의 해는 $x = 0, 1$. 부호 변화는 $x < 0$ 에서

$f' < 0$, $0 < x < 1$ 에서 $f' > 0$, $x > 1$ 에서 $f' < 0$ 이므로 $x = 0$ 에서 극소, $x = 1$ 에서 극대이다. 극댓값은 $f(1) = \frac{3}{e}$ 로 조건과 일치하고, 극솟값은 $f(0) = (0 + 0 + 1)e^0 = 1$ 이다.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 곱의 미분과 지수함수의 특성을 결합하는 것. e^{-x} 가 붙은 함수는 $f'(x) = 0$ 의 근이 다항식 부분에서만 결정된다. 극값 조건 두 개($f' = 0$ 과 함숫값)로 미지수 두 개를 결정.

💡 $x^n e^{-x}$ 형태는 감마함수와 포아송 분포에서 핵심 역할을 한다.

Q3 초월함수 적분 심화

$\int_0^{\pi/2} x \sin x dx$ 의 값은?

- ① ① 0
- ② ② $\frac{1}{2}$
- ③ ③ 1
- ④ ④ $\frac{\pi}{2}$

정답: ③

풀이 [1단계] 부분적분 공식 $\int u dv = uv - \int v du$ 적용. $u = x$, $dv = \sin x dx$ 로 두면 $du = dx$, $v = -\cos x$.

[2단계] $\int_0^{\pi/2} x \sin x dx = [-x \cos x]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x dx$.

[3단계] $[-x \cos x]_0^{\pi/2} = -\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} - (-0 \cdot \cos 0) = -\frac{\pi}{2} \cdot 0 - 0 = 0$.

[4단계] $\int_0^{\pi/2} \cos x dx = [\sin x]_0^{\pi/2} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1$.

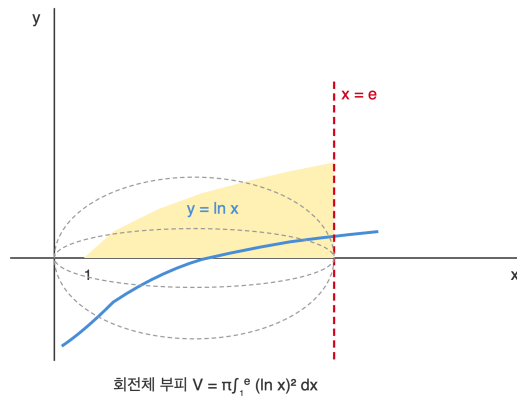
[5단계] 따라서 $\int_0^{\pi/2} x \sin x dx = 0 + 1 = 1$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 'x와 $\sin x$ 중 미분하면 간단해지는 것을 u 로'. x 를 미분하면 1이 되어 적분이 단순해진다. 반대로 $u = \sin x$ 로 잡으면 적분이 더 복잡해지므로 LIATE 규칙 기억.

💡 부분적분은 곱의 미분공식을 뒤집은 것으로, 미적분 탄생 초기 라이프니츠가 정립했다.

Q4 미적분 통합 활용

곡선 $y = \ln x$ 와 x 축, 직선 $x = e$ 로 둘러싸인 부분을 x 축 둘레로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피는?



- ① ① $\pi(e - 2)$
- ② ② $\pi(e - 1)$
- ③ ③ πe
- ④ ④ 2π

정답: ①

[1단계] 회전체 부피 공식: $V = \pi \int_1^e (\ln x)^2 dx$. (적분 구간: $\ln x \geq 0$ 은 $x \geq 1$ 에서 성립.)

[2단계] $\int (\ln x)^2 dx$ 부분적분: $u = (\ln x)^2$, $dv = dx$, $du = \frac{2 \ln x}{x} dx$, $v = x$. $\int (\ln x)^2 dx = x(\ln x)^2 - 2 \int \ln x dx$.

[3단계] $\int \ln x dx = x \ln x - x + C$ (부분적분 재사용). 따라서

$\int (\ln x)^2 dx = x(\ln x)^2 - 2(x \ln x - x) + C = x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + C$.

[4단계] $\int_1^e (\ln x)^2 dx = [x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x]_1^e$. $x = e$ 에서 $e \cdot 1 - 2e \cdot 1 + 2e = e$. $x = 1$ 에서 $0 - 0 + 2 = 2$. 차 $e - 2$.

[5단계] $V = \pi(e - 2)$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 '부분적분 두 번'. $(\ln x)^2$ 적분은 $\ln x$ 적분을 알아야 해결. 회전체 부피 공식에서 y^2 은 $(\ln x)^2$ 로 변환. 합정은 적분 구간을 $[0, e]$ 로 잡아 발산시키는 것.

💡 $y = \ln x$ 회전체는 로그 혼 모양으로, 수학에서 '가브리엘의 나팔' 역설 사례의 변형이다.

Q5 순열·조합·이항 심화

집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 집합 $Y = \{a, b, c\}$ 로의 함수 f 중 치역이 Y 인 함수의 개수는?

- ① ① 60
- ② ② 120
- ③ ③ 150
- ④ ④ 180

정답: ③

[1단계] 치역이 Y 라는 조건은 '전사함수(surjection)'의 개수를 구하는 것. 포함배제 원리 활용.

[2단계] 전체 함수 수: $3^5 = 243$.

[3단계] 치역이 Y 의 부분집합(2원소 이하)이 되는 경우 제외. 치역이 특정 2원소집합에 포함되는 함수 수는 $2^5 = 32$, 그런 2원소집합 수는 $\binom{3}{2} = 3$, 기여 $3 \cdot 32 = 96$.

[4단계] 치역이 특정 1원소집합에 포함되는 함수 수는 $1^5 = 1$, 그런 1원소집합 수는 $\binom{3}{1} = 3$, 기여 3. 포함배제로 두 번 빼졌으므로 한 번 더해줌.

[5단계] 전사함수 수 = $3^5 - \binom{3}{2} \cdot 2^5 + \binom{3}{1} \cdot 1^5 = 243 - 96 + 3 = 150$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 포함배제 원리. 전사함수 공식 $S(n, k) = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$. 또는 '5개 원소를 3개 비공집합으로 분할 후 이름 붙이기'로 $S(5, 3) \cdot 3!$ 접근 가능.

이 수는 제2종 스털링 수 $S(5, 3) = 25$ 에 $3! = 6$ 을 곱한 값으로, 경우를 두 방식으로 세어 동일함을 확인할 수 있다.

Q6 확률 심화

한 개의 주사위를 세 번 던질 때, 나오는 눈의 수의 합이 6일 확률은?

- ① ① $\frac{5}{108}$
- ② ② $\frac{5}{54}$
- ③ ③ $\frac{1}{108}$
- ④ ④ $\frac{1}{72}$

정답: ①

표본공간의 크기는 $6^3 = 216$. $a + b + c = 6$ ($1 \leq a, b, c \leq 6$)인 순서쌍의 수를 센다. $a' = a - 1, b' = b - 1, c' = c - 1$ (≥ 0)로 치환하면 $a' + b' + c' = 3$ 이고 음이 아닌 정수해의 수는 $\binom{3+2}{2} = \binom{5}{2} = 10$. 각 변수의 최댓값은 $6 - 1 - 1 = 4 \leq 6$ 이므로 상한 조건은 자동으로 만족된다. 따라서 경우의 수는 10이고 확률은 $\frac{10}{216} = \frac{5}{108}$. 직접 나열해도 (1, 1, 4)형 3가지, (1, 2, 3)형 6가지, (2, 2, 2) 1가지로 합 10가지이다. 정답은 ①.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 '순서쌍 개수 세기'. 합이 6인 양의 정수해는 $\binom{n-1}{k-1}$ 공식으로 $\binom{5}{2} = 10$. 주사위 상한 6 제약은 이 경우 불필요. 함정은 '조합'으로 세어 $\binom{6}{3}$ 등으로 착각.

주사위 합 분포는 삼각수의 생성함수 $(x + x^2 + \dots + x^6)^3$ 의 계수로 분석된다.

Q7 통계 추론

정규분포 $N(70, 10^2)$ 을 따르는 모집단에서 크기 25인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 \bar{X} 에 대하여 $P(\bar{X} \geq 72)$ 를 Z -표로 표현한 것은? (단, $Z \sim N(0, 1)$)

- ① ① $P(Z \geq 0.2)$
- ② ② $P(Z \geq 1)$
- ③ ③ $P(Z \geq 2)$
- ④ ④ $P(Z \geq 5)$

정답: ②

[1단계] 표본평균 \bar{X} 의 분포: 평균 $m = 70$, 표준편차 $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{10}{\sqrt{25}} = 2$. 즉 $\bar{X} \sim N(70, 2^2)$.

[2단계] 표준화: $Z = \frac{\bar{X} - 70}{2}$.

[3단계] $\bar{X} \geq 72 \iff Z \geq \frac{72 - 70}{2} = 1$.

[4단계] 따라서 $P(\bar{X} \geq 72) = P(Z \geq 1)$.

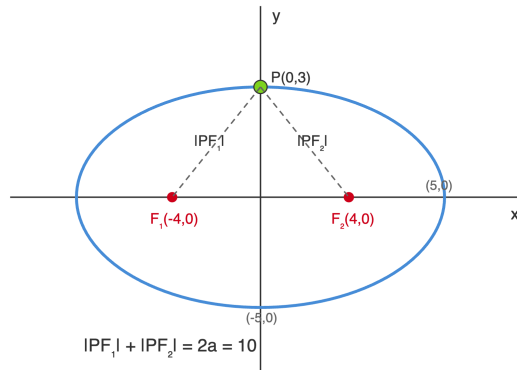
풀이 전략: 핵심 아이디어는 '표본평균의 표준편차는 $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ '. 개별 확률변수의 표준편차($\sigma = 10$)로 표준화하면 틀린다(② 아닌 ①이 됨).

함정은 분모를 10으로 쓰는 것.

$\frac{1}{\sqrt{n}}$ 수렴은 중심극한정리의 핵심 속도로, 모든 통계학의 근간이다.

Q8 이차곡선 심화

타원 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 위의 점 P 에서 두 초점 F_1, F_2 까지의 거리 $|PF_1|, |PF_2|$ 에 대하여 $|PF_1| \cdot |PF_2|$ 의 최댓값은?



- ① ① 16
- ② ② 20
- ③ ③ 25
- ④ ④ 30

정답: ③

[1단계] 타원에서 $a^2 = 25, b^2 = 9$ 이므로 $a = 5, b = 3, c = \sqrt{25 - 9} = 4$. 초점 $F_1(-4, 0), F_2(4, 0)$.

[2단계] 타원의 정의: $|PF_1| + |PF_2| = 2a = 10$. 두 길이를 r_1, r_2 로 두면 $r_1 + r_2 = 10$.

[3단계] AM-GM 부등식: $r_1 r_2 \leq \left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)^2 = 25$. 등호는 $r_1 = r_2 = 5$ 일 때 성립.

[4단계] $r_1 = r_2$ 는 P 가 단축 위(즉 $P = (0, \pm 3)$)일 때 성립. 확인: $|PF_1| = \sqrt{16 + 9} = 5, |PF_2| = 5$. OK.

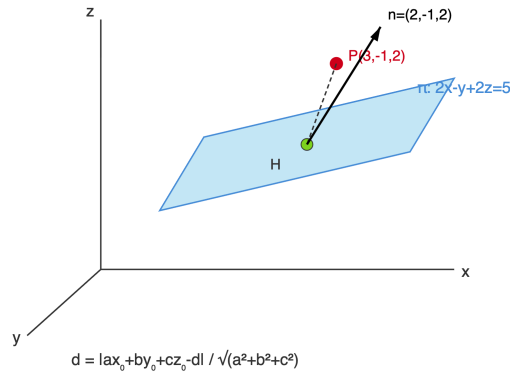
[5단계] 최댓값 25.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 타원의 정의 $r_1 + r_2 = 2a$ 와 산술-기하평균 부등식의 결합. 합이 일정할 때 곱은 두 수가 같을 때 최대. 함정은 최대-최소를 꼭짓점(장축 끝)에서 찾는 것.

$|PF_1| \cdot |PF_2| = a^2 - c^2 \cos^2 \theta$ 형태로도 표현 가능(θ : 편심각).

Q9 벡터·공간도형 심화

공간에서 점 $P(3, -1, 2)$ 와 평면 $\pi: 2x - y + 2z = 5$ 사이의 거리는?



- ① ① $\frac{1}{3}$
- ② ② $\frac{4}{3}$
- ③ ③ 2
- ④ ④ $\frac{8}{3}$

정답: ③

[1단계] 점과 평면 사이의 거리 공식: 평면 $ax + by + cz + d = 0$ 과 점 (x_0, y_0, z_0) 거리 $= \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

[2단계] 평면을 표준형으로 변형: $2x - y + 2z - 5 = 0$. $a = 2, b = -1, c = 2, d = -5$.

[3단계] 점 대입: $|2 \cdot 3 + (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot 2 - 5| = |6 + 1 + 4 - 5| = |6| = 6$.

[4단계] 분모: $\sqrt{4 + 1 + 4} = \sqrt{9} = 3$.

[5단계] 거리 $= \frac{6}{3} = 2$. **정답 ③**.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 공식 암기와 정확한 대입. 법선벡터 $\vec{n} = (2, -1, 2)$ 의 크기로 나누는 것이 핵심. 부호 실수에 주의(절댓값으로 처리). 함정은 평면식 우변을 0으로 옮기지 않고 대입하는 것.

이 공식은 내적 $\vec{AP} \cdot \hat{n}$ 의 절댓값과 같다. 벡터 사영의 기하학적 의미.

Q10 수열 극한·급수 심화

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9n^2 + 2n} - 3n}{1}$ 의 값은?

- ① ① 0
- ② ② $\frac{1}{3}$
- ③ ③ 1
- ④ ④ 3

☞ 정답: ②

☞ [1단계] $\sqrt{9n^2 + 2n} - 3n$ 은 $\infty - \infty$ 부정형. 유리화로 처리.

[2단계] $\sqrt{9n^2 + 2n} - 3n = \frac{(\sqrt{9n^2 + 2n} - 3n)(\sqrt{9n^2 + 2n} + 3n)}{\sqrt{9n^2 + 2n} + 3n} = \frac{(9n^2 + 2n) - 9n^2}{\sqrt{9n^2 + 2n} + 3n} = \frac{2n}{\sqrt{9n^2 + 2n} + 3n}$.

[3단계] 분자·분모를 n 으로 나눔: $\frac{2}{\sqrt{9 + 2/n} + 3}$.

[4단계] $n \rightarrow \infty$ 이면 $2/n \rightarrow 0$, 분모 $\rightarrow \sqrt{9} + 3 = 3 + 3 = 6$.

[5단계] 극한값 $= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

🧠 풀이 전략: 핵심 아이디어는 ' $\infty - \infty$ 부정형은 유리화'. 제공된 형태의 차이는 공액 곱으로 유리화해 ∞/∞ 형태로 변환. 그 뒤 최고차항으로 나누는 표준 기법.

💡 $\sqrt{9n^2 + 2n} \approx 3n\sqrt{1 + \frac{2}{9n}} \approx 3n + \frac{1}{3}$ 로 테일러 전개해도 같은 결과.

Q11 초월함수 적분 심화

함수 $F(x) = \int_0^x (t^2 - 2t)e^t dt$ 에 대하여 $F(x)$ 의 극솟값은?

- ① ① -4
- ② ② $2e^2 - 2$
- ③ ③ -2
- ④ ④ 2

☞ 정답: ①

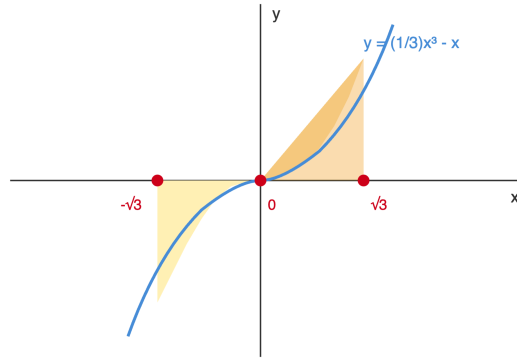
☞ 미적분의 기본정리로 $F'(x) = (x^2 - 2x)e^x = x(x - 2)e^x$. $e^x > 0$ 이므로 $F'(x) = 0$ 의 해는 $x = 0, 2$. $x < 0$ 에서 $F' > 0$, $0 < x < 2$ 에서 $F' < 0$, $x > 2$ 에서 $F' > 0$ 이므로 $x = 0$ 은 극대, $x = 2$ 는 극소이다. 부분적분(또는 $\int P(t)e^t dt = (P - P' + P'')e^t$)을 이용하면 $\int (t^2 - 2t)e^t dt = (t^2 - 4t + 4)e^t = (t - 2)^2 e^t$. 따라서 $F(2) = [(t - 2)^2 e^t]_0^2 = 0 - (-2)^2 e^0 = -4$. 그러므로 극솟값은 -4이다.

🧠 풀이 전략: 핵심 아이디어는 미적분 기본정리로 $F'(x)$ 찾기 + 부분적분. 부분적분 두 번 적용으로 $\int (t^2 - 2t)e^t dt = (t - 2)^2 e^t$ 발견이 핵심. 함정은 부분적분 부호 실수.

💡 $\int P(t)e^t dt$ 형태는 항상 $Q(t)e^t$ 꼴 결과(Q는 같은 차수 다항식).

Q12 미적분 통합 활용

곡선 $y = \frac{1}{3}x^3 - x$ 와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는?



원점 대칭 (기함수): 두 영역 넓이 동일

- ① ① $\frac{3}{2}$
- ② ② 3
- ③ ③ $\frac{9}{2}$
- ④ ④ 9

☞ 정답: ①

▣ [1단계] $y = \frac{1}{3}x^3 - x = \frac{x(x^2 - 3)}{3} = \frac{x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})}{3}$. x 축 교점: $x = -\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}$.

[2단계] $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$ 는 홀함수($f(-x) = -f(x)$). 따라서 곡선과 x 축 사이 영역은 원점 대칭.

[3단계] 넓이 $S = 2 \int_0^{\sqrt{3}} \left| \frac{1}{3}x^3 - x \right| dx = 2 \int_0^{\sqrt{3}} \left(x - \frac{1}{3}x^3 \right) dx$ ($0 \leq x \leq \sqrt{3}$ 에서 $f \leq 0$ 이므로 $|f| = -f$).

[4단계] $\int_0^{\sqrt{3}} \left(x - \frac{1}{3}x^3 \right) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} \right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{3}{2} - \frac{9}{12} = \frac{3}{2} - \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$.

[5단계] $S = 2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$.

🧠 풀이 전략: 핵심 아이디어는 '대칭성 활용 + 부호 분석'. 홀함수의 대칭성으로 $[0, \sqrt{3}]$ 넓이의 두 배. $|f|$ 처리를 위해 구간별 부호 확인 필수. 함정은 $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} f dx = 0$ 으로 오답 처리.

💡 $y = \frac{1}{3}x^3 - x$ 는 $f'(x) = x^2 - 1$ 로 극점 $x = \pm 1$ 을 가지며, 3차함수의 전형적 대칭 도형이다.

Q13 수열 극한·급수 심화

수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{3a_n + 4}{a_n + 3} (n \geq 1)$ 을 만족할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값은?

- ① ① $\sqrt{3}$
- ② ② 2
- ③ ③ $\frac{7}{3}$
- ④ ④ $1 + \sqrt{3}$

정답: ② 2

1단계: 극한값 존재 가정. $\lim a_n = L$ 이라 하면 $L = \frac{3L+4}{L+3}$ 이므로 $L^2 + 3L = 3L + 4$, 즉 $L^2 = 4$. $a_1 = 2 > 0$ 이고 점화식 구조상 $a_n > 0$ 이 유지되므로 $L = 2$ 후보.

2단계: 수렴성 증명. $a_{n+1} - 2 = \frac{3a_n + 4 - 2(a_n + 3)}{a_n + 3} = \frac{a_n - 2}{a_n + 3}$. $a_1 = 2$ 이므로 $a_1 - 2 = 0$, 따라서 모든 n 에 대해 $a_n = 2$ (고정점).

3단계: 결론. 수열이 상수 2이므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$. (함정: ④ $1 + \sqrt{3}$ 은 $L^2 - 2L - 2 = 0$ 오류 풀이에서 나오는 값)

풀이 전략: 핵심 아이디어는 점화식의 고정점(fixed point)을 찾고, 초기값이 고정점과 일치하는지 확인하는 것. 일반적인 수렴 판정은 $|a_{n+1} - L| = |a_n - L| \cdot \frac{1}{|a_n + 3|}$ 로 축소사상임을 보이는 것이 정석.

이런 분수형 점화식은 행렬 $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ 의 고유값 분석으로도 풀 수 있다.

Q14 수열 극한·급수 심화

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2}$ 의 값은?

- ① ① $\frac{\pi}{6}$
- ② ② $\frac{\pi}{4}$
- ③ ③ $\frac{\pi}{3}$
- ④ ④ $\ln 2$

정답: ② $\frac{\pi}{4}$

1단계: 리만합 인식. 주어진 합은 구간 $[0, 1]$ 을 n 등분하여 $x_k = \frac{k}{n}$, $\Delta x = \frac{1}{n}$ 로 두고 함수 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ 을 적분하는 리만합.

2단계: 정적분 변환. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$.

3단계: 적분 계산. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = [\arctan x]_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}$. (함정: ④ $\ln 2$ 는 $\frac{1}{1+x}$ 로 혼동한 오답)

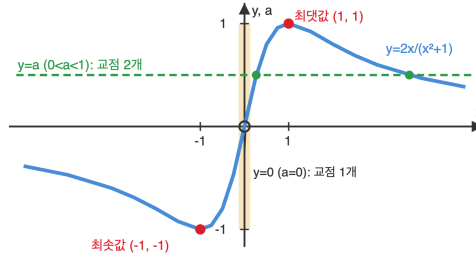
풀이 전략: 핵심 아이디어는 구분구적법 역변환. $\frac{1}{n} \sum f(k/n)$ 꼴이 보이면 $\int_0^1 f(x) dx$ 로 즉시 전환. 피적분함수 $\frac{1}{1+x^2}$ 은 아크탄젠트 도함수이므로 고등 범위에서는 치환 $x = \tan \theta$ 유도도 다름.

이 결과는 '라이프니츠 급수' $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots$ 와 관련 깊다.

Q15 초월함수 미분 심화

함수 $f(x) = \ln(x^2 + 1) - ax$ 가 극댓값과 극솟값을 모두 갖도록 하는 실수 a 의 값의 범위는?

두 점에서 만나는 a :
 $-1 < a < 1, a \neq 0$
 $(-1, 0) \cup (0, 1)$ * $a=0$ 제외



- ① ① $0 < a < 1$
- ② ② $-1 < a < 1$
- ③ ③ $0 < a < \frac{1}{2}$
- ④ ④ $-1 < a < 1, a \neq 0$

정답: ④ $-1 < a < 1, a \neq 0$

1단계: 도함수 계산. $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} - a$. f 가 극댓값·극솟값 모두 갖기 위해선 $f'(x) = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖고 그 근에서 부호가 바뀌어야 함.

2단계: 치환 분석. $g(x) = \frac{2x}{x^2+1} = a$ 의 해가 두 개 필요. $g'(x) = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$ 이므로 $x = 1$ 에서 최댓값 $g(1) = 1$, $x = -1$ 에서 최솟값 $g(-1) = -1$ 을 가진다.

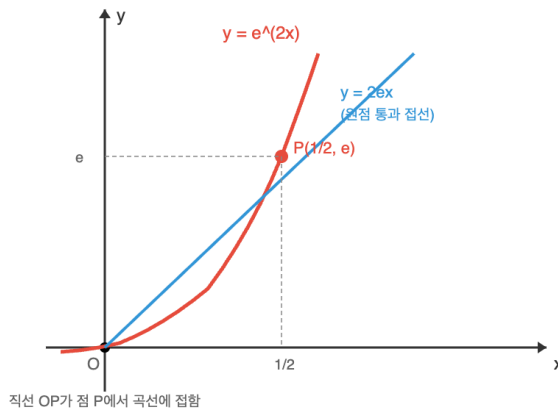
3단계: 정밀 분석. $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$. g 는 $(-\infty, -1)$ 감소, $(-1, 1)$ 증가, $(1, \infty)$ 감소. 치역은 $(-1, 1)$ 이지만 $a = 0$ 일 때는 $x = 0$ 하나만 해. 수평선 $y = a$ 가 g 와 두 점에서 만나려면 $a \neq 0$ 이고 $-1 < a < 1$. (함정: ② $-1 < a < 1$ 은 $a = 0$ 제외를 빠뜨린 오답)

풀이 전략: 핵심 아이디어는 $f'(x) = 0$ 의 근 개수 문제를 치환 $a = g(x)$ 의 교점 개수로 환원. $g(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ 의 그래프 개형(최대 1, 최소 -1, $x \rightarrow \pm \infty$ 에서 0으로 수렴)을 정확히 그리는 것이 관건. $a = 0$ 은 $x = 0$ 하나만 해이므로 극값이 하나뿐인 함정.

함수 $\frac{2x}{x^2+1} = \sin(2\arctan x)$ 로 변형되므로 치역이 $[-1, 1]$ 임을 기하적으로도 이해할 수 있다.

Q16 초월함수 미분 심화

곡선 $y = e^{2x}$ 위의 점 P 에서의 접선이 원점을 지날 때, 점 P 의 x 좌표는?



- ① ① $\frac{1}{4}$
- ② ② $\frac{1}{2}$
- ③ ③ 1
- ④ ④ $\ln 2$

☞ 정답: ② $\frac{1}{2}$

1단계: 접선 방정식. 점 $P(t, e^{2t})$ 에서의 접선 기울기는 $y' = 2e^{2x}$ 이므로 $2e^{2t}$. 접선 방정식은 $y - e^{2t} = 2e^{2t}(x - t)$.

2단계: 원점 통과 조건. $x = 0, y = 0$ 대입: $-e^{2t} = 2e^{2t}(-t)$, 즉 $e^{2t}(2t - 1) = 0$. $e^{2t} \neq 0$ 이므로 $2t - 1 = 0$.

3단계: 해 도출. $t = \frac{1}{2}$. 따라서 P 의 x 좌표는 $\frac{1}{2}$ 이고 $P = (\frac{1}{2}, e)$, 접선 기울기는 $2e$, 방정식 $y = 2ex$. (함정: ④ $\ln 2$ 는 $y = e^x$ 로 착각한 오답)

🧠 풀이 전략: 핵심 아이디어는 접점을 t 로 매개변수화하고 '원점을 지난다'는 조건을 대수 방정식으로 변환. $y = e^{ax}$ 꼴에서 접선이 원점을 지나는 조건은 항상 $t = \frac{1}{a}$, 접점은 $(\frac{1}{a}, e)$ 로 일반화된다.

💡 일반적으로 $y = e^{ax}$ 의 원점 접선 접점은 항상 y 좌표가 e 이다. 자연상수 e 의 기하적 의미를 보여주는 성질.

Q17 초월함수 적분 심화

$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$ 의 값은?

- ① ① $\frac{\pi}{4}$
- ② ② $\frac{\pi}{2}$
- ③ ③ $\frac{\pi}{8}$
- ④ ④ $\frac{\pi}{3}$

☞ 정답: ① $\frac{\pi}{4}$

1단계: 대칭 치환. $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$. $x = \frac{\pi}{2} - t$ 로 치환하면 $dx = -dt$, $\sin x = \cos t$, $\cos x = \sin t$ 이고 구간은 $t: \pi/2 \rightarrow 0$.

2단계: 변환 적분. $I = \int_{\pi/2}^0 \frac{\cos t}{\cos t + \sin t} (-dt) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t} dt$. 이를 J 라 하자.

3단계: 합 이용. $I + J = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} dx = \int_0^{\pi/2} 1 dx = \frac{\pi}{2}$. 대칭에 의해 $I = J$ 이므로 $2I = \frac{\pi}{2}$, $I = \frac{\pi}{4}$. (함정: ② $\pi/2$ 는 합만 계산한 오답)

🧠 풀이 전략: 핵심 아이디어는 대칭치환 $x \rightarrow \frac{\pi}{2} - x$ 로 \sin 과 \cos 을 교환. 이러면 분모는 그대로이고 분자만 바뀌므로 '쌍대 적분' J 가 생긴다. $I + J$ 가 단순하게 계산되면 완성. 이는 정적분의 King Property의 응용.

💡 이 기법은 '대칭성을 이용한 정적분'의 대표 예로, $\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$ 를 활용한다.

Q18 순열·조합·이항 심화

$(1+x)^{10}$ 의 전개식에서 x^3 의 계수와 x^7 의 계수의 합은?

- ① ① 120
- ② ② 240
- ③ ③ 252
- ④ ④ 480

정답: ② 240

1단계: 이항정리. $(1+x)^{10} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} x^k$ 이므로 x^k 의 계수는 $\binom{10}{k}$.

2단계: 계수 계산. x^3 계수 = $\binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} = 120$. x^7 계수 = $\binom{10}{7} = \binom{10}{3} = 120$ (대칭성 $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$).

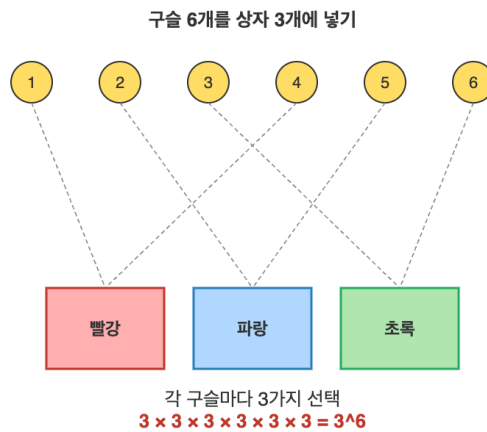
3단계: 합. $120 + 120 = 240$. (함정: ③ 252 = $\binom{10}{5}$ 는 중앙 계수로 오답)

풀이 전략: 핵심 아이디어는 이항계수의 대칭성 $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. $3 + 7 = 10$ 이므로 두 계수가 서로 같아 계산이 두 배로 단순해진다. 계수 합 문제에서 이 대칭성을 활용하면 실수를 줄일 수 있다.

파스칼의 삼각형에서 좌우대칭성은 $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ 의 시각화이며, 조합의 '선택-배제 쌍대성'을 뜻한다.

Q19 순열·조합·이항 심화

서로 다른 6개의 구슬을 서로 다른 3개의 상자에 넣는다. 빈 상자가 있어도 된다고 할 때, 가능한 경우의 수는?



- ① ① 216
- ② ② 540
- ③ ③ 729
- ④ ④ 28

정답: ③ 729

1단계: 독립 배정 원리. 구슬이 서로 다르므로 각 구슬은 독립적으로 3개 상자 중 하나에 들어갈 수 있다. 상자도 서로 다르므로 상자 선택이 구별된다.

2단계: 곱의 법칙. 구슬 1 선택 3가지, 구슬 2 선택 3가지, ..., 구슬 6 선택 3가지. 총 $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^6$.

3단계: 값 계산. $3^6 = 729$. (함정: ① 216 = 6^3 은 서로 바꿔 해석한 오답, ② 540은 빈 상자 없음 조건을 잘못 적용한 함정)

풀이 전략: 핵심 아이디어는 '서로 다른 공을 서로 다른 상자에 넣기 = 함수의 개수'. 이는 정의역 크기 n , 공역 크기 m 인 함수 f 의 개수 m^n 과 같다. 공 6개 → 상자 3개이므로 3^6 .

만약 '빈 상자 없음'이라는 조건이 추가되면 포함배제로 $3^6 - 3 \cdot 2^6 + 3 \cdot 1^6 = 540$ 이 된다.

Q20 확률 심화

동전을 3회 던져 앞면이 나온 횟수를 X 라 할 때, $E(X)$ 의 값은?

- ① ① 1
- ② ② $\frac{3}{2}$
- ③ ③ 2
- ④ ④ 3

정답: ② $\frac{3}{2}$

1단계: 이항분포 확인. $X \sim B(n, p)$, $n = 3$, $p = \frac{1}{2}$ (공정한 동전 앞면 확률).

2단계: 기댓값 공식. 이항분포 $B(n, p)$ 의 기댓값은 $E(X) = np$.

3단계: 대입. $E(X) = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. (함정: ③ 2는 분산 $np(1-p)$ 와 혼동한 오답은 아니지만, '앞면 평균'을 $\frac{3}{2}$ 가 아닌 정수로 착각하는 경우)

풀이 전략: 핵심 아이디어는 이항분포의 기댓값 공식 $E(X) = np$. 직접 계산하려면

$$E(X) = \sum_{k=0}^3 k \binom{3}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}(0 + 3 + 6 + 3) = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}. \text{ 공식이 훨씬 간단.}$$

동전을 n 회 던질 때 앞면 횟수의 기댓값은 $n/2$ 이며, 이는 '대수의 법칙'의 직관적 기초이다.

Q21 확률 심화

주머니에 흰 공 3개, 검은 공 2개가 있다. 공을 하나씩 비복원으로 꺼낼 때, 세 번째에 처음으로 검은 공이 나올 확률은?

- ① ① $\frac{1}{5}$
- ② ② $\frac{3}{20}$
- ③ ③ $\frac{1}{10}$
- ④ ④ $\frac{3}{10}$

정답: ① $\frac{1}{5}$

'세 번째에 처음으로 검은 공'은 첫째·둘째가 흰 공이고 셋째가 검은 공인 사건이다. 비복원이므로 순차적으로 곱한다.

$P(1\text{번째 흰}) = \frac{3}{5}$, $P(2\text{번째 흰} | 1\text{번째 흰}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ 이고, 이때 남은 공은 흰 1개·검은 2개이므로 $P(3\text{번째 검} | \text{앞 2회 흰}) = \frac{2}{3}$. 따라서

$$P = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}. \text{ 또는 흰 3개·검은 2개의 배열 } \frac{5!}{3!2!} = 10\text{가지 중 WWB로 시작하는 경우는 남은 두 자리에 흰 1·검 1을 놓는 2가지이므로 } \frac{2}{10} = \frac{1}{5}. \text{ 정답은 ①.}$$

풀이 전략: 핵심 아이디어는 비복원 추출에서 각 단계 확률은 '남은 공에서의 선택 확률'. 순차적으로 곱하면 된다. 또는 전체 순서열 $5!/(3!2!) = 10$ 가지 중 조건을 만족하는 WWB_ _ 배치는 남은 두 칸에 1흰 1검 배치 $\binom{2}{1} = 2$ 가지. 확률 $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.

비복원 추출에서 '첫 성공 시점' 분포를 음초기하분포(negative hypergeometric)라 부른다.

Q22 통계 추론

모평균이 m , 모표준편차가 $\sigma = 10$ 인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기 $n = 25$ 인 표본을 임의추출하여 표본평균 $\bar{X} = 50$ 을 얻었다. 이 모평균에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간의 길이는? (단, $P(|Z| \leq 1.96) = 0.95$)

- ① ① 3.92
- ② ② 7.84
- ③ ③ 19.6
- ④ ④ 39.2

정답: ② 7.84

1단계: 신뢰구간 공식. 신뢰도 95% 모평균 신뢰구간은 $\bar{X} \pm 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

2단계: 표준오차 계산. $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{10}{\sqrt{25}} = \frac{10}{5} = 2$.

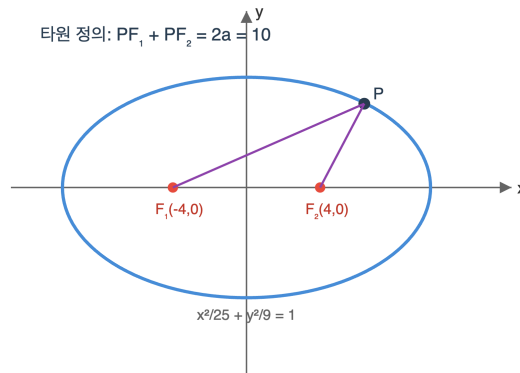
3단계: 신뢰구간 길이. 길이 = $2 \times 1.96 \times 2 = 7.84$. (함정: ① 3.92는 반장반장(반쪽), ④ 39.2는 $\sigma = 10$ 을 그대로 곱한 오답)

풀이 전략: 핵심 아이디어는 신뢰구간의 '길이 = $2 \times$ (임계값) \times (표준오차)'. 표본평균 값은 신뢰구간 중심이지 길이에는 영향이 없음. 표본크기 n 이 4배 늘면 길이는 1/2로 줄어든다.

1.96은 95% 신뢰구간의 기준값으로, 99%는 약 2.58, 90%는 약 1.645이다.

Q23 이차곡선 심화

타원 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 위의 점 P 에서 두 초점 F_1, F_2 까지의 거리의 합은?



- ① ① 6
- ② ② 8
- ③ ③ 10
- ④ ④ P 의 위치에 따라 다름

정답: ③ 10

1단계: 타원 정의. 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$)은 두 초점으로부터의 거리의 합이 일정한 점의 자취. 그 합은 $2a$ (장축의 길이).

2단계: 표준형 식별. $a^2 = 25, b^2 = 9$ 이므로 $a = 5, b = 3$. $c^2 = a^2 - b^2 = 16, c = 4$. 초점 $F_1(-4, 0), F_2(4, 0)$.

3단계: 거리합. $|PF_1| + |PF_2| = 2a = 2 \cdot 5 = 10$. P 의 위치와 무관하게 상수. (함정: ④는 원과 착각한 오답)

풀이 전략: 핵심 아이디어는 '타원의 정의 = 두 초점 거리합 일정'. 이 일정한 값은 장축의 길이 $2a$ 이다. 기하적 정의와 방정식 표준형의 관계 $a^2 = b^2 + c^2$ (타원의 경우)를 항상 기억해야 한다. 쌍곡선은 '거리 차이의 절댓값 = $2a$ '로 대조된다.

행성의 공전궤도는 케플러 제1법칙에 의해 태양을 한 초점으로 하는 타원이며, 이 정의가 행성 거리 변화를 설명한다.

Q24 수열 극한·급수 심화

무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ 의 값을 구하시오.

- ① ① $\frac{1}{2}$
- ② ② $\frac{3}{4}$
- ③ ③ 1
- ④ ④ $\frac{5}{8}$

정답: ② $\frac{3}{4}$

1단계: 부분분수 분해. $\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$.

2단계: 부분합 $S_N = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+2} \right) \right]$ 로 전개. 인접하지 않은 두 칸 건너뛰기 소거.

3단계: 남는 항은 $\frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2} \right]$. $N \rightarrow \infty$ 일 때 뒤 두 항은 0이므로 합은 $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 분모가 $n(n+k)$ 꼴이면 부분분수로 쪼개 뒤 망원(telescope) 구조를 만드는 것. 단, $k=1$ 이 아니라 $k=2$ 이므로 한 칸 건너뛰어 소거되어 남는 초항이 $1 + \frac{1}{2}$ 임에 주의한다.

💡 분모 차이가 k 이면 무한합은 $\frac{1}{k} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k} \right)$ 꼴로 일반화된다.

Q25 초월함수 미분 심화

곡선 $x^2 + xy + y^2 = 7$ 위의 점 $(1, 2)$ 에서의 접선의 방정식을 구하시오.

- ① ① $4x + 5y = 14$
- ② ② $5x + 4y = 13$
- ③ ③ $2x + y = 4$
- ④ ④ $4x - 5y = -6$

정답: ① $4x + 5y = 14$

1단계: 양변을 x 로 음함수 미분. $2x + y + xy' + 2yy' = 0$, 정리하면 $(x + 2y)y' = -(2x + y)$, 즉 $y' = -\frac{2x + y}{x + 2y}$.

2단계: $(1, 2)$ 대입. $y' = -\frac{2+2}{1+4} = -\frac{4}{5}$.

3단계: 접선 $y - 2 = -\frac{4}{5}(x - 1)$ 을 정리하면 $4x + 5y = 14$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 $y = f(x)$ 로 풀 수 없는 음함수를 만나면 곱의 법칙과 연쇄법칙을 동원해 양변을 그대로 미분한 뒤 y' 에 대해 푸는 것이다. 점이 곡선 위에 있는지($1 + 2 + 4 = 7$) 먼저 확인해 실수를 방지한다.

💡 $x^2 + xy + y^2 = c$ 는 회전시킨 타원으로, 접선 기울기는 회전된 주축 방향과 깊이 연결된다.

Q26 초월함수 적분 심화

정적분 $\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}}$ 의 값을 구하시오.

- ① ① $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- ② ② $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$
- ③ ③ $\sqrt{2}$
- ④ ④ $\frac{1}{2}$

정답: ① $\frac{\sqrt{2}}{2}$

1단계: $x = \tan\theta$ 로 치환. $dx = \sec^2\theta d\theta$, $1 + x^2 = \sec^2\theta$ 이므로 $(1 + x^2)^{3/2} = \sec^3\theta$.

2단계: 적분이 $\int \frac{\sec^2\theta}{\sec^3\theta} d\theta = \int \cos\theta d\theta = \sin\theta + C$.

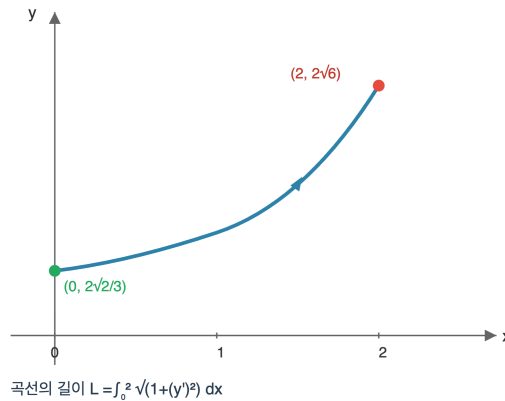
3단계: 원래 변수로 복귀. $\sin\theta = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ 이므로 $\left[\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 $(1+x^2)^k$ 꼴이 피적분함수에 있으면 삼각치환 $x = \tan\theta$ 로 지수 k 를 \sec 의 거듭제곱으로 바꾸는 것. 분자의 \sec^2 와 분모의 \sec^3 이 상쇄되어 $\cos\theta$ 라는 간단한 꼴이 된다.

💡 이 피적분함수는 중심이 원점인 반원의 곡률원소에 해당하며, 물리에서 전기장 적분에 자주 등장한다.

Q27 미적분 통합 활용

곡선 $y = \frac{1}{3}(x^2 + 2)^{3/2}$ ($0 \leq x \leq 2$)의 길이를 구하시오.



- ① ① $\frac{10}{3}$
- ② ② $\frac{14}{3}$
- ③ ③ 4
- ④ ④ $\frac{8}{3}$

정답: ② $\frac{14}{3}$

1단계: 미분하면 $y' = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2}(x^2 + 2)^{1/2} \cdot 2x = x\sqrt{x^2 + 2}$.

2단계: $1 + (y')^2 = 1 + x^2(x^2 + 2) = x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2$ 이므로 $\sqrt{1 + (y')^2} = x^2 + 1$ (양수).

3단계: $L = \int_0^2 (x^2 + 1) dx = \left[\frac{x^3}{3} + x \right]_0^2 = \frac{8}{3} + 2 = \frac{14}{3}$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 곡선의 길이 공식 $\int \sqrt{1 + (y')^2} dx$ 에서 루트 안이 완전제곱식 $(x^2 + 1)^2$ 으로 정돈되도록 y 의 꼴을 설계한 점을 포착하는 것. 루트가 벗겨지는 구조를 알아채는 것이 관건.

💡 곡선의 길이가 유리수로 떨어지는 함수는 'rectifiable curve' 중에서도 매우 드물며, 입시 문제에서는 거의 항상 $1 + (y')^2$ 이 완전제곱이 되도록 역설계된다.

Q28 순열·조합·이항 심화

$(x + 2y - z)^6$ 을 전개할 때, x^2y^3z 의 계수를 구하시오.

- ① ① 480
- ② ② -480
- ③ ③ -60
- ④ ④ -240

정답: ② -480

1단계: 다항정리 적용. 일반항은 $\frac{6!}{a!b!c!}x^a(2y)^b(-z)^c$ 이며 $a + b + c = 6$.

2단계: x^2y^3z 를 얻으려면 $a = 2, b = 3, c = 1$. 다항계수는 $\frac{6!}{2!3!1!} = \frac{720}{2 \cdot 6 \cdot 1} = 60$.

3단계: 부호·상수 반영. $(2)^3 \cdot (-1)^1 = -8$ 이므로 계수 = $60 \times (-8) = -480$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 이항정리를 넘어서 '다항정리'로 확장하는 것. 세 항의 거듭제곱 전개에서는 지수 세 개 a, b, c 를 고정한 뒤 다항계수 $\binom{6}{a, b, c}$ 에 각 항의 상수 거듭제곱을 곱해야 한다. 음수 부호를 잊으면 함정 ①에 빠진다.

💡 다항계수 $\binom{n}{a, b, c}$ 는 Pascal 삼각형의 3차원 확장인 'Pascal 사면체' 각 층의 원소와 같다.

Q29 확률 심화

상자 A에는 빨간 공 3개, 파란 공 2개가, 상자 B에는 빨간 공 2개, 파란 공 4개가 들어 있다. 두 상자 중 하나를 같은 확률로 택해 공 하나를 꺼냈더니 빨간색이었다. 그 공이 상자 A에서 나왔을 확률을 구하시오.

- ① ① $\frac{3}{5}$
- ② ② $\frac{7}{15}$
- ③ ③ $\frac{9}{14}$
- ④ ④ $\frac{5}{9}$

정답: ③ $\frac{9}{14}$

1단계: 사전확률과 조건확률 정리. $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}, P(R|A) = \frac{3}{5}, P(R|B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

2단계: 전체 확률 $P(R) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{9}{30} + \frac{5}{30} = \frac{14}{30} = \frac{7}{15}$.

3단계: 베이즈 정리. $P(A|R) = \frac{P(A)P(R|A)}{P(R)} = \frac{3/10}{7/15} = \frac{3}{10} \cdot \frac{15}{7} = \frac{9}{14}$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 '결과를 보고 원인을 되묻는' 사후확률 계산이므로 베이즈 정리를 사용한다. 두 상자의 공 개수가 다르면 전체 확률 분모를 공통분모로 맞추는 작업이 필수이며, $P(R|A)$ 와 $P(R)$ 를 헷갈리면 함정 ①에 빠진다.

💡 18세기 토마스 베이즈의 유고 논문에서 처음 제시된 이 정리는 현대 스팸 필터와 의료 진단에서 매일 수십억 번 계산된다.

Q30 통계 추론

확률변수 X 가 정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따른다. $P(X \leq 40) = 0.0228$, $P(X \leq 70) = 0.9772$ 일 때 $m + \sigma$ 의 값을 구하시오. (단, $P(|Z| \leq 2) = 0.9544$)

- ① ① 47.5
- ② ② 55
- ③ ③ 62.5
- ④ ④ 70

🎯 정답: ③ 62.5

📖 1단계: 표 해석. $P(|Z| \leq 2) = 0.9544$ 이므로 $P(Z \leq 2) = \frac{1 + 0.9544}{2} = 0.9772$, $P(Z \leq -2) = 0.0228$. 즉 주어진 두 확률의 Z 값은 각각 -2 , $+2$.

2단계: 표준화로 연립. $\frac{40 - m}{\sigma} = -2$, $\frac{70 - m}{\sigma} = 2$.

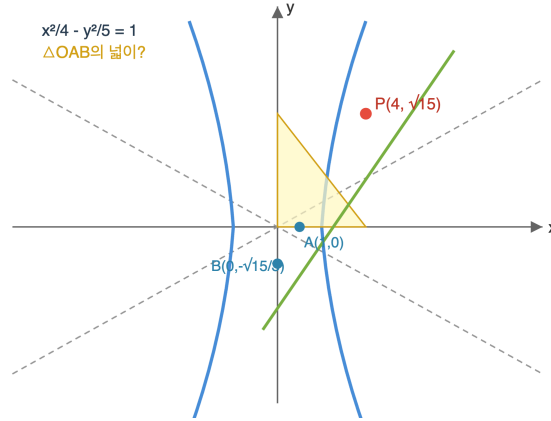
3단계: 두 식을 더하면 $\frac{110 - 2m}{\sigma} = 0 \Rightarrow m = 55$. 다시 대입해 $\sigma = 7.5$. 따라서 $m + \sigma = 62.5$.

🧠 풀이 전략: 핵심 아이디어는 0.0228과 0.9772가 대칭 구간 $|Z| \leq 2$ 에서 벗어난 꼬리 확률임을 알아보는 것. Z 값이 대칭(+2, -2)이라는 사실을 이용하면 연립방정식의 '합'에서 m 이, '차'에서 σ 가 깔끔하게 분리된다.

💡 $P(|Z| \leq 2) \approx 0.9545$ 는 통계에서 '2시그마 법칙'으로 불리며, 품질관리 분야의 관리한계선 설정에 사용된다.

Q31 이차곡선 심화

쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ 위의 점 $(4, \sqrt{15})$ 에서의 접선이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 A, B 라 할 때, 삼각형 OAB 의 넓이를 구하시오.



- ① ① $\frac{\sqrt{15}}{6}$
- ② ② $\frac{\sqrt{15}}{3}$
- ③ ③ $\frac{\sqrt{15}}{2}$
- ④ ④ $\sqrt{15}$

정답: ① $\frac{\sqrt{15}}{6}$

1단계: 점이 곡선 위에 있는지 확인. $\frac{16}{4} - \frac{15}{5} = 4 - 3 = 1 \checkmark$.

2단계: 쌍곡선 접선 공식 $\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 1$ 적용. $\frac{4x}{4} - \frac{\sqrt{15}y}{5} = 1$, 즉 $x - \frac{\sqrt{15}}{5}y = 1$. $A = (1, 0)$,

$$B = \left(0, -\frac{5}{\sqrt{15}}\right) = \left(0, -\frac{\sqrt{15}}{3}\right).$$

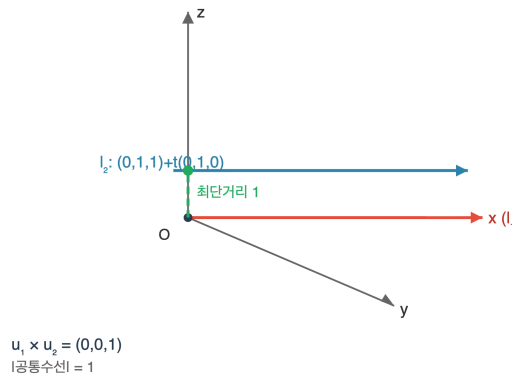
3단계: 넓이 $= \frac{1}{2} \cdot |OA| \cdot |OB| = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{15}}{3} = \frac{\sqrt{15}}{6}$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 접선 공식 ' $x_0x/a^2 - y_0y/b^2 = 1$ '을 기계적으로 쓰지 말고 y_0 의 부호·유리화를 동시에 처리하는 것. 절편을 구할 때 $5/\sqrt{15} = \sqrt{15}/3$ 으로 유리화해야 답 선지와 매칭된다.

쌍곡선 접선이 두 점근선과 만드는 삼각형의 넓이는 점의 위치와 무관하게 ab 로 일정하다는 놀라운 불변량이 있다.

Q32 벡터·공간도형 심화

공간에서 직선 $l_1: (x, y, z) = (t, 0, 0)$ 과 직선 $l_2: (x, y, z) = (0, 1 + s, 1)$ 의 사이의 최단거리를 구하시오.



- ① ① 0
- ② ② $\frac{1}{\sqrt{2}}$
- ③ ③ 1
- ④ ④ $\sqrt{2}$

🎯 정답: ③ 1

📖 1단계: 방향벡터 $\vec{u}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{u}_2 = (0, 1, 0)$ 은 평행하지 않으므로 두 직선은 꼬인 위치. 공통 법선은 $\vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = (0, 0, 1)$.

2단계: 각 직선 위 한 점을 고르면 $P_1 = (0, 0, 0)$, $P_2 = (0, 1, 1)$. 연결벡터 $\vec{P_1P_2} = (0, 1, 1)$.

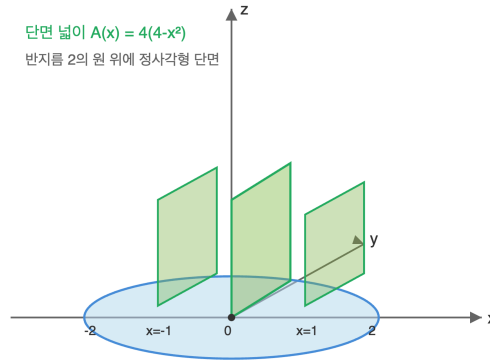
3단계: 최단거리 공식 $d = \frac{|\vec{P_1P_2} \cdot (\vec{u}_1 \times \vec{u}_2)|}{|\vec{u}_1 \times \vec{u}_2|} = \frac{|(0, 1, 1) \cdot (0, 0, 1)|}{1} = 1$.

🧠 풀이 전략: 핵심 아이디어는 두 직선이 평행도 교차도 아닌 '꼬인 위치'임을 먼저 판단하고, 공통 법선 방향 $\vec{u}_1 \times \vec{u}_2$ 위로 연결벡터를 정사영한 길이가 최단거리임을 쓰는 것. 두 방향이 x,y축이므로 외적이 z축임을 직관으로도 확인할 수 있다.

💡 꼬인 두 직선의 최단거리는 유일한 공통 수선을 따라 측정되며, 이 수선은 두 직선 모두와 수직으로 만난다.

Q33 미적분 통합 활용

밑면이 반지름 2인 원이고, 밑면의 한 지름에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형인 입체의 부피를 구하시오.



- ① ① $\frac{32}{3}$
- ② ② $\frac{64}{3}$
- ③ ③ $\frac{128}{3}$
- ④ ④ 16π

정답: ③ $\frac{128}{3}$

1단계: x 축을 지름으로 두면 원 방정식 $y^2 + z^2 \leq 4$ 의 단면 폭은 $2\sqrt{4-x^2}$. 단면이 정사각형이므로 변의 길이도 이와 같고, 단면 넓이 $A(x) = (2\sqrt{4-x^2})^2 = 4(4-x^2)$.

2단계: 부피 $V = \int_{-2}^2 A(x) dx = 4 \int_{-2}^2 (4-x^2) dx$. 대칭성으로 $= 8 \int_0^2 (4-x^2) dx$.

3단계: $\int_0^2 (4-x^2) dx = \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$. 따라서 $V = 8 \cdot \frac{16}{3} = \frac{128}{3}$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 '단면 넓이 적분' $V = \int A(x) dx$ 이다. 회전체가 아니라 단면 모양이 명시된 입체이므로, 단면 한 변을 x 의 함수로 표현한 뒤 제곱이 곧 넓이라는 점에 유의한다. π 가 등장하지 않는 이유는 단면이 원이 아니라 정사각형이기 때문이다.

이 유형 문제는 미국 AP Calculus의 'solids with known cross sections'으로 불리며, Cavalieri 원리가 기초가 된다.

Q34 순열·조합·이항 삼화

문자 A, A, A, B, B, C, D를 일렬로 나열할 때, 세 개의 A 중 어느 두 개도 서로 이웃하지 않는 경우의 수를 구하시오.

- ① ① 60
- ② ② 120
- ③ ③ 360
- ④ ④ 420

정답: ② 120

1단계: A가 아닌 네 글자 B, B, C, D를 먼저 일렬로 나열. B가 같으므로 $\frac{4!}{2!} = 12$ 가지.

2단계: 이렇게 놓은 4개의 문자 사이와 양 끝에 생기는 '빈틈' 5곳 중 3곳을 골라 A를 한 개씩 배치하면 어떤 두 A도 이웃하지 않는다. $\binom{5}{3} = 10$ 가지.

3단계: 두 단계가 독립이므로 곱의 법칙으로 $12 \times 10 = 120$ 가지.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 '이웃하지 않게 배치'는 곧 '먼저 다른 원소를 배치하고 그 사이사이에 끼워 넣기' 기법이라는 점. 만약 전체 $\frac{7!}{3!2!} = 420$ 에서 A가 뭉치는 경우를 빼는 식($420 - 60 = 360$)을 쓰면 '두 개만 붙은' 경우는 여전히 남아 있어 오답이 된다.

이 '자리 사이 끼워넣기' 기법은 유도 수렴(guided placement)이라 부르며, 수열 배치·격자 경로 문제의 표준 무기다.

Q35 초월함수 적분 심화

함수 $f(x) = \int_0^x (t-1)(t+2) dt$ 의 극솟값을 구하시오.

- ① ① $\frac{7}{6}$
- ② ② $-\frac{7}{6}$
- ③ ③ $-\frac{5}{6}$
- ④ ④ $-\frac{11}{6}$

정답: ② $-\frac{7}{6}$

1단계: 미적분의 기본 관계로 $f'(x) = (x-1)(x+2)$. 부호는 $x < -2$ 에서 양, $-2 < x < 1$ 에서 음, $x > 1$ 에서 양이므로 $x = -2$ 에서 극대, $x = 1$ 에서 극소.

2단계: $f(1) = \int_0^1 (t^2 + t - 2) dt$. 전개하여 $(t-1)(t+2) = t^2 + t - 2$.

3단계: 계산하면 $\left[\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - 2t \right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 = \frac{2+3-12}{6} = -\frac{7}{6}$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 $f(x) = \int_0^x g(t) dt$ 꼴이면 $f'(x) = g(x)$ 라는 관계에서 극점을 먼저 찾고, 극솟값은 그 지점에서의 f 값, 즉 정적분을 '반드시 0부터'의 구간으로 끝까지 계산해야 한다는 점이다. 극점만 찾고 함숫값을 $g(1) = 0$ 으로 착각하면 오답.

이처럼 적분으로 정의된 함수는 '적분함수 F 의 해석'이라 불리며, 2015·2018·2021 수능의 킬러 30번 계열에서 반복 출제되었다.

Q36 초월함수 미분 심화

함수 $f(x) = \sin 2x + 2\cos x$ ($0 \leq x \leq \pi$)의 최댓값을 구하시오.

- ① ① 2
- ② ② $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
- ③ ③ $\frac{5\sqrt{3}}{2}$
- ④ ④ $3\sqrt{3}$

정답: ②

1) 도함수 정리: $f'(x) = 2\cos 2x - 2\sin x = 2(1 - 2\sin^2 x) - 2\sin x$. 2) $f'(x) = 0$ 풀이: $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$ 에서

$(2\sin x - 1)(\sin x + 1) = 0$, 구간 내에서 $\sin x = \frac{1}{2}$ 이므로 $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$. 3) 함숫값 비교: $f(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2.598$,

$f(5\pi/6) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $f(0) = 2$, $f(\pi) = -2$. 최댓값은 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 배각공식 $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ 로 $f'(x)$ 를 $\sin x$ 의 이차식으로 변환한 뒤 인수분해하는 것이다. 끝점과 극값 후보를 모두 비교해야 한다.

이 함수는 단순 조화진동 두 개의 합성으로, Fourier 해석의 가장 기본적인 비선형 간섭 예시이다.

Q37 초월함수 적분 심화

정적분 $\int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx$ 의 값을 구하시오.

- ① ① $\ln 2$
- ② ② $1 - \ln \frac{3}{2}$
- ③ ③ $\ln \frac{3}{2}$
- ④ ④ $1 + \ln \frac{3}{2}$

☞ 정답: ②

📖 1) 치환: $u = 1 + e^x$ 로 두면 $du = e^x dx$ 이고 $e^x = u - 1$. $x = 0$ 일 때 $u = 2$, $x = \ln 2$ 일 때 $u = 3$. 2) 피적분함수 변환:

$$\frac{e^{2x}}{1+e^x} dx = \frac{(u-1)e^x}{u} dx = \frac{u-1}{u} du = \left(1 - \frac{1}{u}\right) du.$$

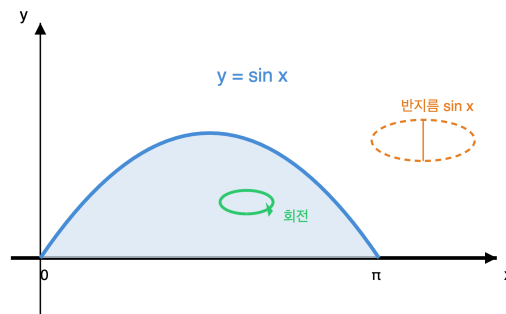
$$\int_2^3 \left(1 - \frac{1}{u}\right) du = [u - \ln u]_2^3 = (3 - \ln 3) - (2 - \ln 2) = 1 - \ln \frac{3}{2}.$$

🧠 풀이 전략: 핵심 아이디어는 분모에 $1 + e^x$ 가 있으므로 $u = 1 + e^x$ 치환을 선택하고, 분자의 e^{2x} 를 $(u-1) \cdot e^x$ 로 분리하여 $e^x dx = du$ 를 그대로 사용하는 것이다.

💡 $\frac{e^{nx}}{1+e^x}$ 형태의 적분은 Fermi-Dirac 분포 계산에서 그대로 등장하는 통계물리의 고전이다.

Q38 미적분 통합 활용

곡선 $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$)와 x 축으로 둘러싸인 도형을 x 축 둘레로 회전시킨 회전체의 부피를 구하시오.



원판법 $V = \pi \int_0^\pi \sin^2 x dx$

- ① ① π
- ② ② $\frac{\pi^2}{4}$
- ③ ③ $\frac{\pi^2}{2}$
- ④ ④ π^2

☞ 정답: ③

📖 1) 원판법 적용: 회전체 부피는 $V = \pi \int_0^\pi [\sin x]^2 dx$ 로 표현된다. 2) 반각공식으로 변형: $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ 이므로

$$V = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi (1 - \cos 2x) dx. \quad 3) \text{적분 계산: } \frac{\pi}{2} \left[x - \frac{\sin 2x}{2} \right]_0^\pi = \frac{\pi}{2} \cdot \pi = \frac{\pi^2}{2}.$$

🧠 풀이 전략: 핵심 아이디어는 회전체 부피의 원판법 공식에 피적분함수가 $\sin^2 x$ 로 들어가므로 반드시 반각공식으로 차수를 낮춘 뒤 적분해야 한다는 점이다.

💡 $\int_0^\pi \sin^2 x dx = \pi/2$ 는 모든 주기함수의 평균 파워가 진폭 제곱의 절반이라는 물리적 사실과 정확히 일치한다.

Q39 순열·조합·이항 심화

방정식 $x + y + z + w = 15$ 를 만족하는 정수해 중 $x \geq 1, y \geq 2, z \geq 3, w \geq 0$ 인 것의 개수를 구하시오.

- ① ① 165
- ② ② 220
- ③ ③ 286
- ④ ④ 364

정답: ②

1) 변수 치환으로 조건 제거: $x' = x - 1, y' = y - 2, z' = z - 3$ 로 두면 $x', y', z', w \geq 0$ 이고 $x' + y' + z' + w = 15 - 1 - 2 - 3 = 9$. 2) 음이 아닌 정수해 개수는 중복조합 ${}_4H_9$ 로 주어짐. 3) 계산:

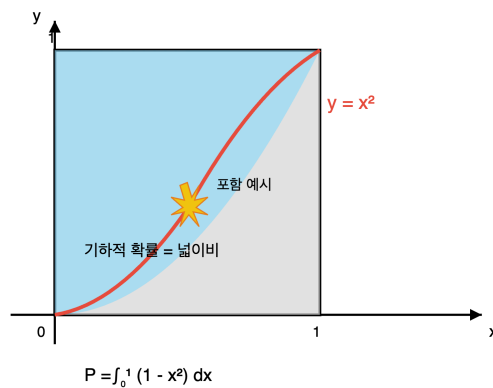
$${}_4H_9 = {}_{4+9-1}C_9 = {}_{12}C_9 = {}_{12}C_3 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{6} = 220.$$

풀이 전략: 핵심 아이디어는 하한 조건이 있는 정수해 문제를 변수 치환으로 '모두 0 이상' 문제로 환원한 뒤 중복조합 공식을 적용하는 것이다. ${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r$.

이런 방식의 문제는 '공 나누기' 또는 'stars and bars'로 불리며, 조합수학의 가장 실용적인 원형 중 하나이다.

Q40 확률 심화

정사각형 $[0, 1] \times [0, 1]$ 에서 두 수 X, Y 를 독립적으로 균등하게 선택할 때, $Y > X^2$ 일 확률을 구하시오.



- ① ① $\frac{1}{3}$
- ② ② $\frac{1}{2}$
- ③ ③ $\frac{2}{3}$
- ④ ④ $\frac{3}{4}$

정답: ③

1) 균등분포에서 확률은 해당 영역의 넓이와 같음(전체 넓이 1). 2) 영역 설정: $\{(x, y): 0 \leq x, y \leq 1, y > x^2\}$ 는 단위정사각형 내부에서 포물선 $y = x^2$ 위쪽 부분. 3) 넓이 적분: $\int_0^1 (1 - x^2) dx = \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 두 확률변수가 독립 균등분포를 따르면 전체 표본공간이 단위정사각형이 되어, 사건의 확률이 해당 영역의 넓이로 환원된다는 점이다. 이후는 적분 계산 문제.

이런 방식의 문제는 Monte Carlo 시뮬레이션으로 π 를 추정하는 방법의 직접적인 조상이다.

고3 수학 심화

총 40문제 · 문제와 정답·풀이 포함

Q41 통계 추론

어느 정책에 대한 찬성 비율을 추정하기 위해 $n = 400$ 명을 무작위 표본조사 한 결과 표본비율 $\hat{p} = 0.5$ 를 얻었다. 모비율 p 에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간의 길이를 구하시오. (단, $P(|Z| \leq 2.58) = 0.99$)

- ① 0.129
- ② 0.158
- ③ 0.196
- ④ 0.258

정답: ①

1) 모비율 신뢰구간 공식: $\hat{p} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$, 신뢰도 99%에서 $z = 2.58$. 2) 표준오차 계산:

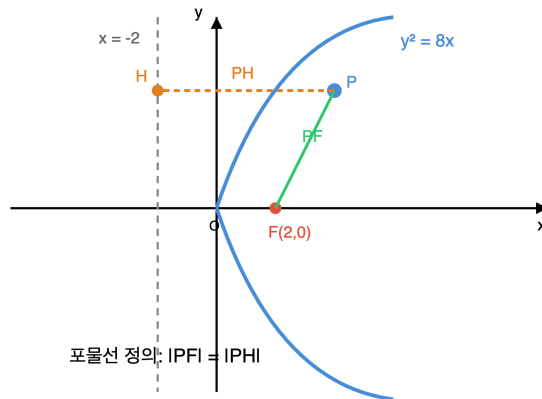
$$\sqrt{\frac{0.5 \times 0.5}{400}} = \sqrt{\frac{0.25}{400}} = \sqrt{0.000625} = 0.025. \quad 3) \text{ 구간 길이: } 2 \times z \times (\text{표준오차}) = 2 \times 2.58 \times 0.025 = 0.129.$$

풀이 전략: 핵심 아이디어는 모비율의 정규근사 기반 신뢰구간 공식 $\hat{p} \pm z \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ 을 사용하고, 신뢰도에 따른 z 값을 정확히 선택하는 것이다. 길이는 $2z \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$.

표본크기 n 을 4배 늘리면 신뢰구간 길이는 $1/\sqrt{4} = 1/2$ 배로 줄어든다. 이것이 '정확도를 2배 올리려면 표본을 4배 모아라' 법칙이다.

Q42 이차곡선 심화

포물선 $y^2 = 8x$ 위의 점 P에서 준선까지의 거리가 6일 때, 점 P와 초점 F 사이의 거리 $|PF|$ 와 점 P의 x좌표의 합을 구하시오.



- ① 8
- ② 9
- ③ 10
- ④ 12

정답: ③

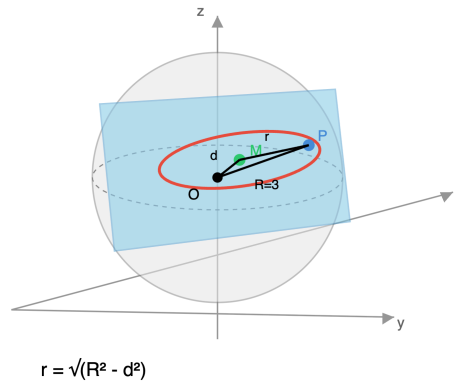
1) 포물선 성질 확인: $y^2 = 8x = 4 \cdot 2 \cdot x$ 이므로 초점 $F(2,0)$, 준선 $x = -2$. 포물선 위 임의의 점 P에서 $|PF| = (\text{준선까지 거리})$. 2) $|PF|$ 계산: 준선까지 거리가 6이므로 $|PF| = 6$. 3) x좌표 계산: P의 x좌표를 p 라 하면 준선까지 거리 $= p - (-2) = p + 2 = 6$ 이므로 $p = 4$. 따라서 합 $= |PF| + p = 6 + 4 = 10$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 포물선의 기하적 정의(초점까지 거리 = 준선까지 거리)를 이용하면 좌표 계산 없이 $|PF|$ 가 주어진 준선거리와 같음을 즉시 알 수 있다는 것이다. 이후 준선 방정식으로 x좌표를 역산.

파라볼라 안테나는 포물선의 이 성질 때문에 초점에 놓인 수신기에 평행하게 들어온 전파가 모두 모인다.

Q43 벡터·공간도형 심화

구 $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ 와 평면 $x + 2y + 2z = 3$ 이 만나서 이루는 원의 반지름을 구하시오.



- ① ① $\sqrt{2}$
- ② ② 2
- ③ ③ $2\sqrt{2}$
- ④ ④ $2\sqrt{3}$

정답: ③

1) 구와 평면이 만나는 원의 중심은 구의 중심에서 평면에 내린 수선의 발과 일치. 중심 $O(0, 0, 0)$ 에서 평면 $x + 2y + 2z - 3 = 0$ 까지의 거리: $d = \frac{|0 + 0 + 0 - 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{3}{\sqrt{9}} = 1$. 2) 피타고라스 정리: 구 반지름 $R = 3$, 중심거리 $d = 1$, 교선 원의 반지름 r 에 대해 $R^2 = d^2 + r^2$. 3) 반지름 계산: $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{9 - 1} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 구와 평면의 교선이 원이라는 사실과, 그 원의 반지름이 구의 반지름과 '중심에서 평면까지의 거리'로 이루는 직각삼각형(피타고라스)에서 결정된다는 점이다. 평면까지 거리 공식을 정확히 적용하는 것이 관건.

💡 지구본 위의 위도선은 정확히 이 원리로 그려진다. 적도면이 아닌 위도 평면이 구와 만나 작은 원을 만든다.

Q44 초월함수 미분 심화

함수 $f(x) = e^x \sin x$ ($0 \leq x \leq 2\pi$)의 그래프에서 변곡점의 개수를 구하시오.

- ① ① 1개
- ② ② 2개
- ③ ③ 3개
- ④ ④ 4개

정답: ②

1) 1계 도함수: $f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x(\sin x + \cos x)$. 2) 2계 도함수: $f''(x) = e^x(\sin x + \cos x) + e^x(\cos x - \sin x) = 2e^x \cos x$. 3) 변곡점 판정: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0$ ($e^x > 0$ 이므로). 구간 $[0, 2\pi]$ 에서 $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$. 각 점 좌우에서 $\cos x$ 의 부호가 바뀌므로 f'' 도 부호가 바뀌어 실제 변곡점. 총 2개.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 곱함수 $e^x \sin x$ 의 2계 도함수가 아주 깔끔한 $2e^x \cos x$ 로 정리된다는 점(사인 도함수 성질)이다. 변곡점은 $f'' = 0$ 이고 부호가 변하는 점이어야 한다는 조건도 확인 필요.

💡 $e^x \sin x$ 는 감쇠 아닌 지수증가 진동으로, 불안정한 선형 시스템의 응답의 원형이다. 주파수는 1, 증폭률은 $e^{2\pi}$.

Q45 수열 극한·급수 심화

극한 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{2}{n}} + \dots + \sqrt{\frac{n}{n}} \right)$ 의 값을 구하시오.

- ① ① $\frac{1}{2}$
- ② ② $\frac{2}{3}$
- ③ ③ $\frac{3}{4}$
- ④ ④ 1

정답: ②

1) 합 표기 변환: 주어진 식은 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}}$ 꼴. 2) 구분구적법: 구간 $[0, 1]$ 을 n 등분하여 $x_k = \frac{k}{n}$, $\Delta x = \frac{1}{n}$ 로 두면 리만합

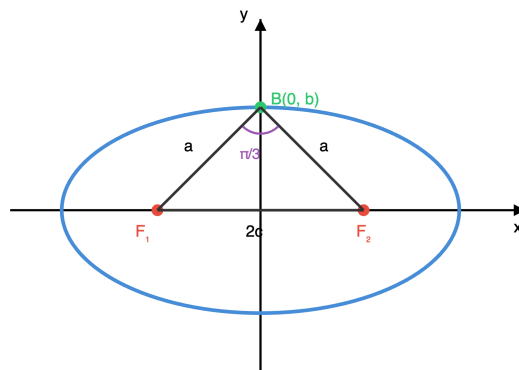
$$\sum_{k=1}^n \sqrt{x_k} \Delta x \rightarrow \int_0^1 \sqrt{x} dx. \quad 3) \text{ 정적분 계산: } \int_0^1 x^{1/2} dx = \left[\frac{2}{3} x^{3/2} \right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

풀이 전략: 핵심 아이디어는 $\frac{1}{n} \sum f(k/n)$ 꼴 극한을 구간 $[0, 1]$ 상의 리만합으로 인식하고 정적분으로 전환하는 구분구적법이다. $f(x) = \sqrt{x}$ 를 정확히 포착하는 것이 관건.

이 공식이 일반화되면 임의의 연속함수에 대해 '평균값은 적분값 나누기 구간 길이'라는 적분 평균값 정리로 이어진다.

Q46 이차곡선 심화

타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$)의 단축의 한 끝점에서 두 초점을 바라본 각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$ 일 때, 이 타원의 이심률 e 를 구하시오.



이심률 $e = c/a$

- ① ① $\frac{1}{4}$
- ② ② $\frac{1}{3}$
- ③ ③ $\frac{1}{2}$
- ④ ④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

정답: ③

1) 단축 끝점에서 초점까지 거리: $B(0, b)$ 에서 $F_1(-c, 0)$ 까지의 거리는 $\sqrt{b^2 + c^2}$ 인데 $a^2 = b^2 + c^2$ 이므로 $|BF_1| = |BF_2| = a$. 삼각형 BF_1F_2 는 두 변이 a 인 이등변삼각형. 2) 꼭지각 조건: $\angle F_1BF_2 = \frac{\pi}{3}$ 이고 양 변이 같으므로 밑각도 각각 $\frac{\pi}{3}$. 즉 정삼각형. 3) 이심률:

$$|F_1F_2| = 2c = a \text{ (정삼각형이므로)에서 } e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}.$$

풀이 전략: 핵심 아이디어는 단축 끝점에서 두 초점까지의 거리가 정확히 a 라는 관계($b^2 + c^2 = a^2$)를 사용해 이등변삼각형을 세우는 것이다. 꼭지각이 $\pi/3$ 이면 자동으로 정삼각형이 되어 $2c = a$ 가 나온다.

이심률 1/2는 행성 궤도로는 매우 큰 값이다. 명왕성의 이심률이 약 0.25 수준이므로 이 타원은 그보다도 더 길쭉하다.

Q47 수열 극한·급수 심화

수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n + 3^n$ 을 만족시킬 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{3^n}$ 의 값은?

- ① ① $\frac{1}{2}$
- ② ② $\frac{2}{3}$
- ③ ③ $\frac{3}{4}$
- ④ ④ 1

정답: ④

1단계: 점화식 $a_{n+1} = 2a_n + 3^n$ 의 양변을 3^{n+1} 로 나누면 $\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a_n}{3^n} + \frac{1}{3}$.

2단계: $b_n = \frac{a_n}{3^n}$ 로 치환하면 $b_{n+1} = \frac{2}{3}b_n + \frac{1}{3}, b_1 = \frac{1}{3}$. 고정점 방정식 $b = \frac{2}{3}b + \frac{1}{3}$ 의 해는 $b = 1$.

3단계: $b_{n+1} - 1 = \frac{2}{3}(b_n - 1)$ 이므로 $b_n - 1 = -\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$. $n \rightarrow \infty$ 일 때 $(2/3)^n \rightarrow 0$ 이므로 $b_n \rightarrow 1$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 비동차 점화식 $a_{n+1} = 2a_n + 3^n$ 을 3^{n+1} 로 나누어 새 수열 b_n 에 대한 단순 선형 점화식으로 바꾸고, 그 고정점 값이 곧 b_n 의 극한이 된다는 것이다.

이런 형태의 비동차 선형 점화식은 항상 '고정점 + 등비수열'로 분해되며, 극한은 고정점 값이 된다.

Q48 초월함수 미분 심화

매개변수로 나타낸 곡선 $x = 2\cos t + \cos 2t, y = 2\sin t - \sin 2t$ ($0 < t < \pi$) 위의 점 중 $t = \frac{\pi}{3}$ 에 대응하는 점에서의 접선의 기울기는?

- ① ① $-\sqrt{3}$
- ② ② $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
- ③ ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$
- ④ ④ $\sqrt{3}$

정답: ②

1단계: 매개변수 미분 공식 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$ 를 적용. $\frac{dx}{dt} = -2\sin t - 2\sin 2t, \frac{dy}{dt} = 2\cos t - 2\cos 2t$.

2단계: $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos t - \cos 2t}{-\sin t - \sin 2t}$.

3단계: $t = \frac{\pi}{3}$ 에서 $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}, \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 분자 = $\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$, 분모 = $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$.

따라서 기울기 = $-\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 $\frac{dy}{dx}$ 를 직접 구할 수 없을 때 매개변수 미분공식으로 우회하고, 특수각의 삼각함수 값을 정확히 대입해 유리화까지 마무리하는 것이다.

Q49 초월함수 적분 심화

$x > 0$ 에서 정의된 연속함수 $f(x)$ 가 $\int_1^x f(t) dt = xf(x) - x^3 + 2x - 1$ 을 만족시킬 때, $f(e)$ 의 값은?

- ① ① $\frac{3e^2 - 9}{2}$
- ② ② $\frac{3e^2 - 7}{2}$
- ③ ③ $\frac{3e^2 - 5}{2}$
- ④ ④ $\frac{3e^2 - 3}{2}$

정답: ②

1단계: $x = 1$ 대입하면 좌변 = 0, 우변 = $f(1) - 1 + 2 - 1 = f(1)$. 따라서 $f(1) = 0$.

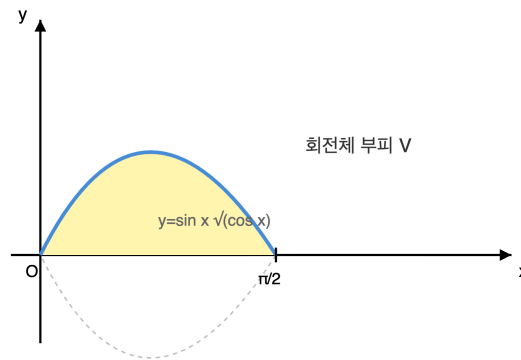
2단계: 양변을 x 에 대해 미분하면 $f(x) = f(x) + xf'(x) - 3x^2 + 2$. 정리하면 $xf'(x) = 3x^2 - 2$, 즉 $f'(x) = 3x - \frac{2}{x}$.

3단계: 적분하여 $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2\ln x + C$. 조건 $f(1) = 0$ 에서 $\frac{3}{2} + C = 0$ 이므로 $C = -\frac{3}{2}$. 따라서 $f(e) = \frac{3}{2}e^2 - 2\ln e - \frac{3}{2} = \frac{3e^2 - 7}{2}$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 정적분으로 정의된 함수의 양변을 미분해 f 에 관한 미분방정식을 얻고, 원래 식에 특수한 값을 넣어 나오는 관계식 $f(1) = 0$ 으로 적분상수를 결정하는 것이다.

Q50 미적분 통합 활용

곡선 $y = \sin x \cdot \sqrt{\cos x}$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$)와 x 축으로 둘러싸인 도형을 x 축 둘레로 회전시켜 얻은 회전체의 부피는?



- ① ① $\frac{\pi}{6}$
- ② ② $\frac{\pi}{3}$
- ③ ③ $\frac{4\pi}{3}$
- ④ ④ $\frac{\pi}{2}$

정답: ③

1단계: 회전체 부피 공식 $V = \pi \int_0^{\pi/2} y^2 dx = \pi \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x dx$.

2단계: $u = \sin x$ 로 놓으면 $du = \cos x dx$ 이고 $x = 0 \Rightarrow u = 0$, $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 1$.

3단계: $V = \pi \int_0^1 u^2 du = \pi \cdot \frac{1}{3} = \frac{\pi}{3}$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 $y^2 = \sin^2 x \cos x$ 에서 $\cos x dx$ 구조를 즉시 알아보고 $u = \sin x$ 치환으로 다항식 적분으로 변환하는 것이다.

Q51 순열·조합·이항 심화

$\sum_{k=0}^8 \binom{8}{k}^2$ 의 값은?

- ① ① 6435
- ② ② 10010
- ③ ③ 12870
- ④ ④ 15015

정답: ③

1단계: 항등식 $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ 이므로 $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k}$.

2단계: 방데르몽드 항등식 $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}$ 을 이용하면 합 = $\binom{16}{8}$.

3단계: $\binom{16}{8} = \frac{16!}{8!8!} = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{8!} = 12870$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 합을 하나씩 계산하지 않고, $(1+x)^n(1+x)^n = (1+x)^{2n}$ 의 계수 비교로 얻어지는 방데르몽드 항등식을 바로 적용하는 것이다.

$\binom{2n}{n}$ 은 중앙 이항계수(central binomial coefficient)라 불리며, 카탈란 수 등 다양한 조합 공식의 기본 블록이다.

Q52 확률 심화

한 개의 주사위를 연속하여 던지되, 직전에 나온 눈과 같은 눈이 나오면 그 시점에서 멈춘다. 정확히 네 번째 던지기에서 멈출 확률은?

- ① ① $\frac{5}{216}$
- ② ② $\frac{25}{216}$
- ③ ③ $\frac{125}{1296}$
- ④ ④ $\frac{25}{1296}$

정답: ②

1단계: 첫 번째 던지기는 비교 대상이 없어 항상 진행된다. 네 번째에서 멈추려면 2번째, 3번째는 '직전과 다른 눈'이고 4번째는 '직전과 같은 눈'이어야 한다.

2단계: 2번째가 1번째와 다를 확률 = $\frac{5}{6}$. 3번째가 2번째와 다를 확률 = $\frac{5}{6}$ (이전 조건과 독립적으로 5/6).

3단계: 4번째가 3번째와 같을 확률 = $\frac{1}{6}$. 따라서 총 확률 = $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{25}{216}$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 '지금까지 나온 모든 눈'이 아니라 '직전 눈과만 비교'하면 되므로, 각 단계가 독립적으로 5/6 또는 1/6로 결정된다는 점이다.

Q53 통계 추론

모표준편차가 20인 모집단에서 크기가 n 인 표본을 임의추출하여 얻은 표본평균으로 모평균 m 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간을 구했더니 그 길이가 7.84였다. 같은 표본을 이용해 얻는 모평균 m 에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간의 길이는? (단, $P(|Z| \leq 1.96) = 0.95$, $P(|Z| \leq 2.58) = 0.99$ 이다.)

- ① ① 8.32
- ② ② 9.68
- ③ ③ 10.32
- ④ ④ 11.52

정답: ③

1단계: 신뢰도 95% 신뢰구간의 길이 $= 2 \cdot 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2 \cdot 1.96 \cdot \frac{20}{\sqrt{n}} = \frac{78.4}{\sqrt{n}}$.

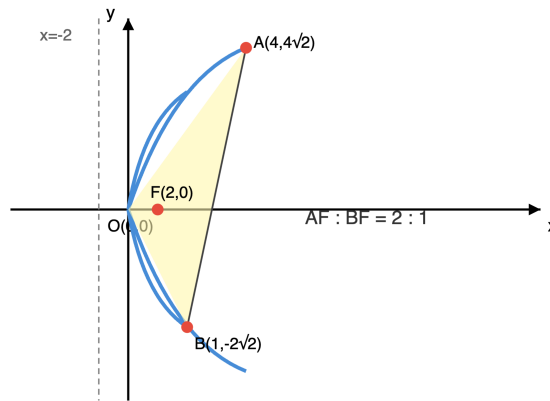
2단계: $\frac{78.4}{\sqrt{n}} = 7.84$ 에서 $\sqrt{n} = 10$, 즉 $n = 100$.

3단계: 신뢰도 99%의 신뢰구간 길이 $= 2 \cdot 2.58 \cdot \frac{20}{\sqrt{100}} = 2 \cdot 2.58 \cdot 2 = 10.32$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 신뢰구간 길이 공식 $2z\sigma/\sqrt{n}$ 에서 σ, n 은 동일 표본에서 고정이므로, 주어진 95% 길이를 n 을 역산한 뒤 신뢰계수만 1.96 \rightarrow 2.58로 바꿔 재계산하는 것이다.

Q54 이차곡선 심화

포물선 $y^2 = 8x$ 의 초점을 F라 하자. F를 지나는 직선이 이 포물선과 서로 다른 두 점 A, B에서 만나고 $AF:BF = 2:1$ 일 때, 삼각형 OAB의 넓이는? (단, O는 원점이다.)



- ① ① $4\sqrt{2}$
- ② ② $5\sqrt{2}$
- ③ ③ $6\sqrt{2}$
- ④ ④ $8\sqrt{2}$

정답: ③

1단계: 포물선 $y^2 = 4ax$ ($a = 2$)의 초점현 성질 $\frac{1}{|AF|} + \frac{1}{|BF|} = \frac{1}{a} = \frac{1}{2}$. $|AF| = 2k$, $|BF| = k$ 로 놓으면 $\frac{1}{2k} + \frac{1}{k} = \frac{3}{2k} = \frac{1}{2}$ 이므로 $k = 3$. 즉 $|AF| = 6$, $|BF| = 3$.

2단계: 준선이 $x = -2$ 이므로 $x_A = |AF| - 2 = 4$, $x_B = |BF| - 2 = 1$. $y_A^2 = 8 \cdot 4 = 32$ 에서 $y_A = 4\sqrt{2}$ 로 놓으면 초점현의 두 점의 y 좌표 부호가 반대이므로 $y_B = -2\sqrt{2}$.

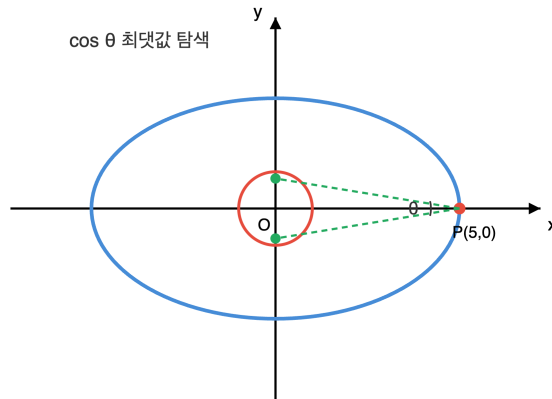
3단계: $\triangle OAB = \frac{1}{2}|x_A y_B - x_B y_A| = \frac{1}{2}|4 \cdot (-2\sqrt{2}) - 1 \cdot 4\sqrt{2}| = \frac{1}{2} \cdot 12\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 초점현 공식 $\frac{1}{|AF|} + \frac{1}{|BF|} = \frac{1}{a}$ 거리를 먼저 확정하고, 준선 성질로 좌표를 복원한 뒤 원점 기준 삼각형 넓이를 외적 행렬식으로 계산하는 것이다.

포물선 초점현 위의 두 점 A, B는 항상 $x_A x_B = a^2$, $y_A y_B = -4a^2$ 를 만족한다.

Q55 이차곡선 심화

타원 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 위의 점 P에서 원 $x^2 + y^2 = 1$ 에 그은 두 접선이 이루는 각을 θ ($0 < \theta < \pi$)라 할 때, $\cos\theta$ 의 최댓값은?



- ① ① $\frac{21}{25}$
- ② ② $\frac{22}{25}$
- ③ ③ $\frac{23}{25}$
- ④ ④ $\frac{24}{25}$

정답: ③

1단계: 외부점 P에서 반지름 $r = 1$, 중심 O인 원에 그은 두 접선의 사잇각 θ 에 대하여, 반각 $\alpha = \theta/2$ 는 직각삼각형에서 $\sin\alpha = \frac{r}{|OP|} = \frac{1}{|OP|}$.

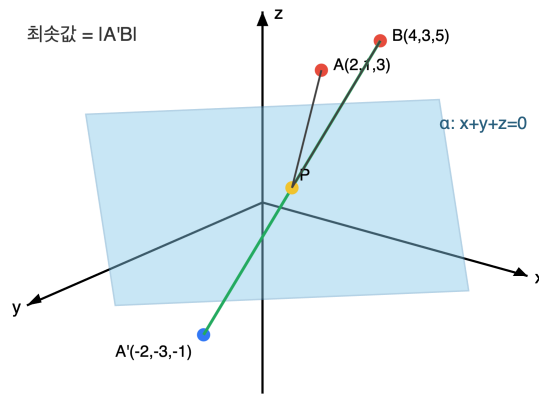
2단계: $\cos\theta = 1 - 2\sin^2\alpha = 1 - \frac{2}{|OP|^2}$. $\cos\theta$ 를 최대화하려면 $|OP|^2 = x^2 + y^2$ 을 최대화해야 한다.

3단계: P는 타원 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 위의 점. $x = 5\cos t$, $y = 3\sin t$ 로 두면 $x^2 + y^2 = 25\cos^2 t + 9\sin^2 t = 9 + 16\cos^2 t$. 최댓값 25 (장축 끝점 $(\pm 5, 0)$ 에서). 따라서 $\cos\theta$ 의 최댓값 $= 1 - \frac{2}{25} = \frac{23}{25}$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 두 접선의 사잇각이 외부점과 원의 중심 사이 거리 $|OP|$ 에만 의존한다는 점, 그리고 타원 위 점이 원점에 서 가장 멀 때는 장축 끝점이라는 두 기하 사실을 결합하는 것이다.

Q56 벡터·공간도형 심화

공간에 두 점 $A(2, 1, 3)$, $B(4, 3, 5)$ 와 평면 $\alpha: x + y + z = 0$ 이 있다. 평면 α 위를 움직이는 점 P 에 대하여 $\overline{AP} + \overline{PB}$ 의 최솟값은?



- ① ① $4\sqrt{3}$
- ② ② $6\sqrt{3}$
- ③ ③ $6\sqrt{2}$
- ④ ④ $8\sqrt{2}$

정답: ②

1단계: A, B의 평면 α 로부터의 (부호 있는) 거리는 $\frac{2+1+3}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$, $\frac{4+3+5}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$. 두 점 모두 평면의 같은 쪽에 있다.

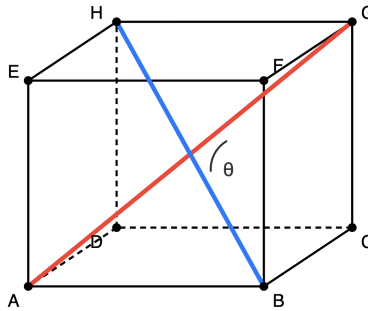
2단계: 같은 쪽 경우, 점 P를 평면 위에서 움직일 때 $\overline{AP} + \overline{PB}$ 의 최솟값은 A를 평면에 대해 대칭이동한 점 A'에 대해 $\overline{A'B}$ 와 같다. 평면의 법선 방향 단위벡터가 $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ 이므로 $A' = A - 2 \cdot \frac{6}{3}(1, 1, 1) = (2, 1, 3) - (4, 4, 4) = (-2, -3, -1)$.

3단계: $\overline{A'B} = \sqrt{(4 - (-2))^2 + (3 - (-3))^2 + (5 - (-1))^2} = \sqrt{36 + 36 + 36} = 6\sqrt{3}$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 '평면 위의 한 점을 거쳐 두 점을 잇는 경로의 최솟값' 문제는 평면에 대한 반사점을 잡아 '두 점을 직선으로 잇는 거리'로 환원된다는 반사 원리(reflection principle)이다.

Q57 벡터·공간도형 심화

한 변의 길이가 1인 정육면체 ABCD-EFGH에서 두 대각선 \overline{AG} 와 \overline{BH} 가 이루는 각을 θ ($0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$)라 할 때, $\cos\theta$ 의 값은? (단, 꼭짓점은 A(0,0,0), B(1,0,0), C(1,1,0), D(0,1,0), E(0,0,1), F(1,0,1), G(1,1,1), H(0,1,1)이다.)



두 체대각선 사잇각

- ① ① $\frac{1}{6}$
- ② ② $\frac{1}{4}$
- ③ ③ $\frac{1}{3}$
- ④ ④ $\frac{1}{2}$

정답: ③

1단계: 대각선 벡터로 표현. $\vec{AG} = G - A = (1, 1, 1)$, $\vec{BH} = H - B = (0 - 1, 1 - 0, 1 - 0) = (-1, 1, 1)$.

2단계: 내적 $\vec{AG} \cdot \vec{BH} = (1)(-1) + (1)(1) + (1)(1) = 1$.

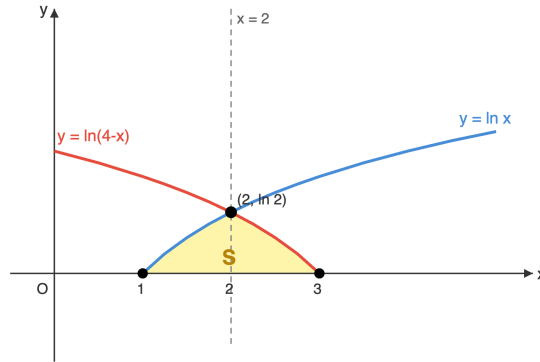
3단계: 크기 $|\vec{AG}| = |\vec{BH}| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$. 두 대각선 사이 각($0 < \theta \leq \pi/2$)의 코사인은 $\cos\theta = \frac{|\vec{AG} \cdot \vec{BH}|}{|\vec{AG}||\vec{BH}|} = \frac{1}{3}$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 꼭짓점에 좌표를 부여해 대각선을 벡터 (1, 1, 1), (-1, 1, 1)로 놓고 내적의 절댓값을 크기곱으로 나누는 표준 공식을 적용하는 것이다.

💡 정육면체의 네 체대각선은 모두 서로 같은 각을 이루며, 그 사잇각의 코사인은 항상 $\frac{1}{3}$ 이다.

Q58 초월함수 적분 심화

두 곡선 $y = \ln x$, $y = \ln(4 - x)$ 와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는?



- ① ① $4\ln 2 - 1$
- ② ② $4\ln 2 - 2$
- ③ ③ $2\ln 2 - 1$
- ④ ④ $2\ln 2$

정답: ②

1단계: $\ln x = \ln(4 - x)$ 에서 $x = 2$ 이고 이때 $y = \ln 2$, $y = \ln x$ 는 $(1, 0)$ 에서, $y = \ln(4 - x)$ 는 $(3, 0)$ 에서 x 축을 만난다. 영역은 $1 \leq x \leq 2$ 에서 $y = \ln x$ 와 x 축 사이, $2 \leq x \leq 3$ 에서 $y = \ln(4 - x)$ 와 x 축 사이로 나뉜다.

2단계: $S = \int_1^2 \ln x dx + \int_2^3 \ln(4 - x) dx$. 부분적분으로 $\int \ln x dx = x \ln x - x + C$.

$$\int_1^2 \ln x dx = (2\ln 2 - 2) - (0 - 1) = 2\ln 2 - 1.$$

3단계: $u = 4 - x$ 로 치환하면 $\int_2^3 \ln(4 - x) dx = \int_1^2 \ln u du = 2\ln 2 - 1$ (대칭성). 따라서 $S = 2(2\ln 2 - 1) = 4\ln 2 - 2$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 두 곡선이 직선 $x = 2$ 에 대해 대칭이라는 구조를 파악해 한쪽 적분만 계산하고 2배하는 것, 그리고 $\int \ln x dx$ 에 부분적분을 바로 적용하는 것이다.

Q59 초월함수 미분 심화

곡선 $y = \ln x$ ($x > 0$) 위의 점 중에서 직선 $y = x + 2$ 까지의 거리가 최소가 되는 점의 x 좌표를 구하시오.

- ① ① $\frac{1}{e}$
- ② ② $\frac{1}{2}$
- ③ ③ 1
- ④ ④ e

정답: ③

1단계: 직선 $y = x + 2$ 는 곡선 $y = \ln x$ 와 만나지 않는다. ($x > 0$ 에서 $x - \ln x \geq 1$ 이므로 $x - \ln x + 2 \geq 3 > 0$, 즉 항상 $\ln x < x + 2$.) 곡선이 직선의 한쪽에만 있으므로 거리가 최소가 되는 점은 그 점에서의 접선이 직선과 평행한 점이다.

2단계: $y = \ln x$ 에서 $y' = \frac{1}{x}$. 직선 $y = x + 2$ 의 기울기는 1이므로 $\frac{1}{x} = 1$, 즉 $x = 1$.

3단계: 검증. 점 $(1, 0)$ 에서 직선 $x - y + 2 = 0$ 까지의 거리는 $\frac{|1 - 0 + 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ 이다. 거리함수 $d(x) = \frac{x - \ln x + 2}{\sqrt{2}}$

는 $d'(x) = \frac{1 - 1/x}{\sqrt{2}}$ 가 $x = 1$ 전후로 음에서 양으로 바뀌므로 $x = 1$ 에서 최소이다.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 '점과 직선의 거리'를 직접 계산해 최소화하는 대신, '접선의 기울기 = 직선의 기울기'라는 기하적 조건으로 바꾸는 것이다. 일반적으로 볼록한 곡선 밖에 놓인 직선과의 최단거리는 접선이 그 직선과 평행한 점에서 실현된다.

볼록 곡선과 직선 사이 최단거리 문제는 서포트 벡터 머신(SVM)의 마진 최대화 아이디어와 동일한 기하학적 구조를 가진다.

Q60 초월함수 적분 심화

함수 $f(x) = \int_0^x (x-t)\sin t \, dt$ 에 대하여 $f''\left(\frac{\pi}{3}\right)$ 의 값을 구하시오.

- ① ① $\frac{1}{2}$
- ② ② $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- ③ ③ 1
- ④ ④ $\sqrt{3}$

정답: ②

1단계: 적분변수 t 에 대해 x 를 상수로 보고 분리하면 $f(x) = x \int_0^x \sin t \, dt - \int_0^x t \sin t \, dt$.
2단계: x 에 대해 미분한다. 곱의 미분과

미적분의 기본정리를 함께 쓰면 $f'(x) = \int_0^x \sin t \, dt + x \sin x - x \sin x = \int_0^x \sin t \, dt = 1 - \cos x$.
3단계: 한 번 더 미분하면

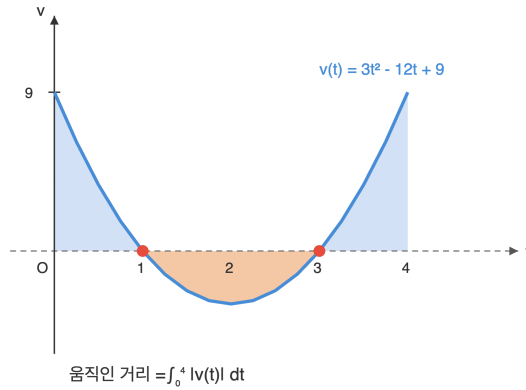
$$f''(x) = \sin x \text{이므로 } f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

풀이 전략: 핵심 아이디어는 $(x-t)$ 처럼 x 와 t 가 섞인 피적분함수를 보면, x 를 적분 밖으로 빼낼 수 있는 항과 빼낼 수 없는 항으로 '분리'하는 것이다. 분리 후에는 $\frac{d}{dx} \int_0^x g(t) \, dt = g(x)$ 를 기계적으로 적용하면, 겉보기엔 어려워 보이는 $x \sin x$ 항이 깔끔하게 소거된다.

💡 $\int_0^x (x-t)g(t) \, dt$ 형태의 적분은 공학에서 '선형 시스템의 충격응답을 두 번 적분한 것'(컨볼루션)과 같은 의미를 가진다.

Q61 미적분 통합 활용

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t 에서의 속도가 $v(t) = 3t^2 - 12t + 9$ ($t \geq 0$)이다. 시각 $t = 0$ 부터 $t = 4$ 까지 점 P가 움직인 거리를 구하시오.



- ① ① 4
- ② ② 8
- ③ ③ 12
- ④ ④ 16

정답: ③

1단계: $v(t) = 3(t-1)(t-3)$ 이므로 $[0, 1]$ 에서 $v > 0$, $[1, 3]$ 에서 $v < 0$, $[3, 4]$ 에서 $v > 0$. 움직인 거리는 $\int_0^4 |v(t)| dt$.

2단계: 부정적분 $F(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ 라 하면 $F(0) = 0$, $F(1) = 4$, $F(3) = 0$, $F(4) = 4$.
3단계: 구간별로 부호를 맞춰 합산: $(F(1) - F(0)) - (F(3) - F(1)) + (F(4) - F(3)) = 4 - (0 - 4) + (4 - 0) = 4 + 4 + 4 = 12$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 '움직인 거리'와 '위치의 변화량'의 차이이다. $\int v dt$ 는 부호 상쇄가 일어나 위치 변화만 주지만, $\int |v| dt$ 는 반드시 부호가 바뀌는 지점에서 구간을 쪼개야 한다. $v(t)$ 의 근을 먼저 찾고 구간별 부호를 명확히 한 뒤 적분하는 순서를 몸에 붙여야 한다.

💡 속도의 부호가 바뀌는 순간은 물리적으로 '방향 전환'의 순간이며, 이 시각에서의 운동량 변화는 순간적으로 0이 되어 충격을 받은 것과 같은 효과를 준다.

Q62 순열·조합·이항 심화

집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 X 로의 함수 $f: X \rightarrow X$ 중 모든 $x \in X$ 에 대하여 $f(f(x)) = f(x)$ 를 만족하는 함수의 개수를 구하시오.

- ① ① 120
- ② ② 180
- ③ ③ 196
- ④ ④ 243

정답: ③

1단계: 조건 $f(f(x)) = f(x)$ 는, 임의의 x 에 대하여 $y = f(x)$ 라 놓으면 $f(y) = y$ 임을 뜻한다. 즉 f 의 치역 S 에 속하는 모든 원소는 f 의 고정점이다.
2단계: $|S| = k$ 일 때, 치역을 고르는 방법 $\binom{5}{k}$ 가지, 치역 밖의 $5 - k$ 개 원소 각각을 S 의 어느 원소로 보낼지 k^{5-k} 가지. $k = 5$ 면 $k^0 = 1$ 로 약속.
3단계: 총 개수

$$\sum_{k=1}^5 \binom{5}{k} k^{5-k} = 5 \cdot 1 + 10 \cdot 8 + 10 \cdot 9 + 5 \cdot 4 + 1 \cdot 1 = 5 + 80 + 90 + 20 + 1 = 196.$$

풀이 전략: 핵심 아이디어는 ' $f(f(x)) = f(x)$ '라는 추상적 조건을 '치역의 모든 원소가 고정점이다'라는 구조적 사실로 번역하는 것이다. 이렇게 번역하면 문제는 자연스럽게 (고정점 집합 고르기) \times (나머지 원소를 고정점에 사상) 구조로 쪼개지며, 치역 크기 k 에 대한 합으로 깔끔히 계산된다. 이런 함수를 멱등(idempotent) 함수라 한다.

💡 멱등함수 개수는 OEIS 수열 A000248에 등재되어 있으며 $n = 1, 2, 3, \dots$ 일 때 $1, 3, 10, 41, 196, \dots$ 으로 커진다.

Q63 확률 심화

빨간공 3개와 파란공 4개가 들어 있는 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낸 후 다시 넣는 시행을 독립적으로 2번 반복할 때, 두 번 모두 꺼낸 빨간공의 개수가 홀수일 확률을 구하시오.

- ① ① $\frac{324}{1225}$
- ② ② $\frac{361}{1225}$
- ③ ③ $\frac{400}{1225}$
- ④ ④ $\frac{441}{1225}$

정답: ②

1단계: 한 번 시행에서 꺼낸 빨간공이 1개일 확률: $\frac{\binom{3}{1}\binom{4}{2}}{\binom{7}{3}} = \frac{3 \cdot 6}{35} = \frac{18}{35}$. 2단계: 한 번 시행에서 꺼낸 빨간공이 3개일 확률:

$\frac{\binom{3}{3}}{\binom{7}{3}} = \frac{1}{35}$. 따라서 한 번에 홀수개일 확률 $p = \frac{18+1}{35} = \frac{19}{35}$. 3단계: 두 번의 시행이 독립이므로 두 번 모두 홀수개일 확률

$$p^2 = \left(\frac{19}{35}\right)^2 = \frac{361}{1225}$$

풀이 전략: 핵심 아이디어는 '홀수개'를 1개와 3개의 '배반사건 합'으로 쪼개는 것과, '두 번 시행이 독립'이라는 구조를 꼭 짚는 것이다. 함정은 19/35를 계산하지 않고 '빨간공이 나올 확률 $\frac{3}{7}$ '만 생각해 $\left(\frac{3}{7}\right)^2$ 같은 답을 고르는 것이다. 시행 결과가 '개수'인지 '적어도 한 개 인지'를 구분하는 것이 핵심.

이런 유형의 확률은 초기하분포에서 특정 패리티(홀/짝)만 골라내는 문제로, 주사위/카드 게임에서 '홀짝 베팅'의 수학적 모델이 된다.

Q64 통계 추론

어느 고등학교 3학년 학생들의 수학 점수 X 는 정규분포 $N(70, 10^2)$ 을 따른다. 이 학교 3학년 학생 중 임의로 한 명을 택할 때, 그 학생의 점수가 80점 이상 90점 이하일 확률을 구하시오. (단, $P(0 \leq Z \leq 1) = 0.3413$, $P(0 \leq Z \leq 2) = 0.4772$)

- ① ① 0.0228
- ② ② 0.1359
- ③ ③ 0.3413
- ④ ④ 0.4772

정답: ②

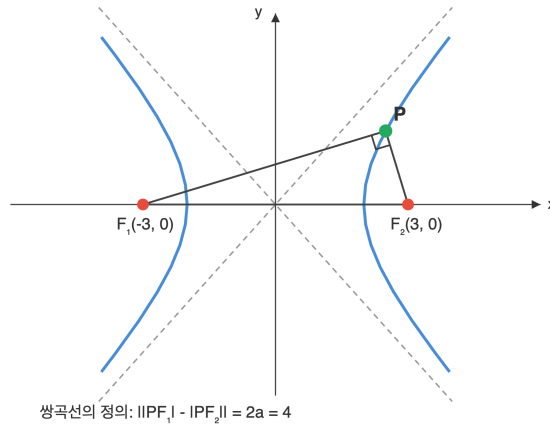
1단계: $X \sim N(70, 10^2)$ 를 표준정규로 바꾸기 위해 $Z = \frac{X-70}{10}$ 로 표준화한다. 2단계: $X = 80 \Rightarrow Z = 1$, $X = 90 \Rightarrow Z = 2$. 따라서 $P(80 \leq X \leq 90) = P(1 \leq Z \leq 2)$. 3단계: $P(1 \leq Z \leq 2) = P(0 \leq Z \leq 2) - P(0 \leq Z \leq 1) = 0.4772 - 0.3413 = 0.1359$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 정규분포 확률을 곧장 계산하지 말고, 0을 기준으로 한 '반쪽' 확률의 차로 분해하는 것이다. 학생 '한 명'을 뽑는 것이므로 표본평균 분포가 아닌 원래 분포 X 를 그대로 쓰는 점에 주의. 만약 '표본평균'이라면 σ/\sqrt{n} 이 새 표준편차가 된다는 점에서 구분한다.

정규분포 $[m + \sigma, m + 2\sigma]$ 구간의 면적 약 13.59%는 IQ·키·시험점수 같은 지표에서 '상위 그룹이지만 최상위는 아닌 영역'에 해당한다.

Q65 이차곡선 심화

쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ 위의 점 P 에 대하여 두 초점을 F_1, F_2 라 하자. $\angle F_1PF_2 = 90^\circ$ 일 때, $\overline{PF_1} \cdot \overline{PF_2}$ 의 값을 구하시오.



- ① ① 8
- ② ② 10
- ③ ③ 12
- ④ ④ 15

정답: ②

1단계: 쌍곡선의 정의에 의해 $||PF_1| - |PF_2|| = 2a = 4$. 2단계: $c^2 = a^2 + b^2 = 4 + 5 = 9$ 이므로 $c = 3, |F_1F_2| = 6$. $\angle F_1PF_2 = 90^\circ$ 이므로 피타고라스 정리에서 $|PF_1|^2 + |PF_2|^2 = 36$. 3단계: $(|PF_1| - |PF_2|)^2 = |PF_1|^2 - 2|PF_1||PF_2| + |PF_2|^2$. 즉 $16 = 36 - 2 \cdot |PF_1| \cdot |PF_2|$ 이므로 $|PF_1| \cdot |PF_2| = 10$.

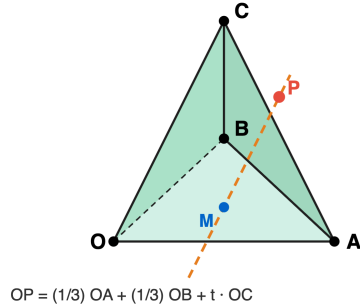
풀이 전략: 핵심 아이디어는 (정의식) $|PF_1| - |PF_2| = \pm 2a$ 를 제공하고, (피타고라스) $|PF_1|^2 + |PF_2|^2 = (2c)^2$ 를 함께 쓰는 것이다. 두 식을 합치면 곱 $|PF_1| \cdot |PF_2|$ 만 구할 수 있다. 타원이면 정의식이 $|PF_1| + |PF_2| = 2a$ 로 바뀌고, 부호 때문에 결과가 b^2 이 되므로 혼동하지 말 것.

쌍곡선의 초점삼각형에서 $\angle F_1PF_2 = \theta$ 일 때, 일반적으로 $\overline{PF_1} \cdot \overline{PF_2} = \frac{2b^2}{1 - \cos\theta}$ 이 성립하며, $\theta = 90^\circ$ 의 경우 $2b^2$ 가 된다.

Q66 벡터·공간도형 심화

모든 모서리의 길이가 $\sqrt{2}$ 인 정사면체 OABC에서 점 P가 $\vec{OP} = \frac{1}{3}\vec{OA} + \frac{1}{3}\vec{OB} + t\vec{OC}$ (단, t 는 실수)를 만족한다. $|\vec{OP}|^2$ 의 최솟값을 구하시오.

OA · OB = 1



- ① ① $\frac{2}{9}$
- ② ② $\frac{1}{3}$
- ③ ③ $\frac{4}{9}$
- ④ ④ $\frac{2}{3}$

정답: ③

1단계: 정사면체에서 $|\vec{OA}| = |\vec{OB}| = |\vec{OC}| = \sqrt{2}$ 이고 두 모서리 사이의 각이 60° 이므로

$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \vec{OB} \cdot \vec{OC} = \vec{OC} \cdot \vec{OA} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \cos 60^\circ = 1$. 2단계: 내적으로 전개한다.

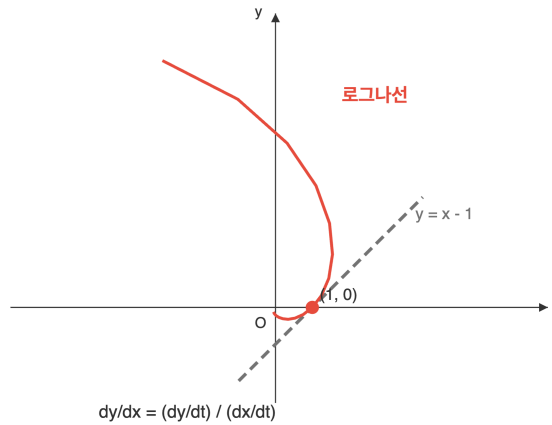
$|\vec{OP}|^2 = \frac{1}{9} \cdot 2 + \frac{1}{9} \cdot 2 + t^2 \cdot 2 + \frac{2}{9} \cdot 1 + \frac{2t}{3} \cdot 1 + \frac{2t}{3} \cdot 1 = 2t^2 + \frac{4}{3}t + \frac{2}{3}$. 3단계: t 에 대한 이차함수로 보면 $t = -\frac{1}{3}$ 에서 최솟값 $2 \cdot \frac{1}{9} - \frac{4}{9} + \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 '기저'로 주어진 세 벡터를 직교좌표계처럼 다루지 말고, 내적값 세 쌍을 미리 구해두는 것이다. 정사면체의 모서리 사이 각이 60° 라는 기하적 사실에서 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ$ 를 즉시 얻고, $|\vec{OP}|^2$ 를 t 에 대한 이차함수로 쓰면 꼭짓점에서 최솟값이 자동으로 나온다.

이 문제의 기하적 의미는 '평면 OAB 상의 고정점과 직선 OC 방향 이동의 조합이 만드는 직선 위에서 원점에 가장 가까운 점'을 찾는 것으로, 공간에서의 수선의 발과 같다.

Q67 미적분 통합 활용

매개변수로 나타낸 곡선 $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$ 위의 점에서 $t = 0$ 일 때 그 접선의 방정식을 구하시오.



- ① ① $y = x + 1$
- ② ② $y = x - 1$
- ③ ③ $y = -x + 1$
- ④ ④ $y = 2x - 2$

정답: ②

1단계: $t = 0$ 을 대입하면 점 $(x, y) = (e^0 \cos 0, e^0 \sin 0) = (1, 0)$. 2단계: 매개변수 미분으로 접선의 기울기를 구한다.

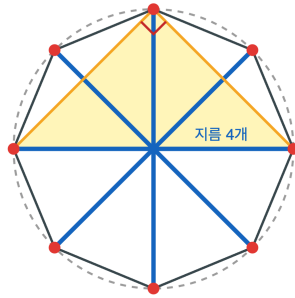
$\frac{dx}{dt} = e^t(\cos t - \sin t)$, $\frac{dy}{dt} = e^t(\sin t + \cos t)$. $t = 0$ 을 대입하면 $\frac{dx}{dt} = 1$, $\frac{dy}{dt} = 1$ 이므로 $\frac{dy}{dx} = 1$. 3단계: 점 $(1, 0)$ 을 지나고 기울기 1인 직선은 $y - 0 = 1 \cdot (x - 1)$, 즉 $y = x - 1$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 'y를 x로 정리하지 말고' 매개변수 미분 공식 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$ 를 바로 쓰는 것이다. 함정은 e^t 를 간과해서 계수를 놓치는 것과, 점 $(1, 0)$ 대신 $(0, 0)$ 으로 혼동하는 것. 각 성분을 e^t 로 묶어서 보면 $t = 0$ 에서 $e^t = 1$ 이므로 계산이 깔끔해진다.

이 곡선은 '로그나선'(베르누이 나선)으로, 접선과 원점까지의 반지름 벡터 사이의 각이 모든 점에서 일정한 성질이 있어 해바라기·소라 껍질 같은 자연의 나선 구조를 설명한다.

Q68 확률 심화

정팔각형의 8개 꼭짓점 중에서 임의로 서로 다른 3개의 꼭짓점을 택하여 삼각형을 만들 때, 그 삼각형이 직각삼각형이 아닐 확률을 구하시오.



원 위의 세 점이 이루는 삼각형이 직각 \Leftrightarrow 한 변이 지름

- ① ① $\frac{3}{7}$
- ② ② $\frac{4}{7}$
- ③ ③ $\frac{5}{7}$
- ④ ④ $\frac{6}{7}$

정답: ②

1단계: 꼭짓점 8개 중 3개를 뽑는 모든 경우의 수는 $\binom{8}{3} = 56$. **2단계:** 정팔각형의 꼭짓점은 모두 외접원 위에 있으므로, 세 꼭짓점이 이루는 삼각형이 직각삼각형일 필요충분조건은 세 꼭짓점 중 두 점이 외접원의 '지름'을 이루는 것이다. 정팔각형에는 마주보는 꼭짓점 쌍으로 이루어진 지름이 4개 있다. **3단계:** 각 지름마다 나머지 6개의 꼭짓점 중 하나를 직각의 꼭짓점으로 삼으면 되므로 직각삼각형의 수는 $4 \times 6 = 24$. 따라서 직각삼각형이 아닐 확률 $= \frac{56 - 24}{56} = \frac{32}{56} = \frac{4}{7}$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 '원주각이 직각이면 원호가 반원'이라는 탈레스 정리를 조합적으로 활용하는 것이다. 꼭짓점이 공통된 원 위에 있다는 점을 이용하면, 직각삼각형 세는 문제가 '지름 고르기 \times 제3의 점 고르기' 문제로 바뀐다. 정 $2n$ 각형에서는 지름이 n 개, 따라서 직각삼각형은 $n \times (2n - 2)$ 개.

탈레스의 정리(지름을 변으로 하는 삼각형은 반드시 직각)는 기원전 6세기에 증명된 가장 오래된 수학 정리 중 하나로, 이 문제의 핵심 논리다.

Q69 통계 추론

확률변수 X 가 이항분포 $B\left(100, \frac{1}{2}\right)$ 을 따를 때, $P(45 \leq X \leq 60)$ 의 값을 정규분포 근사를 이용하여 구하시오. (단, $P(0 \leq Z \leq 1) = 0.3413, P(0 \leq Z \leq 2) = 0.4772$)

- ① ① 0.6826
- ② ② 0.8185
- ③ ③ 0.9544
- ④ ④ 0.9759

정답: ②

1단계: $X \sim B(100, \frac{1}{2})$ 이므로 평균 $m = np = 100 \cdot \frac{1}{2} = 50$, 분산 $\sigma^2 = np(1 - p) = 25$, 표준편차 $\sigma = 5$.
 2단계: $n = 100$ 이 충분히 크므로 X 는 근사적으로 정규분포 $N(50, 5^2)$ 을 따른다. 표준화하면 $Z = \frac{X - 50}{5}$. $X = 45 \Rightarrow Z = -1, X = 60 \Rightarrow Z = 2$.
 3단계: $P(45 \leq X \leq 60) \approx P(-1 \leq Z \leq 2) = P(0 \leq Z \leq 1) + P(0 \leq Z \leq 2) = 0.3413 + 0.4772 = 0.8185$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 이항분포의 평균과 분산 공식 $np, np(1 - p)$ 를 정확히 계산한 뒤, ' n 이 충분히 크면 정규분포로 근사'라는 드 무아브르-라플라스 근사를 적용하는 것이다. 표준화한 Z 의 구간이 0을 사이에 두는 경우(여기선 -1 과 2 사이)에는, 0을 중심으로 좌우 반쪽 면적을 각각 더해야 한다는 점이 자주 틀리는 포인트.

이항분포의 정규근사(드 무아브르-라플라스 극한정리)는 1733년 드 무아브르가 동전 던지기의 극한을 연구하며 발견한, 중심극한정리의 최초 사례다.

Q70 벡터·공간도형 심화

공간의 세 점 $A(1, 0, 2), B(3, 2, 0), C(0, 1, 4)$ 에 대하여 벡터 \vec{AB} 의 벡터 \vec{AC} 방향으로의 정사영 벡터의 크기는?

- ① ① $\frac{\sqrt{6}}{3}$
- ② ② $\frac{\sqrt{6}}{2}$
- ③ ③ $\frac{2\sqrt{6}}{3}$
- ④ ④ $\sqrt{6}$

정답: ③

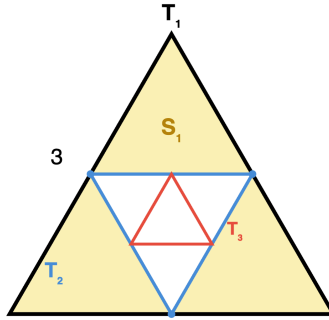
1단계: 두 벡터 성분 계산. $\vec{AB} = (2, 2, -2), \vec{AC} = (-1, 1, 2)$. 2단계: 내적과 크기. $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -2 + 2 - 4 = -4, |\vec{AC}| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$. 3단계: 정사영 벡터 공식 적용. 정사영 벡터는 $\frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AC}|^2} \vec{AC}$ 이고 그 크기는 $\frac{|\vec{AB} \cdot \vec{AC}|}{|\vec{AC}|} = \frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 정사영 벡터의 크기가 '내적의 절댓값을 방향벡터 크기로 나눈 값'이라는 점. 부호는 방향(반대 방향 여부)만 결정하므로 크기에서는 절댓값.

정사영은 3D 그래픽스의 조명 계산(람버트 반사)에서 빛의 방향과 면법선의 내적으로 밝기를 결정하는 데 사용된다.

Q71 수열 극한·급수 심화

한 변의 길이가 3인 정삼각형 T_1 의 각 변의 중점을 이어 만든 정삼각형을 T_2 , T_2 의 각 변의 중점을 이어 만든 정삼각형을 T_3, \dots 과 같이 정의한다. T_n 의 내부에서 T_{n+1} 을 뺀 영역의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 의 값은?



답음비 1 : 1/2, 넓이비 1 : 1/4

- ① ① $\frac{3\sqrt{3}}{4}$
- ② ② $\frac{9\sqrt{3}}{4}$
- ③ ③ $\frac{27\sqrt{3}}{4}$
- ④ ④ $3\sqrt{3}$

정답: ②

1단계: 답음비. 중점을 연결한 정삼각형의 한 변은 원래의 $\frac{1}{2}$ 이므로 T_n 의 한 변은 $3 \cdot (1/2)^{n-1}$. 2단계: 넓이 관계. T_n 의 넓이

$$A_n = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(3 \cdot \frac{1}{2^{n-1}} \right)^2 = \frac{9\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{4^{n-1}}$$

이고, $S_n = A_n - A_{n+1} = A_n \cdot \frac{3}{4} = \frac{27\sqrt{3}}{16} \cdot \frac{1}{4^{n-1}}$. 3단계: 무한등비급수. 첫째항 $\frac{27\sqrt{3}}{16}$, 공비 $\frac{1}{4}$ 이므로 합 $= \frac{27\sqrt{3}/16}{1-1/4} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 ' A_n 이 등비이면 $A_n - A_{n+1}$ 도 같은 공비의 등비수열'이라는 점. 텔레스코핑으로 보면 $\sum S_n = A_1$ 이 되어 계산도 간단.

이 과정을 무한히 반복하면 중앙부가 점점 사라지며 시어핀스키 삼각형의 '보충집합' 구조가 나타난다.

Q72 초월함수 미분 심화

함수 $f(x) = (x^2 - 3)e^x$ 의 극댓값을 M , 극솟값을 m 이라 할 때, $M - m$ 의 값은?

- ① ① $2e + 6e^{-3}$
- ② ② $2e - 6e^{-3}$
- ③ ③ $6e^{-3} - 2e$
- ④ ④ $6e^3 + 2e^{-1}$

정답: ①

1단계: 도함수 계산. $f'(x) = 2xe^x + (x^2 - 3)e^x = e^x(x^2 + 2x - 3) = e^x(x+3)(x-1)$. 2단계: 부호와 극값 판정. $e^x > 0$ 이므로 부호는 $(x+3)(x-1)$ 로 결정. $x < -3$ 에서 +, $-3 < x < 1$ 에서 -, $x > 1$ 에서 +. 따라서 $x = -3$ 에서 극대, $x = 1$ 에서 극소. 3단계: 극값 대입. $M = f(-3) = (9 - 3)e^{-3} = 6e^{-3}$, $m = f(1) = (1 - 3)e = -2e$. $M - m = 6e^{-3} - (-2e) = 2e + 6e^{-3}$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 곱함수 $p(x)e^x$ 의 도함수가 $(p' + p)e^x$ 이므로, 공통 인수 e^x 로 묶은 뒤 다항식 인수분해로 극값 위치를 결정하는 것.


$x \rightarrow -\infty$ 에서 $f(x) \rightarrow 0^-$ 로 수렴하고 $x \rightarrow \infty$ 에서 발산하므로 그래프는 '왼쪽 작은 언덕 - 골짜기 - 우상향 발산'의 전형적 개형.


Q73 순열·조합·이항 심화


방정식 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$ 을 만족하는 음이 아닌 정수해 중 $x_1 \geq 2$ 이고 $x_2 \leq 3$ 인 해의 개수는?

- ① ① 120
- ② ② 125
- ③ ③ 130
- ④ ④ 135

 **정답: ③**

 1단계: 하한 조건 치환. $x_1 \geq 2$ 이므로 $y_1 = x_1 - 2 \geq 0$ 로 두면 방정식은 $y_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$. 비음정수해의 개수는 ${}_4H_8 = \binom{11}{3} = 165$. 2단계: 여사건 설정. $x_2 \leq 3$ 의 여사건은 $x_2 \geq 4$. $z_2 = x_2 - 4$ 로 치환하면 $y_1 + z_2 + x_3 + x_4 = 4$, 해의 개수 $\binom{7}{3} = 35$. 3단계: 전체에서 여사건을 제외. 구하는 수 = $165 - 35 = 130$.

 풀이 전략: 핵심 아이디어는 '하한 조건은 치환으로 직접 반영, 상한 조건은 여사건(하한)으로 돌리기'라는 이중 전략. 상한을 직접 나누면 경우 분할이 번거로워진다.


 ${}_nH_r = \binom{n+r-1}{r}$ 는 '막대와 칸막이(stars and bars)' 해석으로 얻어지며, 정수해·중복선택 문제의 만능 도구이다.

Q74 통계 추론


정규분포 $N(50, 20)$ 을 따르는 모집단에서 독립적으로 크기 4인 표본과 크기 5인 표본을 뽑아 표본평균을 각각 X, Y 라 하자. $P(X - Y \geq 3)$ 의 값은? (단, $P(0 \leq Z \leq 1) = 0.3413$)


- ① ① 0.0013
- ② ② 0.0228
- ③ ③ 0.1587
- ④ ④ 0.3085

 **정답: ③**

 1단계: 각 표본평균의 분포. 모분산 $\sigma^2 = 20$ 이므로 $X \sim N(50, 20/4) = N(50, 5)$, $Y \sim N(50, 20/5) = N(50, 4)$. 2단계: 차의 분포. 두 표본이 독립이므로 $E(X - Y) = 0$, $V(X - Y) = 5 + 4 = 9$. 따라서 $X - Y \sim N(0, 9)$, 표준편차 3. 3단계: 표준화.

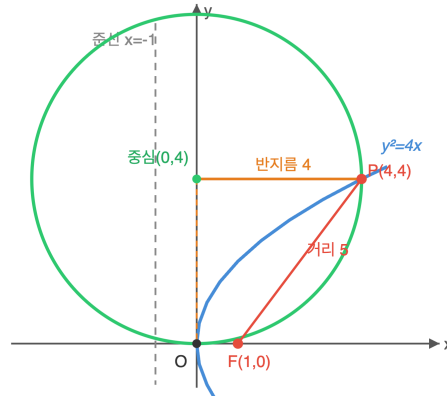
$$P(X - Y \geq 3) = P\left(Z \geq \frac{3-0}{3}\right) = P(Z \geq 1) = 0.5 - 0.3413 = 0.1587.$$

 풀이 전략: 핵심 아이디어는 '독립인 두 정규확률변수의 차도 정규분포이며 분산은 더해진다'는 성질. 표본의 크기 차이로 X 보다 Y 의 분산이 작다는 점도 직관적으로 확인.

 두 표본평균의 차를 표준화해 비교하는 구조는 '두 모평균 차의 검정'(A/B 테스트)의 출발점.

Q75 이차곡선 심화

포물선 $y^2 = 4x$ 위의 점 P (단, P 의 y 좌표는 양수)에 대하여 초점 F 와의 거리가 5이다. 포물선의 꼭짓점 $O(0, 0)$ 과 점 P 를 지나고 x 축에 접하는 원의 반지름은?



- ① ① 2
- ② ② 3
- ③ ③ 4
- ④ ④ 5

정답: ③

1단계: P 의 좌표 결정. 포물선 $y^2 = 4x$ 는 초점 $F(1, 0)$, 준선 $x = -1$ 을 가지며 '포물선 위 점에서 초점까지 거리 = 준선까지 거리'. $P = (a, b)$ 라 하면 $a + 1 = 5$ 이므로 $a = 4$, $b^2 = 16$, $b > 0$ 에서 $P = (4, 4)$. 2단계: 원의 형태. 원이 x 축에 접하고 $O(0, 0)$ 을 지나면 O 가 접점이 되므로 중심은 y 축 위의 $(0, r)$, 반지름 r . 3단계: P 조건. $(4 - 0)^2 + (4 - r)^2 = r^2$ 에서 $16 + 16 - 8r = 0$, $r = 4$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 '초점거리 = 준선거리'로 점을 특정한 뒤, ' x 축에 O 에서 접하는 원 \Rightarrow 중심이 y 축 위, 반지름이 y 좌표'로 원을 1변수 문제로 환원하는 것.

직선에 접하는 원의 중심은 접점에서 그 수선 위에 있다는 사실은 원의 접선정리의 가장 기초 버전이다.

Q76 확률 심화

어떤 질병의 유병률은 전체 인구의 10%이다. 이 질병의 진단 검사에서 환자가 양성 판정을 받을 확률은 0.9, 환자가 아닌 사람이 양성 판정을 받을 확률은 0.2이다. 이 검사에서 양성 판정을 받은 사람이 실제로 이 질병에 걸려 있을 확률은?

- ① ① $\frac{1}{5}$
- ② ② $\frac{1}{4}$
- ③ ③ $\frac{1}{3}$
- ④ ④ $\frac{1}{2}$

정답: ③

1단계: 사건 정의와 확률. A : 질병 걸림, B : 양성 판정. $P(A) = 0.1$, $P(A^c) = 0.9$, $P(B|A) = 0.9$, $P(B|A^c) = 0.2$. 2단계: 전확률 공식으로 $P(B)$. $P(B) = P(A)P(B|A) + P(A^c)P(B|A^c) = 0.1 \cdot 0.9 + 0.9 \cdot 0.2 = 0.09 + 0.18 = 0.27$. 3단계: 베이즈 정리.

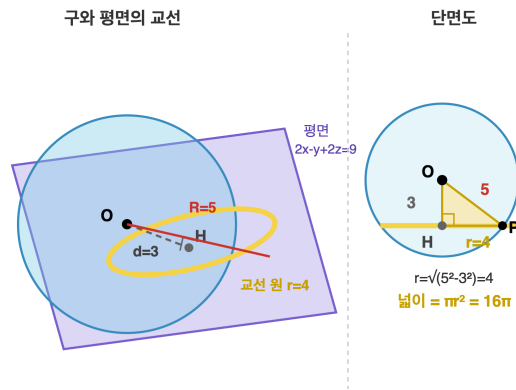
$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)} = \frac{0.09}{0.27} = \frac{1}{3}$$

풀이 전략: 핵심 아이디어는 '검사 정확도가 높아도 유병률이 낮으면 양성자의 실제 환자 비율이 작을 수 있다'는 베이즈 역설. 분모에 거짓양성 기여가 크게 들어감.

이 계산 구조는 '기저율 오류(base rate fallacy)'의 교과서적 예로, 의학 진단·스팸 필터·보안 경보 등에 공통으로 적용된다.

Q77 벡터·공간도형 심화

공간에서 구 $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ 와 평면 $2x - y + 2z = 9$ 가 만나서 이루는 원의 넓이는?



- ① ① 9π
- ② ② 12π
- ③ ③ 16π
- ④ ④ 25π

정답: ③

1단계: 구의 중심과 반지름. 중심 $O(0, 0, 0)$, 반지름 $R = 5$. 2단계: 중심과 평면 사이 거리. 평면을 $2x - y + 2z - 9 = 0$ 으로 정리하면 $d = \frac{|2 \cdot 0 - 0 + 2 \cdot 0 - 9|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{9}{3} = 3$. 3단계: 교원의 반지름. 구의 중심에서 교원 위의 점까지는 구 반지름 R , 교원의 평면까지 수선

길이는 d 이므로 피타고라스 정리에 의해 교원의 반지름 $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$. 넓이 $= \pi r^2 = 16\pi$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 '구를 평면으로 자른 교선은 항상 원이며, 그 반지름은 $r = \sqrt{R^2 - d^2}$ '. 3-4-5 직각삼각형 구조가 숨어 있다.

지구를 위도면(평면)으로 자른 교선이 위도원이며, 적도에서 멀어질수록 d 가 커져 교선 반지름 r 이 줄어드는 것이 이 공식의 실제 응용이다.

Q78 미적분 통합 활용

수열 $\{a_n\}$ 이 $a_n = \int_0^1 x^n e^x dx$ 로 정의될 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot a_n$ 의 값은?

- ① ① 1
- ② ② $e - 1$
- ③ ③ e
- ④ ④ $2e$

정답: ③

1단계: 부분적분으로 점화식. $u = e^x, dv = x^n dx$ 로 두면 $du = e^x dx, v = \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

$a_n = \left[\frac{x^{n+1} e^x}{n+1} \right]_0^1 - \frac{1}{n+1} \int_0^1 x^{n+1} e^x dx = \frac{e}{n+1} - \frac{a_{n+1}}{n+1}$. 정리하면 $(n+1)a_n = e - a_{n+1}$. 2단계: $a_n \rightarrow 0$ 확인.

$0 \leq a_n \leq e \int_0^1 x^n dx = \frac{e}{n+1} \rightarrow 0$ 이므로 $a_n \rightarrow 0$, 동일하게 $a_{n+1} \rightarrow 0$. 3단계: 극한 계산. $(n+1)a_n = e - a_{n+1} \rightarrow e$ 이고, $n \cdot a_n = (n+1)a_n - a_n \rightarrow e - 0 = e$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 a_n 자체는 0으로 수렴하지만 $n \cdot a_n$ 은 유한 극한을 갖는 부정형 $0 \cdot \infty$ 구조. 부분적분이 만든 점화식이 곧 극한값을 주는 열쇠.

이 유형의 적분-수열 점화식은 감마함수의 점근전개와 라플라스 근사법의 기본 예제이다.

Q79 초월함수 적분 심화

$\int_0^1 x^2 e^{-x} dx$ 의 값은?

- ① ① $2 - \frac{5}{e}$
- ② ② $2 - \frac{2}{e}$
- ③ ③ $1 - \frac{5}{e}$
- ④ ④ $\frac{5}{e} - 2$

정답: ①

1단계: 1차 부분적분. $u = x^2, dv = e^{-x}dx, du = 2x dx, v = -e^{-x}$. $\int x^2 e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} + \int 2x e^{-x} dx$. 2단계: 2차 부분적분. $u = 2x, dv = e^{-x}dx, du = 2 dx, v = -e^{-x}$. $\int 2x e^{-x} dx = -2x e^{-x} + \int 2e^{-x} dx = -2x e^{-x} - 2e^{-x} + C$. 종합하면 원시함수 $F(x) = -(x^2 + 2x + 2)e^{-x}$. 3단계: 정적분 계산. $F(1) - F(0) = -(1 + 2 + 2)e^{-1} - (-(0 + 0 + 2) \cdot 1) = -\frac{5}{e} + 2 = 2 - \frac{5}{e}$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 다항식 \times 지수함수 형태의 적분에서 다항식 차수가 0이 될 때까지 부분적분을 반복하는 것. 원시함수를 일반 공식 $(P(x))e^{-x} \Rightarrow -P(x)e^{-x} + P'(x)$ 패턴으로 빠르게 체크 가능.

적분 구간을 $[0, \infty)$ 로 확장하면 $\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!$ (감마함수 $\Gamma(n+1)$). 이 문제는 그 '불완전 감마함수' $\Gamma(3, 1)$ 계산에 해당한다.

Q80 수열 극한·급수 심화

$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ 의 값은?

- ① ① $\frac{1}{6}$
- ② ② $\frac{1}{4}$
- ③ ③ $\frac{1}{3}$
- ④ ④ $\frac{1}{2}$

정답: ②

1단계: 부분분수 분해. 항등식 $\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+2) - n}{n(n+1)(n+2)} = \frac{2}{n(n+1)(n+2)}$ 이므로 $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right]$. 2단계: 부분합 텔레스코핑. $S_N = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{(N+1)(N+2)} \right]$. 3단계: 극한. $N \rightarrow \infty$ 일 때 $\frac{1}{(N+1)(N+2)} \rightarrow 0$ 이므로 합 $= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 '3개 연속 인수의 곱 역수'를 '2개 연속 인수의 곱 역수 차'로 쪼개 텔레스코핑을 유도하는 것. 계수 $\frac{1}{2}$ 는 항등식 확인으로 고정.

일반적으로 $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n(n+1) \dots (n+k)} = \frac{1}{k \cdot k!}$ 이라는 깔끔한 공식을 갖는다. 본 문제는 $k = 2$ 경우.

고3 수학 심화

총 40문제 · 문제와 정답·풀이 포함

Q81 확률 심화

1부터 10까지의 번호가 각각 하나씩 적힌 10개의 공이 들어있는 주머니에서 4개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공의 번호 중 최댓값이 7일 확률은?

- ① ① $\frac{1}{11}$
- ② ② $\frac{2}{21}$
- ③ ③ $\frac{1}{10}$
- ④ ④ $\frac{3}{20}$

정답: ②

1단계: 전체 경우의 수. 10개 중 4개를 택하는 방법 수 $\binom{10}{4} = 210$. 2단계: '최댓값이 7'의 경우의 수. 7을 반드시 포함하고 나머지 3개는 1 ~ 6에서 택해야 하므로 $\binom{6}{3} = 20$. 3단계: 확률. $P = \frac{20}{210} = \frac{2}{21}$. (검산: '최댓값 ≤ 7 ' 경우 수 $\binom{7}{4} = 35$, '최댓값 ≤ 6 ' 경우 수 $\binom{6}{4} = 15$ 이므로 차 $35 - 15 = 20$ 로 일치.)

풀이 전략: 핵심 아이디어는 '최댓값 = k'를 'k 포함 + 나머지는 k 미만'으로 분해하거나, 누적 분포차 $F(k) - F(k-1)$ 로 구하는 두 관점을 병행하는 것.

n개에서 r개를 뽑을 때 최댓값 분포는 순서통계량(order statistics)의 가장 기본 예로, $P(\max = k) = \frac{\binom{k-1}{r-1}}{\binom{n}{r}}$ 꼴의 일반식을 갖는다.

Q82 통계 추론

정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따르는 모집단에서 크기 n인 표본을 임의추출하여 얻은 모평균 m에 대한 신뢰도 95% 신뢰구간의 길이가 L이다. 동일한 모집단에서 표본의 크기를 4n으로 바꾸고 신뢰도를 99%로 높일 때, 새로 얻어지는 모평균 m에 대한 신뢰구간의 길이는? (단, $P(|Z| \leq 1.96) = 0.95$, $P(|Z| \leq 2.58) = 0.99$)

- ① ① $\frac{2.58}{1.96}L$
- ② ② $\frac{1}{2}L$
- ③ ③ $\frac{2.58}{3.92}L$
- ④ ④ $\frac{2.58}{7.84}L$

정답: ③

1단계: 신뢰구간 길이 공식은 길이 = $2z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 이므로 원래 $L = 2 \cdot 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 3.92 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 이다. 2단계: 새 조건에서 $z = 2.58$ 이고 표본의 크기가 4n이므로 새 길이 $L' = 2 \cdot 2.58 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{4n}} = 2.58 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. 3단계: 비율 $\frac{L'}{L} = \frac{2.58}{3.92}$. 함정: ④는 $\sqrt{4} = 2$ 대신 4로 나눈 오류, ①은 표본 크기 변화를 무시, ②는 신뢰도 변화를 무시한 오답.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 신뢰구간 길이의 두 인자(z와 $1/\sqrt{n}$)를 분리해서 각각의 변화율을 곱하는 것이다. 특히 n이 4배가 되면 \sqrt{n} 은 2배가 되어 길이는 1/2배가 됨에 유의.

표본 크기를 k²배 늘려야 오차범위가 1/k이 된다. 정확도를 10배 올리려면 표본을 100배로 늘려야 한다.

Q83 통계 추론

정규분포를 따르는 모집단에서 크기 n 인 표본 X_1, X_2, \dots, X_n 을 임의추출할 때 표본평균을 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 로 정의하면 $V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$

이 성립한다. 이 관계식이 성립하는 핵심 근거로 가장 적절한 것은?

- ① ① 표본평균은 항상 모평균과 같기 때문
- ② ② 표본의 모든 값이 독립이고 $V(aX) = aV(X)$ 이기 때문
- ③ ③ 서로 독립인 확률변수의 합의 분산은 분산의 합과 같고 $V(aX) = a^2V(X)$ 이기 때문
- ④ ④ 정규분포는 재생성(정규분포의 합도 정규분포) 성질을 갖기 때문

정답: ③

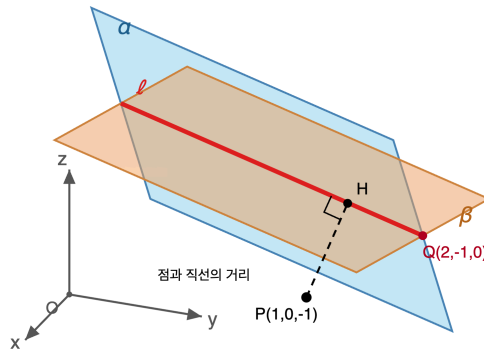
해설 1단계: $\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$ 으로 쓸 수 있고, $V(aX) = a^2V(X)$ 에 의해 $V(\bar{X}) = \frac{1}{n^2}V(X_1 + \dots + X_n)$. 2단계: 임의추출에 의해 X_i 들은 서로 독립이므로 합의 분산은 분산들의 합: $V(X_1 + \dots + X_n) = n\sigma^2$. 3단계: 따라서 $V(\bar{X}) = \frac{1}{n^2} \cdot n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$. ②는 $V(aX) = aV(X)$ 라는 잘못된 공식, ①은 $E(\bar{X})$ 와 혼동, ④는 결과식 도출과 무관.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 '독립성'이 합의 분산 공식을 가능하게 하고 '상수배의 분산'이 \bar{X} 의 $1/n$ 앞부분을 $1/n^2$ 으로 빼내는 원리를 동시에 요구한다는 것. 두 성질을 명확히 구별하여 기억하자.

💡 $V(\bar{X}) \rightarrow 0$ 이라는 사실이 큰 수의 법칙의 직관적 근거가 된다. 표본이 많아질수록 표본평균은 모평균 근처에 '뭉친다'.

Q84 벡터·공간도형 심화

공간에서 두 평면 $\alpha: x + y + z = 1, \beta: x - y + 2z = 3$ 의 교선을 ℓ 이라 할 때, 점 $P(1, 0, -1)$ 에서 직선 ℓ 까지의 거리의 제곱을 구하시오.



- ① ① $\frac{17}{7}$
- ② ② $\frac{18}{7}$
- ③ ③ $\frac{19}{7}$
- ④ ④ $\frac{20}{7}$

정답: ③

해설 1단계: 교선의 방향벡터는 두 평면 법선벡터의 외적으로 구한다. $\vec{n}_\alpha = (1, 1, 1), \vec{n}_\beta = (1, -1, 2)$. $\vec{d} = \vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta = (1 \cdot 2 - 1 \cdot (-1), 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2, 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1) = (3, -1, -2), |\vec{d}|^2 = 9 + 1 + 4 = 14$. 2단계: 교선 위의 한 점을 찾는다. $z = 0$ 을 대입하면 $x + y = 1, x - y = 3$ 에서 $Q(2, -1, 0)$. $\vec{PQ} = (1, -1, 1), |\vec{PQ}|^2 = 3$. 3단계:

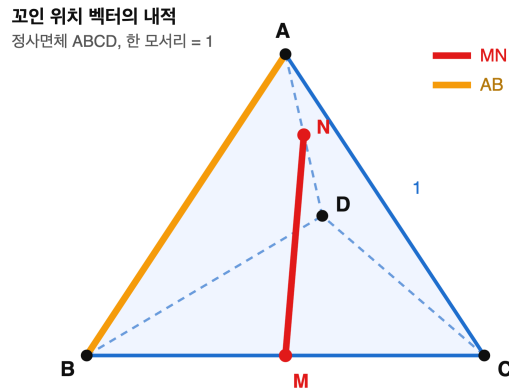
$$\vec{PQ} \cdot \vec{d} = 3 + 1 - 2 = 2. \text{ 점과 직선의 거리 제곱 공식 } d^2 = |\vec{PQ}|^2 - \frac{(\vec{PQ} \cdot \vec{d})^2}{|\vec{d}|^2} = 3 - \frac{2^2}{14} = 3 - \frac{4}{14} = 3 - \frac{2}{7} = \frac{21 - 2}{7} = \frac{19}{7}.$$

풀이 전략: 핵심 아이디어는 (i) 두 평면의 교선 방향벡터 = 법선벡터의 외적, (ii) 점과 직선 거리는 '벡터 \vec{PQ} 의 크기 제곱'에서 '방향벡터 방향 성분의 제곱'을 뺀다는 점(피타고라스 정리의 벡터 버전)이다.

💡 이 공식은 $|\vec{PQ} \times \hat{d}|$ 로도 쓸 수 있다. 외적 크기는 평행사변형 넓이와 동치이므로 거리 = 넓이 / 밑변이라는 도형적 해석이 자연스럽다.

Q85 벡터·공간도형 심화

한 모서리의 길이가 1인 정사면체 $ABCD$ 에서 모서리 BC 의 중점을 M , 모서리 AD 의 중점을 N 이라 하자. $\vec{MN} \cdot \vec{AB}$ 의 값을 구하시오.



- ① ① $-\frac{1}{2}$
- ② ② $-\frac{1}{4}$
- ③ ③ 0
- ④ ④ $\frac{1}{4}$

☞ 정답: ①

📖 1단계: A 를 원점으로 두고 $\vec{b} = \vec{AB}, \vec{c} = \vec{AC}, \vec{d} = \vec{AD}$ 라 하면 정사면체 조건에서 $|\vec{b}| = |\vec{c}| = |\vec{d}| = 1$ 이고 $\vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{d} = \vec{b} \cdot \vec{d} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ 이다. 2단계: $\vec{AM} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}), \vec{AN} = \frac{1}{2}\vec{d}$ 이므로 $\vec{MN} = \vec{AN} - \vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{d} - \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})$. 3단계: $\vec{MN} \cdot \vec{AB} = \frac{1}{2}\vec{d} \cdot \vec{b} - \frac{1}{2}(\vec{b} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{b}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$. 함정: ②는 $|\vec{b}|^2 = 1$ 을 누락, ③은 마주보는 모서리는 수직이라는 사실과 혼동.

🧠 풀이 전략: 핵심 아이디어는 임의의 벡터를 세 기저벡터 $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ 로 전개한 뒤, 정사면체의 '모든 모서리 등장, 모든 사잇각 60° ' 성질을 대입하는 것이다. 내적 3개가 모두 $\frac{1}{2}$ 로 통일되는 점이 계산의 핵심.

💡 정사면체의 마주보는 두 모서리는 서로 수직이며, 이 두 모서리 중점을 잇는 선분은 두 모서리의 공통수선이 된다.

Q86 수열 극한·급수 심화

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k^2}$ 의 값을 구하시오.

- ① ① $\ln 2$
- ② ② $\frac{1}{2} \ln 2$
- ③ ③ $\frac{\pi}{4}$
- ④ ④ $\frac{1}{2}$

정답: ②

1단계: 일반항을 변형한다. $\frac{k}{n^2 + k^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{k/n}{1 + (k/n)^2}$. 2단계: 따라서 합은 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{k}{n}\right)$, 단 $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$. 구분구적법에 의해

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx$ 로 바뀐다. 3단계: $u = 1 + x^2$ 로 치환하면 $du = 2x dx$, $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} [\ln(1+x^2)]_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2$. 함정: ①은 $\frac{1}{2}$ 계수 누락, ③은 $\frac{1}{1+x^2}$ 와 혼동, ④는 수열의 각 항 크기를 기계적으로 어려운 오답.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 n^2 을 분모에서 뽑아내 $\frac{1}{n} \cdot f(k/n)$ 꼴로 만들면 정적분으로 전환된다는 점이다. 분자 k 덕분에 결과가 \ln 꼴이 된다.

💡 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 + k^2} \rightarrow \frac{\pi}{4n}$ 의 형태와 혼동하기 쉬우나, 분자에 k 가 있는지 없는지에 따라 결과가 \ln 이 되기도, \arctan 이 되기도 한다.

Q87 수열 극한·급수 심화

등비수열 $\{a_n\}$ 의 일반항이 $a_n = \left(\frac{2x-1}{3}\right)^n$ 으로 주어질 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하기 위한 실수 x 의 값의 범위는?

- ① ① $-1 < x < 2$
- ② ② $-2 < x < 2$
- ③ ③ $0 < x < 2$
- ④ ④ $-1 \leq x \leq 2$

정답: ①

1단계: 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항 $r = \frac{2x-1}{3}$, 공비 r 인 등비수열이다. 2단계: 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ 이 수렴할 조건은 $|r| < 1$ (등호 불포함), 즉

$|\frac{2x-1}{3}| < 1$. 3단계: $-1 < \frac{2x-1}{3} < 1 \Leftrightarrow -3 < 2x-1 < 3 \Leftrightarrow -2 < 2x < 4 \Leftrightarrow -1 < x < 2$. 함정: ④는 경계값에서 $|r| = 1$ 이므로 발산($r = 1$) 또는 극한값이 0이 아니라 수렴 실패. 경계 포함 여부가 빈번한 실수 포인트.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 '등비급수의 수렴 조건은 $|r| < 1$ '이라는 필요충분조건이다. 경계값 $|r| = 1$ 에서는 $r = 1$ 이면 자명히 발산, $r = -1$ 이면 진동하며 발산한다는 점을 함께 정리하자.

💡 $|r| < 1$ 일 때 합은 $\frac{r}{1-r}$. 이 문제의 경우 수렴값은 x 의 함수로서 $\frac{2x-1}{4-2x}$ 이 된다.

Q88 초월함수 미분 심화

곡선 $y = e^{2x}$ 위의 점에서 그은 접선이 원점을 지난다. 이 접점의 x 좌표를 구하시오.

- ① ① $x = \frac{1}{4}$
- ② ② $x = \frac{1}{2}$
- ③ ③ $x = 1$
- ④ ④ $x = \ln 2$

정답: ②

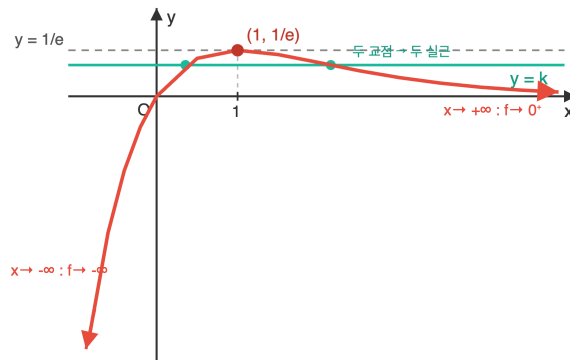
1단계: $y = e^{2x}$, $y' = 2e^{2x}$. 접점을 (t, e^{2t}) 라 하면 접선의 방정식은 $y - e^{2t} = 2e^{2t}(x - t)$. 2단계: 이 접선이 원점 $(0, 0)$ 을 지나므로 $0 - e^{2t} = 2e^{2t}(0 - t)$ 즉 $-e^{2t} = -2te^{2t}$. 3단계: $e^{2t} > 0$ 이므로 양변을 e^{2t} 로 나누면 $1 = 2t$. 따라서 $t = \frac{1}{2}$. 함정: ④는 e^{2t} 를 2로 착각한 오류, ③은 접선식에서 $-1 = -2t$ 로 계산한 부호 오류.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 '원점을 지난다'는 조건이 접점 t 에 대한 대수방정식을 만든다는 점이다. 지수항 e^{2t} 를 공통인수로 약분하면 선형방정식으로 간단해진다.

일반적으로 $y = e^{ax}$ 에서 원점을 지나는 접선의 접점 x 좌표는 항상 $\frac{1}{a}$ 이다. 이 문제는 $a = 2$ 인 경우의 표준 결과이다.

Q89 초월함수 미분 심화

방정식 $xe^{-x} = k$ 가 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 실수 k 의 값의 범위를 구하시오.



$0 < k < 1/e$ 일 때 서로 다른 두 실근

- ① ① $k < \frac{1}{e}$
- ② ② $0 < k < \frac{1}{e}$
- ③ ③ $-\frac{1}{e} < k < \frac{1}{e}$
- ④ ④ $0 \leq k \leq \frac{1}{e}$

정답: ②

1단계: $f(x) = xe^{-x}$ 에 대해 $f'(x) = e^{-x}(1 - x)$. $x < 1$ 에서 $f' > 0$, $x > 1$ 에서 $f' < 0$ 이므로 $x = 1$ 에서 극대이며 $f(1) = \frac{1}{e}$. 2단계: 극한 분석. $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $xe^{-x} \rightarrow -\infty$ (음수 \times 매우 큰 양수), $x \rightarrow +\infty$ 일 때 $xe^{-x} \rightarrow 0^+$. 또한 $f(0) = 0$ 이므로 $x < 0$ 에서 $f(x) < 0$, $x > 0$ 에서 $f(x) > 0$. 3단계: 직선 $y = k$ 와의 교점 개수. $k > \frac{1}{e}$ 이면 0개, $k = \frac{1}{e}$ 이면 1개(접함), $0 < k < \frac{1}{e}$ 이면 $x \in (0, 1)$ 과 $x \in (1, \infty)$ 에서 각 1개씩 총 2개, $k = 0$ 이면 1개($x = 0$), $k < 0$ 이면 $x < 0$ 에서 1개. 따라서 서로 다른 두 실근을 가질 조건은 $0 < k < \frac{1}{e}$. 함정: ①은 음수 k 에서의 근 개수 누락, ④는 경계에서 중근/단근 처리 오류.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 좌변의 함수 개형(극대, 극한, 부호)을 정밀히 파악해 수평선 $y = k$ 와 교점 개수를 k 의 값에 따라 체계적으로 분류하는 것이다. 극한값 0^+ 를 놓치면 함정 오답.

xe^{-x} 의 최댓값 $1/e$ 는 엔트로피 관련 분포에서 빈번히 등장한다. 예컨대 지수분포의 자연로그-확률 곱의 기댓값이 이 형태를 띤다.

Q90 초월함수 적분 심화

$\int_0^1 \ln(1+x^2) dx$ 의 값을 구하시오.

- ① $\ln 2 + \frac{\pi}{2}$
- ② $\ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$
- ③ $2\ln 2 - \frac{\pi}{4}$
- ④ $-2 + \frac{\pi}{2}$

정답: ②

1단계: 부분적분법 적용. $u = \ln(1+x^2)$, $dv = dx$ 로 놓으면 $du = \frac{2x}{1+x^2} dx$, $v = x$. 따라서

$$\int_0^1 \ln(1+x^2) dx = [x \ln(1+x^2)]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2}{1+x^2} dx = \ln 2 - \int_0^1 \frac{2x^2}{1+x^2} dx. \text{ 2단계: 분자 처리. } \frac{2x^2}{1+x^2} = 2 - \frac{2}{1+x^2}. \text{ 그러므로}$$

$$\int_0^1 \frac{2x^2}{1+x^2} dx = \int_0^1 2 dx - \int_0^1 \frac{2}{1+x^2} dx = 2 - 2[\arctan x]_0^1 = 2 - 2 \cdot \frac{\pi}{4} = 2 - \frac{\pi}{2}. \text{ 3단계: 최종값}$$

$$\int_0^1 \ln(1+x^2) dx = \ln 2 - \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}. \text{ 함정: ①은 } -\frac{2x^2}{1+x^2} \text{ 적분의 부호 오류, ④는 } [x \ln(1+x^2)]_0^1 \text{에서 } \ln 2 \text{ 누락.}$$

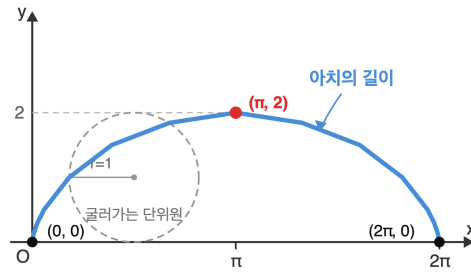
풀이 전략: 핵심 아이디어는 (i) $dv = dx$ 로 두는 부분적분으로 \ln 을 미분 쪽으로 보내고, (ii) 유리식 $\frac{2x^2}{1+x^2}$ 를 $2 - \frac{2}{1+x^2}$ 로 쪼개 \arctan 원시함수를 활용하는 이중 기법을 결합하는 것이다.

이 적분은 맥클로린 전개 $\ln(1+x^2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^{2k}$ 를 항별적분해도 같은 값을 얻는다.

Q91 미적분 통합 활용

매개변수방정식 $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$)로 표현된 사이클로이드의 한 아치(arch)의 길이를 구하시오.

사이클로이드 한 아치



- ① ① 4
- ② ② 6
- ③ ③ 8
- ④ ④ 2π

정답: ③

1단계: 매개변수 곡선 길이 공식은 $L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$. $\frac{dx}{dt} = 1 - \cos t$, $\frac{dy}{dt} = \sin t$. 2단계:

$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = (1 - \cos t)^2 + \sin^2 t = 1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t = 2 - 2\cos t = 4\sin^2 \frac{t}{2}$. 따라서 $\sqrt{\quad} = 2 \left| \sin \frac{t}{2} \right|$. 3단계:

$0 \leq t \leq 2\pi$ 에서 $\sin(t/2) \geq 0$ 이므로 $L = \int_0^{2\pi} 2\sin \frac{t}{2} dt = 2 \cdot \left[-2\cos \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} = 2(-2\cos \pi + 2\cos 0) = 2(2 + 2) = 8$. 함정: ④는 수평 이동거리(2π)와 곡선 길이를 혼동, ①은 절댓값 처리 누락으로 인한 반 구간 계산.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 피적분식 $\sqrt{2 - 2\cos t}$ 를 반각공식 $1 - \cos t = 2\sin^2(t/2)$ 로 닫힌 형태의 $|\sin(t/2)|$ 로 바꾸는 것이다. 이 트릭을 모르면 적분이 매우 복잡해진다.

💡 반지름 r 인 원이 구르며 그리는 사이클로이드 한 아치의 길이는 정확히 $8r$. 놀랍게도 원주 $2\pi r \approx 6.28r$ 보다 커서, '바퀴 한 바퀴'의 자취는 바퀴 둘레보다 길다.

Q92 확률 심화

주머니 A에는 흰 공 3개, 검은 공 2개가, 주머니 B에는 흰 공 2개, 검은 공 3개가 들어 있다. 먼저 주머니 A에서 임의로 공 한 개를 꺼내어 (색깔 확인 후) 주머니 B에 넣는다. 그 다음 주머니 B에서 임의로 공 한 개를 꺼냈더니 흰 공이었다. 이때 처음에 A에서 꺼낸 공이 흰 공이었을 확률은?

- ① ① $\frac{6}{13}$
- ② ② $\frac{1}{2}$
- ③ ③ $\frac{3}{5}$
- ④ ④ $\frac{9}{13}$

정답: ④

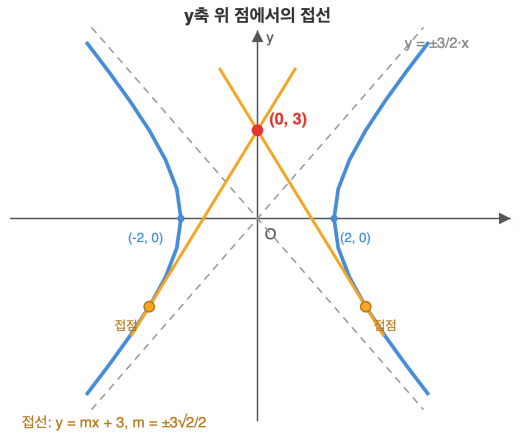
1단계: 사건을 정의한다. W_A : A에서 꺼낸 공이 흰 공, B_A : A에서 꺼낸 공이 검은 공, W : B에서 꺼낸 공이 흰 공. $P(W_A) = \frac{3}{5}$, $P(B_A) = \frac{2}{5}$. 2단계: 조건부확률 계산. W_A 후 B에는 흰 3, 검 3, 총 6개가 되어 $P(W | W_A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. B_A 후 B에는 흰 2, 검 4, 총 6개가 되어 $P(W | B_A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. 3단계: 전체확률 $P(W) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{10} + \frac{2}{15} = \frac{9+4}{30} = \frac{13}{30}$. 베이즈 공식 $P(W_A | W) = \frac{P(W_A)P(W | W_A)}{P(W)} = \frac{3/10}{13/30} = \frac{3}{10} \cdot \frac{30}{13} = \frac{9}{13}$. 함정: ③은 $P(W_A) = 3/5$ 을 그대로 답으로 제시, ①은 분자를 $P(B_A)P(W | B_A) = 2/15$ 로 헛갈린 오답.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 '관측된 사건(B에서 흰 공)에 조건을 걸어 원인의 확률을 갱신한다'는 베이즈 관점이다. 단계 도표 대신, 조건부확률을 두 단계로 분해하는 것이 계산 오류를 줄인다.

처음 추출 전 사전확률은 $3/5 = 0.6$ 이었으나 '흰 공 관측' 이후 사후확률이 $9/13 \approx 0.69$ 로 증가한다. 관측된 흰 공이 A의 흰 공에 대한 '간접 증거' 역할을 한 셈.

Q93 이차곡선 심화

쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ 에 접하고 점 (0, 3)을 지나는 접선의 기울기를 모두 구하시오.



- ① ① $\pm \frac{3}{2}$
- ② ② $\pm \sqrt{2}$
- ③ ③ $\pm \frac{\sqrt{6}}{2}$
- ④ ④ $\pm \frac{3\sqrt{2}}{2}$

정답: ④

1단계: 접선은 y축 위 점 (0, 3)을 지나므로 $y = mx + 3$ 꼴. 이를 쌍곡선 방정식 $9x^2 - 4y^2 = 36$ 에 대입하면

$9x^2 - 4(mx + 3)^2 = 36$, 전개 후 $(9 - 4m^2)x^2 - 24mx - 72 = 0$. 2단계: $9 - 4m^2 = 0$, 즉 $m = \pm \frac{3}{2}$ 일 경우 직선이 점근선과 평행하여 쌍곡선과 한 점에서만 만나지만 접선은 아니다(두 가지). 따라서 $9 - 4m^2 \neq 0$ 을 가정하고 이차방정식의 접선 조건(판별식 = 0)을 쓴다. $\frac{D}{4} = (12m)^2 - (9 - 4m^2)(-72) = 144m^2 + 72(9 - 4m^2) = 144m^2 + 648 - 288m^2 = -144m^2 + 648 = 0$. 3단계:

$144m^2 = 648 \Rightarrow m^2 = \frac{648}{144} = \frac{9}{2}$. 따라서 $m = \pm \frac{3}{\sqrt{2}} = \pm \frac{3\sqrt{2}}{2}$. 함정: ①은 '점근선 기울기 = 접선 기울기'로 오인한 대표 오답,

②, ③은 판별식 계수 실수에서 나오는 가짜 답.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 두 가지 경우 분리다. (i) 이차항 계수 $9 - 4m^2 \neq 0$: 접선 조건 = 판별식 0, (ii) $9 - 4m^2 = 0$: 점근선과 평행하여 직선은 쌍곡선과 유한 교점 1개를 갖지만 접선이 아님. 이 분기를 놓치면 점근선 기울기를 정답으로 잘못 고르기 쉽다.

외부의 점에서 쌍곡선에 접선은 일반적으로 2개, 점근선 위의 점에서 1개, 쌍곡선 내부(두 가지 의미)에선 0개 또는 2개로 결정된다. 판별식과 점근선 평행성의 이중 검토가 관건.

Q94 순열·조합·이항 심화

방정식 $x + y + z + w = 12$ 를 만족하는 양의 정수해 (x, y, z, w) 의 순서쌍의 개수를 구하시오.

- ① ① 120
- ② ② 165
- ③ ③ 220
- ④ ④ 286

정답: ② 165

1단계: 각 변수가 양의 정수이므로 $x' = x - 1, y' = y - 1, z' = z - 1, w' = w - 1$ 로 치환하면 $x', y', z', w' \geq 0$ 이고 $x' + y' + z' + w' = 8$ 이 된다.

2단계: 음이 아닌 정수해의 개수는 중복조합으로 $\binom{8+3}{3} = \binom{11}{3}$.

3단계: $\binom{11}{3} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{6} = 165$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 '양의 정수해'를 '음이 아닌 정수해'로 평행 이동시켜 표준적인 중복조합 공식을 적용할 수 있게 만드는 것이다. 변수가 n 개이고 합이 k 인 음이 아닌 정수해의 개수는 $\binom{k+n-1}{n-1}$ 이다.

이 기법은 '별과 막대(stars and bars)' 기법이라 불리며, 조합론의 기본 정리로 다양한 분배 문제에 응용된다.

Q95 통계 추론

정규분포 $N(m, 6^2)$ 을 따르는 모집단에서 크기 n 인 표본을 추출하여 모평균 m 을 신뢰도 95%로 추정할 때, 신뢰구간의 길이가 2.352 이하가 되도록 하는 자연수 n 의 최솟값을 구하시오. (단, Z 가 표준정규분포를 따를 때 $P(|Z| \leq 1.96) = 0.95$)

- ① ① 64
- ② ② 81
- ③ ③ 100
- ④ ④ 144

정답: ③ 100

1단계: 신뢰도 95%에서 모평균의 신뢰구간 길이는 $L = 2 \cdot 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2 \cdot 1.96 \cdot 6}{\sqrt{n}} = \frac{23.52}{\sqrt{n}}$.

2단계: $\frac{23.52}{\sqrt{n}} \leq 2.352$ 에서 $\sqrt{n} \geq 10$, 즉 $n \geq 100$.

3단계: 따라서 n 의 최솟값은 100이다.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 '신뢰구간 길이는 σ/\sqrt{n} 에 반비례한다'는 사실이다. 요구되는 정밀도를 등호 조건으로 두면 필요한 표본의 크기 하한이 나온다.

표본의 크기를 4배로 늘려야 신뢰구간의 길이가 절반으로 줄어드는 '제곱근 법칙'이 통계학의 근본 원리이다.

Q96 확률 심화

두 사건 A, B 에 대하여 $P(A) = \frac{2}{5}, P(B|A) = \frac{1}{4}, P(B|A^c) = \frac{1}{3}$ 일 때, 조건부확률 $P(A|B)$ 의 값을 구하시오.

- ① ① $\frac{1}{4}$
- ② ② $\frac{1}{3}$
- ③ ③ $\frac{2}{5}$
- ④ ④ $\frac{1}{2}$

🎯 정답: ② $\frac{1}{3}$

📖 1단계: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$.

2단계: $P(A^c \cap B) = P(A^c) \cdot P(B|A^c) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$. 전확률 공식으로 $P(B) = \frac{1}{10} + \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$.

3단계: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/10}{3/10} = \frac{1}{3}$.

🧠 풀이 전략: 핵심 아이디어는 '조건부확률의 곱셈정리로 교집합 확률을 구하고, 전확률 공식으로 B 의 전체 확률을 모은 뒤, 다시 조건부 확률의 정의로 되돌아간다'는 3단 논법이다. 베이즈 공식의 전형적인 구조이다.

💡 이 구조는 의료 검사의 정확도, 스팸 필터의 성능 평가 등에 그대로 적용된다.

Q97 수열 극한·급수 심화

무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ 의 값을 구하시오.

- ① ① 1
- ② ② $\frac{3}{2}$
- ③ ③ 2
- ④ ④ $\frac{5}{2}$

🎯 정답: ③ 2

📖 1단계: $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \dots$ 로 두고, 공비 $\frac{1}{2}$ 를 양변에 곱하면 $\frac{S}{2} = \frac{1}{4} + \frac{2}{8} + \frac{3}{16} + \dots$.

2단계: 두 식을 번끼리 빼면 $S - \frac{S}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ 로 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 무한등비급수가 된다.

3단계: $\frac{S}{2} = \frac{1/2}{1-1/2} = 1$ 이므로 $S = 2$.

🧠 풀이 전략: 핵심 아이디어는 '산술-기하 수열 형태의 급수는 공비를 곱해 한 항씩 어긋나게 한 뒤 빼면 순수한 등비급수로 환원된다'는 점이다. Abel의 변환 관점에서도 해석할 수 있다.

💡 $\sum nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$ ($|x| < 1$)의 일반형에서 $x = 1/2$ 를 대입한 특수한 경우이다.

Q98 초월함수 미분 심화

함수 $f(x) = x + \sin x$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $g'(\frac{\pi}{2} + 1)$ 의 값을 구하시오.

- ① ① $\frac{1}{2}$
- ② ② $\frac{2}{3}$
- ③ ③ 1
- ④ ④ $\frac{3}{2}$

정답: ③ 1

1단계: $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 1$ 이므로 $g(\frac{\pi}{2} + 1) = \frac{\pi}{2}$.

2단계: $f'(x) = 1 + \cos x$ 이고 $f'(\frac{\pi}{2}) = 1 + 0 = 1$. 모든 실수 x 에서 $f'(x) \geq 0$ 이고 등호는 고립점에서만 성립하므로 f 는 실수 전체에서 순증가이며 역함수 g 가 존재한다.

3단계: 역함수 미분 공식 $g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$ 에 의해 $g'(\frac{\pi}{2} + 1) = \frac{1}{f'(\pi/2)} = 1$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 '역함수의 도함수는 원함수의 도함수의 역수'라는 관계이다. 그러나 이 값을 쓰려면 먼저 g 가 어디에서 정의되는지를 $f(a) = b$ 로부터 역추적해야 한다.

💡 $y = x + \sin x$ 는 '케플러 방정식'과 비슷한 형태로, 행성의 평균근점 이상과 편심근점 이상의 관계식이 이 꼴을 따른다.

Q99 초월함수 적분 심화

정적분 $\int_0^{\pi/4} x \sec^2 x dx$ 의 값을 구하시오.

- ① ① $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$
- ② ② $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2$
- ③ ③ $\frac{\pi}{4} - \ln 2$
- ④ ④ $\frac{\pi}{2} - \ln 2$

정답: ① $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$

1단계: $u = x, dv = \sec^2 x dx$ 로 두면 $du = dx, v = \tan x$.

$\int_0^{\pi/4} x \sec^2 x dx = [x \tan x]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \tan x dx$.

2단계: $[x \tan x]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4} \cdot 1 - 0 = \frac{\pi}{4}$. 또 $\int_0^{\pi/4} \tan x dx = [-\ln|\cos x|]_0^{\pi/4} = -\ln \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \ln 2$.

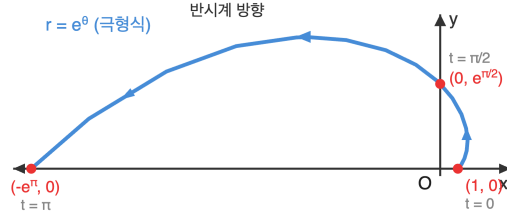
3단계: 따라서 구하는 값은 $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 $\sec^2 x$ 가 $\tan x$ 의 도함수라는 사실에서 출발한다. 다항식 x 와 곱해진 형태이므로 부분적분으로 다항 차수를 낮추고 남은 $\tan x$ 적분은 로그로 마무리한다.

💡 이 꼴의 적분은 회전 운동량이나 진동 역학에서 각속도와 각변위의 곱 형태로 자주 등장한다.

Q100 미적분 통합 활용

매개변수로 나타낸 곡선 $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}$ ($0 \leq t \leq \pi$)의 길이를 구하시오.



- ① ① $e^\pi - 1$
- ② ② $\sqrt{2} (e^\pi - 1)$
- ③ ③ $2(e^\pi - 1)$
- ④ ④ $\sqrt{2} e^\pi$

정답: ② $\sqrt{2} (e^\pi - 1)$

1단계: 각 성분을 미분하면 $\frac{dx}{dt} = e^t(\cos t - \sin t)$, $\frac{dy}{dt} = e^t(\sin t + \cos t)$.

2단계: $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = e^{2t}[(\cos t - \sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2] = e^{2t} \cdot 2 = 2e^{2t}$.

3단계: 곡선의 길이는 $L = \int_0^\pi \sqrt{2e^{2t}} dt = \sqrt{2} \int_0^\pi e^t dt = \sqrt{2} (e^\pi - 1)$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 '합의 제곱과 차의 제곱을 더하면 교차항이 사라지고 제곱항의 2배만 남는다'는 대수적 장치이다. 이 덕분에 매개변수 꼴 로그나선의 속력 크기가 단순히 $\sqrt{2} e^t$ 가 된다.

💡 이 곡선은 '로그나선' 또는 '베르누이 나선'이라 불리며, 앵무조개 껍질과 은하의 나선 팔에서 자주 관찰되는 자기 닮음 형태이다.

Q101 순열·조합·이항 심화

합 $\sum_{k=0}^5 \binom{5}{k}^2$ 의 값을 구하시오.

- ① ① 126
- ② ② 210
- ③ ③ 252
- ④ ④ 462

정답: ③ 252

1단계: 항등식 $(1+x)^5(1+x)^5 = (1+x)^{10}$ 의 양변을 이항정리로 전개한다. 좌변의 x^5 항의 계수는 $\sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} \binom{5}{5-k}$ 이고,

$\binom{5}{5-k} = \binom{5}{k}$ 이므로 이는 $\sum_{k=0}^5 \binom{5}{k}^2$ 과 같다.

2단계: 우변의 x^5 항의 계수는 $\binom{10}{5}$.

3단계: $\sum_{k=0}^5 \binom{5}{k}^2 = \binom{10}{5} = \frac{10!}{5! \cdot 5!} = 252$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 '다항식의 동일성으로부터 계수를 비교하면 조합론적 항등식이 유도된다'는 전략이다. 이는 Vandermonde 항등식의 특수 경우이며, '왼쪽에서 k개, 오른쪽에서 5-k개'라는 조합론적 이중 세기로도 증명된다.

💡 파스칼 삼각형의 각 행의 제곱합은 중앙 이항계수 $\binom{2n}{n}$ 과 같고, 이는 격자 경로 수의 두 가지 셈과 같아진다.

Q102 확률 심화

어떤 공장에서 제품을 세 기계 M_1, M_2, M_3 이 각각 전체 생산량의 30%, 40%, 30%를 생산한다. 각 기계의 불량률은 각각 2%, 1%, 3%이다. 생산된 제품 중에서 임의로 한 개를 골랐더니 불량품이었을 때, 이 제품이 M_3 에서 생산되었을 조건부확률을 구하시오.

- ① ① $\frac{6}{19}$
- ② ② $\frac{7}{19}$
- ③ ③ $\frac{9}{19}$
- ④ ④ $\frac{10}{19}$

정답: ③ $\frac{9}{19}$

1단계: 사건 D 를 '임의의 제품이 불량품'이라 하자. 각 기계에서 불량품이 생산되는 결합확률은 $P(M_1 \cap D) = 0.3 \cdot 0.02 = 0.006$, $P(M_2 \cap D) = 0.4 \cdot 0.01 = 0.004$, $P(M_3 \cap D) = 0.3 \cdot 0.03 = 0.009$.

2단계: 전확률 공식으로 $P(D) = 0.006 + 0.004 + 0.009 = 0.019$.

3단계: $P(M_3|D) = \frac{P(M_3 \cap D)}{P(D)} = \frac{0.009}{0.019} = \frac{9}{19}$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 '원인(어느 기계)에서 결과(불량)로 가는 순방향 확률을 모두 합친 뒤, 목표 원인의 비중만 뽑아내는 역방향 추론'이다. 이것이 베이즈 정리의 본질이다.

이 문제 구조는 품질관리의 결함 원인 분석과 스팸 메일 필터링에 그대로 적용된다.

Q103 통계 추론

확률변수 X 가 이항분포 $B\left(36, \frac{1}{3}\right)$ 을 따를 때, $E(X^2 + 3X)$ 의 값을 구하시오.

- ① ① 180
- ② ② 184
- ③ ③ 188
- ④ ④ 192

정답: ③ 188

1단계: 이항분포의 평균은 $E(X) = np = 36 \cdot \frac{1}{3} = 12$, 분산은 $V(X) = np(1 - p) = 36 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = 8$.

2단계: $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ 이므로 $E(X^2) = V(X) + E(X)^2 = 8 + 144 = 152$.

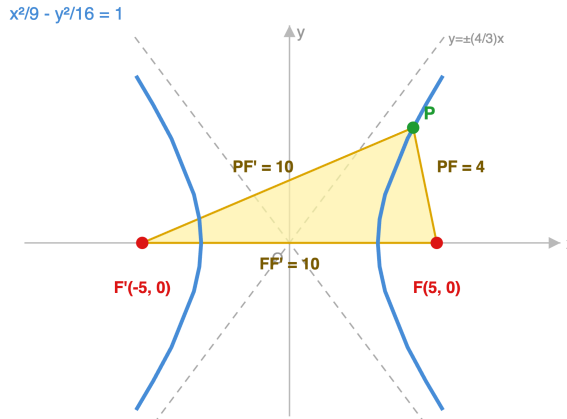
3단계: 기댓값의 선형성에 의해 $E(X^2 + 3X) = E(X^2) + 3E(X) = 152 + 3 \cdot 12 = 188$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 ' $E(X^2)$ 를 직접 계산하지 않고 분산의 정의를 역으로 이용'하는 것이다. 분산과 평균을 알면 2차 모멘트가 자연스럽게 나온다.

$E(X^2)$ 을 '2차 모멘트'라고 부르며, 이것과 1차 모멘트(평균)만 알아도 분포의 대강이 기술된다는 것이 체비셰프 부등식의 출발점이다.

Q104 이차곡선 심화

쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 의 두 초점을 $F(5, 0)$, $F'(-5, 0)$ 이라 하자. 쌍곡선 위의 점 P 가 제1사분면에 있고 $PF = 4$ 일 때, 삼각형 PFF' 의 넓이를 구하시오.



- ① ① $6\sqrt{6}$
- ② ② $8\sqrt{6}$
- ③ ③ $12\sqrt{6}$
- ④ ④ $16\sqrt{6}$

정답: ② $8\sqrt{6}$

1단계: 쌍곡선의 방정식에서 $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$. 쌍곡선의 정의에 의해 $|PF - PF'| = 2a = 6$. 점 P 가 제1사분면에 있으므로 P 는 오른쪽 가지 위에 있고 $PF' > PF$, 따라서 $PF' = PF + 6 = 10$.

2단계: 삼각형 PFF' 의 세 변은 $PF = 4$, $PF' = 10$, $FF' = 10$. 헤론의 공식에서 $s = \frac{4 + 10 + 10}{2} = 12$.

3단계: 넓이 $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{12 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 2} = \sqrt{384} = 8\sqrt{6}$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 쌍곡선의 정의로 두 초점까지의 거리 차이를 고정시켜 세 변의 길이를 완전히 결정한 뒤, 삼각형의 넓이를 헤론의 공식으로 마무리하는 것이다. P 가 어느 가지에 있는지를 좌표 조건에서 추론해야 부호를 제대로 정한다.

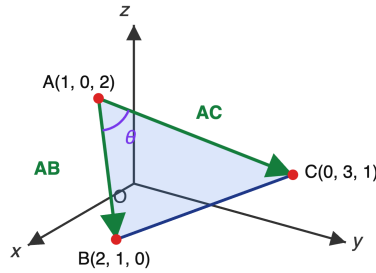
이등변 삼각형의 넓이는 헤론을 쓰지 않고도 '밑변 $FF' = 10$, 밑변에서 P 까지의 높이'로 직접 구할 수 있다. P 의 y 좌표는

$$\frac{8\sqrt{6}}{10/2 \cdot 2} = \frac{8\sqrt{6}}{10}$$

이며 같은 답을 준다.

Q105 벡터·공간도형 심화

공간의 세 점 $A(1, 0, 2)$, $B(2, 1, 0)$, $C(0, 3, 1)$ 에 대하여 삼각형 ABC 의 넓이를 구하시오.



- ① ① $\frac{5}{2}$
- ② ② $\frac{5\sqrt{2}}{2}$
- ③ ③ 5
- ④ ④ $5\sqrt{2}$

☞ 정답: ② $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

▣ 1단계: $\vec{AB} = (1, 1, -2)$, $\vec{AC} = (-1, 3, -1)$. 크기는 $|\vec{AB}| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$, $|\vec{AC}| = \sqrt{1+9+1} = \sqrt{11}$.

2단계: 내적 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = (1)(-1) + (1)(3) + (-2)(-1) = -1 + 3 + 2 = 4$. 두 벡터의 사이각 θ 에 대해

$$\cos\theta = \frac{4}{\sqrt{6} \sqrt{11}} = \frac{4}{\sqrt{66}}, \text{ 따라서 } \sin^2\theta = 1 - \frac{16}{66} = \frac{50}{66}.$$

$$3\text{단계: 삼각형의 넓이} = \frac{1}{2}|\vec{AB}||\vec{AC}|\sin\theta = \frac{1}{2}\sqrt{6} \sqrt{11} \sqrt{\frac{50}{66}} = \frac{1}{2}\sqrt{6 \cdot 11 \cdot \frac{50}{66}} = \frac{1}{2}\sqrt{66 \cdot \frac{50}{66}} = \frac{1}{2}\sqrt{50} = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

🧠 풀이 전략: 핵심 아이디어는 ' $\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta}$ 를 내적으로부터 구해 삼각형 넓이 공식 $\frac{1}{2}ab\sin\theta$ 에 대입하는 것'이다. 평면 삼각형 공식을 공간으로 그대로 올리는 경로이다.

💡 이 값은 벡터곱 $|\vec{AB} \times \vec{AC}|/2$ 로도 구해지며 $(5, 3, 4)$ 의 크기 $\sqrt{50}$ 의 절반과 정확히 일치한다.

Q106 수열 극한·급수 심화

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 2n + 3}{n^2 + 1} \right)^n$ 의 값은?

- ① ① e
- ② ② e^2
- ③ ③ e^3
- ④ ④ e^4

☞ 정답: ② e^2

▣ 1) 분자를 분모와 맞춰 정리하면 $\frac{n^2 + 2n + 3}{n^2 + 1} = 1 + \frac{2n + 2}{n^2 + 1}$. 2) $a_n = \frac{2n + 2}{n^2 + 1}$ 이라 두면 $n \rightarrow \infty$ 에서 $a_n \rightarrow 0$ 이고

$$n \cdot a_n = \frac{2n^2 + 2n}{n^2 + 1} \rightarrow 2. \text{ 3) 따라서 } \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a_n)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp(n \cdot a_n \cdot \frac{\ln(1 + a_n)}{a_n}) = e^2.$$

🧠 풀이 전략: 핵심 아이디어는 $(1 + 0 \text{ 수렴})^{\infty}$ 부정형을 e 의 정의식으로 변형하는 것이다. 밑의 차수와 지수 차수를 비교해 $n \cdot a_n$ 의 극한만 구하면 된다.

💡 분자의 상수항 +3은 극한값에 전혀 영향을 주지 않는다. 차수가 낮은 항은 무시된다.

Q107 초월함수 미분 심화

매개변수로 표현된 곡선 $x = \theta - \sin\theta, y = 1 - \cos\theta$ 에서 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 일 때 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 의 값은?

- ① ① -1
- ② ② $-\frac{1}{2}$
- ③ ③ $\frac{1}{2}$
- ④ ④ 1

정답: ① -1

1) $\frac{dx}{d\theta} = 1 - \cos\theta, \frac{dy}{d\theta} = \sin\theta$ 이므로 $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\theta}{1 - \cos\theta}$. 2)

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{\sin\theta}{1 - \cos\theta} \right) = \frac{\cos\theta(1 - \cos\theta) - \sin\theta \cdot \sin\theta}{(1 - \cos\theta)^2} = \frac{\cos\theta - 1}{(1 - \cos\theta)^2} = \frac{-1}{1 - \cos\theta}$$

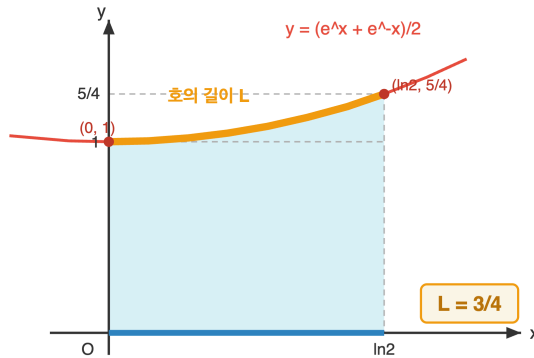
대입 시 $\frac{-1}{(1 - 0)^2} = -1$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 $\frac{d^2y}{dx^2} \neq \frac{d^2y/d\theta^2}{d^2x/d\theta^2}$ 이라는 것이다. 반드시 $\frac{dy}{dx}$ 를 θ 의 함수로 구한 뒤 다시 θ 로 미분하고 $\frac{dx}{d\theta}$ 로 나눠야 한다.

이 곡선은 사이클로이드(cycloid)로, 원이 직선을 굴러갈 때 원 위 한 점이 그리는 자취이다. 이계도함수가 항상 음수라는 것은 곡선이 항상 아래로 볼록함을 뜻한다.

Q108 미적분 통합 활용

곡선 $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 의 $x = 0$ 부터 $x = \ln 2$ 까지의 길이는?



- ① ① $\frac{1}{2}$
- ② ② $\frac{3}{4}$
- ③ ③ 1
- ④ ④ $\frac{5}{4}$

정답: ② $\frac{3}{4}$

1) $y' = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ 이므로 $1 + (y')^2 = 1 + \frac{(e^x - e^{-x})^2}{4} = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2$. 2) 따라서 $\sqrt{1 + (y')^2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

$$3) \text{ 길이 } L = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx = \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right]_0^{\ln 2} = \frac{2 - 1/2}{2} - 0 = \frac{3}{4}$$

풀이 전략: 핵심 아이디어는 $1 + (y')^2$ 가 완전제곱이 되도록 y 가 설계된 쌍곡함수 꼴이라는 점이다. 곡선의 길이 공식

$\int \sqrt{1 + (y')^2} dx$ 안의 제곱근이 벗겨지는 순간 적분이 완전히 풀린다.

이 곡선 $y = \cosh x$ 는 '현수선(catenary)'이라 불리며, 균일한 줄의 양 끝을 잡고 자유로이 늘어뜨렸을 때 생기는 자연스러운 모양이다.

Q109 순열·조합·이항 심화

$\binom{5}{0}^2 + \binom{5}{1}^2 + \binom{5}{2}^2 + \binom{5}{3}^2 + \binom{5}{4}^2 + \binom{5}{5}^2$ 의 값은?

- ① ① 126
- ② ② 210
- ③ ③ 252
- ④ ④ 462

정답: ③ 252

1) 항등식 $(1+x)^5(1+x)^5 = (1+x)^{10}$ 의 양변에서 x^5 의 계수를 비교한다. 2) 좌변의 x^5 계수는

$\sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} \binom{5}{5-k} = \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k}^2$ (이항계수 대칭성 $\binom{5}{5-k} = \binom{5}{k}$ 사용). 3) 우변의 x^5 계수는 $\binom{10}{5} = 252$. 따라서 주어진 합은 252.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 생성함수를 도입해 '제공함을 곱의 합으로' 변형하는 것이다. 이것이 반데르몽드 항등식

$\sum_k \binom{m}{k} \binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r}$ 의 특수한 경우이다.

일반식 $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$ 은 파스칼 삼각형에서 중앙 이항계수 수열(중앙 항)을 만들어낸다.

Q110 확률 심화

1부터 10까지의 자연수 중에서 서로 다른 3개를 임의로 택할 때, 택해진 세 수의 합이 3의 배수일 확률은?

- ① ① $\frac{1}{4}$
- ② ② $\frac{7}{20}$
- ③ ③ $\frac{1}{3}$
- ④ ④ $\frac{3}{10}$

정답: ② $\frac{7}{20}$

1) 1~10을 3으로 나눈 나머지로 분류한다. 0류 {3, 6, 9} (3개), 1류 {1, 4, 7, 10} (4개), 2류 {2, 5, 8} (3개). 2) 세 수의 합이 3의 배수가 되는 경우는 (i) 세 수 모두 같은 잉여류에서: $\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{3}{3} = 1 + 4 + 1 = 6$, (ii) 각 잉여류에서 한 개씩: $3 \cdot 4 \cdot 3 = 36$. 3) 유리한 경우 수 $6 + 36 = 42$, 전체 $\binom{10}{3} = 120$. 확률 = $\frac{42}{120} = \frac{7}{20}$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 '합이 3의 배수' 조건을 직접 다루는 대신 각 수를 mod 3으로 환산해 잉여류별 개수로 바꾸는 것이다. 합 $\equiv 0 \pmod{3}$ 이 되는 잉여류 조합은 (0,0,0), (1,1,1), (2,2,2), (0,1,2) 네 가지뿐임을 쓴다.

각 잉여류의 개수가 고르면 '각류 한 개씩'이 압도적으로 많은 경우가 된다. 여기서도 42 중 36이 '각류 한 개씩'에서 나왔다.

Q111 통계 추론

정규분포 $N(50, 10^2)$ 을 따르는 모집단에서 크기 25인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 \bar{X} 에 대하여 $P(\bar{X} \geq 52)$ 의 값은? (단, $P(0 \leq Z \leq 1) = 0.3413$ 이다.)

- ① ① 0.0228
- ② ② 0.0668
- ③ ③ 0.1587
- ④ ④ 0.3413

정답: ③ 0.1587

1) 표본평균의 분포는 $\bar{X} \sim N\left(50, \frac{10^2}{25}\right) = N(50, 2^2)$. 즉 평균 50, 표준편차 2이다. 2) 표준화 $Z = \frac{\bar{X} - 50}{2}$ 로 두면

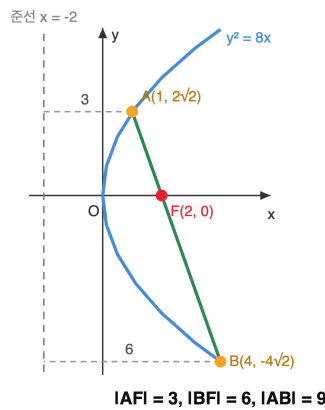
$\bar{X} \geq 52 \iff Z \geq 1$. 3) $P(Z \geq 1) = 0.5 - P(0 \leq Z \leq 1) = 0.5 - 0.3413 = 0.1587$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 개별 자료의 표준편차 $\sigma = 10$ 이 아니라 표본평균의 표준편차 $\sigma/\sqrt{n} = 2$ 를 써야 한다는 점이다. 여기서 실수하면 ① 0.0228이 나오는 함정에 빠진다.

같은 원자료에서도 표본평균의 분포는 표본크기가 커질수록 폭이 좁아진다. 평균은 자료보다 훨씬 '안정적'이다.

Q112 이차곡선 심화

포물선 $y^2 = 8x$ 의 초점을 F 라 하고, F 를 지나는 현 AB 에 대하여 점 A 의 x 좌표가 1일 때, 현 AB 의 길이는?



- ① ① 7
- ② ② 8
- ③ ③ 9
- ④ ④ 10

정답: ③ 9

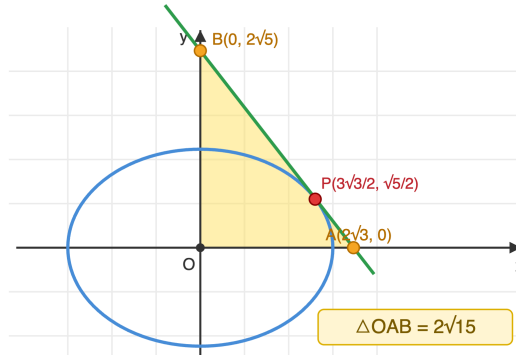
1) $y^2 = 8x$ 는 $y^2 = 4ax$ 꼴에서 $a = 2$. 초점 $F(2, 0)$, 준선 $x = -2$. 포물선의 정의에 의해 위 점 P 에서 초점까지 거리는 P 의 x 좌표에 2를 더한 값이다. 2) A 의 x 좌표가 1이므로 $|AF| = 1 + 2 = 3$. 초점현 성질 $\frac{1}{|AF|} + \frac{1}{|BF|} = \frac{1}{a}$ 에서 $\frac{1}{3} + \frac{1}{|BF|} = \frac{1}{2}$ 이므로 $|BF| = 6$. 3) 따라서 $|AB| = |AF| + |BF| = 3 + 6 = 9$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 두 가지 성질의 결합이다. (i) 포물선 위 점에서 초점까지 거리는 준선까지 거리와 같다 (정의). (ii) 초점을 지나는 현에서 반비례 합 $\frac{1}{|AF|} + \frac{1}{|BF|} = \frac{1}{a}$ 가 성립한다.

이 성질 덕분에 포물선 안테나는 초점에 놓인 수신기로 평행 전파를 모두 모을 수 있다. 초점현이 '짧은 한쪽을 길게 보상'하는 반비례 관계도 같은 기하에서 나온다.

Q113 이차곡선 심화

타원 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ 위의 점 $P\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ 에서의 접선이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 A, B 라 할 때, 삼각형 OAB 의 넓이는?
(단, O 는 원점)



- ① ① $\sqrt{15}$
- ② ② $2\sqrt{15}$
- ③ ③ $3\sqrt{15}$
- ④ ④ 6

정답: ② $2\sqrt{15}$

1) 타원 위 점 (x_0, y_0) 에서의 접선 공식은 $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$. P 를 대입하면 접선 $\frac{(3\sqrt{3}/2)x}{9} + \frac{(\sqrt{5}/2)y}{5} = 1$, 정리하면

$$\frac{\sqrt{3}x}{6} + \frac{y}{2\sqrt{5}} = 1. \quad 2) y = 0 \text{ 일 때 } x = 2\sqrt{3} \text{ 이므로 } A(2\sqrt{3}, 0). \quad x = 0 \text{ 일 때 } y = 2\sqrt{5} \text{ 이므로 } B(0, 2\sqrt{5}). \quad 3)$$

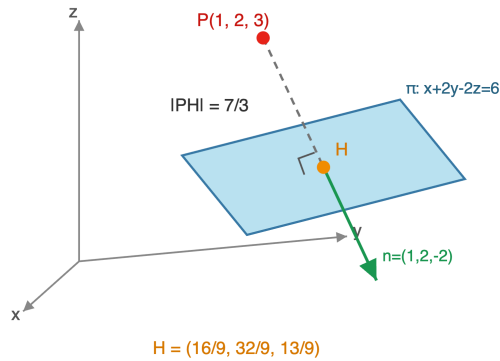
$$\triangle OAB = \frac{1}{2}|OA||OB| = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{5} = 2\sqrt{15}.$$

풀이 전략: 핵심 아이디어는 타원의 접선 공식을 곧바로 절편 형태로 읽어내는 것이다. 접선식을 $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ 꼴로 만들면 p, q 가 바로 x 절편, y 절편이 된다.

타원 위 점 $P(a\cos\theta, b\sin\theta)$ 에서 접선 삼각형 넓이는 $\frac{ab}{\sin 2\theta}$ 가 되어 $\theta = \pi/4$ 일 때 최소이다.

Q114 벡터·공간도형 심화

공간의 점 $P(1, 2, 3)$ 에서 평면 $\pi: x + 2y - 2z = 6$ 에 내린 수선의 발을 H 라 할 때, H 의 좌표는?



- ① ① $(\frac{16}{9}, \frac{32}{9}, \frac{13}{9})$
- ② ② $(2, \frac{8}{3}, \frac{5}{3})$
- ③ ③ $(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3})$
- ④ ④ $(1, 2, 0)$

🎯 정답: ① $(\frac{16}{9}, \frac{32}{9}, \frac{13}{9})$

📖 1) 평면 π 의 법선벡터는 $\vec{n} = (1, 2, -2)$ 이며, $|\vec{n}|^2 = 1 + 4 + 4 = 9$. 수선의 발은 P 에서 법선 방향으로 움직인 점이므로 $H = P + t\vec{n} = (1 + t, 2 + 2t, 3 - 2t)$. 2) H 가 평면 π 위에 있어야 하므로 $(1 + t) + 2(2 + 2t) - 2(3 - 2t) = 6$. 정리하면 $-1 + 9t = 6$ 이고 $t = \frac{7}{9}$. 3) 대입하면 $H = (1 + \frac{7}{9}, 2 + \frac{14}{9}, 3 - \frac{14}{9}) = (\frac{16}{9}, \frac{32}{9}, \frac{13}{9})$.

🧠 풀이 전략: 핵심 아이디어는 '수선의 발은 P 에서 법선방향으로 매개변수 t 만큼 움직인 점'이라는 매개화이다. 그 점이 평면 위에 있다는 조건으로 t 를 결정한다.

💡 매개변수 $t = \frac{d(P, \pi)}{|\vec{n}|}$. (부호)의 절댓값은 점과 평면 사이 거리를 법선 길이로 나눈 값이다. 여기서 $|t| \cdot |\vec{n}| = \frac{7}{9} \cdot 3 = \frac{7}{3}$ 이 정확히 $|PH|$ 이다.

Q115 벡터·공간도형 심화

공간의 직선 $l: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2}$ 가 평면 $\pi: x+y+z=0$ 과 이루는 각을 θ 라 할 때, $\sin\theta$ 의 값은?

- ① ① $\frac{\sqrt{3}}{9}$
- ② ② $\frac{2\sqrt{3}}{9}$
- ③ ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$
- ④ ④ $\frac{1}{3}$

정답: ① $\frac{\sqrt{3}}{9}$

1) 직선 l 의 방향벡터 $\vec{d} = (2, 1, -2)$ 이므로 $|\vec{d}| = \sqrt{4+1+4} = 3$. 평면 π 의 법선벡터 $\vec{n} = (1, 1, 1)$ 이므로 $|\vec{n}| = \sqrt{3}$. 2) 직선과 평면이 이루는 각 θ 에 대해 '법선과 직선이 이루는 각'을 α 라 하면 $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ 이고, $\sin\theta = \cos\alpha = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{d}||\vec{n}|}$. 3)

$$\vec{d} \cdot \vec{n} = 2 + 1 - 2 = 1 \text{이므로 } \sin\theta = \frac{|1|}{3 \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}.$$

풀이 전략: 핵심 아이디어는 '직선과 평면이 이루는 각'은 '직선과 법선이 이루는 각'의 여각이라는 관계이다. 따라서 cos으로 구해지는 양이 곧 sin θ 가 된다. cos과 sin을 혼동하면 ③ 같은 함정에 빠진다.

💡 $\vec{d} \cdot \vec{n} = 0$ 이면 직선이 평면과 평행하고, $\vec{d} \parallel \vec{n}$ 이면 직선이 평면에 수직이다. 내적이 두 기하관계를 연속적으로 이어준다.

Q116 초월함수 미분 심화

함수 $f(x) = (x^2 - 3x + 1)e^x$ 의 극댓값과 극솟값의 합을 구하시오.

- ① ① $\frac{5}{e} - e^2$
- ② ② $\frac{5}{e} + e^2$
- ③ ③ $-\frac{5}{e} - e^2$
- ④ ④ $-\frac{5}{e} + e^2$

정답: ①

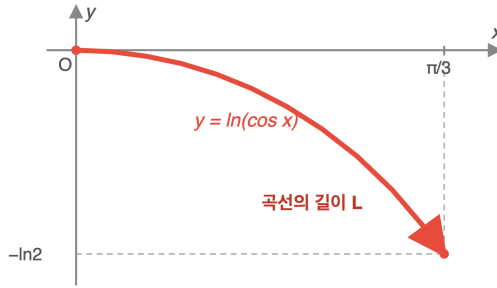
1단계: 곱의 미분으로 $f'(x) = (2x - 3)e^x + (x^2 - 3x + 1)e^x = (x^2 - x - 2)e^x = (x - 2)(x + 1)e^x$. 2단계: $e^x > 0$ 이므로 $f'(x) = 0$ 의 해는 $x = -1, x = 2$. $x < -1$ 에서 $f' > 0$, $-1 < x < 2$ 에서 $f' < 0$, $x > 2$ 에서 $f' > 0$ 이다. 따라서 $x = -1$ 에서 극댓값, $x = 2$ 에서 극솟값. 3단계: $f(-1) = (1 + 3 + 1)e^{-1} = \frac{5}{e}$, $f(2) = (4 - 6 + 1)e^2 = -e^2$. 합은 $\frac{5}{e} - e^2$ 이다.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 지수함수와 다항식의 곱을 미분할 때 e^x 가 인수로 남고 이차식이 부호를 결정한다는 점이다. 극댓값과 극솟값의 위치는 이차식의 근에서 결정된다.

💡 $P(x)e^x$ 형태의 함수는 미분해도 $Q(x)e^x$ 꼴을 유지해 반복 미분에 유리하다.

Q117 미적분 통합 활용

곡선 $y = \ln(\cos x)$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$)의 길이를 구하시오.



- ① ① $\ln(2 + \sqrt{3})$
- ② ② $\ln(1 + \sqrt{3})$
- ③ ③ $\ln(\sqrt{3} + 2\sqrt{2})$
- ④ ④ $\ln 2$

정답: ①

1단계: 곡선 길이 공식 $L = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$ 를 이용한다. $y' = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$. 2단계: $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$ 이므로

$\sqrt{1 + (y')^2} = |\sec x| = \sec x$ ($\cos x > 0$). 3단계:

$$L = \int_0^{\pi/3} \sec x dx = [\ln|\sec x + \tan x|]_0^{\pi/3} = \ln(2 + \sqrt{3}) - \ln 1 = \ln(2 + \sqrt{3}) \text{이다.}$$

풀이 전략: 핵심 아이디어는 $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$ 항등식으로 제곱근을 없애는 것이다. $\sec x$ 의 적분 공식

$\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x|$ 를 기억해야 한다.

sec x의 적분 공식은 17세기 항해술에서 메르카토르 도법 위도 계산식으로 처음 등장했다.

Q118 확률 심화

주머니 A에는 빨간 공 3개와 파란 공 2개, 주머니 B에는 빨간 공 2개와 파란 공 3개가 있다. A에서 공 한 개를 임의로 꺼내 B에 넣은 후, B에서 공 한 개를 꺼냈더니 빨간 공이었다. 이때 A에서 꺼낸 공이 빨간 공이었을 확률을 구하시오.

- ① ① $\frac{9}{13}$
- ② ② $\frac{7}{13}$
- ③ ③ $\frac{3}{5}$
- ④ ④ $\frac{2}{5}$

정답: ①

1단계(경로 분해): 사건 R_A 를 'A에서 빨간 공', R_B 를 'B에서 빨간 공'이라 하자. $P(R_A) = \frac{3}{5}$ 일 때 B는 빨간3+파란3이 되므로

$$P(R_B|R_A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, P(R_A^c) = \frac{2}{5} \text{일 때 B는 빨간2+파란4가 되어 } P(R_B|R_A^c) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}. \text{ 2단계(전확률):}$$

$$P(R_B) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{10} + \frac{2}{15} = \frac{9}{30} + \frac{4}{30} = \frac{13}{30}. \text{ 3단계(베이즈): } P(R_A|R_B) = \frac{P(R_A \cap R_B)}{P(R_B)} = \frac{3/10}{13/30} = \frac{9}{13}.$$

풀이 전략: 핵심 아이디어는 '원인(A의 공)'과 '결과(B의 공)'를 구분해 조건부확률의 방향을 뒤집는 베이즈 정리를 적용하는 것이다. 공을 옮긴 후 B의 구성이 달라진다는 점에 주의한다.

베이즈 정리는 사전확률을 관측 정보로 갱신하는 틀로 머신러닝의 기본 원리이기도 하다.

Q119 통계 추론

어떤 공장에서 생산하는 제품 한 개의 무게는 평균 m g, 표준편차 20 g인 정규분포를 따른다. 이 제품 중에서 크기가 100인 표본을 임의추출해 구한 표본평균이 \bar{X} 일 때, 모평균 m 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간의 길이를 구하시오. (단 $P(|Z| \leq 1.96) = 0.95$)

- ① ① 7.84
- ② ② 3.92
- ③ ③ 15.68
- ④ ④ 1.96

정답: ①

1단계(표준오차): 표본평균 \bar{X} 의 표준편차는 $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{20}{\sqrt{100}} = 2$. 2단계(신뢰구간): 신뢰도 95% 신뢰구간은

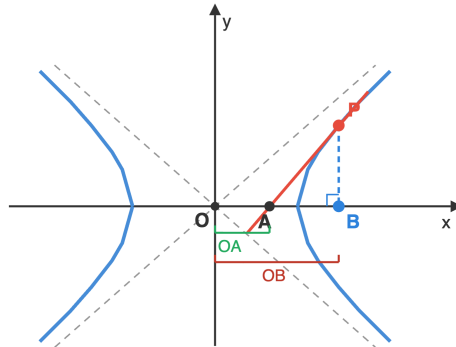
$\bar{X} - 1.96 \cdot 2 \leq m \leq \bar{X} + 1.96 \cdot 2$. 3단계(길이): 신뢰구간의 길이는 $2 \cdot 1.96 \cdot 2 = 7.84$ 이다.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 신뢰구간의 길이가 $2 \cdot z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 로 표본평균 \bar{X} 값과 무관하다는 점이다. 표본크기 n 이 커지면 길이가 줄어든다.

신뢰구간 길이를 반으로 줄이려면 표본크기를 4배로 키워야 한다. \sqrt{n} 이 분모에 있기 때문이다.

Q120 이차곡선 심화

쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ 의 제1사분면 위의 점 $P(x_0, y_0)$ 에서의 접선이 x 축과 만나는 점을 A , 점 P 에서 x 축에 내린 수선의 발을 B 라 할 때, $\overline{OA} \cdot \overline{OB}$ 의 값을 구하시오. (단, O 는 원점이다.)



- ① ① 4
- ② ② 5
- ③ ③ 9
- ④ ④ 2

정답: ①

1단계(접선 방정식): 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ 위의 점 $P(x_0, y_0)$ 에서의 접선은 $\frac{xx_0}{4} - \frac{yy_0}{5} = 1$ 이다. 2단계(A, B 좌표): 접선에서 $y = 0$ 을 대입하면 $\frac{xx_0}{4} = 1$, 즉 $A\left(\frac{4}{x_0}, 0\right)$ 이므로 $\overline{OA} = \frac{4}{x_0}$. 수선의 발은 $B(x_0, 0)$ 이므로 $\overline{OB} = x_0$. 3단계(곱): $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = \frac{4}{x_0} \cdot x_0 = 4$ 로 점 P 의 위치와 무관한 상수이다.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 에서 접선의 x 절편이 a^2/x_0 이 되어 $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = a^2$ 라는 일정 관계가 성립한다는 점이다.

같은 성질이 타원에서도 성립하며, 이는 이차곡선 극선 이론(polar-pole duality)의 직접적 귀결이다.

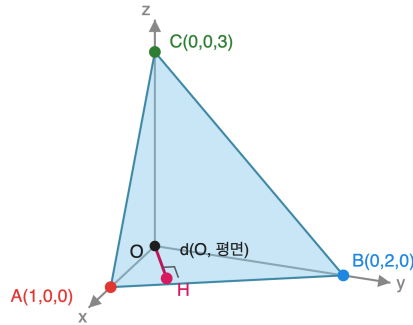


고3 수학 심화

총 40문제 · 문제와 정답·풀이 포함

Q121 벡터·공간도형 심화

공간에 세 점 $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(0, 0, 3)$ 이 있다. 세 점 A, B, C 를 지나는 평면과 원점 O 사이의 거리를 구하시오.



- ① ① $\frac{6}{7}$
- ② ② $\frac{7}{6}$
- ③ ③ $\frac{1}{7}$
- ④ ④ $\frac{6}{49}$

정답: ①

1단계(평면 방정식): 절편형 평면 방정식에 의해 $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$, 양변에 6을 곱하면 $6x + 3y + 2z = 6$ 이다. 2단계(거리 공식): 점 (x_1, y_1, z_1) 에서 평면 $ax + by + cz + d = 0$ 까지의 거리는 $\frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$. 여기서 평면을 $6x + 3y + 2z - 6 = 0$ 로 두고 원

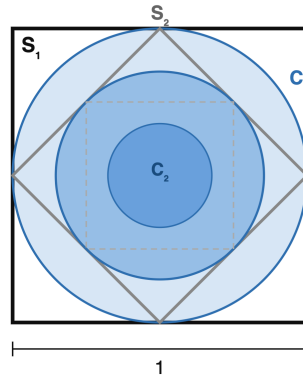
점 $(0, 0, 0)$ 을 대입하면 분자 = $|-6| = 6$. 3단계(계산): 분모 = $\sqrt{36 + 9 + 4} = \sqrt{49} = 7$. 따라서 거리는 $\frac{6}{7}$ 이다.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 절편이 a, b, c 인 평면 방정식을 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ 로 바로 쓰고, 원점과 평면 사이 거리 공식을 적용하는 것이다.

절편형 평면과 원점 거리는 $\frac{abc}{\sqrt{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}}$ 로 일반화되어 사면체의 높이 계산에 쓰인다.

Q122 수열 극한·급수 심화

한 변의 길이가 1인 정사각형 S_1 에 내접하는 원을 C_1 , C_1 에 내접하는 정사각형을 S_2 , S_2 에 내접하는 원을 C_2 라 하자. 이와 같이 S_n 에 내접하는 원 C_n 을 차례로 만들 때, 모든 원 C_n 의 넓이의 총합 $\sum_{n=1}^{\infty}$ (넓이 of C_n)을 구하시오.



$r_1 = 1/2$
 $r_2 = 1/(2\sqrt{2})$
 넓이 공비
 = $1/2$

- ① ① $\frac{\pi}{2}$
- ② ② π
- ③ ③ $\frac{\pi}{4}$
- ④ ④ $\frac{3\pi}{4}$

정답: ①

1단계(반지름): S_1 의 한 변이 1이므로 C_1 의 반지름 $r_1 = \frac{1}{2}$. C_1 의 지름 1이 S_2 의 대각선이므로 S_2 의 한 변은 $\frac{1}{\sqrt{2}}$, 따라서 $r_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}$. 2단계(공비): $\frac{r_{n+1}^2}{r_n^2} = \frac{1}{2}$ 이므로 원 넓이 πr_n^2 는 공비 $\frac{1}{2}$ 의 등비수열이다. 첫째항 $\pi r_1^2 = \frac{\pi}{4}$. 3단계(무한합): 무한등비급수 공식에서 합은 $\frac{\pi/4}{1-1/2} = \frac{\pi}{2}$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 정사각형과 내접원을 번갈아 만들 때 한 단계마다 넓이가 $\frac{1}{2}$ 배가 된다는 닮음비를 파악하고 무한등비급수의 합 공식을 적용하는 것이다.

모든 S_n 의 넓이 총합은 $\sum_{n=0}^{\infty} (1/2)^n = 2$ 가 되며, 정사각형 총 넓이가 원 총 넓이의 $\frac{4}{\pi}$ 배가 되는 흥미로운 관계다.

Q123 초월함수 적분 심화

$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$ 의 값을 구하시오.

- ① ① $1 - \frac{2}{e}$
- ② ② $1 + \frac{2}{e}$
- ③ ③ $\frac{2}{e} - 1$
- ④ ④ $1 - \frac{1}{e}$

정답: ①

1단계(부분적분 설정): $u = \ln x, dv = \frac{1}{x^2} dx$ 로 놓으면 $du = \frac{1}{x} dx, v = -\frac{1}{x}$. 2단계(대입):

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx = \left[-\frac{\ln x}{x} \right]_1^e + \int_1^e \frac{1}{x^2} dx = \left(-\frac{1}{e} + 0 \right) + \left[-\frac{1}{x} \right]_1^e = -\frac{1}{e} + \left(-\frac{1}{e} + 1 \right) = 1 - \frac{2}{e} \text{이다.}$$

풀이 전략: 핵심 아이디어는 로그를 미분하면 유리함수가 된다는 점에 착안해 $u = \ln x$ 로 두고 부분적분하는 것이다. $\frac{1}{x^2}$ 은 적분하면 $-\frac{1}{x}$ 로 단순해진다.

일반적으로 $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx = 1$ 로 수렴한다. 분모의 x^2 이 분자의 $\ln x$ 보다 훨씬 빠르게 증가하기 때문이다.

Q124 미적분 통합 활용

함수 $g(x) = \int_0^x (t-1)(t-3)e^t dt$ 의 극댓값을 M , 극솟값을 m 이라 할 때, $M - m$ 의 값을 구하시오.

- ① ① $4e$
- ② ② $2e$
- ③ ③ $4e^3$
- ④ ④ $-4e$

정답: ①

1단계(도함수): 미적분의 기본정리에서 $g'(x) = (x-1)(x-3)e^x$. $e^x > 0$ 이므로 부호는 $(x-1)(x-3)$ 이 결정한다. $x < 1$ 에서 양, $1 < x < 3$ 에서 음, $x > 3$ 에서 양. 따라서 $x = 1$ 에서 극댓값 $M = g(1)$, $x = 3$ 에서 극솟값 $m = g(3)$ 이다. 2단계(차이를 적분으로):

$M - m = g(1) - g(3) = - \int_1^3 (t-1)(t-3)e^t dt$. 3단계(적분 계산): $(t-1)(t-3) = t^2 - 4t + 3$ 이고,

$\int (t^2 - 4t + 3)e^t dt = (t^2 - 6t + 9)e^t + C = (t-3)^2 e^t + C$ (반복 부분적분 공식 $\int P e^t = (P - P' + P'')e^t$ 적용). 따라서

$\int_1^3 (t-1)(t-3)e^t dt = [(t-3)^2 e^t]_1^3 = 0 - 4e = -4e$. $M - m = -(-4e) = 4e$ 이다.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 극값의 차이를 직접 계산하지 않고 도함수의 적분 $\int_1^3 g'(t) dt = g(3) - g(1)$ 로 표현해 깔끔하게 구하는 것이다. $P(t)e^t$ 부정적분 공식이 핵심 도구다.

💡 $(t-3)^2 e^t$ 이 $(t-1)(t-3)e^t$ 의 부정적분이라는 사실은 $P - P' + P''$ 공식을 쓰면 한 줄에 검증된다.

Q125 초월함수 미분 심화

방정식 $e^x = kx^2$ ($x > 0$)이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 양수 k 의 값의 범위를 구하여라.

- ① ① $k > e^2$
- ② ② $k > \frac{e^2}{4}$
- ③ ③ $0 < k < \frac{e^2}{4}$
- ④ ④ $0 < k < e$

정답: ②

1단계: 양변을 x^2 로 나누어 $\frac{e^x}{x^2} = k$ 로 변형하고, $g(x) = \frac{e^x}{x^2}$ ($x > 0$)의 그래프와 $y = k$ 의 교점이 두 개이도록 조건을 분석한다. 2단계:

$g'(x) = \frac{e^x \cdot x^2 - e^x \cdot 2x}{x^4} = \frac{e^x(x-2)}{x^3}$. $x > 0$ 에서 $e^x > 0$, $x^3 > 0$ 이므로 부호는 $(x-2)$ 가 결정한다. 따라서 $x = 2$ 에서 극소이며 $g(2) = \frac{e^2}{4}$

이다. 3단계: $x \rightarrow 0^+$ 일 때 $g(x) \rightarrow \infty$ 이고 $x \rightarrow \infty$ 일 때도 $g(x) \rightarrow \infty$ 이므로, 수평선 $y = k$ 가 g 의 그래프와 두 점에서 만나려면 $k > \frac{e^2}{4}$ 이어야 한다.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 미정상수 k 를 분리하여 $g(x) = k$ 꼴로 바꾼 뒤, g 의 극값과 양 끝의 거동으로 교점 개수를 시각적으로 분석하는 것이다. '실근 개수 = 그래프 교점 개수'라는 시각적 직관과 미분의 결합이 필요하다.

💡 지수함수는 충분히 큰 x 에서 어떤 다항함수든 압도하므로 $\frac{e^x}{x^n}$ 은 항상 양 끝에서 ∞ 로 발산한다.

Q126 초월함수 적분 심화

$\int_0^1 xe^{2x} dx$ 의 값을 구하여라.

- ① ① $\frac{e^2 - 1}{4}$
- ② ② $\frac{e^2 + 1}{4}$
- ③ ③ $\frac{e^2 - 1}{2}$
- ④ ④ $\frac{e^2 + 1}{2}$

정답: ②

1단계: 부분적분을 적용한다. $u = x, dv = e^{2x} dx$ 로 두면 $du = dx, v = \frac{1}{2}e^{2x}$. 2단계:

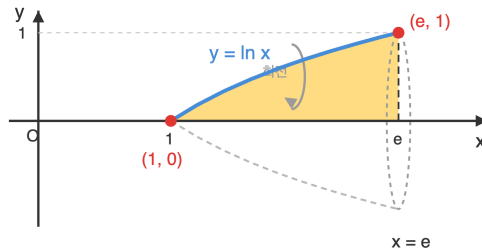
$$\int xe^{2x} dx = \frac{x}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x} dx = \frac{x}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C. \text{ 3단계: 정적분 계산. } \left[\frac{x}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} \right]_0^1 = \left(\frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} \right) - \left(0 - \frac{1}{4} \right) = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4}.$$

풀이 전략: 핵심 아이디어는 다항식과 지수함수의 곱 $f(x) \cdot e^{ax}$ 꼴은 다항부분을 u 로 두는 부분적분이 정석이다. 한 번의 부분적분으로 x 가 사라져 적분이 끝난다.

부분적분은 곱의 미분 $(uv)' = u'v + uv'$ 을 양변 적분하여 얻는 공식이다.

Q127 미적분 통합 활용

곡선 $y = \ln x$ 와 x 축 및 직선 $x = e$ 로 둘러싸인 영역을 x 축 둘레로 회전시킨 회전체의 부피를 구하여라.



$$V = \pi \int_1^e (\ln x)^2 dx$$

- ① ① $\pi(e - 1)$
- ② ② $\pi(e - 2)$
- ③ ③ $\pi(e - 3)$
- ④ ④ $\pi(2 - e)$

정답: ②

1단계: 회전체 부피 공식 $V = \pi \int_1^e (\ln x)^2 dx$ 를 세운다. 2단계: $(\ln x)^2$ 의 부정적분을 부분적분으로 구한다. $u = (\ln x)^2, dv = dx$ 로 두면 $du = \frac{2\ln x}{x} dx, v = x$. 따라서

$$\int (\ln x)^2 dx = x(\ln x)^2 - 2 \int \ln x dx = x(\ln x)^2 - 2(x \ln x - x) + C = x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + C. \text{ 3단계:}$$

$$\left[x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x \right]_1^e = (e \cdot 1 - 2e + 2e) - (0 - 0 + 2) = e - 2 \text{ 이므로 } V = \pi(e - 2).$$

풀이 전략: 핵심 아이디어는 x 축 회전체의 부피 공식 $V = \pi \int y^2 dx$ 를 적용한 뒤, $(\ln x)^2$ 의 적분에서 부분적분을 두 번 사용하는 것이다 ($\int \ln x dx$ 자체도 부분적분으로 구해야 한다).

$\int \ln x dx = x \ln x - x + C$ 는 적분학에서 가장 자주 등장하는 부분적분의 결과 중 하나이다.

Q128 순열·조합·이항 심화

집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 에서 집합 $Y = \{a, b, c\}$ 로의 함수 중 치역이 Y 와 같은(전사인) 함수의 개수를 구하여라.

- ① ① 24
- ② ② 30
- ③ ③ 36
- ④ ④ 81

정답: ③

1단계: X 에서 Y 로의 전체 함수의 개수는 $3^4 = 81$ 이다. 2단계: 포함-배제의 원리. A_i 를 ' Y 의 i 번째 원소가 치역에 포함되지 않는 함수들의 집합'이라 하면, $|A_i| = 2^4 = 16$, $|A_i \cap A_j| = 1^4 = 1$, $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$ 이다. 3단계: 전사함수의 수는 $3^4 - \binom{3}{1} \cdot 2^4 + \binom{3}{2} \cdot 1^4 - \binom{3}{3} \cdot 0^4 = 81 - 48 + 3 - 0 = 36$ 이다.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 '전사가 되지 않는 함수들의 합집합 크기'를 포함-배제로 구해 전체에서 빼는 것이다. 한 원소가 빠진 경우를 단순히 빼면 두 원소가 동시에 빠진 경우를 두 번 뺐 셈이 되므로 $\binom{3}{2} \cdot 1^4$ 를 더해 보정한다.

이 값은 제2종 스털링 수 $S(4, 3) = 6$ 에 $3! = 6$ 을 곱한 결과 36과 같다 (집합을 분할한 뒤 라벨을 붙이는 관점).

Q129 순열·조합·이항 심화

문자 a, a, b, b, c, c 6개를 일렬로 나열할 때, 같은 문자끼리 이웃하지 않게 나열하는 경우의 수를 구하여라.

- ① ① 24
- ② ② 30
- ③ ③ 36
- ④ ④ 60

정답: ②

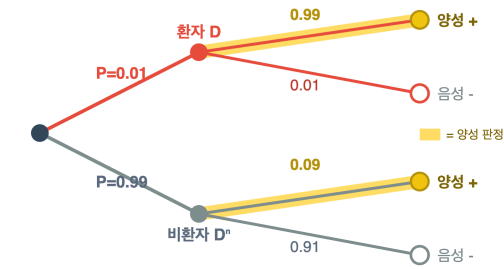
1단계: 같은 것이 있는 6개의 순열 전체 수는 $\frac{6!}{2!2!2!} = 90$ 이다. 2단계: 포함-배제. $A=aa$ 가 인접, $B=bb$ 인접, $C=cc$ 인접이라 두면, $|A| = \frac{5!}{2!2!} = 30$ (aa 묶음 한 덩어리 + b, b, c, c). 같은 방식으로 $|B| = |C| = 30$. $|A \cap B| = \frac{4!}{2!} = 12$ (aa, bb 두 덩어리 + c, c), $|A \cap C| = |B \cap C| = 12$. $|A \cap B \cap C| = 3! = 6$. 3단계: $|A \cup B \cup C| = 3 \cdot 30 - 3 \cdot 12 + 6 = 60$ 이고, 따라서 인접하지 않는 경우는 $90 - 60 = 30$ 이다.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 '같은 문자가 인접한다'는 사건들의 합집합 크기를 포함-배제로 구해 전체에서 빼는 것이다. 두 같은 문자를 한 덩어리로 묶으면 그 덩어리 안에는 한 가지 배열뿐이므로 $\frac{5!}{2!2!}$ 가 된다.

같은 문자가 인접하지 않는 배열은 'Smirnov 단어'라 불리며, 일반화하면 멱급수 항등식으로 풀 수 있다.

Q130 확률 심화

어떤 질병의 발병률은 1%이다. 진단키트는 환자에게는 99%의 확률로 양성, 비환자에게는 91%의 확률로 음성으로 판정한다. 임의의 한 사람이 검사를 받아 양성 판정을 받았을 때, 이 사람이 실제로 환자일 확률을 구하여라.



$$P(D | +) = \frac{0.99 \cdot 0.01}{0.99 \cdot 0.01 + 0.09 \cdot 0.99} = \frac{1}{10}$$

- ① ① $\frac{1}{10}$
- ② ② $\frac{1}{11}$
- ③ ③ $\frac{1}{100}$
- ④ ④ $\frac{99}{100}$

정답: ①

1단계: 사건 정의. D : 환자, D^c : 비환자, $+$: 양성판정. $P(D) = 0.01$, $P(D^c) = 0.99$, $P(+ | D) = 0.99$, $P(+ | D^c) = 1 - 0.91 = 0.09$. 2단계: 베이즈 정리 $P(D | +) = \frac{P(+ | D)P(D)}{P(+ | D)P(D) + P(+ | D^c)P(D^c)}$ 를 적용한다. 3단계: 분모 $= 0.99 \cdot 0.01 + 0.09 \cdot 0.99 = 0.99(0.01 + 0.09) = 0.99 \cdot 0.10$, 분자 $= 0.99 \cdot 0.01$. 따라서 $P(D | +) = \frac{0.99 \cdot 0.01}{0.99 \cdot 0.10} = \frac{0.01}{0.10} = \frac{1}{10}$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 베이즈 정리로 '양성판정 후 실제 환자일 사후확률'을 계산하는 것이다. 발병률(사전확률)이 매우 낮으면 키트의 정확도가 높아도 사후확률이 낮을 수 있다는 점이 핵심 통찰이다.

이 현상은 '기저율 오류(base rate fallacy)'라 불리며, 의료 진단·테러리스트 검색 등에서 흔히 오해되는 통계적 사실이다.

Q131 통계 추론

불량률이 10%인 공장의 제품 중에서 임의로 400개를 추출할 때, 불량품의 개수가 52개 이상일 확률을 정규분포로 근사하여 구하여라. (단, $P(0 \leq Z \leq 2) = 0.4772$ 로 한다.)

- ① ① 0.0228
- ② ② 0.0456
- ③ ③ 0.4772
- ④ ④ 0.5228

정답: ①

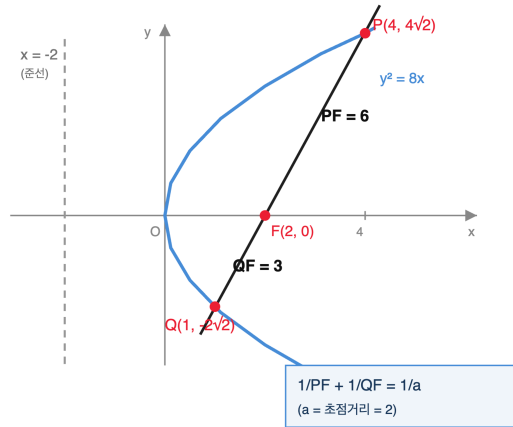
1단계: 불량품의 개수 $X \sim B(400, 0.1)$ 이다. 평균 $\mu = np = 400 \cdot 0.1 = 40$, 분산 $\sigma^2 = npq = 400 \cdot 0.1 \cdot 0.9 = 36$ 이므로 표준편차 $\sigma = 6$ 이다. 2단계: n 이 충분히 크므로 X 를 정규분포 $N(40, 36)$ 으로 근사한다. 표준화하면 $Z = \frac{X-40}{6}$ 이고, $X \geq 52 \Leftrightarrow Z \geq \frac{52-40}{6} = 2$. 3단계: $P(X \geq 52) \approx P(Z \geq 2) = 0.5 - P(0 \leq Z \leq 2) = 0.5 - 0.4772 = 0.0228$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 이항분포 $B(n, p)$ 를 평균 np , 분산 npq 인 정규분포로 근사한 뒤, $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ 로 표준화하여 표준정규분포표를 적용하는 것이다.

$np \geq 5$, $nq \geq 5$ 이면 정규근사가 충분히 정확하다는 경험칙이 통계학에서 널리 쓰인다.

Q132 이차곡선 심화

포물선 $y^2 = 8x$ 의 초점을 지나는 직선이 이 포물선과 두 점 P, Q에서 만난다. $PF = 6$ 일 때 QF 의 길이를 구하여라.



- ① ① 2
- ② ② $\frac{8}{3}$
- ③ ③ 3
- ④ ④ 4

정답: ③

1단계: $y^2 = 8x = 4 \cdot 2 \cdot x$ 이므로 $a = 2$ 이고 초점 $F(2, 0)$, 준선은 $x = -2$ 이다. 포물선 위 점의 초점거리는 $r = x + 2$ 이다. 2단계: $PF = 6$ 이므로 $x_P + 2 = 6$, $x_P = 4$, $y_P = \pm 4\sqrt{2}$. $P(4, 4\sqrt{2})$ 로 두면 직선 PF의 기울기는 $\frac{4\sqrt{2}}{4-2} = 2\sqrt{2}$ 이다. 3단계: 직선 $y = 2\sqrt{2}(x - 2)$ 를 $y^2 = 8x$ 에 대입하면 $8(x - 2)^2 = 8x \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = 1$ 또는 $x = 4$. Q의 x좌표는 1이므로 $QF = 1 + 2 = 3$ 이다. (초점현 공식 $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} = \frac{1}{a}$ 로도 확인 가능.)

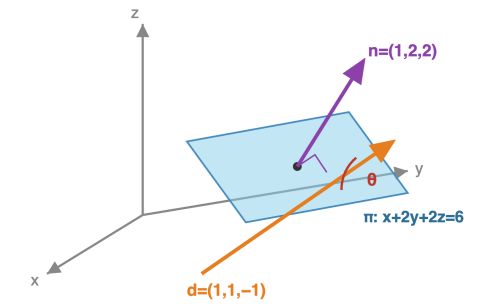
풀이 전략: 핵심 아이디어는 포물선의 초점거리 공식 $r = x + a$ (준선까지의 거리)와 초점현 길이의 조화평균 관계 $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{1}{a}$ 를 활용하는 것이다. 직선 방정식과 포물선의 교점을 직접 계산해도 풀린다.

포물선의 모든 초점현에 대해 $\frac{1}{PF} + \frac{1}{QF}$ 이 일정($\frac{1}{a}$)하다는 사실은 광학에서 반사 망원경의 설계 원리와 관련이 깊다.

Q133 벡터·공간도형 심화

공간좌표에서 평면 $\pi: x + 2y + 2z = 6$ 과 방향벡터 $\vec{d} = (1, 1, -1)$ 인 직선이 이루는 각의 크기를 θ 라 할 때, $\sin\theta$ 의 값을 구하여라.

직선과 평면이 이루는 각 θ



$$\sin\theta = |\vec{n} \cdot \vec{d}| / (|\vec{n}| \cdot |\vec{d}|) = |1+2-2| / (3 \cdot \sqrt{3}) = \sqrt{3}/9$$

- ① ① $\frac{1}{9}$
- ② ② $\frac{\sqrt{3}}{9}$
- ③ ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$
- ④ ④ $\frac{2\sqrt{3}}{9}$

정답: ②

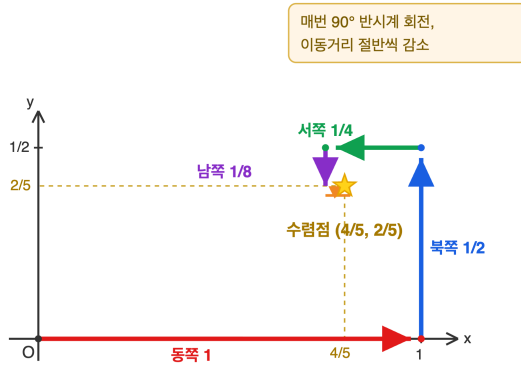
1단계: 평면의 법선벡터는 $\vec{n} = (1, 2, 2)$ 이고 $|\vec{n}| = \sqrt{1+4+4} = 3$. 직선의 방향벡터는 $\vec{d} = (1, 1, -1)$ 이고 $|\vec{d}| = \sqrt{3}$. 2단계: 법선벡터와 방향벡터가 이루는 각을 α 라 하면 $\cos\alpha = \frac{\vec{n} \cdot \vec{d}}{|\vec{n}| |\vec{d}|} = \frac{1+2-2}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$. 직선과 평면이 이루는 각 θ 는 α 의 여각이므로 $\sin\theta = |\cos\alpha|$. 3단계: $\sin\theta = \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 '직선이 평면과 이루는 각'은 '직선과 법선이 이루는 각의 여각'이라는 점이다. 따라서 법선과의 각의 코사인이 직선-평면 각의 사인이 된다. 함정으로 코사인 값을 그대로 답하지 않도록 주의한다.

비행기 착륙 시 활주로(평면)에 대한 진입각도(glide slope)는 보통 3° 정도로 설계되며, 이 각이 바로 직선과 평면 사이의 각이다.

Q134 수열 극한·급수 심화

좌표평면에서 점 P가 원점에서 출발하여 동쪽으로 1, 북쪽으로 $\frac{1}{2}$, 서쪽으로 $\frac{1}{4}$, 남쪽으로 $\frac{1}{8}$, 다시 동쪽으로 $\frac{1}{16}$, ... 와 같이 매번 직전 이동거리의 절반만큼 90° 반시계방향으로 회전하여 무한히 이동한다. 점 P가 수렴하는 위치의 좌표를 구하여라.



- ① ① $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$
- ② ② $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$
- ③ ③ $(\frac{4}{5}, \frac{2}{5})$
- ④ ④ $(1, \frac{1}{2})$

☞ 정답: ③

1단계: x 좌표는 동·서 이동만의 합이다. 동쪽 이동 $+1, +\frac{1}{16}, +\frac{1}{256}, \dots$, 서쪽 이동 $-\frac{1}{4}, -\frac{1}{64}, \dots$. 부호를 정리하면 $x_\infty = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{64} + \dots$ 이다. 2단계: 이는 첫째항 1, 공비 $-\frac{1}{4}$ 인 무한등비급수이므로 $x_\infty = \frac{1}{1 - (-\frac{1}{4})} = \frac{1}{5/4} = \frac{4}{5}$. 3단계: 같은 방식으로 $y_\infty = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{32} - \dots = \frac{1/2}{1 + 1/4} = \frac{2}{5}$. 따라서 수렴점은 $(\frac{4}{5}, \frac{2}{5})$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 4방향(동·북·서·남) 이동을 좌표축 별로 분리하여 부호를 가진 무한등비급수로 나타내는 것이다. 각 좌표는 공비가 $-\frac{1}{4}$ 인 등비급수가 된다 (4번 이동마다 같은 방향이 다시 나오고, 그동안 길이는 $\frac{1}{16}$ 이 되었으므로 부호 포함 공비는 $-\frac{1}{4}$).

💡 이 문제를 복소수로 풀면 $z_\infty = \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{i}{2})^k = \frac{1}{1 - i/2} = \frac{4 + 2i}{5}$ 로 한 번에 해결된다.

Q135 초월함수 미분 심화

곡선 $y = \frac{e^x}{x}$ ($x > 0$) 위의 점 P에서 그 접선이 원점을 지날 때, P의 x 좌표를 구하여라.

- ① ① 1
- ② ② $\frac{3}{2}$
- ③ ③ 2
- ④ ④ e

☞ 정답: ③

1단계: $f(x) = \frac{e^x}{x}$ 의 도함수는 $f'(x) = \frac{e^x \cdot x - e^x \cdot 1}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$. $P(t, \frac{e^t}{t})$ 에서의 접선의 기울기는 $\frac{e^t(t-1)}{t^2}$ 이다. 2단계: P에서의 접선의 방정식은 $y - \frac{e^t}{t} = \frac{e^t(t-1)}{t^2}(x - t)$. 이 직선이 원점 (0,0)을 지나므로 $-\frac{e^t}{t} = \frac{e^t(t-1)}{t^2} \cdot (-t) = -\frac{e^t(t-1)}{t}$. 3단계: $\frac{e^t}{t} \neq 0$ 이므로 양변을 나누면 $1 = t - 1$, 즉 $t = 2$ 이다. 따라서 P의 x 좌표는 2이다.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 접점을 미지수 t 로 두고 접선의 방정식을 세운 뒤, '원점을 지난다'는 조건을 대입하여 t 에 관한 방정식을 푸는 것이다. 접선과 원점이 곡선 위에 있는 점만으로 결정되는 기하적 관계를 대수로 옮긴다.

💡 곡선 $y = \frac{e^x}{x}$ 는 $x = 1$ 에서 극솟값 e 를 가지며, 이 함수의 그래프는 원점에서 그 접선이 정확히 한 개만 존재한다.

Q136 초월함수 적분 심화

정적분 $\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx$ 의 값은?

- ① $\frac{\pi-2}{8}$
- ② $\frac{\pi-1}{8}$
- ③ $\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}$
- ④ $\frac{2\pi-1}{8}$

정답: ① $\frac{\pi-2}{8}$

1단계: $x = \tan\theta$ 로 치환. $dx = \sec^2\theta d\theta$, $1+x^2 = \sec^2\theta$. 적분 범위는 $\theta: 0 \rightarrow \pi/4$.

2단계: 피적분함수 변형: $\frac{\tan^2\theta}{\sec^4\theta} \cdot \sec^2\theta d\theta = \tan^2\theta \cos^2\theta d\theta = \sin^2\theta d\theta$.

3단계: 반각공식 $\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$ 로 계산. $\int_0^{\pi/4} \frac{1-\cos 2\theta}{2} d\theta = \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} = \frac{\pi-2}{8}$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 분모가 $(1+x^2)^2$ 이므로 삼각치환 $x = \tan\theta$ 로 분모를 $\sec^4\theta$ 로 단순화하는 것. 이후 $\tan^2\theta \cos^2\theta = \sin^2\theta$ 로 정리되어 반각공식 적분이 된다.

tan 치환은 17세기 라이프니츠와 베르누이가 유리함수 적분을 위해 체계화한 기법이다.

Q137 순열·조합·이항 심화

집합 $X = \{a, b, c, d\}$ 에서 집합 $Y = \{1, 2, 3\}$ 으로의 함수 중 치역이 Y 전체와 같은 함수(전사함수)의 개수를 구하시오.

- ① 24
- ② 30
- ③ 36
- ④ 42

정답: ③ 36

1단계: $X \rightarrow Y$ 전체 함수 수는 $3^4 = 81$.

2단계: 포함배제 원리 적용. Y 의 특정 한 원소가 치역에 빠진 함수는 $C(3, 1) \cdot 2^4 = 48$, 두 원소가 빠진 함수는 $C(3, 2) \cdot 1^4 = 3$.

3단계: 전사함수 수 = $81 - 48 + 3 = 36$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 '치역 제한' 조건은 포함배제 원리의 전형. 전사 아님 = 적어도 하나의 원소가 빠짐. 여집합 기법으로 체계적으로 센다.

전사함수의 수는 제2종 스털링 수 $S(n, k)$ 에 $k!$ 을 곱한 값과 같다.

Q138 수열 극한·급수 심화

극한 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^{1/n}}{n}$ 의 값은?

- ① ① 1
- ② ② $\frac{1}{e}$
- ③ ③ $\frac{1}{e^2}$
- ④ ④ $\frac{2}{e}$

정답: ② $\frac{1}{e}$

1단계: $a_n = \frac{(n!)^{1/n}}{n} = \left(\frac{n!}{n^n}\right)^{1/n}$ 로 변형.

2단계: 로그 취하기: $\ln a_n = \frac{1}{n} \ln \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \frac{k}{n}$. 이는 $f(x) = \ln x$ 의 $[0, 1]$ 에서의 리만합.

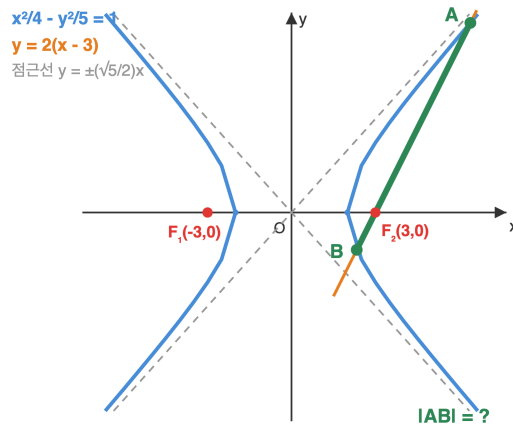
3단계: $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln a_n = \int_0^1 \ln x dx = [x \ln x - x]_0^1 = -1$. 따라서 $a_n \rightarrow e^{-1} = \frac{1}{e}$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 n 제곱근 형태의 극한에 로그를 취하면 리만합으로 바뀐다는 관찰. 그 뒤 $\int_0^1 \ln x dx$ 는 부분적분으로 즉시 계산 가능하다.

스털링 근사 $n! \sim \sqrt{2\pi n} (n/e)^n$ 에서도 동일하게 $1/e$ 를 예측할 수 있다.

Q139 이차곡선 심화

쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ 의 오른쪽 초점 F 를 지나고 기울기가 2인 직선이 이 쌍곡선과 서로 다른 두 점 A, B 에서 만난다. 선분 AB 의 길이를 구하시오.



- ① ① $\frac{80}{11}$
- ② ② $\frac{90}{11}$
- ③ ③ $\frac{100}{11}$
- ④ ④ $\frac{110}{11}$

정답: ③ $\frac{100}{11}$

1단계: 초점 계산: $c^2 = 4 + 5 = 9, c = 3$. 직선: $y = 2(x - 3)$.

2단계: 쌍곡선 식에 대입, 양변 $\times 20$: $5x^2 - 16(x - 3)^2 = 20 \rightarrow -11x^2 + 96x - 164 = 0 \rightarrow 11x^2 - 96x + 164 = 0$.

3단계: 근과 계수: $x_1 + x_2 = \frac{96}{11}, x_1 x_2 = \frac{164}{11}$. $(x_1 - x_2)^2 = \left(\frac{96}{11}\right)^2 - 4 \cdot \frac{164}{11} = \frac{9216 - 7216}{121} = \frac{2000}{121}$. $|x_1 - x_2| = \frac{20\sqrt{5}}{11}$. 기울기 $m = 2$

이므로 $|AB| = \sqrt{1+m^2} |x_1 - x_2| = \sqrt{5} \cdot \frac{20\sqrt{5}}{11} = \frac{100}{11}$.

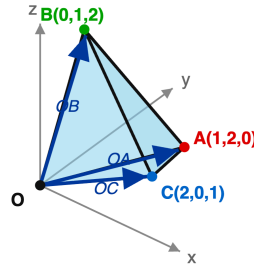
풀이 전략: 핵심 아이디어는 쌍곡선과 직선 교점의 거리를 직접 근을 구하지 말고, 근과 계수의 관계로 $|x_1 - x_2|$ 를 구한 뒤 $\sqrt{1+m^2}$ 를 곱하는 것.

쌍곡선 초점을 지나는 현을 '초점현'이라 하며, 반지름 공식과 관련된 다양한 성질을 가진다.

Q140 벡터·공간도형 심화

공간에서 세 점 $A(1, 2, 0)$, $B(0, 1, 2)$, $C(2, 0, 1)$ 과 원점 O 를 꼭짓점으로 하는 사면체 $OABC$ 의 부피를 구하시오.

스칼라 삼중곱
 $V = \frac{1}{6} |OA \cdot (OB \times OC)|$



- ① ① 1
- ② ② $\frac{3}{2}$
- ③ ③ 2
- ④ ④ $\frac{5}{2}$

정답: ② $\frac{3}{2}$

1단계: 사면체 부피 공식 $V = \frac{1}{6} |\vec{OA} \cdot (\vec{OB} \times \vec{OC})|$ 적용.

2단계: 외적 $\vec{OB} \times \vec{OC} = (0, 1, 2) \times (2, 0, 1) = (1 \cdot 1 - 2 \cdot 0, 2 \cdot 2 - 0 \cdot 1, 0 \cdot 0 - 1 \cdot 2) = (1, 4, -2)$.

3단계: 내적 $\vec{OA} \cdot (1, 4, -2) = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 0 \cdot (-2) = 9$. 부피 $V = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 세 모서리 벡터가 주어진 사면체의 부피는 스칼라 삼중곱 $\frac{1}{6} |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$ 로 즉시 계산된다는 것.

스칼라 삼중곱의 절댓값은 세 벡터가 만드는 평행육면체의 부피이고, 사면체는 그 1/6이다.

Q141 확률 심화

1부터 9까지의 자연수 중 서로 다른 세 수를 임의로 뽑을 때, 세 수의 합이 3의 배수일 확률을 구하시오.

- ① ① $\frac{1}{3}$
- ② ② $\frac{5}{14}$
- ③ ③ $\frac{3}{7}$
- ④ ④ $\frac{4}{9}$

정답: ② $\frac{5}{14}$

1단계: 1부터 9까지를 3으로 나눈 나머지로 분류. 나머지 0인 수 {3, 6, 9}, 나머지 1인 수 {1, 4, 7}, 나머지 2인 수 {2, 5, 8} 각 3개.

2단계: 세 수의 합이 3의 배수인 경우 분석. (나머지 0 세 개), (나머지 1 세 개), (나머지 2 세 개), (각 나머지 하나씩)의 네 가지. 경우의 수는 각각 $\binom{3}{3} = 1, 1, 1, 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$.

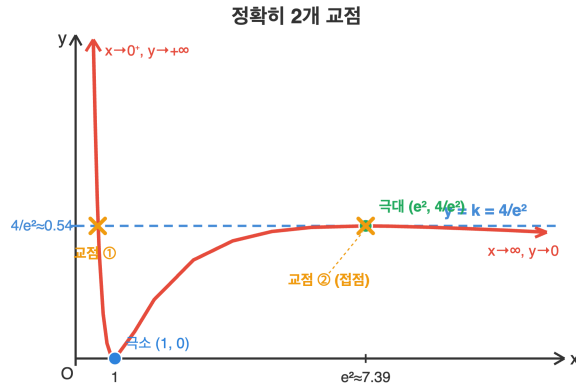
3단계: 유리한 경우 수 = $1 + 1 + 1 + 27 = 30$. 전체 경우의 수 = $\binom{9}{3} = 84$. 확률 = $\frac{30}{84} = \frac{5}{14}$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 '합이 3의 배수' 조건을 각 수를 3으로 나눈 나머지 분포 문제로 환원하는 것. 동일 나머지 3개 선택 또는 나머지 0,1,2 한 개씩 선택만이 가능하다.

이처럼 '나머지 분포'를 활용하는 접근은 정수론의 기초로, 합동식과 깊이 연관된다.

Q142 초월함수 미분 심화

방정식 $\frac{(\ln x)^2}{x} = k$ 가 서로 다른 양의 실근을 정확히 2개 갖도록 하는 실수 k 의 값은?



- ① ① $\frac{1}{e}$
- ② ② $\frac{2}{e}$
- ③ ③ $\frac{4}{e^2}$
- ④ ④ $\frac{4}{e}$

정답: ③ $\frac{4}{e^2}$

1단계: $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$ 의 도함수 $f'(x) = \frac{\ln x(2 - \ln x)}{x^2}$. 임계점 $x = 1, x = e^2$.

2단계: 증감표: $(0, 1)$ 에서 감소 $(+\infty \rightarrow 0)$, $(1, e^2)$ 에서 증가 $(0 \rightarrow 4/e^2)$, (e^2, ∞) 에서 감소 $(4/e^2 \rightarrow 0)$. 극소 $f(1) = 0$, 극대 $f(e^2) = \frac{4}{e^2}$.

3단계: 수평선 $y = k$ 와의 교점 개수: $k < 0$ 면 0개, $k = 0$ 이면 1개, $0 < k < \frac{4}{e^2}$ 면 3개, $k = \frac{4}{e^2}$ 이면 2개 (접하는 극대점 + 좌측 감소구간), $k > \frac{4}{e^2}$ 면 1개. 따라서 정확히 2개는 $k = \frac{4}{e^2}$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 수평선 $y = k$ 와 함수 $y = f(x)$ 그래프의 교점 개수 문제로 환원하는 것. 극한, 극값을 정확히 파악하고 k 를 움직이면서 교점 수가 바뀌는 임계값을 찾는다.

💡 $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$ 의 극대점 $x = e^2$ 에서 $\ln x = 2$ 라는 '1차보다 빠른 로그 증가'의 임계 조건이 드러난다.

Q143 통계 추론

어떤 공장에서 생산되는 제품 400개를 임의로 검사했더니 불량품이 40개 나왔다. 이 공장 제품의 불량률 p 에 대한 신뢰도 95% 신뢰구간을 구하시오. ($Z = 1.96$ 사용)

- ① ① [0.05, 0.15]
- ② ② [0.07, 0.13]
- ③ ③ [0.0706, 0.1294]
- ④ ④ [0.08, 0.12]

정답: ③ [0.0706, 0.1294]

1단계: 표본비율 $\hat{p} = \frac{40}{400} = 0.1$, 표본 크기 $n = 400$.

2단계: 표준오차 $\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = \sqrt{\frac{0.1 \cdot 0.9}{400}} = \sqrt{0.000225} = 0.015$.

3단계: 95% 신뢰구간 $= \hat{p} \pm 1.96 \cdot 0.015 = 0.1 \pm 0.0294 = [0.0706, 0.1294]$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 모비율 신뢰구간 공식 $\hat{p} \pm z \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}$ 을 그대로 적용. $n = 400$ 에서 분모가 깔끔히 $\sqrt{0.09/400} = 0.015$ 로 떨어진다.


💡 모비율 추정은 선거 여론조사에서 '오차범위 $\pm X\%$ '로 대중에게 보고되는 실용 사례.

Q144 수열 극한·급수 심화

무한급수 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ 의 값을 구하시오.


- ① ① $\frac{1}{2}$
- ② ② $\frac{1}{3}$
- ③ ③ $\frac{1}{4}$
- ④ ④ $\frac{1}{6}$


 **정답:** ③ $\frac{1}{4}$

 1단계: 부분분수 분해 $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right)$. (공통분모로 놓으면 $(k+2) - k = 2$, 양변이 일치.)

2단계: 부분합 $S_n = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right)$ (망원급수).

3단계: $n \rightarrow \infty$ 이면 $\frac{1}{(n+1)(n+2)} \rightarrow 0$, 따라서 $S_n \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

 풀이 전략: 핵심 아이디어는 세 인수의 곱 분모를 '연속 두 인수 곱' 형태의 차로 분해해 망원급수화하는 것. 이는 부분분수의 전형적 활용이다.

 이러한 급수는 1655년 Mengoli가 연구한 고전적 망원급수 예제와 같은 계통.

Q145 초월함수 적분 심화

정적분 $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos^3 x dx$ 의 값을 구하시오.


- ① ① $\frac{1}{15}$
- ② ② $\frac{2}{15}$
- ③ ③ $\frac{4}{15}$
- ④ ④ $\frac{8}{15}$


 **정답:** ② $\frac{2}{15}$

 1단계: \cos 의 차수가 홀수이므로 $\cos^3 x = \cos x(1 - \sin^2 x)$ 로 분리.

2단계: $u = \sin x$, $du = \cos x dx$ 로 치환. $x: 0 \rightarrow \pi/2$ 이면 $u: 0 \rightarrow 1$.

3단계: $\int_0^1 u^2(1 - u^2) du = \int_0^1 (u^2 - u^4) du = \left[\frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$.

 풀이 전략: 핵심 아이디어는 $\sin^m x \cos^n x$ 적분에서 홀수 차수의 삼각함수로부터 하나를 떼어내 치환하는 표준 기법. 본 문제는 \cos 이 홀수 차.

 이와 같은 적분은 월리스(Wallis) 적분의 확장형으로, 감마함수와 베타함수를 연결한다.

Q146 수열 극한·급수 심화

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n-1})$ 의 값을 구하시오.

- ① ① 1
- ② ② $\sqrt{3}$
- ③ ③ $\frac{3}{2}$
- ④ ④ 2

정답: ③

1단계: 근호 차에 유리화를 적용한다. $\sqrt{n+2} - \sqrt{n-1} = \frac{(n+2) - (n-1)}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n-1}} = \frac{3}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n-1}}$. 2단계: 원식에 대입하면 $\frac{3\sqrt{n}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n-1}}$. 분자·분모를 \sqrt{n} 으로 나누면 $\frac{3}{\sqrt{1+2/n} + \sqrt{1-1/n}}$. 3단계: $n \rightarrow \infty$ 일 때 분모는 $1+1=2$ 이므로 극한값은 $\frac{3}{2}$. 함정 보기 $\sqrt{3}$ 은 제곱 실수를 유도한다.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 $\sqrt{n+a} - \sqrt{n+b}$ 형태의 $\infty - \infty$ 부정형을 유리화하여 $1/\sqrt{n}$ 규모의 소거항을 만든 뒤, 밖의 \sqrt{n} 과 상쇄시켜 유한 극한을 얻는 것이다.

평균값 정리 관점에서 $f(x) = \sqrt{x}$ 에 대해 $\sqrt{n+2} - \sqrt{n-1} \approx 3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{n}}$ 이 되어 같은 결과가 나온다.

Q147 순열·조합·이항 심화

$\sum_{k=0}^{10} k^2 \binom{10}{k}$ 의 값을 구하시오.

- ① ① 23040
- ② ② 25600
- ③ ③ 28160
- ④ ④ 30720

정답: ③

1단계: $(1+x)^{10} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} x^k$ 를 미분하면 $10(1+x)^9 = \sum k \binom{10}{k} x^{k-1}$. 양변에 x 를 곱하면 $10x(1+x)^9 = \sum k \binom{10}{k} x^k$. 2단계: 이를 다시 미분하면 $10(1+x)^9 + 90x(1+x)^8 = \sum k^2 \binom{10}{k} x^{k-1}$. 3단계: $x=1$ 을 대입하면 $10 \cdot 2^9 + 90 \cdot 2^8 = 5120 + 23040 = 28160$. 일반화된 공식 $\sum k^2 \binom{n}{k} = n(n+1) \cdot 2^{n-2}$ 와도 일치한다 ($10 \cdot 11 \cdot 256 = 28160$).

풀이 전략: 핵심 아이디어는 이항정리 $(1+x)^n$ 을 미분·곱하기·재미분으로 조작해 $\sum k^2 \binom{n}{k}$ 를 계수합으로 변환한 뒤 $x=1$ 을 대입하는 생성함수 기법이다.

확률변수 $X \sim B(n, 1/2)$ 일 때 $E(X^2) = \sum k^2 \binom{n}{k} / 2^n$ 이 $n(n+1)/4$ 와 같다는 사실로도 유도 가능하다.

Q148 통계 추론

모표준편차가 8인 정규분포 모집단에서 크기 16인 표본을 뽑아 표본평균 $\bar{X} = 50$ 을 얻었다. 모평균 m 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은? (단, $P(|Z| \leq 1.96) = 0.95$)

- ① ① [44.12, 55.88]
- ② ② [45.08, 54.92]
- ③ ③ [46.08, 53.92]
- ④ ④ [47.08, 52.92]

정답: ③

1단계: 모분산이 알려져 있으므로 $X \sim N(m, \sigma^2/n)$ 이고 $\sigma/\sqrt{n} = 8/4 = 2$ 이다. 2단계: 신뢰도 95% 신뢰구간은 $\bar{X} \pm z_{0.025} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 50 \pm 1.96 \times 2$. 3단계: $1.96 \times 2 = 3.92$ 이므로 구간은 $[50 - 3.92, 50 + 3.92] = [46.08, 53.92]$. 함정 보기 ①은 $n = 4$ 로 착각한 값이다.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 표본평균 분포의 표준오차가 σ/\sqrt{n} 이라는 점을 이용해 z-임계값을 표준오차에 곱한 양만큼을 중심으로 좌우로 벌려 신뢰구간을 만드는 것이다.

💡 표본크기 n 을 4배로 늘리면 신뢰구간의 길이는 정확히 절반이 된다 (\sqrt{n} 이 2배 되므로).

Q149 초월함수 미분 심화

함수 $f(x) = x^2e^{-x}$ 의 모든 변곡점의 x 좌표의 합은?

- ① ① 2
- ② ② $2\sqrt{2}$
- ③ ③ 4
- ④ ④ $4 + \sqrt{2}$

정답: ③

1단계: $f'(x) = (2x - x^2)e^{-x}$. 2단계: $f''(x) = (2 - 2x)e^{-x} - (2x - x^2)e^{-x} = (x^2 - 4x + 2)e^{-x}$. 3단계: $e^{-x} > 0$ 이므로 $f''(x) = 0$ 은 $x^2 - 4x + 2 = 0$ 과 동치이다. 근은 $x = 2 \pm \sqrt{2}$ 이고 f'' 의 부호가 두 점에서 각각 바뀌므로 둘 다 변곡점이다. 근과 계수의 관계로 두 근의 합은 4이다. (함정 보기 분석: ② = $2\sqrt{2}$ 는 두 근의 차 $(2 + \sqrt{2}) - (2 - \sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$, 즉 판별식의 제곱근 $\sqrt{16-8} = 2\sqrt{2}$ 에 해당하고, ① = 2는 두 근의 곱 $(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2}) = 2$ 에 해당한다. 구하는 값은 근의 합이므로 4이다.)

풀이 전략: 핵심 아이디어는 지수함수와 이차식의 곱에서 $f''(x)$ 를 계산할 때 e^{-x} 인자가 부호에 영향을 주지 않음을 이용하고, 이차방정식 근과 계수의 관계로 합을 바로 얻는 것이다.

💡 $x^n e^{-x}$ 꼴은 감마분포의 확률밀도함수 형태로, 변곡점 좌표는 분포의 오목·볼록 전이점을 의미한다.

Q150 미적분 통합 활용

연속함수 $f(x)$ 가 $f(x) = \cos x + \int_0^{\pi/4} f(t)\sin t dt$ 를 만족할 때, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 의 값은?

- ① ① $\frac{1}{4}$
- ② ② $\frac{\sqrt{2}}{4}$
- ③ ③ $\frac{1}{2}$
- ④ ④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

🎯 정답: ②

📖 1단계: 정적분 $A = \int_0^{\pi/4} f(t)\sin t dt$ 는 상수이므로 $f(x) = \cos x + A$ 로 두고, $f(t) = \cos t + A$ 를 원식의 피적분함수에 대입한다.

2단계: $A = \int_0^{\pi/4} (\cos t + A)\sin t dt = \left[\frac{\sin^2 t}{2} \right]_0^{\pi/4} + A[-\cos t]_0^{\pi/4} = \frac{1}{4} + A\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. 3단계: A 에 관한 방정식을 정리하면

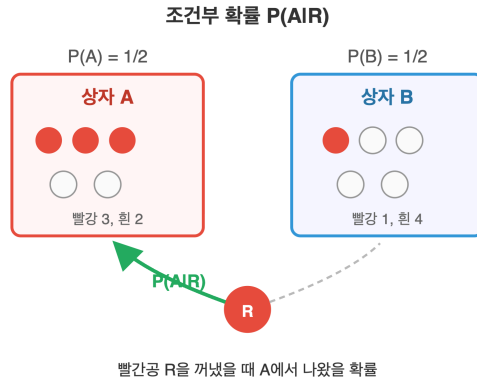
$A - A\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{4}$, 즉 $A \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{4}$ 이므로 $A = \frac{\sqrt{2}}{4}$. 따라서 $f(\pi/2) = \cos(\pi/2) + A = 0 + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

🧠 풀이 전략: 핵심 아이디어는 피적분함수 내부의 f 가 실제로는 상수 A 만큼의 자유도를 갖는다는 사실을 이용해 f 를 일단 $\cos x + A$ 로 치환하고, 적분 방정식을 A 에 대한 대수방정식으로 환원하는 것이다.

💡 이런 형태의 적분방정식은 물리의 자기일관 장(self-consistent field) 방정식과 수학적으로 동형이다.

Q151 확률 심화

상자 A에는 빨간 공 3개, 흰 공 2개가 들어 있고, 상자 B에는 빨간 공 1개, 흰 공 4개가 들어 있다. 두 상자 중 하나를 임의로 선택한 뒤 공 한 개를 꺼냈더니 빨간 공이었다. 이때 그 공이 상자 A에서 나왔을 확률은?



- ① ① $\frac{1}{2}$
- ② ② $\frac{3}{5}$
- ③ ③ $\frac{2}{5}$
- ④ ④ $\frac{3}{4}$

정답: ④

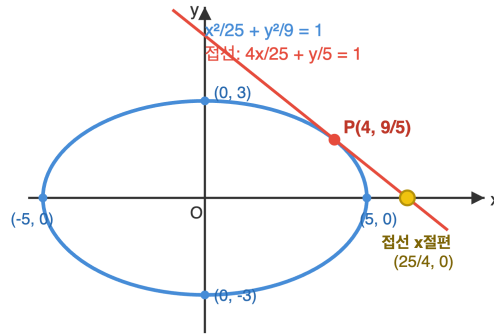
1단계: 사전확률 $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$, 조건부확률 $P(R|A) = \frac{3}{5}$, $P(R|B) = \frac{1}{5}$ 로 정리한다. 2단계: 전체확률의 법칙에 의해 $P(R) = P(R|A)P(A) + P(R|B)P(B) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$. 3단계: 베이즈 정리로 $P(A|R) = \frac{P(R|A)P(A)}{P(R)} = \frac{3/10}{2/5} = \frac{3}{4}$. 함정 보기 ②는 단순히 $P(R|A)$ 를 답으로 착각한 경우이다.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 '빨간 공이 나왔다'라는 결과를 보고 원인(상자)을 거꾸로 추정하는 사후확률 문제임을 인식하고, 베이즈 정리로 원인별 기여도의 비를 계산하는 것이다.

💡 베이즈 정리는 18세기 영국 목사 토머스 베이즈가 유고로 발표했으며, 오늘날 스팸 필터·의료 진단·AI 추론의 핵심 원리이다.

Q152 이차곡선 심화

타원 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 위의 점 $P\left(4, \frac{9}{5}\right)$ 에서의 접선이 x 축과 만나는 점의 x 좌표는?



- ① ① 4
- ② ② 5
- ③ ③ $\frac{25}{4}$
- ④ ④ $\frac{25}{3}$

정답: ③

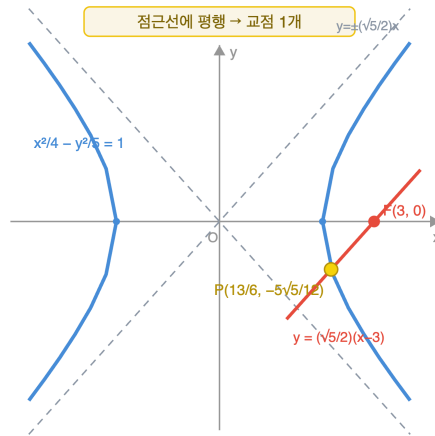
1단계: 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선 공식은 $\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1$ 이다. 2단계: $(x_1, y_1) = (4, 9/5)$, $a^2 = 25$, $b^2 = 9$ 를 대입하면 $\frac{4x}{25} + \frac{(9/5)y}{9} = 1$, 정리하면 $\frac{4x}{25} + \frac{y}{5} = 1$. 3단계: x 축과의 교점을 구하려면 $y = 0$ 을 대입, $\frac{4x}{25} = 1$ 이므로 $x = \frac{25}{4}$. 점 P 가 타원 위에 있는지 확인: $\frac{16}{25} + \frac{81/25}{9} = \frac{16}{25} + \frac{9}{25} = 1$ 로 적합.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 이차곡선의 접선 공식 $\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1$ 을 암기 내지 유도한 뒤, 절편을 구하는 기하학적 대수 연산으로 환원하는 것이다.

타원 접선의 x 절편 $x = a^2/x_1$ 은 점 P 를 지나는 '극선(polar line)'의 x 절편과 일치한다.

Q153 이차곡선 심화

쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ 의 오른쪽 초점 $F(3, 0)$ 을 지나고 점근선 $y = \frac{\sqrt{5}}{2}x$ 와 평행한 직선이 쌍곡선과 만나는 점의 좌표는?



- ① ① $\left(\frac{7}{6}, -\frac{5\sqrt{5}}{12}\right)$
- ② ② $\left(\frac{13}{6}, -\frac{5\sqrt{5}}{12}\right)$
- ③ ③ $\left(\frac{13}{6}, \frac{5\sqrt{5}}{12}\right)$
- ④ ④ $\left(\frac{5}{3}, -\frac{\sqrt{5}}{6}\right)$

정답: ②

1단계: 초점을 지나고 기울기 $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 인 직선 $y = \frac{\sqrt{5}}{2}(x - 3)$ 을 쌍곡선 방정식에 대입한다. 2단계:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{1}{5} \cdot \frac{5(x-3)^2}{4} = \frac{x^2 - (x-3)^2}{4} = \frac{6x-9}{4} = 1. \text{ 3단계: } 6x-9=4 \text{ 이므로 } x = \frac{13}{6}.$$

$$y = \frac{\sqrt{5}}{2} \left(\frac{13}{6} - 3\right) = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \left(-\frac{5}{6}\right) = -\frac{5\sqrt{5}}{12}. \text{ 따라서 교점은 } \left(\frac{13}{6}, -\frac{5\sqrt{5}}{12}\right) \text{ 유일하다. 함정 보기 ③은 부호 실수.}$$

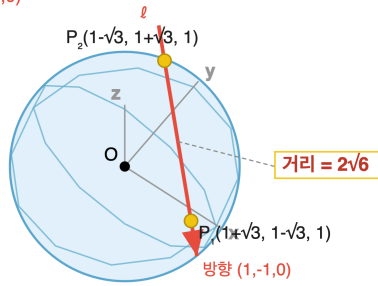
풀이 전략: 핵심 아이디어는 쌍곡선에 점근선과 평행한 직선을 대입하면 이차항이 소거되어 일차방정식이 되고, 따라서 교점이 정확히 하나라는 기하학적 특징을 수식으로 확인하는 것이다.

💡 점근선과 평행한 현은 이차곡선에서 쌍곡선만이 갖는 '단 하나의 교점'이라는 퇴화 현상을 만들며, 이는 사영 기하에서 '무한원점을 공유한다'라고 해석된다.

Q154 벡터·공간도형 심화

공간에서 구 $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ 와 직선 $(x, y, z) = (1, 1, 1) + t(1, -1, 0)$ 의 두 교점 사이의 거리는?

구 $x^2+y^2+z^2=9$ (반지름 3)
 직선 $(1,1,1)+t(1,-1,0)$



- ① ① $2\sqrt{2}$
- ② ② $2\sqrt{3}$
- ③ ③ 4
- ④ ④ $2\sqrt{6}$

정답: ④

1단계: 직선 위의 점 $(1+t, 1-t, 1)$ 을 구의 방정식에 대입한다. $(1+t)^2 + (1-t)^2 + 1 = 9$. 2단계: 좌변을 전개하면 $1+2t+t^2+1-2t+t^2+1 = 2t^2+3$ 이므로 $2t^2+3=9$, 즉 $t^2=3$ 이고 $t = \pm\sqrt{3}$. 3단계: 방향벡터 $(1, -1, 0)$ 의 크기가 $\sqrt{2}$ 이므로 두 매개변수 값 사이의 거리는 $|t_1 - t_2| \cdot |\vec{v}| = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{6}$. 함정 보기 ②는 방향벡터 크기 곱셈을 빠뜨린 경우.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 매개변수 직선을 구면 방정식에 대입해 t 에 관한 이차식을 만들고, 두 t 해의 차에 방향벡터의 크기를 곱해 실제 공간거리로 환산하는 단계적 변환이다.

두 교점의 중점 $M = (1, 1, 1)$ 은 구 중심에서 직선으로 내린 수선의 발이며, $|OM|^2 + (\text{거리}/2)^2 = 3 + 6 = 9 = R^2$ 로 피타고라스가 성립한다.

Q155 순열·조합·이항 심화

집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 집합 $Y = \{a, b, c\}$ 로의 전사함수(onto function)의 개수는?

- ① ① 120
- ② ② 144
- ③ ③ 150
- ④ ④ 180

정답: ③

1단계: X 에서 Y 로의 모든 함수의 개수는 $3^5 = 243$. 2단계: 치역이 Y 의 진부분집합이 되는 경우를 포함배제 원리로 빼준다. Y 에서 원소 하나를 뺀 2원소 집합으로만 보내는 함수는 $\binom{3}{1} \cdot 2^5 = 3 \cdot 32 = 96$. 3단계: 두 원소를 뺀 경우(상수함수)는 $\binom{3}{2} \cdot 1^5 = 3$. 따라서 전사함수의 개수는 $3^5 - \binom{3}{1} \cdot 2^5 + \binom{3}{2} \cdot 1^5 = 243 - 96 + 3 = 150$. 함정 보기 ②는 가운데 항을 2^4 로 착각한 경우이다.

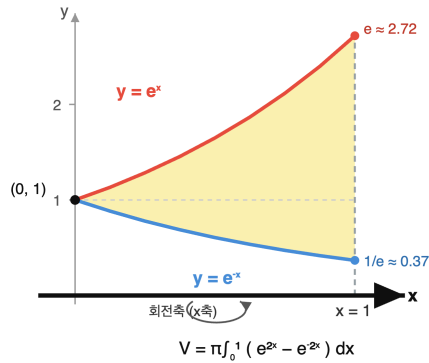
풀이 전략: 핵심 아이디어는 '치역이 Y 전체'라는 조건을 직접 세는 대신, '어떤 원소가 빠지는' 여집합을 포함배제로 제거해

$\sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} (m-k)^n$ 공식을 사용하는 것이다.

전사함수 개수 $\sum (-1)^k \binom{m}{k} (m-k)^n$ 은 제2종 스티링 수 $S(n, m)$ 에 $m!$ 을 곱한 값이며, 집합의 분할 개념과 연결된다.

Q156 미적분 통합 활용

두 곡선 $y = e^x$, $y = e^{-x}$ 와 직선 $x = 1$ 로 둘러싸인 영역을 x 축 둘레로 한 바퀴 회전시켜 만든 회전체의 부피는?



- ① ① $\frac{\pi}{2}(e^2 - e^{-2})$
- ② ② $\frac{\pi}{2}(e - e^{-1})^2$
- ③ ③ $\pi(e - e^{-1})^2$
- ④ ④ $\frac{\pi}{2}(e + e^{-1})^2$

정답: ②

1단계: 두 곡선은 $x = 0$ 에서 $y = 1$ 로 만나고, 구간 $[0, 1]$ 에서 $e^x \geq e^{-x}$ 이다. 회전체 부피는 큰 반지름 회전체에서 작은 반지름 회전체를 뺀 와서법으로 $V = \pi \int_0^1 \{(e^x)^2 - (e^{-x})^2\} dx = \pi \int_0^1 (e^{2x} - e^{-2x}) dx$ 이다. 2단계: 부정적분은 $\frac{e^{2x}}{2} + \frac{e^{-2x}}{2}$ 이므로

$V = \pi \left[\frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} \right]_0^1 = \pi \cdot \frac{e^2 + e^{-2} - 2}{2}$. 3단계: $e^2 + e^{-2} - 2 = (e - e^{-1})^2$ 이므로 $V = \frac{\pi}{2}(e - e^{-1})^2$. 함정 보기 ①은 -2 상수항을 빠뜨린 결과이다.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 두 곡선이 $x = 0$ 에서 교차하며 만드는 영역을 와서법으로 회전시킨 뒤, $e^{2x} + e^{-2x} - 2$ 가 쌍곡선 함수의 완전제곱 $(e - e^{-1})^2$ 으로 인수분해됨을 이용해 답을 간결하게 표현하는 것이다.

이런 형태의 적분방정식은 라플라스 변환의 기초이며, 신호처리에서 임펄스 응답 분석의 출발점이다.

Q157 초월함수 적분 심화

연속함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) = e^x + \int_0^1 t f(t) dt$ 를 만족시킨다. $f(1)$ 의 값은?

- ① ① $e + 1$
- ② ② $e + 2$
- ③ ③ $2e + 1$
- ④ ④ $2e - 1$

정답: ② $e + 2$

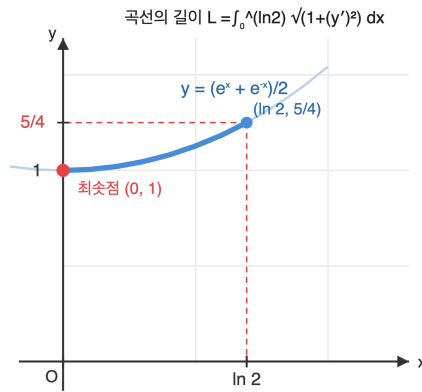
1단계: $\int_0^1 t f(t) dt$ 는 상수이므로 $A = \int_0^1 t f(t) dt$ 로 두면 $f(x) = e^x + A$. 2단계: A 를 자기참조 식에 다시 대입하면 $A = \int_0^1 t(e^t + A) dt = \int_0^1 t e^t dt + \frac{A}{2}$. 부분적분으로 $\int_0^1 t e^t dt = [t e^t]_0^1 - \int_0^1 e^t dt = e - (e - 1) = 1$. 3단계: $A = 1 + \frac{A}{2}$, 즉 $A = 2$. 따라서 $f(x) = e^x + 2$ 이고 $f(1) = e + 2$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 적분 구간이 상수이므로 $\int_0^1 t f(t) dt$ 를 미지수 A 로 놓고 식을 자기참조로 닫는 것. $f(x) = e^x + A$ 를 다시 적분식에 넣으면 A 에 관한 1차 방정식이 만들어진다.

이런 형태의 적분방정식은 라플라스 변환의 기초이며, 신호처리에서 임펄스 응답 분석의 출발점이다.

Q158 미적분 통합 활용

곡선 $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 의 $0 \leq x \leq \ln 2$ 부분의 길이는?



- ① ① $\frac{1}{2}$
- ② ② $\frac{3}{4}$
- ③ ③ 1
- ④ ④ $\frac{5}{4}$

정답: ② $\frac{3}{4}$

1단계: $y' = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ 이므로 $1 + (y')^2 = 1 + \frac{(e^x - e^{-x})^2}{4} = \frac{(e^x + e^{-x})^2}{4}$ (완전제곱). 2단계: 따라서 $\sqrt{1 + (y')^2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ($e^x + e^{-x} > 0$). 3단계: $L = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx = \frac{1}{2}[e^x - e^{-x}]_0^{\ln 2} = \frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 현수선(catenary)의 특수성: $1 + (y')^2$ 이 완전제곱식이 되어 루트가 깔끔히 풀린다. 이는 항등식 $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ 에서 비롯된다.

현수선은 사슬을 양 끝만 잡고 늘어뜨릴 때의 모양으로, 갈릴레오는 포물선이라 추측했지만 실제로는 쌍곡코사인이다. 게이트웨이 아치(미국 세인트루이스)도 뒤집힌 현수선이다.

Q159 통계 추론

어느 후보의 지지율 p 를 추정하려고 표본조사를 시행한다. 신뢰도 95%로 표본비율 \hat{p} 과 모비율 p 의 차이가 0.04 이하가 되도록 하려면 표본의 크기는 최소 얼마 이상이어야 하는가? 단, $\hat{p}(1 - \hat{p})$ 는 가장 보수적으로 1/4로 잡고 $z_{0.025} = 2$ 로 계산한다.

- ① ① 400
- ② ② 500
- ③ ③ 625
- ④ ④ 1000

정답: ③ 625

1단계: 모비율 95% 신뢰구간의 오차한계는 $E = z \sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})/n}$ 이고, $|\hat{p} - p| \leq E$ 조건을 $E \leq 0.04$ 로 두면 충분하다. 2단계: 가장 보수적으로 $\hat{p}(1 - \hat{p}) \leq \frac{1}{4}$ 이므로 $E \leq 2\sqrt{\frac{1}{4n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$. 따라서 $\frac{1}{\sqrt{n}} \leq 0.04$. 3단계: $\sqrt{n} \geq 25$ 이므로 $n \geq 625$. 최소 표본크기는 625.

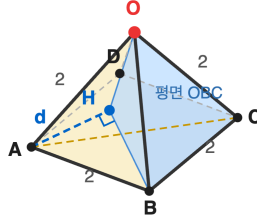
풀이 전략: 핵심 아이디어는 모비율 추정에서 분산이 최대가 되는 $p = 1/2$ 를 가정하는 보수적 설계. \hat{p} 를 사전에 모를 때 신뢰구간 폭의 최댓값을 사용해 최악의 경우에도 정확도를 보장한다.

여론조사의 '오차한계 $\pm 3\%$, 95% 신뢰수준'이라는 문구가 이 공식에서 나온다. $\pm 3\%$ 면 약 1100명, $\pm 2\%$ 면 약 2500명이 필요하다.

Q160 벡터·공간도형 심화

모든 모서리의 길이가 2인 정사각뿔 O-ABCD가 있다(밑면 ABCD는 정사각형, 옆면은 정삼각형). 점 A에서 평면 OBC에 이르는 거리는?

정사각뿔 O-ABCD (모든 모서리 = 2)



A에서 평면 OBC까지 거리 $d = 2\sqrt{6}/3$

- ① ① $\frac{\sqrt{6}}{3}$
- ② ② $\frac{2\sqrt{6}}{3}$
- ③ ③ $\sqrt{2}$
- ④ ④ $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

정답: ② $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

1단계: 좌표 설정 $A(0,0,0)$, $B(2,0,0)$, $C(2,2,0)$. O 가 밑면의 중심 $(1,1,0)$ 위 높이 h 에 있고 $OA = 2$ 이므로 $1 + 1 + h^2 = 4$, $h = \sqrt{2}$. 즉 $O(1,1,\sqrt{2})$. 2단계: 사면체 OABC의 부피를 두 가지로 표현. 밑면을 $\triangle ABC$ (직각이등변, 넓이 $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$)로 보면 $V = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. 3단계: 밑면을 $\triangle OBC$ (정삼각형, 변 2, 넓이 $\sqrt{3}$)로 보면 $V = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot d$. 두 식을 같게 두면 $d = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 '사면체 부피는 어느 면을 밑면으로 잡든 같다'는 사실을 이용해 거리를 역으로 구하는 것. 수선의 발을 직접 찾는 대신 부피 = (1/3)·밑넓이·높이의 두 표현이 같음을 활용한다.

이 정사각뿔은 옆면이 정삼각형인 'Johnson solid J1'으로, 정팔면체를 한가운데서 자른 절반이다. 두 개를 붙이면 정팔면체가 된다.

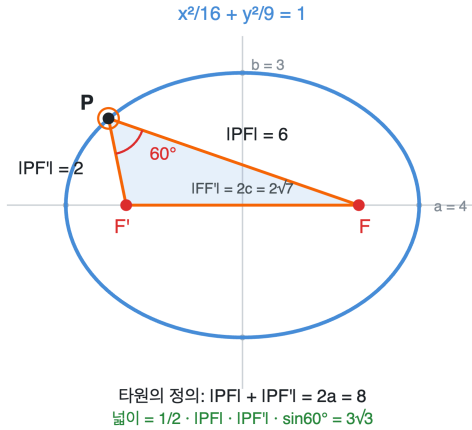


고3 수학 심화

총 40문제 · 문제와 정답·풀이 포함

Q161 이차곡선 심화

타원 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ 의 두 초점을 F, F' 이라 하자. 타원 위의 점 P 에 대해 $\angle FPF' = 60^\circ$ 일 때, 삼각형 FPF' 의 넓이는?



- ① ① $\sqrt{3}$
- ② ② $2\sqrt{3}$
- ③ ③ $3\sqrt{3}$
- ④ ④ $4\sqrt{3}$

정답: ③ $3\sqrt{3}$

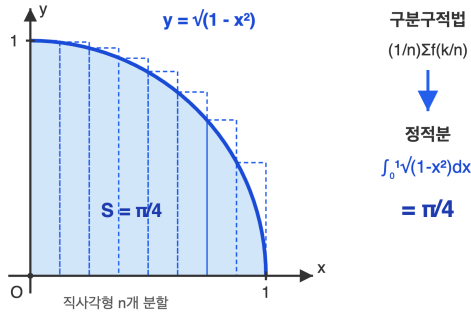
1단계: $a = 4, b = 3, c = \sqrt{16-9} = \sqrt{7}$. 타원의 정의에 의해 $|PF| + |PF'| = 2a = 8$ 이고 $|FF'| = 2c = 2\sqrt{7}$. 2단계: 코사인 법칙: $|FF'|^2 = |PF|^2 + |PF'|^2 - 2|PF||PF'| \cos 60^\circ = (|PF| + |PF'|)^2 - 3|PF||PF'|$. 즉 $28 = 64 - 3|PF||PF'|$ 이므로 $|PF||PF'| = 12$. 3단계: 삼각형 넓이 = $\frac{1}{2}|PF||PF'| \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 $(|PF| + |PF'|)$ 와 $(|PF| \cdot |PF'|)$ 라는 두 대칭식을 알면 삼각형이 결정된다는 것. 타원 정의로 합을, 코사인법칙으로 곱을 구한 뒤 사인공식으로 넓이를 계산하는 3단 콤보다.

이 결과를 일반화하면 $\angle FPF' = \theta$ 인 점 P 에서 초점삼각형의 넓이는 $b^2 \tan(\theta/2)$ 이다. 여기서 $b^2 \tan 30^\circ = 9/\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$ 로 결과가 일치한다.

Q162 수열 극한·급수 심화

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 - \frac{k^2}{n^2}} \text{의 값은?}$$



- ① ① $\frac{\pi}{6}$
- ② ② $\frac{\pi}{4}$
- ③ ③ $\frac{\pi}{3}$
- ④ ④ $\frac{\pi}{2}$

정답: ② $\frac{\pi}{4}$

1단계: 구분구적법에 의해 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(k/n) \rightarrow \int_0^1 f(x) dx$ (단 $f(x) = \sqrt{1-x^2}$). 2단계: $y = \sqrt{1-x^2}$ ($0 \leq x \leq 1$)은 단위원의 1사분면 부분이며 $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ 는 사분원의 넓이와 같다. 3단계: 단위원 넓이 π 의 1/4이므로 답은 $\frac{\pi}{4}$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 $\frac{1}{n} \sum f(k/n)$ 형태가 정확히 정적분의 리만합이라는 점, 그리고 $\sqrt{1-x^2}$ 의 적분은 치환 없이도 사분원 넓이라는 기하적 해석으로 즉시 풀린다는 점이다.

이 극한값 $\pi/4$ 는 라이프니츠 공식 $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots$ 와도 같은 값이며, π 를 정의하는 여러 가지 표현 중 하나다.

Q163 초월함수 미분 심화

함수 $f(x) = e^x + x$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $g'(1)$ 의 값은?

- ① ① $\frac{1}{2}$
- ② ② $\frac{1}{e+1}$
- ③ ③ 1
- ④ ④ e

정답: ① $\frac{1}{2}$

1단계: $f(0) = e^0 + 0 = 1$ 이므로 $g(1) = 0$. 2단계: 역함수 미분 공식 $g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$. 3단계: $f'(x) = e^x + 1$ 이므로 $f'(0) = 2$, 따라서 $g'(1) = \frac{1}{2}$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 $f(g(y)) = y$ 의 양변을 미분해 $f'(g(y)) \cdot g'(y) = 1$ 을 얻는 것. $y=1$ 을 대입하기 위해 $f(x) = 1$ 의 해 $x = 0$ 을 먼저 찾는 게 관건이다.

$f(x) = e^x + x$ 는 단조증가하므로 역함수가 항상 존재하지만, 그 명시적 표현은 람베르트 W 함수가 필요하다. 역함수가 존재해도 식으로 못 쓰는 대표 예시.

Q164 초월함수 적분 심화

$\int_0^{\pi/2} x^2 \cos x dx$ 의 값은?

- ① ① $\pi - 2$
- ② ② $\frac{\pi^2}{4} - 2$
- ③ ③ $\frac{\pi^2}{2} - 1$
- ④ ④ $\frac{\pi^2}{4} + 2$

정답: ② $\frac{\pi^2}{4} - 2$

1단계: 부분적분 ($u = x^2, dv = \cos x dx$): $\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x - \int 2x \sin x dx$. 2단계: 다시 부분적분 ($u = 2x, dv = \sin x dx$): $\int 2x \sin x dx = -2x \cos x + \int 2 \cos x dx = -2x \cos x + 2 \sin x$. 따라서 $\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C$. 3단계: 0에서 $\pi/2$ 까지 대입: $\left(\frac{\pi^2}{4} \cdot 1 + \pi \cdot 0 - 2 \cdot 1\right) - 0 = \frac{\pi^2}{4} - 2$.

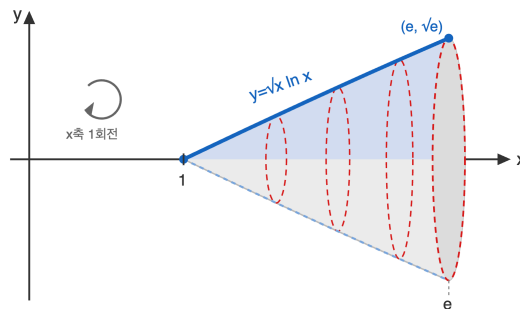
풀이 전략: 핵심 아이디어는 다항식이 곱해진 적분에서는 다항식을 미분하는 방향(다항식이 u)으로 부분적분을 반복해 차수를 낮추는 것. $x^2 \rightarrow 2x \rightarrow 2$ 로 두 번에 다항식이 사라진다.

이런 적분은 진동하는 시스템의 모멘트 계산에 등장한다. 일반화하면 $\int x^n \cos x dx$ 는 n 번의 부분적분으로 풀린다.

Q165 미적분 통합 활용

곡선 $y = \sqrt{x} \ln x$ ($1 \leq x \leq e$)와 x 축 사이의 영역을 x 축 둘레로 1회전시킨 회전체의 부피는?

$$V = \pi \int_1^e y^2 dx = \pi \int_1^e x \ln^2 x dx$$



- ① ① $\frac{\pi(e^2 - 1)}{4}$
- ② ② $\frac{\pi e^2}{2}$
- ③ ③ $\pi(e - 1)$
- ④ ④ $\frac{\pi(e^2 + 1)}{4}$

정답: ① $\frac{\pi(e^2 - 1)}{4}$

1단계: 회전체 부피 공식 $V = \pi \int_1^e y^2 dx = \pi \int_1^e x \ln^2 x dx$. 2단계: 부분적분 ($u = \ln^2 x, dv = x dx$): $\int x \ln^2 x dx = \frac{x^2 \ln^2 x}{2} - \int x \ln x dx$. 또 부분적분으로 $\int x \ln x dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4}$. 따라서 $\int x \ln^2 x dx = \frac{x^2 \ln^2 x}{2} - \frac{x^2 \ln x}{2} + \frac{x^2}{4}$. 3단계: 1에서 e 까지 대입: $\left(\frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{2} + \frac{e^2}{4}\right) - \left(0 - 0 + \frac{1}{4}\right) = \frac{e^2 - 1}{4}$. 따라서 $V = \frac{\pi(e^2 - 1)}{4}$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 $y^2 = x \ln^2 x$ 가 '다항식 × 로그제곱' 패턴이라는 점. 부분적분을 두 번 적용해 \ln^2 의 차수를 단계적으로 떨어뜨리는 게 정석이다.

$\sqrt{x} \ln x$ 는 $1 \leq x \leq e$ 에서 작은 값이지만 회전시키면 부피가 $e^2/4$ 수준이 된다. 회전이 부피를 어떻게 증폭하는지 보여주는 좋은 예다.

Q166 수열 극한·급수 심화

한 변의 길이가 1인 정사각형 S_1 이 있다. S_1 의 네 변을 각각 1:2로 내분하는 점들을 차례로 이어 만든 정사각형을 S_2 라 하고, 같은 방식으로 S_2 의 네 변을 1:2로 내분하는 점들을 이어 S_3 를 만든다. 이 과정을 무한히 반복할 때, 모든 정사각형 S_n ($n = 1, 2, 3, \dots$)의 둘레의 길이의 합을 구하시오.

- ① $6 + 2\sqrt{5}$
- ② $9 + 3\sqrt{5}$
- ③ $12 + 4\sqrt{5}$
- ④ $9 + 6\sqrt{5}$

정답: ② $9 + 3\sqrt{5}$

1단계) S_1 의 한 변(길이 1)을 1:2로 내분한 점들로 만든 새 정사각형 S_2 의 한 변의 길이는 직각삼각형 빗변으로

$$\sqrt{(1/3)^2 + (2/3)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3} \text{이다.}$$

2단계) 닳음에 의해 일반항 S_n 의 한 변은 $(\frac{\sqrt{5}}{3})^{n-1}$, 둘레는 $4(\frac{\sqrt{5}}{3})^{n-1}$ 이다.

3단계) 공비 $r = \frac{\sqrt{5}}{3} < 1$ 인 무한등비급수의 합 $L = \frac{4}{1 - \sqrt{5}/3} = \frac{12}{3 - \sqrt{5}} = \frac{12(3 + \sqrt{5})}{4} = 9 + 3\sqrt{5}$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 변의 일정 비율 내분으로 만든 도형이 원래와 닳음이라는 점을 이용해 한 변의 비를 직각삼각형으로 구하고, 무한등비급수 공식 $\frac{a}{1-r}$ 로 합을 구하는 것이다. 비율을 분모 유리화로 정리하는 단계가 함정이다.

이렇게 정사각형 안에 비스듬한 정사각형을 반복해서 그리는 그림은 피타고라스 정리의 시각적 증명에도 활용된다.

Q167 초월함수 미분 심화

곡선 $x^3 + y^3 - 3xy = 1$ 위의 점 $(1, 0)$ 에서의 접선의 방정식을 구하시오.

- ① $y = x - 1$
- ② $y = -x + 1$
- ③ $y = 2x - 2$
- ④ $y = -2x + 2$

정답: ① $y = x - 1$

1단계) 점 $(1, 0)$ 대입: $1 + 0 - 0 = 1$ 이므로 곡선 위 점 확인.

2단계) 양변을 x 로 음함수 미분: $3x^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} - 3y - 3x \frac{dy}{dx} = 0$, 정리하면 $(y^2 - x) \frac{dy}{dx} = y - x^2$.

3단계) $(1, 0)$ 대입: $(0 - 1) \frac{dy}{dx} = 0 - 1$ 이므로 $\frac{dy}{dx} = 1$. 따라서 접선은 $y - 0 = 1 \cdot (x - 1)$, 즉 $y = x - 1$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 음함수를 y 에 대해 풀지 않고 양변을 직접 미분하여 $\frac{dy}{dx}$ 를 분수꼴로 얻은 뒤, 점을 대입하여 분모분자가 0이 되지 않는지 확인하는 것이다.

$x^3 + y^3 = 3xy$ 는 데카르트의 엽형선(folium of Descartes)으로 17세기 데카르트와 페르마의 미분 논쟁에서 등장한 곡선이다.

Q168 초월함수 적분 심화

정적분 $\int_0^1 \frac{x \ln(1+x^2)}{1+x^2} dx$ 의 값을 구하시오.

- ① ① $\frac{(\ln 2)^2}{2}$
- ② ② $\frac{(\ln 2)^2}{4}$
- ③ ③ $\frac{\ln 2}{2}$
- ④ ④ $\ln(\ln 2)$

☞ 정답: ② $\frac{(\ln 2)^2}{4}$

📖 1단계) $u = \ln(1+x^2)$ 로 치환하면 $du = \frac{2x}{1+x^2} dx$ 이므로 $\frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} du$.

2단계) 적분 구간 변환: $x = 0$ 일 때 $u = 0$, $x = 1$ 일 때 $u = \ln 2$.

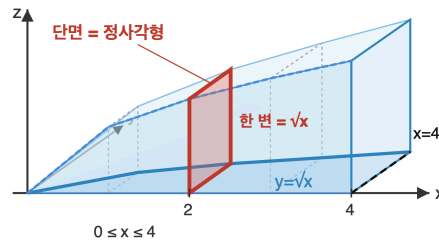
3단계) 변환된 적분: $\int_0^{\ln 2} u \cdot \frac{1}{2} du = \frac{u^2}{4} \Big|_0^{\ln 2} = \frac{(\ln 2)^2}{4}$.

🧠 풀이 전략: 핵심 아이디어는 분자에 $\ln(1+x^2)$ 이 있고 그 미분이 $\frac{2x}{1+x^2}$ 임을 알아채어 $u = \ln(1+x^2)$ 로 한 번에 치환하는 것이다. 부분적분으로 풀면 매우 복잡하지만 치환 한 방향으로 끝난다.

💡 이런 형태의 적분은 $\int f(g(x))g'(x) dx$ 꼴로, '연쇄법칙의 역연산'이라 부르기도 한다.

Q169 미적분 통합 활용

좌표평면에서 곡선 $y = \sqrt{x}$ 와 x 축, 직선 $x = 4$ 로 둘러싸인 영역을 밑면으로 하는 입체가 있다. 이 입체를 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체의 부피를 구하시오.



- ① ① 4
- ② ② 6
- ③ ③ 8
- ④ ④ 12

☞ 정답: ③ 8

📖 1단계) 위치 x 에서 단면의 정사각형의 한 변의 길이는 밑면의 높이 \sqrt{x} 와 같다.

2단계) 단면적 $S(x) = (\sqrt{x})^2 = x$.

3단계) 부피 $V = \int_0^4 S(x) dx = \int_0^4 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^4 = \frac{16}{2} = 8$.

🧠 풀이 전략: 핵심 아이디어는 회전체가 아니라 '단면이 정사각형인 일반 입체'이므로, 한 변의 길이가 곡선의 높이임을 이용해 단면적을 구하고 적분하는 것이다. 회전체와 달리 π 가 등장하지 않는다.

💡 이런 단면 적분 방식은 카발리에리(Cavalieri)의 원리에서 출발했다. 단면적이 같으면 부피도 같다는 직관이다.

Q170 확률 심화

어느 학교의 전체 학생 중 60%가 남학생이고 40%가 여학생이다. 남학생 중 안경을 쓴 학생의 비율은 30%, 여학생 중 안경을 쓴 학생의 비율은 50%라고 한다. 이 학교의 학생 한 명을 임의로 뽑았더니 안경을 쓰고 있었다. 이 학생이 여학생일 확률을 구하시오.

- ① ① $\frac{5}{19}$
- ② ② $\frac{8}{19}$
- ③ ③ $\frac{10}{19}$
- ④ ④ $\frac{12}{19}$

정답: ③ $\frac{10}{19}$

1단계) 각 사건을 정의: M =남학생, F =여학생, G =안경 착용. $P(M) = 0.6, P(F) = 0.4, P(G|M) = 0.3, P(G|F) = 0.5$.

2단계) 전체 안경 착용 확률(전체확률 정리): $P(G) = P(M)P(G|M) + P(F)P(G|F) = 0.6 \cdot 0.3 + 0.4 \cdot 0.5 = 0.18 + 0.20 = 0.38$.

3단계) 베이즈 정리: $P(F|G) = \frac{P(F)P(G|F)}{P(G)} = \frac{0.20}{0.38} = \frac{20}{38} = \frac{10}{19}$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 '안경을 썼다는 결과'에서 '여학생일 가능성'을 거꾸로 추론하는 것으로, 베이즈 정리

$P(F|G) = \frac{P(F \cap G)}{P(G)}$ 를 사용한다. 함정은 $P(G|F) = 0.5$ 를 그대로 답이라고 착각하는 것이다.

이 추론 방식은 의료진단(검사 양성일 때 실제 환자일 확률)에서 자주 쓰이며, 검사 정확도가 높아도 유병률이 낮으면 양성예측도가 의외로 낮아진다.

Q171 통계 추론

정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따르는 모집단에서 크기 9인 표본을 임의추출하여 표본평균 X 를 구하였다. $P(|X - m| \leq \frac{\sigma}{2})$ 의 값을 구하시오. (단, $P(0 \leq Z \leq 1.5) = 0.4332$)

- ① ① 0.6826
- ② ② 0.8664
- ③ ③ 0.9544
- ④ ④ 0.9772

정답: ② 0.8664

1단계) 표본평균의 분포: $X \sim N(m, \frac{\sigma^2}{9})$ 이므로 표본평균의 표준편차는 $\frac{\sigma}{3}$.

2단계) 표준화: $Z = \frac{X - m}{\sigma/3}$. 따라서 $|X - m| \leq \frac{\sigma}{2}$ 를 표준화하면 $|Z| \leq \frac{\sigma/2}{\sigma/3} = \frac{3}{2} = 1.5$.

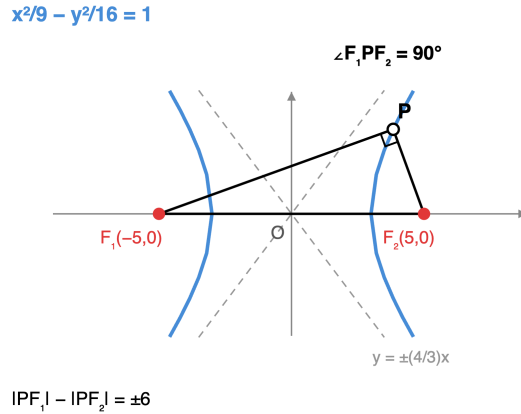
3단계) 대칭성에 의해 $P(|Z| \leq 1.5) = 2P(0 \leq Z \leq 1.5) = 2 \times 0.4332 = 0.8664$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 표본평균의 표준편차가 σ/\sqrt{n} 임을 이용해 한계 $\sigma/2$ 를 표준편차 단위(=Z값)로 환산하는 것이다. 함정은 모집단 표준편차 σ 로 그대로 표준화해 $Z = 0.5$ 로 잘못 처리하는 것이다.

표본평균이 모평균의 한 표준편차(= σ/\sqrt{n}) 이내에 들어올 확률은 약 68.26%, 두 배 이내는 95.44%, 이는 68-95-99.7 규칙으로 알려져 있다.

Q172 이차곡선 심화

쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 의 두 초점을 F_1, F_2 라 하자. 쌍곡선 위의 점 P 에 대하여 $\angle F_1PF_2 = 90^\circ$ 일 때, 삼각형 PF_1F_2 의 넓이를 구하시오.



- ① ① 12
- ② ② 14
- ③ ③ 16
- ④ ④ 20

정답: ③ 16

1단계) 쌍곡선의 정의에서 $a = 3, b = 4, c = \sqrt{9+16} = 5$. 따라서 $||PF_1| - |PF_2|| = 2a = 6, |F_1F_2| = 2c = 10$.

2단계) $\angle F_1PF_2 = 90^\circ$ 이므로 피타고라스 정리에 의해 $|PF_1|^2 + |PF_2|^2 = |F_1F_2|^2 = 100$.

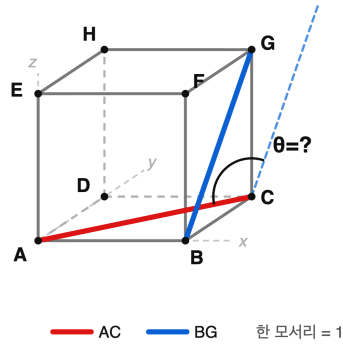
3단계) $(|PF_1| - |PF_2|)^2 = |PF_1|^2 + |PF_2|^2 - 2|PF_1||PF_2| = 36$ 이므로 $100 - 2|PF_1||PF_2| = 36$, 즉 $|PF_1||PF_2| = 32$. 직각삼각형의 넓이 $= \frac{1}{2}|PF_1||PF_2| = \frac{1}{2} \cdot 32 = 16$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 쌍곡선의 정의로 두 거리의 '차'를, 직각 조건으로 두 거리의 '제곱의 합'을 얻은 뒤, $(p - q)^2 = p^2 + q^2 - 2pq$ 항등식으로 곱 $|PF_1||PF_2|$ 를 구해 직각삼각형의 넓이 공식에 대입하는 것이다.

쌍곡선의 두 초점에서 위의 점에 이르는 거리의 곱은 쌍곡선의 위치에 따라 다르지만, '직각 초점삼각형'에서는 항상 b^2 의 두 배가 된다 (여기서는 $2b^2 = 32$).

Q173 벡터·공간도형 심화

한 모서리의 길이가 1인 정육면체 ABCD-EFGH에서, 면 ABCD의 대각선 \overline{AC} 와 면 BFGC의 대각선 \overline{BG} 가 이루는 각의 크기를 구하시오. (단, 두 직선이 이루는 각은 0° 이상 90° 이하의 각으로 본다.)



- ① ① 30°
- ② ② 45°
- ③ ③ 60°
- ④ ④ 90°

정답: ③ 60°

1단계) 정육면체에 좌표를 두면 $A(0, 0, 0), C(1, 1, 0), B(1, 0, 0), G(1, 1, 1)$. 따라서 방향벡터는 $\vec{AC} = (1, 1, 0), \vec{BG} = (0, 1, 1)$.

2단계) 내적과 크기: $\vec{AC} \cdot \vec{BG} = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 1, |\vec{AC}| = |\vec{BG}| = \sqrt{2}$.

3단계) $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2}$ 이므로 $\theta = 60^\circ$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 입체에 좌표계를 도입해 두 면대각선의 방향벡터를 성분으로 표현하고, 내적의 정의 $\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$ 로 두 직선이 이루는 각을 구하는 것이다. 두 대각선이 직접 만나지 않더라도 방향벡터로 각도를 계산할 수 있다.

정육면체의 면대각선 6개가 만드는 도형은 정팔면체와 깊은 관계가 있고, 임의의 두 면대각선이 이루는 각은 60° 또는 90° 둘 중 하나이다.

Q174 미적분 통합 활용

매개변수방정식 $x = t^2, y = \frac{2}{3}t^3$ ($0 \leq t \leq \sqrt{3}$)으로 표시되는 곡선의 길이를 구하시오.

- ① ① $\frac{10}{3}$
- ② ② 4
- ③ ③ $\frac{14}{3}$
- ④ ④ $\frac{16}{3}$

정답: ③ $\frac{14}{3}$

1단계) 매개변수곡선 길이 공식 $L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt. \frac{dx}{dt} = 2t, \frac{dy}{dt} = 2t^2.$

2단계) 피적분함수 정리: $\sqrt{(2t)^2 + (2t^2)^2} = \sqrt{4t^2(1+t^2)} = 2t\sqrt{1+t^2}$ ($t \geq 0$ 이므로 절댓값 처리 불필요).

3단계) $u = 1 + t^2, du = 2t dt$ 로 치환하면 $L = \int_1^4 \sqrt{u} du = \frac{2}{3}u^{3/2} \Big|_1^4 = \frac{2}{3}(8-1) = \frac{14}{3}.$

풀이 전략: 핵심 아이디어는 매개변수곡선 길이 공식의 적분을 곧바로 계산하는 대신, 근호 안을 인수분해해 $2t$ 를 빼낸 뒤 $u = 1 + t^2$ 치환으로 한 번에 정리하는 것이다. 함정은 $\sqrt{4t^2}$ 를 $2t$ 가 아닌 $|2t|$ 로 처리하지 않거나, 거꾸로 항상 $|2t|$ 로 두려다 적분구간을 헛갈리는 것이다.

매개변수곡선 $x = t^2, y = \frac{2}{3}t^3$ 은 반쪽 형태의 '뉴턴-니올의 곡선'으로, $y^2 = \frac{4}{9}x^3$, 즉 반입방포물선과 같다.

Q175 순열·조합·이항 심화

방정식 $x_1 + x_2 + x_3 = 12$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수해 (x_1, x_2, x_3) 중에서 모든 $i = 1, 2, 3$ 에 대하여 $x_i \leq 7$ 인 해의 개수를 구하시오.

- ① ① 36
- ② ② 40
- ③ ③ 46
- ④ ④ 52

정답: ③ 46

1단계) 제약 없이 $x_1 + x_2 + x_3 = 12, x_i \geq 0$ 의 해의 개수는 중복조합으로 $\binom{12+2}{2} = \binom{14}{2} = 91.$

2단계) 어떤 한 변수, 예컨대 $x_1 \geq 8$ 인 경우는 $y_1 = x_1 - 8 \geq 0$ 으로 치환하면 $y_1 + x_2 + x_3 = 4$ 이므로 $\binom{6}{2} = 15.$ 변수가 3개이므로 합은 $3 \times 15 = 45.$ 두 변수가 동시에 ≥ 8 이면 좌변 합이 음이 되므로 0개.

3단계) 포함과 배제 원리로 $91 - 45 + 0 = 46.$

풀이 전략: 핵심 아이디어는 상한 제약 $x_i \leq 7$ 을 직접 다루지 않고, '제한 없는 해 개수'에서 ' $x_i \geq 8$ 인 나쁜 경우'를 포함배제로 빼는 것이다. 합이 12로 작아 두 변수 동시 위반은 불가능함을 인지하면 두 번째 항이 0이 되어 계산이 짧아진다.

이런 상한이 있는 음이 아닌 정수해 문제는 일반화하면 다항계수의 생성함수 $[x^n](1+x+\dots+x^k)^m$ 의 계수와 같다.

Q176 초월함수 적분 심화

함수 $F(x) = \int_0^x te^{-t^2} dt$ 에 대해 $F(\sqrt{\ln 4})$ 의 값을 구하시오.

- ① ① $\frac{1}{4}$
- ② ② $\frac{3}{8}$
- ③ ③ $\frac{1}{2}$
- ④ ④ $1 - \frac{1}{e}$

정답: ②

1단계 $u = t^2$ 치환. $du = 2t dt$ 이므로 $t dt = \frac{1}{2} du$. $t = 0$ 일 때 $u = 0$, $t = x$ 일 때 $u = x^2$. **2단계**

$F(x) = \int_0^{x^2} \frac{1}{2} e^{-u} du = \frac{1}{2} [-e^{-u}]_0^{x^2} = \frac{1}{2} (1 - e^{-x^2})$. **3단계** $x = \sqrt{\ln 4}$ 이면 $x^2 = \ln 4$, $e^{-\ln 4} = \frac{1}{4}$. 따라서

$$F = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$

풀이 전략: 핵심 아이디어는 te^{-t^2} 꼴은 $u = t^2$ 치환으로 e^{-u} 가 되어 즉시 적분된다는 점. 정적분으로 정의된 함수라도 닫힌 형태가 가능한지 먼저 확인해야 한다.

💡 $\int_0^\infty te^{-t^2} dt = \frac{1}{2}$ 로 수렴하며, 이는 가우스적분 $\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ 와 함께 정규분포 이론의 토대가 된다.

Q177 순열·조합·이항 심화

서로 다른 6개의 문자 a, b, c, d, e, f 중 4개를 뽑아 일렬로 나열할 때, a 와 b 를 모두 포함하면서 a 와 b 가 서로 이웃하지 않도록 하는 경우의 수를 구하시오.

- ① ① 48
- ② ② 60
- ③ ③ 72
- ④ ④ 96

정답: ③

1단계 a, b 를 반드시 포함하므로 나머지 두 자리에는 $\{c, d, e, f\}$ 중 2개를 선택: $\binom{4}{2} = 6$ 가지. **2단계** 선택된 4개를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $4! = 24$. 그 중 a, b 가 이웃하는 경우는 a, b 를 한 묶음(2가지 순서)으로 보고 3개를 나열: $3! \times 2! = 12$. 따라서 이웃하지 않는 배열은 $24 - 12 = 12$. **3단계** 총 경우의 수는 $6 \times 12 = 72$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 '뽑기와 줄세우기'를 분리한 뒤, '이웃' 조건은 여사건(이웃하는 경우)을 빼는 것이 빠르다는 것. 직접 자리 배치(가운데 끼워넣기)도 가능하지만 이 방법이 가장 정확.

💡 a, b 사이에 다른 두 문자가 끼워지는 형태인 'gap method'를 직접 적용해도 $4 \times 3 \times 2! \times 3 = 72$ 로 같은 답.

Q178 확률 심화

한 개의 주사위를 던져 1 또는 2가 나오면 동전을 2번, 3 또는 4가 나오면 동전을 3번, 5 또는 6이 나오면 동전을 4번 던진다. 동전의 앞면이 정확히 2번 나왔을 때, 처음 주사위에서 3 또는 4가 나왔을 조건부확률을 구하시오.

- ① ① $\frac{1}{4}$
- ② ② $\frac{1}{3}$
- ③ ③ $\frac{3}{8}$
- ④ ④ $\frac{1}{2}$

정답: ③

1단계) 사건 A_k : 주사위에서 k 번 던지는 결과가 k ($k = 2, 3, 4$). $P(A_k) = \frac{1}{6}$. 사건 B : 앞면이 정확히 2번. 조건부확률:

$$P(B|A_2) = \binom{2}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, P(B|A_3) = \binom{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}, P(B|A_4) = \binom{4}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}. \text{ 2단계) 전확률 정리:}$$

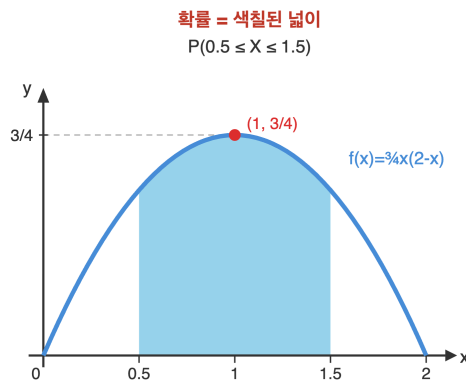
$$P(B) = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} \right) = \frac{1}{6} \cdot \frac{2+3+3}{8} = \frac{1}{6} \cdot 1 = \frac{1}{6}. \text{ 3단계) 베이즈정리: } P(A_3|B) = \frac{P(B|A_3)P(A_3)}{P(B)} = \frac{(3/8)(1/6)}{1/6} = \frac{3}{8}.$$

풀이 전략: 핵심 아이디어는 주사위 결과로 동전 시행이 분기되는 2단계 확률 구조. 베이즈정리로 '결과를 보고 원인을 추론'하는 전형적 사후확률 문제.

동전 4번 던져 앞면 2번 나올 확률 $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$ 이 동전 3번 던져 앞면 2번 나올 확률 $\frac{3}{8}$ 과 같다는 사실은 직관에 반해 자주 함정으로 활용된다.

Q179 확률 심화

연속확률변수 X 의 확률밀도함수가 $f(x) = ax(2-x)$ ($0 \leq x \leq 2$)이고 그 외에서는 0이다. 이때 $P(0.5 \leq X \leq 1.5)$ 의 값을 구하시오.



- ① ① $\frac{1}{2}$
- ② ② $\frac{9}{16}$
- ③ ③ $\frac{11}{16}$
- ④ ④ $\frac{13}{16}$

정답: ③

1단계) 확률밀도함수 조건 $\int_0^2 f(x)dx = 1$ 로부터 a 결정. $\int_0^2 a(2x-x^2)dx = a \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = a \left(4 - \frac{8}{3} \right) = \frac{4a}{3} = 1$, 따라서

$$a = \frac{3}{4}. \text{ 2단계) } P(0.5 \leq X \leq 1.5) = \int_{0.5}^{1.5} (2x-x^2)dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_{0.5}^{1.5} = \frac{9}{4} - \frac{27}{24} = \frac{54-27}{24} = \frac{27}{24}.$$

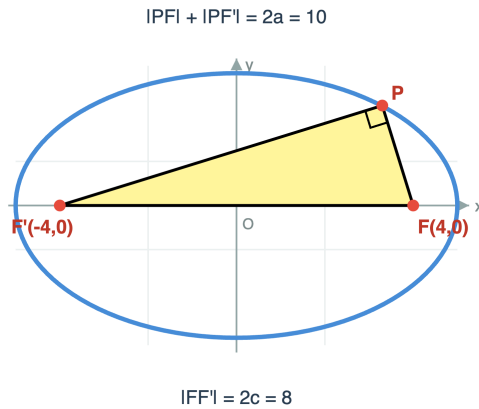
$$\frac{1}{4} - \frac{1}{24} = \frac{6-1}{24} = \frac{5}{24}. \text{ 차: } \frac{22}{24} = \frac{11}{12}. \text{ 따라서 } P = \frac{3}{4} \cdot \frac{11}{12} = \frac{33}{48} = \frac{11}{16}.$$

풀이 전략: 핵심 아이디어는 미지의 상수 a 를 '전체 확률 1'로 결정하고 구간확률을 정적분으로 계산. 이차다항식 밀도함수는 정규분포가 아닌 베타분포 계열의 단순화 모형.

$f(x) = \frac{3}{4}x(2-x)$ 는 베타분포 Beta(2, 2)를 [0, 2]로 늘린 형태로, 양 끝에서 0이고 중심에서 최대인 대칭 분포의 대표 사례.

Q180 이차곡선 심화

타원 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 의 두 초점을 F, F' 이라 하자. 타원 위의 점 P 에 대해 $\angle FPF' = 90^\circ$ 일 때, $|PF| \cdot |PF'|$ 의 값을 구하시오.



- ① ① 9
- ② ② 16
- ③ ③ 18
- ④ ④ 25

정답: ③

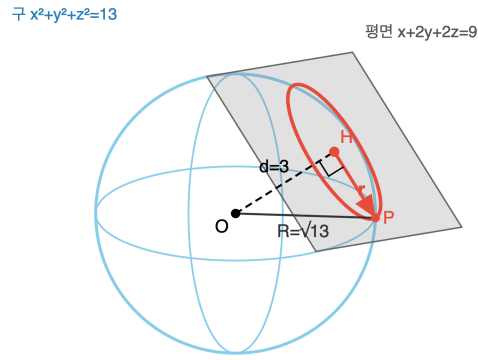
1단계) 타원 식에서 $a = 5, b = 3$ 이므로 $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$. 두 초점 $F(4, 0), F'(-4, 0)$ 이고 $|FF'| = 2c = 8$. 2단계) 타원의 정의에 의해 $|PF| + |PF'| = 2a = 10$. $\angle FPF' = 90^\circ$ 이므로 피타고라스에 의해 $|PF|^2 + |PF'|^2 = |FF'|^2 = 64$. 3단계) 항등식 $(|PF| + |PF'|)^2 = |PF|^2 + |PF'|^2 + 2|PF||PF'|$ 에 대입하면 $100 = 64 + 2|PF||PF'|$, 따라서 $|PF||PF'| = \frac{36}{2} = 18$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 두 초점거리의 '합'(타원 정의)과 '제곱합'(직각이므로 피타고라스)을 동시에 알면 곱은 항등식 $(s + t)^2 = s^2 + t^2 + 2st$ 로 즉시 결정된다는 점.

💡 이때 직각삼각형 넓이 $\frac{1}{2}|PF||PF'| = 9$ 는 항상 $b^2 = 9$ 와 일치한다. 일반적으로 타원 위 점에서 두 초점에 대해 직각이 되면 그 삼각형 넓이는 항상 b^2 .

Q181 벡터·공간도형 심화

공간에서 구 $x^2 + y^2 + z^2 = 13$ 과 평면 $x + 2y + 2z = 9$ 의 교선이 이루는 원의 반지름의 길이를 구하시오.



교선원 반지름 $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{13 - 9} = 2$

- ① ① 1
- ② ② $\sqrt{3}$
- ③ ③ 2
- ④ ④ $\sqrt{5}$

정답: ③

1단계 구의 중심은 원점 $O(0, 0, 0)$, 반지름 $R = \sqrt{13}$. 원점에서 평면 $x + 2y + 2z = 9$ 까지의 거리는 $d = \frac{|0+0+0-9|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \frac{9}{\sqrt{9}} = \frac{9}{3} = 3$. **2단계** 교선 원의 중심은 평면에 내린 수선의 발이며, 구 중심·교선 원 중심·교선 원 위 임의의 점이 직각삼각형을 이룬다. 빗변이 구의 반지름 R , 한 변이 d , 다른 변이 교선 원의 반지름 r . **3단계** 피타고라스 정리에 의해 $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{13 - 9} = \sqrt{4} = 2$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 구의 중심에서 평면까지의 거리 d , 구의 반지름 R , 교선 원의 반지름 r 이 이루는 직각삼각형 ($R^2 = d^2 + r^2$). 입체에서의 위치관계를 평면 단면으로 환원하는 사고가 핵심.

💡 $d > R$ 이면 교선이 없고, $d = R$ 이면 평면이 구에 접하여 교선이 한 점, $d < R$ 일 때만 원이 된다. 본 문제는 $d = 3 < \sqrt{13} \approx 3.61$ 로 원이 생기는 경계 직전 상황.

Q182 순열·조합·이항 심화

자연수 n 에 대하여 $\binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} + \dots + 2^n\binom{n}{n}$ 을 n 의 식으로 나타내시오.

- ① ① 2^n
- ② ② 3^n
- ③ ③ $2 \cdot 3^{n-1}$
- ④ ④ $n \cdot 2^{n-1}$

정답: ②

1단계 이항정리 $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$ 에서 $x = 2$ 대입을 시도한다. **2단계** $(1+2)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k = \binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} + \dots + 2^n\binom{n}{n}$ 이고 좌변은 3^n . **3단계** 따라서 주어진 합은 3^n 이다. 검증: $n = 2$ 일 때 $1 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 9 = 3^2$, $n = 3$ 일 때 $1 + 6 + 12 + 8 = 27 = 3^3$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 '이항계수 가중합'을 보면 이항정리 $(1+x)^n$ 에 적절한 x 를 대입할 수 있는지 검토하는 것. 2^k 가 곱해져 있으니 $x = 2$.

💡 같은 방식으로 $x = -1$ 대입은 $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \dots = 0$ ($n \geq 1$), $x = 1$ 대입은 합이 2^n . 한 항등식에서 무수한 결과가 파생.

Q183 확률 심화

5명의 학생 A, B, C, D, E 가 자신의 이름이 적힌 5개의 의자에 임의로 한 명씩 앉는다. 학생 A 가 자신의 자리에 앉지 않았다는 조건 하에서, 정확히 2명만 자신의 자리에 앉았을 조건부확률을 구하시오.

- ① ① $\frac{1}{12}$
- ② ② $\frac{1}{8}$
- ③ ③ $\frac{1}{6}$
- ④ ④ $\frac{1}{4}$

정답: ②

1단계) 사건 정의. M : A 가 자기 자리에 앉지 않음. N : 정확히 2명이 자기 자리. 전체 경우의 수 $5! = 120$. A 가 자기 자리에 앉는 경우는 나머지 4명을 자유 배치하므로 $4! = 24$, 따라서 $|M| = 120 - 24 = 96$. **2단계)** $|N|$ 계산. 자기 자리에 앉는 2명을 선택하는 방법 $\binom{5}{2} = 10$, 나머지 3명은 모두 자기 자리에 앉지 않게(완전순열) 배치하는 경우의 수 $D_3 = 2$. 따라서 $|N| = 10 \times 2 = 20$. **3단계)** $|M \cap N|$ 계산. 정확히 2명 중 A 가 포함되지 않으므로 A 를 제외한 4명에서 자기 자리 2명 선택 $\binom{4}{2} = 6$, 나머지 3명(A 포함)은 $D_3 = 2$ 로 배치되며 이때 A 는 분란수 정의상 자동으로 자기 자리에 안 앉음. $|M \cap N| = 6 \times 2 = 12$. 따라서 $P(N|M) = \frac{|M \cap N|}{|M|} = \frac{12}{96} = \frac{1}{8}$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 분란수(완전순열) D_n 을 이용해 '정확히 k 명 자기 자리' 사건을 분해하고, 조건부확률은 분자·분모 모두 '경우의 수'로 직접 세는 것이 깔끔하다는 점.

💡 분란수는 $D_3 = 2, D_4 = 9, D_5 = 44$ 이며 점화식 $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$ 로 계산. 모자 바꿔쓰기 문제로도 유명.

Q184 순열·조합·이항 심화

$\left(2x - \frac{1}{x^2}\right)^9$ 의 전개식에서 상수항을 구하시오.

- ① ① -5376
- ② ② -2688
- ③ ③ -672
- ④ ④ 5376

정답: ①

1단계) 일반항을 쓴다. $T_{k+1} = \binom{9}{k}(2x)^{9-k}\left(-\frac{1}{x^2}\right)^k = \binom{9}{k}2^{9-k}(-1)^k x^{9-k-2k} = \binom{9}{k}2^{9-k}(-1)^k x^{9-3k}$. **2단계)** 상수항이 되려면 $9 - 3k = 0$, 즉 $k = 3$. **3단계)** 대입: $\binom{9}{3} \cdot 2^{9-3} \cdot (-1)^3 = 84 \cdot 64 \cdot (-1) = -5376$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 일반항을 세우고 x 의 지수가 0이 되는 k 를 찾는 것. 부호 $(-1)^k$ 를 잊지 않는 것이 함정 회피의 핵심 (보기 ④ 양수 답이 그 함정).

💡 이항전개에서 분자·분모로 x 가 분리되어 있으면 일반항의 x 지수는 항상 일차식 형태 $9 - 3k$ 가 되고, 정수해가 존재해야만 상수항이 존재한다.

Q185 통계 추론

한 번의 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 $\frac{1}{2}$ 이다. 이 시행을 100회 독립적으로 반복할 때, 사건 A가 일어나는 횟수를 확률변수 X라 하자. X를 정규분포로 근사할 때, $P(X \geq 60)$ 의 값을 구하시오. (단, $P(0 \leq Z \leq 2) = 0.4772$)

- ① ① 0.0456
- ② ② 0.0228
- ③ ③ 0.1587
- ④ ④ 0.4772

정답: ② 0.0228

1단계: 이항분포의 평균과 분산. $X \sim B(100, \frac{1}{2})$ 이므로 $E(X) = np = 50$, $V(X) = npq = 25$, 표준편차 $\sigma = 5$.

2단계: 정규분포 근사. n이 충분히 크므로 X는 근사적으로 $N(50, 5^2)$ 를 따른다. 표준화 변수 $Z = \frac{X-50}{5}$.

3단계: 확률 계산. $P(X \geq 60) = P\left(Z \geq \frac{60-50}{5}\right) = P(Z \geq 2) = 0.5 - P(0 \leq Z \leq 2) = 0.5 - 0.4772 = 0.0228$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 이항분포 $B(n, p)$ 에서 n이 크면 정규분포 $N(np, npq)$ 로 근사할 수 있다는 점이다. 표준화 후 표준정규분포표를 이용해 확률을 구한다.

이항분포의 정규근사는 라플라스가 처음 엄밀히 다뤘으며, 중심극한정리의 가장 오래된 특수형이다.

Q186 초월함수 미분 심화

곡선 $x^2 + xy + y^2 = 7$ 위의 점 (1, 2)에서의 접선의 방정식을 구하시오.

- ① ① $4x + 5y = 14$
- ② ② $5x + 4y = 13$
- ③ ③ $4x - 5y + 6 = 0$
- ④ ④ $5x - 4y + 3 = 0$

정답: ① $4x + 5y = 14$

1단계: 양변을 x에 대해 미분 (음함수 미분). $2x + y + x \cdot y' + 2y \cdot y' = 0$.

2단계: y'에 대해 정리. $(x + 2y)y' = -(2x + y)$ 이므로 $y' = -\frac{2x + y}{x + 2y}$.

3단계: (1, 2) 대입. $y' = -\frac{2 \cdot 1 + 2}{1 + 2 \cdot 2} = -\frac{4}{5}$. 접선은 $y - 2 = -\frac{4}{5}(x - 1)$, 정리하면 $5y - 10 = -4x + 4$, 즉 $4x + 5y = 14$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 y를 x의 함수로 보고 양변을 미분하는 음함수 미분이다. y'가 곱의 미분, 합성 미분에서 어떻게 나오는지 정확히 다루는 것이 관건이다.

음함수 미분을 이용하면 $\sqrt{x^2 + y^2} = r$ 같은 도형 방정식의 접선을 변수분리 없이 바로 다룰 수 있다.

Q187 초월함수 적분 심화

함수 $f(x) = \int_0^x (x-t)\sin t \, dt$ 에 대하여 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 의 값을 구하시오.

- ① $\frac{\pi}{2} + 1$
- ② $\frac{\pi}{2} - 1$
- ③ $\pi - 2$
- ④ $1 - \frac{\pi}{2}$

☞ 정답: ② $\frac{\pi}{2} - 1$

📖 1단계: 적분 안의 x 를 밖으로. t 가 적분변수이므로 x 는 상수 취급한다. $f(x) = x \int_0^x \sin t \, dt - \int_0^x t \sin t \, dt$.

2단계: 두 적분 계산. $\int_0^x \sin t \, dt = 1 - \cos x$. 또 $\int_0^x t \sin t \, dt$ 는 부분적분 ($u = t, dv = \sin t \, dt$)으로 $-x \cos x + \sin x$.

3단계: 합치고 대입. $f(x) = x(1 - \cos x) - (-x \cos x + \sin x) = x - \sin x$. 따라서 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - 1$.

🧠 풀이 전략: 핵심 아이디어는 적분변수와 상수를 구분하는 것이다. x 는 상수처럼 빼낼 수 있고, t 만 적분 대상이다. 그 후 부분적분으로 깔끔히 정리된다.

💡 $\int_0^x (x-t)g(t) \, dt$ 꼴은 합성곱(convolution)의 특수한 형태로, 미분방정식의 해를 표현할 때 자주 등장한다.

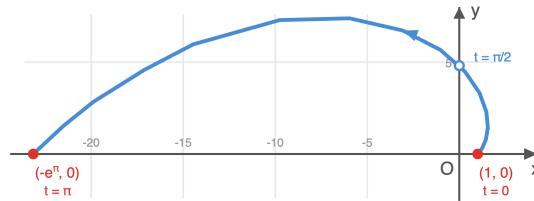
Q188 미적분 통합 활용

매개변수 t 로 나타내어진 곡선 $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t$ ($0 \leq t \leq \pi$)의 길이를 구하시오.

매개곡선 (로그나선)의 길이

$$x = e^t \cos t, y = e^t \sin t$$

$$(0 \leq t \leq \pi)$$



곡선의 길이 = $\sqrt{2} (e^\pi - 1)$

- ① $e^\pi - 1$
- ② $\sqrt{2} (e^\pi - 1)$
- ③ $\sqrt{2} e^\pi$
- ④ $2(e^\pi - 1)$

☞ 정답: ② $\sqrt{2} (e^\pi - 1)$

📖 1단계: $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ 계산. $\frac{dx}{dt} = e^t(\cos t - \sin t), \frac{dy}{dt} = e^t(\sin t + \cos t)$.

2단계: 제곱의 합 정리. $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = e^{2t}\{(\cos t - \sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2\} = e^{2t} \cdot 2 = 2e^{2t}$.

3단계: 길이 적분. $L = \int_0^\pi \sqrt{2e^{2t}} \, dt = \sqrt{2} \int_0^\pi e^t \, dt = \sqrt{2} [e^t]_0^\pi = \sqrt{2} (e^\pi - 1)$.

🧠 풀이 전략: 핵심 아이디어는 매개곡선의 길이 공식 $L = \int \sqrt{(x')^2 + (y')^2} \, dt$ 를 적용하고, $\sin^2 + \cos^2 = 1$ 로 깔끔히 줄어드는 구조를 이용하는 것이다.

💡 이 곡선은 '로그 나선(logarithmic spiral)'으로, 야콥 베르누이가 너무 사랑한 나머지 자신의 묘비에 새기게 했다.

Q189 순열·조합·이항 심화

집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 집합 $B = \{a, b, c\}$ 로의 함수 중 치역이 B 와 같은(즉, 전사인) 함수의 개수를 구하시오.

- ① ① 120
- ② ② 132
- ③ ③ 150
- ④ ④ 180

정답: ③ 150

1단계: 전체 함수와 빠진 원소의 관점. 전체 함수 개수는 $3^5 = 243$. 그중 치역이 B 의 진부분집합이 되는(어떤 원소가 빠진) 함수를 빼야 한다.

2단계: 포함배제 원리. 1개 원소가 빠진 함수: $\binom{3}{1} \cdot 2^5 = 3 \cdot 32 = 96$. 그러나 2개가 동시에 빠진 함수를 두 번 뺐 것이므로 더해 줘야 한다: $\binom{3}{2} \cdot 1^5 = 3$.

3단계: 합산. 전사함수 개수 $= 3^5 - \binom{3}{1} \cdot 2^5 + \binom{3}{2} \cdot 1^5 = 243 - 96 + 3 = 150$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 '치역 = 공역'을 직접 세기 어려우므로 포함배제 원리로 '치역이 줄어든 함수'를 차감하는 것이다. 또는 제 2종 스텔링수 $S(5, 3) \cdot 3! = 25 \cdot 6 = 150$ 으로도 확인할 수 있다.

전사함수의 수는 분할(partition) 개념과 직접 연결되며, 제2종 스텔링수의 정의 그 자체이다.

Q190 확률 심화

주머니 A에는 흰 공 3개와 검은 공 2개가, 주머니 B에는 흰 공 2개와 검은 공 4개가 들어 있다. 두 주머니 중 하나를 임의로 선택하여 그 주머니에서 공을 비복원으로 2개 꺼냈더니 모두 흰 공이었다. 이때 선택한 주머니가 A였을 확률을 구하시오.

- ① ① $\frac{2}{11}$
- ② ② $\frac{6}{11}$
- ③ ③ $\frac{9}{11}$
- ④ ④ $\frac{3}{11}$

정답: ③ $\frac{9}{11}$

1단계: 각 조건부 확률 계산. 주머니 A에서 두 번 모두 흰 공: $P(W_2 | A) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$. 주머니 B에서: $P(W_2 | B) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$.

2단계: 두 주머니 모두 흰 공일 전체 확률. $P(W_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{15} = \frac{9}{60} + \frac{1}{60} = \frac{10}{60}$.

3단계: 베이즈 정리. $P(A | W_2) = \frac{P(A) \cdot P(W_2 | A)}{P(W_2)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10}}{\frac{10}{60}} = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{1}{6}} = \frac{3}{20} \cdot \frac{6}{1} = \frac{9}{10}$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 '결과(둘 다 흰)를 알고 원인(주머니)을 추정'하는 베이즈 정리이다. 비복원 추출이라 두 번째 확률이 줄어든다는 점을 정확히 처리한다.

베이즈 정리는 의료 진단, 스팸 필터, 머신러닝의 분류기 등 현대 통계학의 핵심 도구이다.

Q191 통계 추론

어느 회사 직원의 키 X 는 정규분포 $N(170, 6^2)$ 을 따른다고 한다. 이 회사 직원 중 임의로 4명을 뽑아 키의 표본평균을 \bar{X} 라 할 때, $P(168 \leq \bar{X} \leq 173)$ 의 값을 구하시오. (단, $P(0 \leq Z \leq 0.67) = 0.2486$, $P(0 \leq Z \leq 1) = 0.3413$)

- ① ① 0.4972
- ② ② 0.5899
- ③ ③ 0.6826
- ④ ④ 0.7745

정답: ② 0.5899

1단계: 표본평균의 분포. 모집단이 $N(170, 6^2)$ 이고 $n = 4$ 이므로 $\bar{X} \sim N\left(170, \frac{6^2}{4}\right) = N(170, 3^2)$. 표준편차는 3.

2단계: 표준화. $Z = \frac{\bar{X} - 170}{3}$. $\bar{X} = 168$ 일 때 $Z = \frac{-2}{3} \approx -0.67$, $\bar{X} = 173$ 일 때 $Z = 1$.

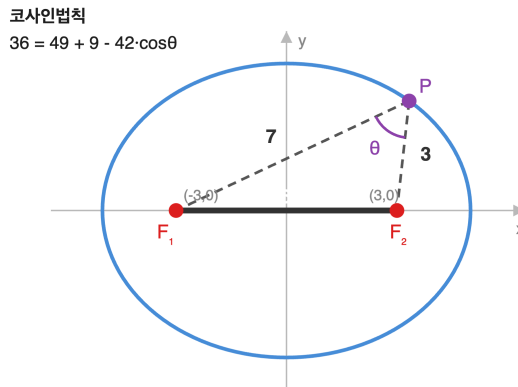
3단계: 확률 계산. $P(168 \leq \bar{X} \leq 173) = P(-0.67 \leq Z \leq 1) = P(0 \leq Z \leq 0.67) + P(0 \leq Z \leq 1) = 0.2486 + 0.3413 = 0.5899$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 모집단이 정규분포면 표본평균도 정규분포를 따르고, 표준편차가 σ/\sqrt{n} 로 줄어든다는 것이다. 표준화 후 0을 기준으로 양쪽 확률을 더한다.

표본평균의 표준편차가 \sqrt{n} 만큼 작아진다는 사실은 표본 크기를 4배로 늘려야 신뢰구간이 절반이 된다는 실용적 함의를 갖는다.

Q192 이차곡선 심화

타원 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 의 두 초점을 F_1, F_2 라 하자. 타원 위의 점 P 에 대하여 $PF_1 = 7$ 일 때, $\cos(\angle F_1PF_2)$ 의 값을 구하시오.



- ① ① $\frac{1}{3}$
- ② ② $\frac{11}{42}$
- ③ ③ $\frac{11}{21}$
- ④ ④ $\frac{22}{21}$

정답: ③ $\frac{11}{21}$

1단계: 타원의 정의로 PF_2 구하기. $a = 5$ 이므로 $PF_1 + PF_2 = 2a = 10$. 따라서 $PF_2 = 10 - 7 = 3$.

2단계: 두 초점 사이 거리. $b^2 = 16$, $a^2 = 25$ 이므로 $c^2 = a^2 - b^2 = 9$, $c = 3$. 따라서 $F_1F_2 = 2c = 6$.

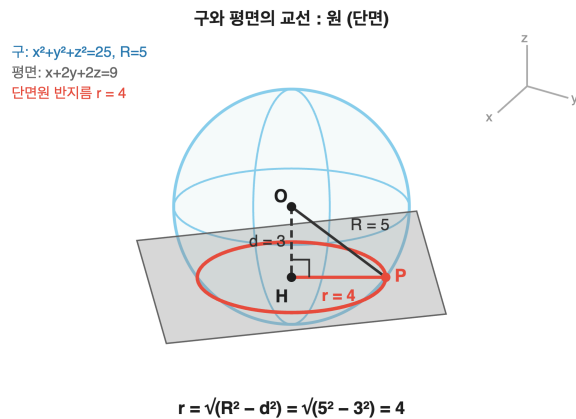
3단계: 삼각형 PF_1F_2 에 코사인법칙. $F_1F_2^2 = PF_1^2 + PF_2^2 - 2 \cdot PF_1 \cdot PF_2 \cdot \cos(\angle F_1PF_2)$. 즉 $36 = 49 + 9 - 42\cos\theta$ 이므로 $\cos\theta = \frac{22}{42} = \frac{11}{21}$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 타원의 정의 ($PF_1 + PF_2 = 2a$)로 부족한 변의 길이를 채우고, 삼각형 PF_1F_2 에서 코사인법칙으로 각도를 구하는 것이다.

타원의 정의가 '두 초점에서의 거리의 합이 일정'이라는 사실은 케플러가 행성 궤도를 이해할 때 결정적이었다.

Q193 벡터·공간도형 심화

공간에서 구 $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ 와 평면 $x + 2y + 2z = 9$ 가 만나서 생기는 도형은 원이다. 이 원의 반지름을 구하시오.



- ① ① 2
- ② ② $2\sqrt{5}$
- ③ ③ 3
- ④ ④ 4

정답: ④ 4

1단계: 구의 중심과 반지름. 구의 중심은 $O(0, 0, 0)$, 반지름 $R = 5$.

2단계: 중심에서 평면까지의 거리. 점 O 에서 평면 $x + 2y + 2z - 9 = 0$ 까지의 거리는 $d = \frac{|0 + 0 + 0 - 9|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{9}{3} = 3$.

3단계: 피타고라스로 단면 원의 반지름. 구의 중심에서 평면으로 내린 수선의 발을 H , 단면 원 위의 한 점을 P 라 하면 $\triangle OHP$ 는 직각삼각형이므로 $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 구의 중심에서 평면까지의 거리 d , 구의 반지름 R , 단면 원의 반지름 r 이 직각삼각형을 이룬다는 점이다 ($R^2 = d^2 + r^2$).

구를 평면으로 자르면 항상 원이 되며, 이 사실은 '구는 모든 방향에서 같은 모양'이라는 대칭성에서 자연스럽게 따라온다.

Q194 수열 극한·급수 심화

무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ 의 합을 구하시오.

- ① ① 1
- ② ② $\frac{3}{2}$
- ③ ③ 2
- ④ ④ 3

정답: ③ 2

1단계: 부분합 S 를 두 가지로 표현. $S = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \dots$

2단계: 양변에 2를 곱하기. $2S = 1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots$

3단계: 차를 구해 등비급수로. $2S - S = 1 + \left(\frac{2}{2} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3}{2^2} - \frac{2}{2^2}\right) + \dots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$. 따라서

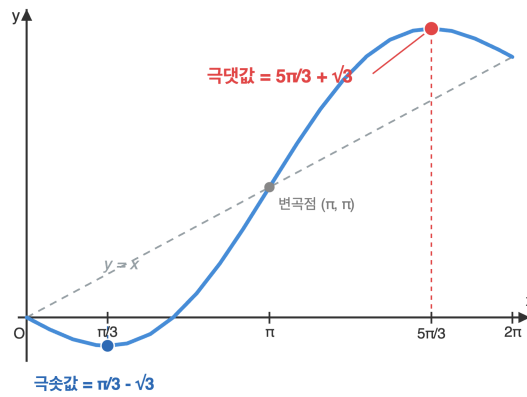
$S = 2$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 $\sum nx^n$ 꼴의 산술-기하 급수에서 S 와 rS 의 차를 구하면 등비급수로 환원된다는 점이다. 이 기법은 더 일관적인 산술-기하 합에 모두 적용된다.

이 결과는 $\sum nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$ ($|x| < 1$)의 특수한 경우이며, 미분으로도 유도할 수 있다.

Q195 초월함수 미분 심화

함수 $f(x) = x - 2\sin x$ 의 닫힌 구간 $[0, 2\pi]$ 에서의 극댓값을 구하시오.



- ① ① $\frac{\pi}{3} - \sqrt{3}$
- ② ② $\frac{\pi}{3} + \sqrt{3}$
- ③ ③ $\frac{5\pi}{3} - \sqrt{3}$
- ④ ④ $\frac{5\pi}{3} + \sqrt{3}$

정답: ④ $\frac{5\pi}{3} + \sqrt{3}$

1단계: 도함수와 극값 후보. $f'(x) = 1 - 2\cos x$. $f'(x) = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ ($[0, 2\pi]$ 내).

2단계: 이계도함수로 극대/극소 판정. $f''(x) = 2\sin x$. $f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} > 0$ 이므로 $x = \frac{\pi}{3}$ 에서 극소.

$f''\left(\frac{5\pi}{3}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3} < 0$ 이므로 $x = \frac{5\pi}{3}$ 에서 극대.

3단계: 극댓값 계산. $f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{5\pi}{3} - 2\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} - 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{3} + \sqrt{3}$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 도함수 = 0인 후보를 찾고, 이계도함수의 부호로 극대/극소를 판정하는 것이다. $\sin(5\pi/3) = -\sqrt{3}/2$ 의 부호 처리에 주의한다.

💡 $f(x) = x - k\sin x$ 꼴의 함수는 $|k| \leq 1$ 일 때 단조증가이고, $|k| > 1$ 일 때 비로소 극값이 생긴다.

Q196 수열 극한·급수 심화

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$ 의 값은?

- ① ① $\frac{1}{2}$
- ② ② $\frac{2}{3}$
- ③ ③ 1
- ④ ④ $\frac{4}{3}$

정답: ③

1단계: 일반항을 부분분수로 분해한다. $\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \frac{(k+1)^2 - k^2}{k^2(k+1)^2} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}$. 2단계: 망원합(telescoping) 형태이므로 부

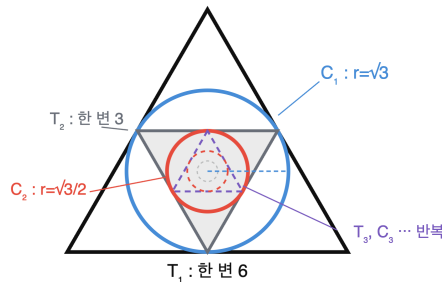
분합은 $S_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right) = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$. 3단계: $n \rightarrow \infty$ 에서 $\frac{1}{(n+1)^2} \rightarrow 0$ 이므로 극한값은 1.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 분자 $2k+1 = (k+1)^2 - k^2$ 임을 알아채는 것이다. 단순히 부분합을 전개하면 길어지므로 망원합 구조를 만들어내는 부분분수 분해가 결정적이다.

바젤 문제 $\sum 1/k^2 = \pi^2/6$ 과 달리 본 급수는 망원합으로 정확히 1로 수렴한다.

Q197 수열 극한·급수 심화

한 변의 길이가 6인 정삼각형 T_1 의 내접원을 C_1 이라 하자. 원 C_1 에 내접하는 정삼각형 T_2 를 그리고, 다시 T_2 의 내접원 C_2 를 그린다. 이와 같은 과정을 무한히 반복할 때, 모든 원 C_1, C_2, C_3, \dots 의 넓이의 합은?



넓이 공비 = 1/4 (반지름 공비 1/2)

- ① ① 3π
- ② ② 4π
- ③ ③ 6π
- ④ ④ 9π

정답: ②

1단계: 정삼각형 한 변이 a 이면 내접원 반지름은 $r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$ 이고, 외접원 반지름이 r 인 정삼각형의 한 변은 $r\sqrt{3}$ 이다. 따라서

$T_1 \rightarrow C_1 \rightarrow T_2$ 로 갈 때 정삼각형의 한 변은 $a \rightarrow a/2$ 로 절반으로 줄어든다. 2단계: 원 반지름은

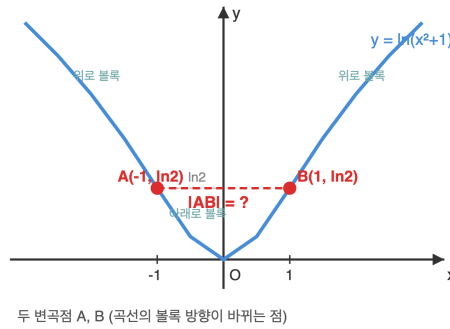
$r_1 = \sqrt{3}/2, r_2 = \sqrt{3}/4, r_3 = \sqrt{3}/8, \dots$ 이고 공비가 1/2이므로 넓이 πr_n^2 의 공비는 1/4이다. 3단계: 첫 항 $\pi r_1^2 = 3\pi$, 공비 1/4인 무한등비급수의 합은 $\frac{3\pi}{1-1/4} = 4\pi$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 '내접원-내접삼각형'을 한 번 거치면 정삼각형 한 변이 정확히 절반이 된다는 닮음비를 잡는 것이다. 길이 비 1/2를 넓이 비 1/4로 옮기는 단계가 함정이다.

이런 자기 닮음 도형 안의 무한 점열은 결국 정삼각형의 무게중심 한 점으로 수렴한다.

Q198 초월함수 미분 심화

함수 $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ 의 그래프 위에 있는 서로 다른 두 변곡점 사이의 거리는?



- ① ① $\sqrt{2}$
- ② ② 2
- ③ ③ $\sqrt{2} \ln 2$
- ④ ④ $2\ln 2$

정답: ②

1단계: $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$. 몫의 미분으로 $f''(x) = \frac{2(x^2 + 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}$. 2단계: $f''(x) = 0$ 에서 $x = \pm 1$. 이때 f'' 의 부호가 바뀌므로 변곡점이 두 개 존재한다. 변곡점 좌표는 $(-1, \ln 2)$, $(1, \ln 2)$. 3단계: 두 점은 y좌표가 같으므로 거리는 $|1 - (-1)| = 2$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 $f(x)$ 가 y축 대칭이라는 점에서 두 변곡점이 $x = \pm a$ 형태로 대칭으로 나온다는 것을 예측하는 것이다. 그러면 거리는 x좌표 차이만 보면 된다.

💡 $\ln(x^2 + 1)$ 은 $\arctan x$ 의 한 부분 이론과 자주 짝지어 등장하며, 변곡점이 $x = \pm 1$ 인 점이 우연이 아니다.

Q199 초월함수 적분 심화

실수 전체에서 연속인 함수 $f(x)$ 가 $f(x) = x^2 + 2 \int_0^1 f(t) dt$ 를 만족할 때, $f(2)$ 의 값은?

- ① ① $\frac{8}{3}$
- ② ② 3
- ③ ③ $\frac{10}{3}$
- ④ ④ $\frac{11}{3}$

정답: ③

1단계: 정적분 $\int_0^1 f(t) dt$ 는 상수이므로 $c = \int_0^1 f(t) dt$ 로 놓으면 $f(x) = x^2 + 2c$. 2단계: 양변을 $0 \leq x \leq 1$ 에서 적분하면 $c = \int_0^1 (t^2 + 2c) dt = \frac{1}{3} + 2c$. 따라서 $-c = \frac{1}{3}$, 즉 $c = -\frac{1}{3}$. 3단계: $f(x) = x^2 - \frac{2}{3}$ 이므로 $f(2) = 4 - \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 정적분 $\int_0^1 f(t) dt$ 가 x에 무관한 '한 개의 실수 상수'라는 점을 인식하는 것이다. 미지수를 하나 두고 자기 일치(self-consistency) 식을 세워 결정한다.

💡 이런 형태는 적분방정식(integral equation)의 가장 단순한 예이며, 변형하면 함수공간의 부동점 정리로 일반화된다.

Q200 미적분 통합 활용

곡선 $y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$ 의 $1 \leq x \leq 2$ 부분의 길이는?

- ① ① $\frac{4}{3}$
- ② ② $\frac{17}{12}$
- ③ ③ $\frac{19}{12}$
- ④ ④ $\frac{5}{3}$

정답: ②

1단계: $y' = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x^2}$. 그러면 $1 + (y')^2 = 1 + \frac{x^4}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4x^4} = \frac{x^4}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4x^4} = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x^2}\right)^2$. 2단계: 적분구간에서 안의 식

은 양수이므로 $\sqrt{1 + (y')^2} = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x^2}$. 3단계:

$$L = \int_1^2 \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x^2}\right) dx = \left[\frac{x^3}{6} - \frac{1}{2x}\right]_1^2 = \left(\frac{8}{6} - \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{6} + \frac{1}{4} = \frac{17}{12}.$$

풀이 전략: 핵심 아이디어는 $y' = A - B$ 꼴일 때 $1 + (y')^2$ 가 $(A + B)^2$ 로 완전제곱이 되도록 함수가 설계되어 있다는 점이다. 이 패턴을 알면 무리식 적분이 단번에 풀린다.

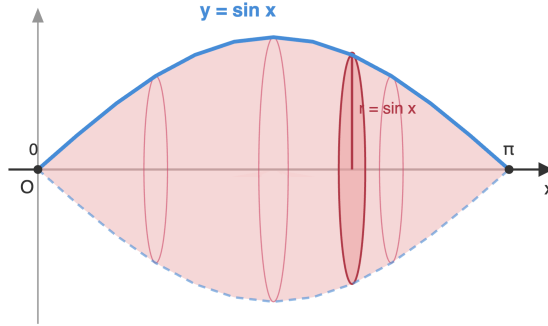
💡 $y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$ 같은 곡선들은 '곡선의 길이가 초등함수로 표현되는' 드문 곡선의 가족(family)으로 알려져 있다.

고3 수학 심화

총 40문제 · 문제와 정답·풀이 포함

Q201 미적분 통합 활용

곡선 $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$)와 x 축으로 둘러싸인 도형을 x 축 둘레로 한 바퀴 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피는?



디스크법: $V = \pi \int_0^\pi \sin^2 x \, dx$

- ① ① $\frac{\pi^2}{4}$
- ② ② $\frac{\pi^2}{2}$
- ③ ③ π^2
- ④ ④ $2\pi^2$

정답: ②

1단계: 디스크법(원판법)을 적용하면 $V = \pi \int_0^\pi \sin^2 x \, dx$. 2단계: 반각공식 $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ 를 이용하면

$$V = \pi \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx = \frac{\pi}{2} \left[x - \frac{\sin 2x}{2} \right]_0^\pi. \quad \text{3단계: } \sin 2\pi = \sin 0 = 0 \text{이므로 } V = \frac{\pi}{2} \cdot \pi = \frac{\pi^2}{2}.$$

풀이 전략: 핵심 아이디어는 $\sin^2 x$ 를 직접 적분하지 말고 반각공식으로 차수를 낮추어 일차식의 적분으로 바꾸는 것이다. 이 패턴은 모든 \sin^{2n}, \cos^{2n} 적분의 출발점이다.

같은 영역을 y 축 둘레로 회전시키면 부피는 통(shell)법으로 $2\pi^2$ 이 되어, 회전축에 따라 전혀 다른 부피가 나온다.

Q202 순열·조합·이항 심화

방정식 $a + b + c + d = 12$ 의 음이 아닌 정수해 (a, b, c, d) 중에서 $a \geq 2, b \geq 1, c \leq 4$ 를 모두 만족하는 해의 개수는?

- ① ① 165
- ② ② 175
- ③ ③ 185
- ④ ④ 220

정답: ③

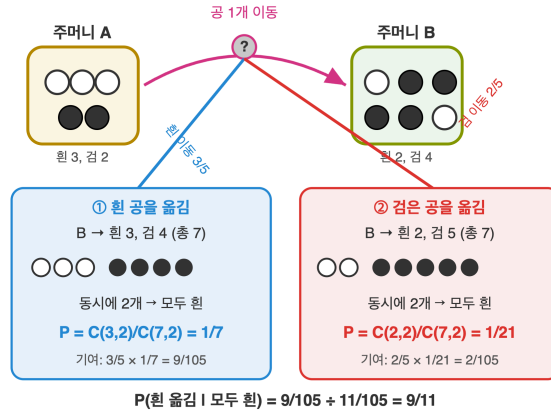
1단계: $a' = a - 2, b' = b - 1$ 로 치환($a', b' \geq 0$)하면 $a' + b' + c + d = 9$, 모든 변수 $\geq 0, c \leq 4$. 제약 $c \leq 4$ 를 잠시 무시한 음이 아닌 정수해의 수는 중복조합 $\binom{9+3}{3} = \binom{12}{3} = 220$. 2단계: 여사건으로 $c \geq 5$ 인 경우만 빼낸다. $c'' = c - 5 \geq 0$ 로 치환하면 $a' + b' + c'' + d = 4$ 의 음이 아닌 정수해 수는 $\binom{4+3}{3} = \binom{7}{3} = 35$. 3단계: 따라서 답은 $220 - 35 = 185$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 하한 제약은 변수 치환으로 즉시 제거하고, 상한 제약은 여사건(포함배제)으로 처리한다는 표준 전략이다. 220과 35를 곧장 계산하지 않고 함정 보기로 흘리지 않게 마지막 빼기까지 정확히 수행해야 한다.

여러 변수에 상한이 동시에 걸리면 포함배제 원리(inclusion-exclusion)로 일반화되어 같은 틀이 그대로 작동한다.

Q203 확률 심화

주머니 A에는 흰 공 3개와 검은 공 2개가, 주머니 B에는 흰 공 2개와 검은 공 4개가 들어 있다. 주머니 A에서 임의로 한 개를 꺼내 B에 넣은 뒤, B에서 동시에 두 개의 공을 꺼냈더니 모두 흰 공이었다. 이때 A에서 옮긴 공이 흰 공이었을 확률은?



- ① ① $\frac{2}{3}$
- ② ② $\frac{7}{11}$
- ③ ③ $\frac{9}{11}$
- ④ ④ $\frac{10}{11}$

정답: ③

1단계: 사건 정의. W : A에서 흰 공을 옮김, E : B에서 꺼낸 두 공이 모두 흰 공. 사전확률 $P(W) = \frac{3}{5}$, $P(W^c) = \frac{2}{5}$. 2단계: 조건부확률 계산. W 일 때 B는 흰 3, 검 4 (총 7)이므로 $P(E \mid W) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$. W^c 일 때 B는 흰 2, 검 5이므로 $P(E \mid W^c) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{1}{21}$. 3단계: 베이즈 정리. $P(E) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{7} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{21} = \frac{9}{105} + \frac{2}{105} = \frac{11}{105}$. 따라서 $P(W \mid E) = \frac{(3/5)(1/7)}{11/105} = \frac{9/105}{11/105} = \frac{9}{11}$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 '시행 후의 결과를 보고 시행 직전을 거꾸로 추론'하는 베이즈적 사고이다. 두 분모가 모두 $\binom{7}{2} = 21$ 로 같다는 점이 함정인데, 이를 알면 분자 비율 3:1만으로 사후확률이 9:2, 즉 9/11임을 빠르게 알 수 있다.

두 가지 사후 시나리오의 비가 분자 비율과 정확히 일치하는 이유는 분모가 동일해서다. 일반적으로는 분자 비율과 사후 비율이 일치하지 않는다.

Q204 통계 추론

한 개의 주사위를 720번 던질 때 1의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X 라 하자. X 가 근사적으로 정규분포를 따른다고 할 때, $P(110 \leq X \leq 130)$ 의 값은? (단, $P(0 \leq Z \leq 1) = 0.3413$, $P(0 \leq Z \leq 2) = 0.4772$)

- ① ① 0.3413
- ② ② 0.6826
- ③ ③ 0.8185
- ④ ④ 0.9544

정답: ②

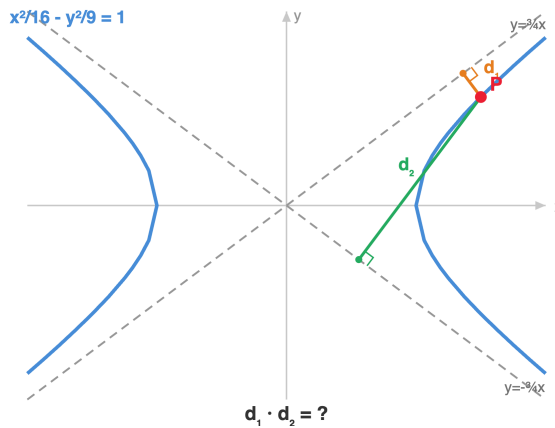
1단계: $X \sim B(720, \frac{1}{6})$ 이므로 $E(X) = 720 \cdot \frac{1}{6} = 120$, $V(X) = 720 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = 100$, $\sigma = 10$. 2단계: n 이 크고 np, nq 모두 충분히 크므로 정규근사 $X \approx N(120, 10^2)$ 이 가능하다. 표준화 $Z = \frac{X - 120}{10}$. 3단계: $X = 110 \Rightarrow Z = -1$, $X = 130 \Rightarrow Z = 1$ 이므로 $P(110 \leq X \leq 130) \approx P(-1 \leq Z \leq 1) = 2 \cdot 0.3413 = 0.6826$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 이항분포 $B(n, p)$ 를 기댓값과 분산이 같은 정규분포 $N(np, npq)$ 로 근사한 뒤 표준화하는 것이다. $\sigma = \sqrt{npq}$ 를 정확히 계산하지 않으면 함정 보기 ①, ④에 걸린다.

같은 시행이지만 시행 횟수를 늘리면 상대도수 X/n 의 표준편차는 $\sqrt{pq/n}$ 이 되어 $1/\sqrt{n}$ 로 줄어들며, 이것이 통계의 ' \sqrt{n} 법칙'이다.

Q205 이차곡선 심화

쌍곡선 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 위의 임의의 점 P 에서 이 쌍곡선의 두 점근선까지의 거리의 곱은?



- ① ① $\frac{144}{25}$
- ② ② $\frac{144}{5}$
- ③ ③ $\frac{12}{5}$
- ④ ④ 점 P 의 위치에 따라 다르다

정답: ①

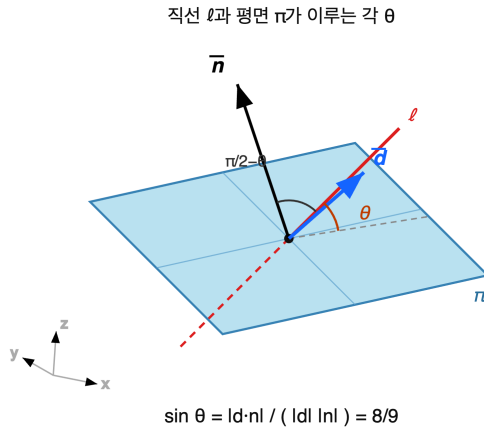
1단계: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 의 점근선은 $\frac{x}{4} \pm \frac{y}{3} = 0$, 즉 $3x \pm 4y = 0$. 2단계: 점 $P(x_0, y_0)$ 에서 두 점근선까지의 거리는 $d_1 = \frac{|3x_0 - 4y_0|}{5}$, $d_2 = \frac{|3x_0 + 4y_0|}{5}$. 따라서 $d_1 \cdot d_2 = \frac{|9x_0^2 - 16y_0^2|}{25}$. 3단계: P 가 쌍곡선 위에 있으므로 $\frac{x_0^2}{16} - \frac{y_0^2}{9} = 1$, 양변에 144를 곱하면 $9x_0^2 - 16y_0^2 = 144$. 따라서 $d_1 \cdot d_2 = \frac{144}{25}$ 로 점 P 의 위치와 무관하게 일정하다.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 두 점근선의 식을 하나로 묶어 곱하면 $9x^2 - 16y^2$ 이라는 쌍곡선 식의 좌변(상수배)이 그대로 등장한다는 구조이다. 함정 보기 ④에 걸리지 않으려면 '식이 자동으로 일정해진다'는 통찰이 필요하다.

일반 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 에서 두 점근선까지의 거리의 곱은 항상 $\frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}$ 로 일정하다.

Q206 벡터·공간도형 심화

공간에서 직선 $\ell: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2}$ 와 평면 $\pi: x+2y-2z=5$ 가 이루는 각을 θ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$)라 할 때, $\sin\theta$ 의 값은?



- ① ① $\frac{4}{9}$
- ② ② $\frac{2}{3}$
- ③ ③ $\frac{7}{9}$
- ④ ④ $\frac{8}{9}$

정답: ④

1단계: 직선의 방향벡터는 $\vec{d} = (2, 1, -2)$, 평면의 법선벡터는 $\vec{n} = (1, 2, -2)$. $|\vec{d}| = \sqrt{4+1+4} = 3$, $|\vec{n}| = \sqrt{1+4+4} = 3$
 2단계: 직선과 평면이 이루는 각 θ 는 직선과 법선이 이루는 각 φ 의 여각이므로 $\sin\theta = |\cos\varphi| = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{d}| |\vec{n}|}$. 3단계:

$\vec{d} \cdot \vec{n} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + (-2)(-2) = 2 + 2 + 4 = 8$. 따라서 $\sin\theta = \frac{|8|}{3 \cdot 3} = \frac{8}{9}$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 '직선과 평면 사이의 각'은 '직선과 법선 사이의 각의 여각'으로 정의된다는 점이다. 그래서 코사인인 아니라 사인 공식을 쓴다. $\frac{8}{9}$ 대신 $\frac{4}{9}$ 나 $\frac{2}{3}$ 를 고르면 코사인을 그대로 적었거나 $\sqrt{\quad}$ 를 한 번 더 씌운 함정 답이다.

💡 \vec{d} 와 \vec{n} 의 크기가 우연히 모두 3이어서 분모가 깔끔한 9가 되고, 답이 $\frac{8}{9}$ 로 떨어진다. 일반적으로는 분수 형태가 그대로 남는다.

Q207 통계 추론

어느 지역의 1인당 월 생활비를 조사하기 위해 표본 100명을 임의로 추출하여 표본평균 200(만 원), 모표준편차 30(만 원)을 얻었다. 이 지역 1인당 월 생활비의 모평균 m 에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간을 구하면? (단, $P(0 \leq Z \leq 2.58) = 0.495$, 단위는 만 원)

- ① ① [194.12, 205.88]
- ② ② [192.26, 207.74]
- ③ ③ [190.20, 209.80]
- ④ ④ [188.16, 211.84]

정답: ②

1단계: 표본의 크기 $n = 100$, 표본평균 $\bar{x} = 200$, 모표준편차 $\sigma = 30$. 표준오차는 $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{30}{\sqrt{100}} = 3$. 2단계:

$P(0 \leq Z \leq 2.58) = 0.495$ 이므로 $P(-2.58 \leq Z \leq 2.58) = 0.99$, 따라서 신뢰도 99%의 임계값은 $z^* = 2.58$. 3단계: 모평균 m 의 신뢰구간은 $\bar{x} \pm z^* \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 200 \pm 2.58 \cdot 3 = 200 \pm 7.74$. 즉 [192.26, 207.74].

풀이 전략: 핵심 아이디어는 신뢰구간 공식 $\bar{x} \pm z^* \cdot \sigma/\sqrt{n}$ 에서 신뢰도가 결정하는 부분은 z^* 뿐이고, 표본의 정보는 \bar{x} 와 σ/\sqrt{n} 에만 들어간다는 분리된 구조이다. ① $\pm 1.96 \cdot 3$, ③ $\pm 2.58 \cdot \sqrt{14.4}$ 같은 함정 보기에 걸리지 않으려면 표본오차 계산이 정확해야 한다.

💡 신뢰도 90%, 95%, 99%에 대응하는 임계값 1.645, 1.96, 2.58은 통계 면접 단골이며, 99%는 95%보다 신뢰구간 폭이 약 32% 더 넓다.

Q208 초월함수 미분 심화

$x > 0$ 에서 방정식 $e^x = kx$ 가 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 양수 k 의 값의 범위를 구하시오.

- ① ① $k > 1$
- ② ② $k > e$
- ③ ③ $k > e^2$
- ④ ④ $k \geq e$

☞ **정답: ② $k > e$**

📖 1단계 (함수 변형): $f(x) = e^x - kx$ 로 두면 $x > 0$ 에서 $f(x) = 0$ 의 실근 개수를 묻는 문제이다.

2단계 (도함수와 임계점): $f'(x) = e^x - k = 0 \Rightarrow x_0 = \ln k$. $k > 1$ 일 때만 $x_0 > 0$ 이고 $f''(x) = e^x > 0$ 이므로 x_0 은 극솟점이다.

3단계 (극솟값 부호 분석): $f(x_0) = k - k \ln k = k(1 - \ln k)$. 두 실근 조건은 $f(x_0) < 0$, 즉 $1 - \ln k < 0 \Leftrightarrow k > e$. ($f(0) = 1 > 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f = \infty$ 이므로 극솟값이 음이면 자동으로 두 실근.) $k = e$ 면 접하므로 한 실근, 답은 $k > e$.

🧠 풀이 전략: 핵심 아이디어는 $y = e^x$ 와 $y = kx$ 의 교점 개수 분석을 $f(x) = e^x - kx$ 의 극값 분석으로 환원하는 것이다. 직선이 곡선에 접하는 임계 위치 $k = e$ 를 경계로 교점 수가 바뀐다.

💡 $y = e^x$ 위의 점에서 원점을 지나는 접선의 기울기는 정확히 e 이며, 이 값이 임계 기울기이다.

Q209 초월함수 적분 심화

정적분 $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 x}{1 + \cos^2 x} dx$ 의 값을 구하시오.

- ① ① $\frac{\pi}{2} - 1$
- ② ② $\frac{\pi}{4} - 1$
- ③ ③ $1 - \frac{\pi}{4}$
- ④ ④ $\frac{\pi}{2}$

☞ **정답: ① $\frac{\pi}{2} - 1$**

📖 1단계 (삼각함수 분리): $\sin^3 x = \sin x(1 - \cos^2 x)$ 로 분해한다.

2단계 (치환): $u = \cos x$, $du = -\sin x dx$. $x = 0$ 에서 $u = 1$, $x = \pi/2$ 에서 $u = 0$. 적분은 $\int_1^0 \frac{1-u^2}{1+u^2} (-du) = \int_0^1 \frac{1-u^2}{1+u^2} du$.

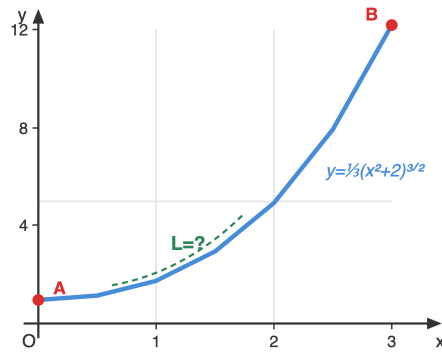
3단계 (유리함수 정리): $\frac{1-u^2}{1+u^2} = \frac{2}{1+u^2} - 1$. 따라서 $\int_0^1 \left(\frac{2}{1+u^2} - 1 \right) du = 2 \arctan u - u \Big|_0^1 = 2 \cdot \frac{\pi}{4} - 1 = \frac{\pi}{2} - 1$.

🧠 풀이 전략: 핵심 아이디어는 분자에 $\sin x dx$ 형태가 있으므로 $\cos x$ 를 새 변수로 잡으면 분모가 자연스럽게 유리함수가 된다는 점이다. 그 후 분자 차수 감소 후 \arctan 적분으로 마무리한다.

💡 $\frac{2}{1+u^2} - 1$ 형태의 분리는 분자 차수가 분모 차수 이상일 때 항상 유효한 다항식 나눗셈 기법이다.

Q210 미적분 통합 활용

곡선 $y = \frac{1}{3}(x^2 + 2)^{3/2}$ ($0 \leq x \leq 3$) 의 길이를 구하시오.



곡선의 길이: $L = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2} dx$

- ① ① 10
- ② ② 12
- ③ ③ 15
- ④ ④ 18

정답: ② 12

1단계 (도함수): $y' = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2}(x^2 + 2)^{1/2} \cdot 2x = x\sqrt{x^2 + 2}$.

2단계 (피적분함수 단순화): $1 + (y')^2 = 1 + x^2(x^2 + 2) = x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2$. 따라서 $\sqrt{1 + (y')^2} = x^2 + 1$.

3단계 (적분): $L = \int_0^3 (x^2 + 1)dx = \left[\frac{x^3}{3} + x \right]_0^3 = 9 + 3 = 12$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 $1 + (y')^2$ 이 완전제곱식 $(x^2 + 1)^2$ 으로 정리되도록 곡선이 설계되었다는 점이다. 이런 '예쁜' 곡선을 알아채면 길이 공식의 제곱근이 깔끔하게 풀린다.

💡 길이 공식의 피적분함수가 완전제곱식이 되는 곡선들은 17세기 이래 '교정 가능한 곡선(rectifiable curve)' 의 대표적 예이다.

Q211 순열·조합·이항 삼화

다항식 $(1 + x)^{10}(1 + x^2)^5$ 의 전개식에서 x^6 의 계수를 구하시오.

- ① ① 1480
- ② ② 1620
- ③ ③ 1720
- ④ ④ 1820

정답: ③ 1720

1단계 (이항전개): $(1 + x)^{10} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} x^k$, $(1 + x^2)^5 = \sum_{j=0}^5 \binom{5}{j} x^{2j}$.

2단계 (계수 합 식): x^6 의 계수는 $k + 2j = 6$ 인 (k, j) 에 대한 $\sum \binom{10}{k} \binom{5}{j}$ 이며, 가능한 (k, j) 는 $(6, 0), (4, 1), (2, 2), (0, 3)$.

3단계 (대입과 합산):

$$\binom{10}{6} \binom{5}{0} + \binom{10}{4} \binom{5}{1} + \binom{10}{2} \binom{5}{2} + \binom{10}{0} \binom{5}{3} = 210 \cdot 1 + 210 \cdot 5 + 45 \cdot 10 + 1 \cdot 10 = 210 + 1050 + 450 + 10 = 1720.$$

풀이 전략: 핵심 아이디어는 두 다항식의 곱에서 특정 차수 계수를 찾을 때, 차수가 합쳐 6이 되는 모든 조합을 따져야 한다는 것이다.

$(1 + x^2)^5$ 은 짝수 차수만 만들어내므로 j 의 후보를 빠르게 좁힐 수 있다.

💡 이런 합을 일반화하면 '합성곱 공식' 이며, 생성함수 이론의 기초이다.

Q212 확률 심화

한 시행에서 사건 A 가 일어날 확률이 $\frac{1}{3}$ 이다. 이 시행을 독립적으로 5번 반복할 때 사건 A 가 3번 이상 일어날 확률을 구하시오.

- ① ① $\frac{17}{81}$
- ② ② $\frac{40}{243}$
- ③ ③ $\frac{51}{125}$
- ④ ④ $\frac{50}{243}$

정답: ① $\frac{17}{81}$

1단계 (이항분포): X 를 5번 시행 중 A 가 일어난 횟수라 하면 $X \sim B(5, 1/3)$. $P(X = k) = \binom{5}{k} (1/3)^k (2/3)^{5-k}$.

2단계 (각 항 계산): $P(X = 3) = \binom{5}{3} \frac{1}{27} \cdot \frac{4}{9} = 10 \cdot \frac{4}{243} = \frac{40}{243}$. $P(X = 4) = \binom{5}{4} \frac{1}{81} \cdot \frac{2}{3} = 5 \cdot \frac{2}{243} = \frac{10}{243}$.

$P(X = 5) = \binom{5}{5} \frac{1}{243} = \frac{1}{243}$.

3단계 (합산): $P(X \geq 3) = \frac{40 + 10 + 1}{243} = \frac{51}{243} = \frac{17}{81}$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 '3번 이상' 을 $X = 3, 4, 5$ 의 배반사건으로 분리해 더하는 것이다. 보집합 $P(X \leq 2)$ 도 가능하나 항이 더 많아진다.

💡 확률 $1/3$ 짜리 독립시행을 5번 했을 때 평균 성공횟수는 $5 \cdot 1/3 \approx 1.67$ 이라 3번 이상은 평균보다 큰 사건이다.

Q213 통계 추론

표준편차가 5 인 정규모집단에서 크기 n 인 표본을 뽑아 모평균을 신뢰도 95%로 추정할 때, 신뢰구간의 길이가 4 이하가 되도록 하는 자연수 n 의 최솟값을 구하시오. (단, $P(|Z| \leq 1.96) = 0.95$)

- ① ① 16
- ② ② 24
- ③ ③ 25
- ④ ④ 36

정답: ③ 25

1단계 (신뢰구간 길이 공식): 95% 신뢰구간은 $X \pm 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 이고 길이는 $L = 2 \cdot 1.96 \cdot \frac{5}{\sqrt{n}} = \frac{19.6}{\sqrt{n}}$.

2단계 (부등식 풀기): $\frac{19.6}{\sqrt{n}} \leq 4 \Leftrightarrow \sqrt{n} \geq \frac{19.6}{4} = 4.9$.

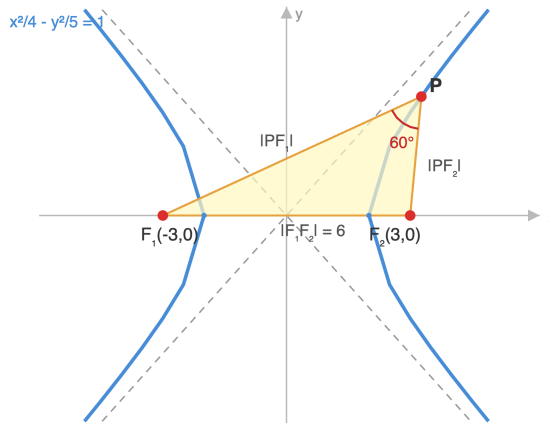
3단계 (자연수 조건): $n \geq 4.9^2 = 24.01$ 이므로 자연수 최솟값은 $n = 25$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 신뢰구간 길이가 σ/\sqrt{n} 에 비례하므로 n 을 키울수록 정확한 추정이 된다는 점이다. 실수 부등식의 해를 자연수 조건으로 변환할 때 24가 아닌 25를 답으로 골라야 한다.

💡 표본 크기를 4배로 늘려야 신뢰구간의 길이가 절반이 된다. 정밀도를 두 배 올리는 데에는 표본 크기를 네 배로 늘려야 하므로 비용이 커진다.

Q214 이차곡선 심화

쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ 의 두 초점을 F_1, F_2 라 하자. 이 쌍곡선의 오른쪽 가지 위의 점 P 에 대하여 $\angle F_1PF_2 = 60^\circ$ 일 때 삼각형 F_1PF_2 의 넓이를 구하시오.



- ① ① $3\sqrt{3}$
- ② ② $4\sqrt{3}$
- ③ ③ $5\sqrt{3}$
- ④ ④ $6\sqrt{3}$

정답: ③ $5\sqrt{3}$

1단계 (정의 적용): $a = 2, b = \sqrt{5}, c = \sqrt{a^2 + b^2} = 3$. 오른쪽 가지의 점은 $|PF_1| - |PF_2| = 2a = 4$ 를 만족하고 $|F_1F_2| = 2c = 6$.

2단계 (코사인 법칙): $|F_1F_2|^2 = |PF_1|^2 + |PF_2|^2 - 2|PF_1||PF_2|\cos 60^\circ$.

$|PF_1|^2 + |PF_2|^2 = (|PF_1| - |PF_2|)^2 + 2|PF_1||PF_2| = 16 + 2|PF_1||PF_2|$ 이므로

$36 = 16 + 2|PF_1||PF_2| - |PF_1||PF_2| = 16 + |PF_1||PF_2|$, 따라서 $|PF_1||PF_2| = 20$.

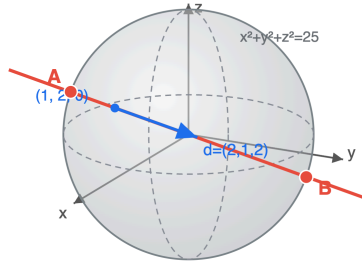
3단계 (넓이): $S = \frac{1}{2}|PF_1||PF_2|\sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 쌍곡선 정의로 $|PF_1| - |PF_2|$ 가 일정하다는 사실과, 코사인 법칙에서 $|PF_1|^2 + |PF_2|^2$ 을 차의 제곱+곱으로 변형해 $|PF_1||PF_2|$ 만 미지수로 남기는 것이다.

이차곡선의 초점 삼각형 문제는 정의(거리의 차/합)와 코사인 법칙의 콜라보가 거의 만능 풀이법이다.

Q215 벡터·공간도형 심화

공간에서 구 $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ 와 직선 $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{2}$ 가 만나는 두 점 사이의 거리를 구하시오.



$$|AB| = |\Delta t| \cdot |d| = (28/9) \cdot 3 = 28/3$$

- ① ① $\frac{20}{3}$
- ② ② $\frac{25}{3}$
- ③ ③ $\frac{28}{3}$
- ④ ④ $\frac{32}{3}$

정답: ③ $\frac{28}{3}$

1단계 (매개변수 표현): 직선을 $(x, y, z) = (1 + 2t, 2 + t, 2t)$ 로 두면 방향벡터 크기 $|\vec{d}| = \sqrt{4+1+4} = 3$.

2단계 (구 방정식 대입): $(1 + 2t)^2 + (2 + t)^2 + (2t)^2 = 25$. 전개하면 $1 + 4t + 4t^2 + 4 + 4t + t^2 + 4t^2 = 25$, 즉 $9t^2 + 8t - 20 = 0$.

3단계 (해와 거리): $t = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 720}}{18} = \frac{-8 \pm 28}{18}$, $t_1 = \frac{10}{9}$, $t_2 = -2$. $|t_1 - t_2| = \frac{28}{9}$. 두 교점 사이 거리는

$$|t_1 - t_2| \cdot |\vec{d}| = \frac{28}{9} \cdot 3 = \frac{28}{3}.$$

풀이 전략: 핵심 아이디어는 직선을 단위방향벡터의 매개변수로 표현하면 두 교점 사이의 거리가 $|\Delta t| \cdot |\vec{d}|$ 로 깔끔하게 나온다는 점이다. 이차방정식의 두 근의 차는 판별식의 제곱근을 일계수로 나눈 값이다.

💡 두 근의 차 공식은 $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ 인데, 이 문제에서 $\sqrt{784} / 9 = 28/9$ 가 정확히 그 값이다.

Q216 미적분 통합 활용

연속함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) = e^x + \int_0^1 f(t)e^{-t} dt$ 를 만족할 때 $f(0)$ 의 값을 구하시오.

- ① ① $1 + e$
- ② ② $2e$
- ③ ③ e^2
- ④ ④ $1 + e^2$

정답: ① $1 + e$

1단계 (상수 치환): 정적분 $\int_0^1 f(t)e^{-t} dt$ 는 상수이므로 A 라 두면 $f(x) = e^x + A$.

2단계 (자기참조 방정식): $A = \int_0^1 (e^t + A)e^{-t} dt = \int_0^1 1 dt + A \int_0^1 e^{-t} dt = 1 + A(1 - e^{-1})$.

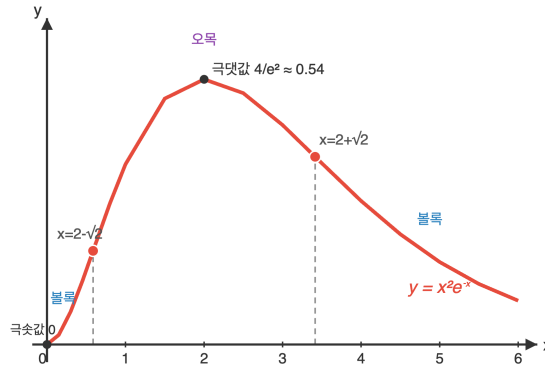
3단계 (방정식 풀이): $A - A(1 - e^{-1}) = 1 \Rightarrow Ae^{-1} = 1 \Rightarrow A = e$. 따라서 $f(x) = e^x + e$ 이고 $f(0) = 1 + e$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 적분 변수 t 가 정적분 안에서 사라지므로 그 정적분 전체가 상수임을 알아채는 것이다. 이 상수를 미지수로 두고 양변을 다시 적분하면 A 에 대한 일차방정식이 만들어진다.

💡 이런 형태의 적분방정식은 'Fredholm 방정식의 가장 단순한 사례' 이며, 핵 함수가 변수분리될 때 항상 이 트릭이 통한다.

Q217 초월함수 미분 심화

함수 $f(x) = x^2e^{-x}$ 의 두 변곡점의 x 좌표의 합을 구하시오.



- ① ① 2
- ② ② 3
- ③ ③ 4
- ④ ④ 5

정답: ③ 4

1단계 (1계 도함수): $f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = (2x - x^2)e^{-x}$.

2단계 (2계 도함수): $f''(x) = (2 - 2x)e^{-x} - (2x - x^2)e^{-x} = \{(2 - 2x) - (2x - x^2)\}e^{-x} = (x^2 - 4x + 2)e^{-x}$.

3단계 (변곡점 x좌표): $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 2 = 0$. 두 실근의 합은 근과 계수의 관계로 4. ($e^{-x} > 0$ 이고 f'' 의 부호가 두 근 양쪽에서 바뀌므로 두 점 모두 변곡점.)

풀이 전략: 핵심 아이디어는 $f''(x) = 0$ 의 해를 직접 풀지 않고도 근과 계수의 관계로 합만 구하면 된다는 점이다. $e^{-x} \neq 0$ 이라는 사실로 다항식 부분만 다루면 된다.

💡 $f(x) = x^n e^{-x}$ 류 함수는 감마분포 확률밀도의 원형이며, 통계학에서 자주 등장한다.

Q218 초월함수 미분 심화

$0 \leq x \leq \pi$ 에서 함수 $f(x) = e^{-x}\sin x$ 의 최댓값은?

- ① ① $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\pi/4}$
- ② ② $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\pi/4}$
- ③ ③ $e^{-\pi/4}$
- ④ ④ $\frac{1}{2}e^{-\pi/4}$

정답: ①

1단계: 곱의 미분으로 $f'(x) = -e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x = e^{-x}(\cos x - \sin x)$. 2단계: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = \sin x \Leftrightarrow \tan x = 1$. 구간 $[0, \pi]$ 에서 $x = \pi/4$ 가 유일한 임계점. 3단계: $0 \leq x < \pi/4$ 에서 $f' > 0$, $\pi/4 < x \leq \pi$ 에서 $f' < 0$ 이므로 $x = \pi/4$ 가 극대이자 최댓값. 양 끝점에서 $f(0) = 0$, $f(\pi) = 0$ 이고 $f(\pi/4) = e^{-\pi/4}\sin(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\pi/4}$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 지수와 삼각함수의 곱에서 미분이 $(\cos - \sin)$ 구조를 만든다는 점이다. 부호 판정은 $\tan x = 1$ 한 줄로 끝난다. 끝점값이 0임을 확인하면 임계점이 그대로 최댓값.

💡 $e^{-x}\sin x$ 는 감쇠진동의 대표 모델로, 진폭이 지수적으로 작아지는 진자 운동을 묘사한다.

Q219 순열·조합·이항 심화

서로 다른 6명의 학생을 서로 다른 3개의 조 A, B, C에 배정하려고 한다. 각 조에 적어도 한 명 이상이 배정되도록 하는 경우의 수는?

- ① ① 540
- ② ② 729
- ③ ③ 537
- ④ ④ 480

정답: ①

1단계: 제약 없는 배정은 각 학생이 3가지 조 중 하나를 선택하므로 $3^6 = 729$ 가지. 2단계: 적어도 한 조가 비는 사건을 포함배제로 빼야 한다. 한 조가 비는 경우 $\binom{3}{1} \cdot 2^6 = 192$, 두 조가 비는(즉 한 조에 몰린) 경우 $\binom{3}{2} \cdot 1^6 = 3$. 3단계: 포함배제로 $3^6 - \binom{3}{1}2^6 + \binom{3}{2}1^6 = 729 - 192 + 3 = 540$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 "적어도 1명" 조건을 직접 다루기 어려우므로 전체에서 비어있는 조가 있는 경우를 빼는 포함배제이다. 두 조가 비는 경우를 빼먹지 않도록 +항까지 챙겨야 한다.

전사함수의 개수는 제2종 스텔링수 $S(n, k)$ 와 $k!$ 의 곱으로 표현된다($S(6, 3) \cdot 3! = 90 \cdot 6 = 540$).

Q220 통계 추론

한 개의 주사위를 180번 던질 때 6의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X 라 하자. $P(X \geq 40)$ 의 근사값을 구하시오. (단, X 는 정규분포에 근사하며 $P(0 \leq Z \leq 1) = 0.3413$, $P(0 \leq Z \leq 1.5) = 0.4332$, $P(0 \leq Z \leq 2) = 0.4772$ 이다.)

- ① ① 0.0228
- ② ② 0.1587
- ③ ③ 0.0668
- ④ ④ 0.4772

정답: ①

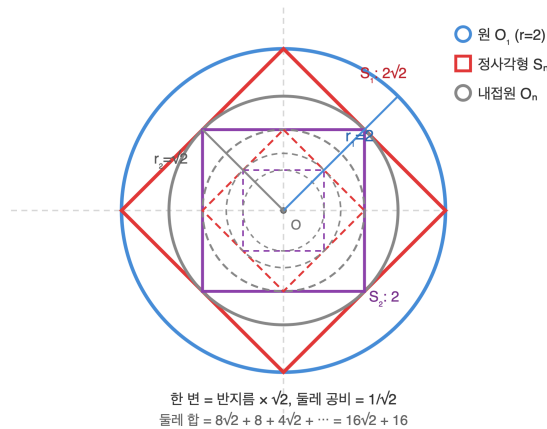
1단계: $X \sim B(180, 1/6)$ 이므로 평균 $E(X) = 180 \cdot \frac{1}{6} = 30$, 분산 $V(X) = 180 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = 25$, 표준편차 $\sigma = 5$. 2단계: $n = 180$ 이 충분히 크므로 X 는 $N(30, 5^2)$ 에 근사. $Z = \frac{X - 30}{5}$ 로 표준화하면 $P(X \geq 40) \approx P\left(Z \geq \frac{40 - 30}{5}\right) = P(Z \geq 2)$. 3단계: $P(Z \geq 2) = 0.5 - P(0 \leq Z \leq 2) = 0.5 - 0.4772 = 0.0228$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 이항분포의 정규근사다. $E(X)$, $V(X)$ 를 계산해 표준화 변수 Z 를 만든 뒤, 표 값에서 0.5를 빼는 방식으로 꼬리 확률을 구한다.

드무아브르-라플라스 정리에 따라 $np \geq 5$, $n(1 - p) \geq 5$ 이면 정규근사 정확도가 매우 높다.

Q221 수열 극한·급수 심화

반지름이 2인 원 O_1 에 정사각형 S_1 이 내접한다. S_1 에 다시 원 O_2 가 내접하고, O_2 에 정사각형 S_2 가 내접하는 식으로 원과 정사각형이 교대로 내접하는 작업을 무한히 반복할 때, 모든 정사각형 S_1, S_2, S_3, \dots 의 둘레의 길이의 합은?



- ① ① $16\sqrt{2} + 16$
- ② ② 16
- ③ ③ $8(\sqrt{2} + 1)$
- ④ ④ $16\sqrt{2} - 16$

정답: ①

1단계: 반지름 r 인 원에 내접하는 정사각형은 대각선이 $2r$ 이므로 한 변이 $r\sqrt{2}$ 이고, 한 변이 s 인 정사각형에 내접하는 원의 반지름이 $s/2$ 이다. 2단계: $r_1 = 2$ 이므로 S_1 의 한 변은 $2\sqrt{2}$, 둘레 $8\sqrt{2}$. 그 안에 내접하는 원의 반지름은 $\sqrt{2}$ 이고, 다시 내접하는 S_2 의 한 변은 $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$, 둘레 8. 따라서 두 단계 사이의 둘레비는 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 이다. 3단계: 둘레의 합은 첫째항 $8\sqrt{2}$, 공비 $1/\sqrt{2}$ 인 무한등비급수이므로

$$\text{로 } \frac{8\sqrt{2}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{8\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = \frac{16}{\sqrt{2} - 1} = \frac{16(\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2})^2 - 1^2} = 16(\sqrt{2} + 1) = 16\sqrt{2} + 16.$$

풀이 전략: 핵심 아이디어는 닮음비를 정확히 잡는 것이다. 원→정사각형 단계에서 한 변/반지름 비가 $\sqrt{2}$, 정사각형→원 단계에서 반지름/한 변 비가 $1/2$ 이므로 두 단계를 합치면 닮음비 $1/\sqrt{2}$. 둘레는 길이 척도이므로 같은 비율로 줄어든다.

이런 "원-정사각형 교대 내접" 패턴은 셀프 시밀러 도형의 고전적 예로, 반지름이 $1/\sqrt{2}$ 비율로 줄어들어 영원히 0에 수렴한다.

Q222 초월함수 적분 심화

$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1 + \sin x} dx$ 의 값은?

- ① $\frac{\pi}{2} - 1$
- ② $\frac{\pi}{2}$
- ③ $1 - \frac{\pi}{2}$
- ④ $\frac{\pi}{2} + 1$

정답: ①

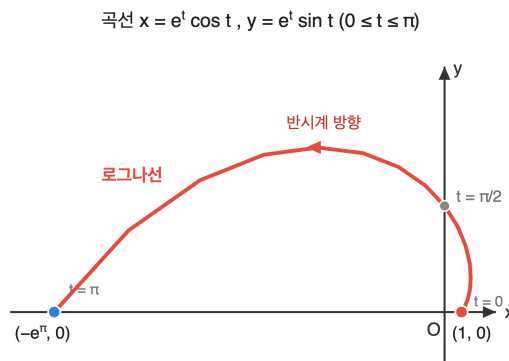
1단계: 분자에서 분모를 분리한다. $\frac{\sin x}{1 + \sin x} = \frac{(1 + \sin x) - 1}{1 + \sin x} = 1 - \frac{1}{1 + \sin x}$. 따라서 적분은 $\frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \sin x}$. 2단계: $\frac{1}{1 + \sin x}$ 에 분모와 분자에 $1 - \sin x$ 를 곱하면 $\frac{1 - \sin x}{1 - \sin^2 x} = \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x} = \sec^2 x - \sec x \tan x$. 부정적분은 $\tan x - \sec x + C$. 3단계: $[\tan x - \sec x]_0^{\pi/2}$ 에서 $x \rightarrow \pi/2$ 일 때 $\tan x - \sec x = \frac{\sin x - 1}{\cos x} = \frac{-\cos x}{1 + \sin x} \rightarrow 0$, $x = 0$ 일 때 값은 $0 - 1 = -1$. 따라서 $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \sin x} = 0 - (-1) = 1$. 결론: 답은 $\frac{\pi}{2} - 1$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 $\sin x / (1 + \sin x)$ 를 " 1 빼고 더하기"로 분리한 뒤, 남은 $1 / (1 + \sin x)$ 를 켈레식으로 곱해 분모를 $\cos^2 x$ 로 만드는 것이다. 그러면 $\sec^2 x$ 와 $\sec x \tan x$ 의 익숙한 적분 공식으로 환원된다.

이 풀이의 부정적분 형태 $\tan x - \sec x$ 는 $x \rightarrow \pi/2$ 에서 $0/0$ 꼴이지만 켈레를 곱하면 그 극한이 깔끔하게 0 으로 수렴한다.

Q223 미적분 통합 활용

매개변수곡선 $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t$ ($0 \leq t \leq \pi$)의 길이를 구하시오.



- ① $\sqrt{2} (e^\pi - 1)$
- ② $e^\pi - 1$
- ③ $2(e^\pi - 1)$
- ④ $\sqrt{2} e^\pi$

정답: ①

1단계: 매개변수 미분. $\frac{dx}{dt} = e^t \cos t - e^t \sin t = e^t (\cos t - \sin t)$, $\frac{dy}{dt} = e^t \sin t + e^t \cos t = e^t (\sin t + \cos t)$. 2단계: 제곱합을 정리.

$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = e^{2t} [(\cos t - \sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2] = e^{2t} \cdot 2$. 3단계: 곡선의 길이 공식

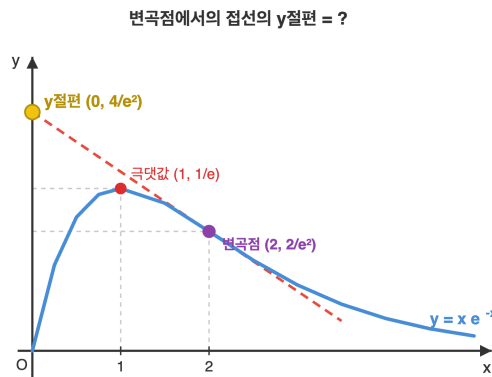
$L = \int_0^\pi \sqrt{2} e^t dt = \sqrt{2} [e^t]_0^\pi = \sqrt{2} (e^\pi - 1)$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 $(\cos - \sin)^2 + (\sin + \cos)^2$ 의 교차항이 상쇄되어 $2(\cos^2 + \sin^2) = 2$ 가 된다는 점이다. 그 결과 적분 안의 제곱근이 깔끔한 $\sqrt{2} e^t$ 로 정리되어 지수 적분이 된다.

$r = e^\theta$ 꼴의 곡선은 로그나선(spira mirabilis)이라 불리며, 야콥 베르누이가 "바뀌어도 변하지 않는다"고 칭송한 곡선이다.

Q224 초월함수 미분 심화

곡선 $y = xe^{-x}$ 의 변곡점에서의 접선이 y 축과 만나는 점의 y 좌표는?



- ① ① $\frac{4}{e^2}$
- ② ② $\frac{2}{e^2}$
- ③ ③ $\frac{4}{e}$
- ④ ④ $\frac{6}{e^2}$

정답: ①

1단계: $y' = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$, $y'' = -e^{-x} - (1-x)e^{-x} = (x-2)e^{-x}$. 2단계: 변곡점은 $y'' = 0$ 이고 부호가 바뀌는 점
 이므로 $x = 2$. 이때 $y(2) = 2e^{-2} = \frac{2}{e^2}$, $y'(2) = (1-2)e^{-2} = -\frac{1}{e^2}$. 3단계: 변곡점 $(2, \frac{2}{e^2})$ 에서의 접선은 $y - \frac{2}{e^2} = -\frac{1}{e^2}(x - 2)$.

$x = 0$ 대입: $y = \frac{2}{e^2} + \frac{2}{e^2} = \frac{4}{e^2}$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 변곡점이 $y'' = 0$ 이고 부호가 바뀌는 곳이라는 점이다. $(x-2)e^{-x}$ 에서 $e^{-x} > 0$ 이므로 부호 변화는 $x-2$ 가 결정한다. 접선의 y 절편은 점-기울기 식에 $x = 0$ 을 대입하는 표준 절차.

xe^{-x} 형태는 감마분포 Gamma(2, 1)의 확률밀도함수 비례부분으로, $x = 1$ 에서 최댓값, $x = 2$ 에서 변곡점을 갖는 종 모양 곡선이다.

Q225 순열·조합·이항 심화

방정식 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15$ 의 해 중에서 모든 i 에 대하여 $1 \leq x_i \leq 6$ 인 정수해의 개수는?

- ① ① 140
- ② ② 364
- ③ ③ 224
- ④ ④ 84

정답: ①

1단계: 하한 처리를 위해 $y_i = x_i - 1$ 로 치환하면 $0 \leq y_i \leq 5$ 이고 $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 11$. 상한 없이 음이 아닌 정수해는 $\binom{11+3}{3} = \binom{14}{3} = 364$ 개. 2단계: 상한 위반 ($y_i \geq 6$) 사건을 포함배제. 한 변수가 6 이상이면 $y_i = y_i - 6 \geq 0$ 로 두어 $\sum = 5$ 의 해가 $\binom{5+3}{3} = 56$ 이고 변수 선택이 4가지이므로 단일 위반 합 $4 \cdot 56 = 224$. 3단계: 두 변수가 동시에 6 이상이면 $\sum \geq 12$ 인데 우변은 11이므로 불가능 (0개). 따라서 답은 $364 - 224 = 140$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 두 단계 변환이다. 먼저 평행이동으로 하한을 0으로 만들고, 그 다음 상한 위반을 포함배제로 빼는 표준 기법. 두 변수 동시 위반이 0임을 확인해야 음수가 안 나오는 깔끔한 결말.

이런 문제는 주사위 4개를 던져 합이 15가 나오는 경우의 수와 동치이며, 윗이나 카탈로니아 카드 게임의 분배 분석에 직접 응용된다.

Q226 확률 심화

빨간 공 3개와 파란 공 2개가 들어 있는 주머니에서 임의로 두 개의 공을 동시에 꺼내 색을 확인하고, 다시 넣지 않은 채 남은 공에서 다시 두 개의 공을 동시에 꺼낸다. 첫 번째에 꺼낸 두 공의 색이 같고, 두 번째에 꺼낸 두 공의 색도 같을 확률은?

- ① ① $\frac{1}{5}$
- ② ② $\frac{2}{5}$
- ③ ③ $\frac{1}{10}$
- ④ ④ $\frac{3}{10}$

🎯 정답: ①

📖 1단계: 첫 번째 시행에서 두 공의 색이 같은 두 가지 경우를 분리한다. (i) 빨강 둘: $P = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{3}{10}$, 이후 빨1, 파2가 남음. (ii) 파랑 둘:

$P = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{1}{10}$, 이후 빨3, 파0이 남음. 2단계: 두 번째 시행에서 두 공의 색이 같은 조건부 확률을 각각 계산. (i) 남은 빨1·파2에서 같은

색은 파랑둘뿐: $\frac{\binom{2}{2}}{\binom{3}{2}} = \frac{1}{3}$. (ii) 남은 빨3·파0에서 두 개 모두 빨강일 확률: $\frac{\binom{3}{2}}{\binom{3}{2}} = 1$. 3단계: 곱사건 합산.

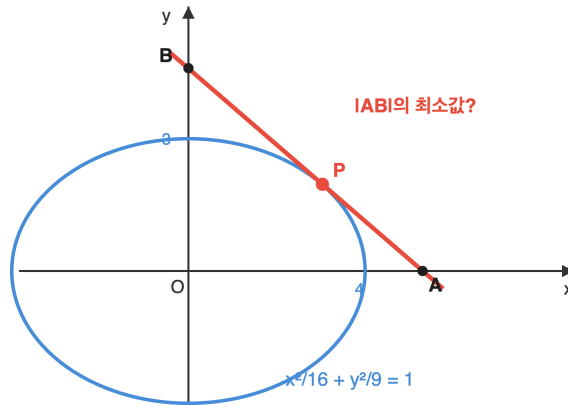
$$\frac{3}{10} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{10} \cdot 1 = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{1}{5}$$

🧠 풀이 전략: 핵심 아이디어는 첫 시행 결과에 따라 남은 분포가 달라지므로 경우 분리가 필수라는 점. 함정은 "\text{같은 색}"을 첫 시행 확률에서만 계산하고 둘째 시행을 무시하는 것. 두 시행을 모두 만족시키는 곱사건을 빠뜨리지 말 것.

💡 비복원 추출에서는 표본의 색 구성이 추출마다 달라지므로 베이즈식 사고가 자연스럽고, 이를 일반화하면 polya 항아리 모형이 된다.

Q227 이차곡선 심화

타원 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ 위의 제1사분면에 있는 점 P에서의 접선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, 선분 AB의 길이의 최솟값은?



- ① ① 7
- ② ② 5
- ③ ③ $\sqrt{12}$
- ④ ④ $4\sqrt{3}$

정답: ①

1단계: $P = (4\cos\theta, 3\sin\theta)$ 로 두면 그 점에서의 접선은 $\frac{x\cos\theta}{4} + \frac{y\sin\theta}{3} = 1$. 따라서 $A\left(\frac{4}{\cos\theta}, 0\right)$, $B\left(0, \frac{3}{\sin\theta}\right)$. 2단계:

$|AB|^2 = \frac{16}{\cos^2\theta} + \frac{9}{\sin^2\theta}$. 코시-슈바르츠 부등식 $\left(\frac{16}{\cos^2\theta} + \frac{9}{\sin^2\theta}\right)(\cos^2\theta + \sin^2\theta) \geq (4 + 3)^2 = 49$. 3단계: $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ 이므로 $|AB|^2 \geq 49$, 즉 $|AB| \geq 7$. 등호는 $\frac{16/\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{9/\sin^2\theta}{\sin^2\theta}$ 즉 $\frac{4}{\cos^2\theta} = \frac{3}{\sin^2\theta} \Rightarrow \cos^2\theta = \frac{4}{7}$, $\sin^2\theta = \frac{3}{7}$ 일 때 성립하므로 최솟값은 7.

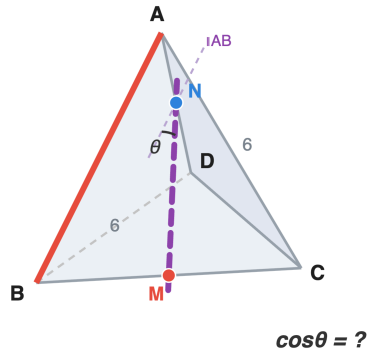
풀이 전략: 핵심 아이디어는 매개변수화 후 코시-슈바르츠를 정확한 형태로 적용하는 것. $\frac{a^2}{p} + \frac{b^2}{q} \geq \frac{(a+b)^2}{p+q}$ ($p, q > 0$)를 사용해 $|AB| \geq a + b$ 임을 일반화하면 모든 타원에서 같은 결론. 함정은 $a^2 + b^2 = 25$ 같은 대각선 길이로 잘못 잡는 것.

타원의 임의 접선이 좌표축과 만나 만드는 직각삼각형의 빗변 최솟값은 항상 $a + b$ 로, 단순한 코시 부등식이 명확한 기하학적 양을 만든다.

Q228 벡터·공간도형 심화

한 모서리의 길이가 6인 정사면체 ABCD에서 모서리 BC의 중점을 M, 모서리 AD의 중점을 N이라 하자. 두 직선 MN과 AB가 이루는 각을 θ 라 할 때, $\cos\theta$ 의 값은?

정사면체 ABCD (한 모서리 6)
M: BC의 중점, N: AD의 중점



- ① ① $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- ② ② $\frac{1}{2}$
- ③ ③ $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- ④ ④ $\frac{\sqrt{6}}{3}$

정답: ①

1단계: 점 A를 원점으로 잡고 $\vec{b} = \vec{AB}$, $\vec{c} = \vec{AC}$, $\vec{d} = \vec{AD}$ 라 하자. $|\vec{b}| = |\vec{c}| = |\vec{d}| = 6$ 이고 모든 모서리 사이 각이 60° 이므로

$\vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{d} = \vec{c} \cdot \vec{d} = 36\cos 60^\circ = 18$. 2단계: $\vec{AM} = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}$, $\vec{AN} = \frac{\vec{d}}{2}$ 이므로 $\vec{MN} = \frac{\vec{d} - \vec{b} - \vec{c}}{2}$. 길이 제곱은

$\frac{1}{4}(|\vec{d}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{d} - 2\vec{c} \cdot \vec{d} + 2\vec{b} \cdot \vec{c}) = \frac{1}{4}(36 + 36 + 36 - 36 - 36 + 36) = 18$, 즉 $|\vec{MN}| = 3\sqrt{2}$. 3단계: 내적

$$\vec{AB} \cdot \vec{MN} = \vec{b} \cdot \frac{\vec{d} - \vec{b} - \vec{c}}{2} = \frac{\vec{b} \cdot \vec{d} - |\vec{b}|^2 - \vec{b} \cdot \vec{c}}{2} = \frac{18 - 36 - 18}{2} = -18. \text{ 따라서 } \cos\theta = \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{MN}|}{|\vec{AB}||\vec{MN}|} = \frac{18}{6 \cdot 3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

풀이 전략: 핵심 아이디어는 정사면체의 세 모서리 벡터를 기저로 잡고 모든 내적을 $36\cos 60^\circ = 18$ 로 일관되게 처리하는 것. "두 직선 사이의 각"은 항상 예각으로 잡으므로 내적의 절댓값을 사용해야 한다.

정사면체에서 마주보는 두 모서리의 중점을 잇는 선분 MN은 두 모서리에 모두 수직인 공통수선이며, 그 길이는 한 모서리의 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 배다.

Q229 수열 극한·급수 심화

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \frac{2k}{n}}$ 의 값은?

- ① $\frac{3\sqrt{3} - 1}{3}$
- ② $\frac{3\sqrt{3} + 1}{3}$
- ③ $\sqrt{3} - 1$
- ④ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

정답: ① $\frac{3\sqrt{3} - 1}{3}$

1단계: 주어진 식은 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$ 꼴의 리만합이다. $f(x) = \sqrt{1+2x}$, $x_k = \frac{k}{n}$, $\Delta x = \frac{1}{n}$ 로 놓으면 극한값은 $\int_0^1 \sqrt{1+2x} dx$ 이다. (참고: $x_k = \frac{2k}{n}$, $\Delta x = \frac{2}{n}$ 로 보면 $\frac{1}{n} \sum = \frac{1}{2} \sum f(x_k) \Delta x \rightarrow \frac{1}{2} \int_0^2 \sqrt{1+x} dx$ 이고, $x = 2s$ 치환으로 이는 $\int_0^1 \sqrt{1+2x} dx$ 와 같다. 두 표현은 같은 값이다.)

2단계: $u = 1 + 2x$ 로 치환하면 $du = 2dx$, 구간은 $u: 1 \rightarrow 3$ 이다. $\int_0^1 \sqrt{1+2x} dx = \frac{1}{2} \int_1^3 \sqrt{u} du$.

3단계: $= \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} u^{3/2} \right]_1^3 = \frac{1}{3} (3\sqrt{3} - 1) = \frac{3\sqrt{3} - 1}{3}$. 정답은 ①.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 $\frac{1}{n} \sum f(k/n)$ 형태를 $\int_0^1 f(x) dx$ 로 해석하는 리만합 정의. $\sqrt{1+2k/n}$ 에서 $x = k/n$ 으로 치환하면 적분 함수 결정.

리만합은 19세기 베른하르트 리만이 정의했지만 면적을 이런 방식으로 근사하는 발상은 고대 그리스 아르키메데스의 '소진법'까지 거슬러 올라감.

Q230 통계 추론

어떤 시험 점수 X 가 정규분포 $N(70, 10^2)$ 을 따른다. 합격선이 70점일 때, 합격한 학생 중에서 임의로 한 명을 뽑았을 때 그 학생의 점수가 80점 이상일 확률을 구하시오. (단, $P(0 \leq Z \leq 1) = 0.3413$)

- ① 0.1587
- ② 0.3174
- ③ 0.5000
- ④ 0.6826

정답: ② 0.3174

1단계: 사건 정의. $A = \{X \geq 70\}$ (합격), $B = \{X \geq 80\}$. 구하는 값은 $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)}$ ($B \subset A$).

2단계: 표준화. $Z = \frac{X-70}{10}$ 으로 두면 $P(A) = P(Z \geq 0) = 0.5$, $P(B) = P(Z \geq 1) = 0.5 - 0.3413 = 0.1587$.

3단계: $P(B|A) = \frac{0.1587}{0.5} = 0.3174$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 조건부확률을 정규분포 표준화와 결합. '합격자 중'이라는 조건으로 분모가 $P(A) = 0.5$ 가 되어 단순 $P(X \geq 80)$ 의 두 배가 된다는 점이 함정 회피 포인트.

실제 입시·자격시험에서 '컷라인 통과자 중 상위 X%' 같은 분석에 정확히 이런 조건부 정규분포 계산이 사용됨.

Q231 초월함수 미분 심화

함수 $f(x) = e^x \sin x$ 에 대하여 $f'(x) = 0$ 을 만족시키는 양의 실수 x 중 가장 작은 값은?

- ① ① $\frac{\pi}{4}$
- ② ② $\frac{\pi}{2}$
- ③ ③ $\frac{3\pi}{4}$
- ④ ④ π

정답: ③ $\frac{3\pi}{4}$

1단계: 곱의 미분으로 $f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x(\sin x + \cos x)$.

2단계: $e^x > 0$ 이므로 $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x + \cos x = 0$. 합성하면 $\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$, 즉 $x + \frac{\pi}{4} = n\pi$ (n 정수).

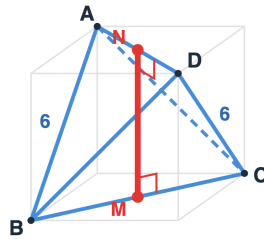
3단계: $x = n\pi - \frac{\pi}{4}$. 양수가 되려면 $n \geq 1$, 따라서 최솟값은 $n = 1$ 일 때 $x = \frac{3\pi}{4}$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 곱의 미분 후 공통인수 e^x 로 묶고, 삼각함수 합 $\sin x + \cos x$ 를 합성을 이용해 단일 사인함수로 변환. $\pi/4$ 가 답이라는 함정에 빠지지 않도록 주의.

$e^x \sin x$ 형 함수는 RLC 회로의 감쇠진동(실제로는 $e^{-\alpha t} \sin \omega t$)의 수학적 원형으로, 회로공학·기계진동의 기본 모형.

Q232 벡터·공간도형 심화

한 모서리의 길이가 6 인 정사면체 $ABCD$ 에서 모서리 BC 의 중점을 M , 모서리 AD 의 중점을 N 이라 할 때 선분 MN 의 길이는?



- ① ① 3
- ② ② $2\sqrt{3}$
- ③ ③ $3\sqrt{2}$
- ④ ④ 6

정답: ③ $3\sqrt{2}$

1단계: 좌표 설정. $A = (0, 0, 0)$, $B = (6, 0, 0)$, $C = (3, 3\sqrt{3}, 0)$, $D = (3, \sqrt{3}, 2\sqrt{6})$ (D 의 z 좌표는 정사면체 높이 $\sqrt{6^2 - (2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{6}$ 로부터).

2단계: 중점 좌표. $M = \frac{B+C}{2} = \left(\frac{9}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}, 0\right)$, $N = \frac{A+D}{2} = \left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{6}\right)$.

3단계: $\vec{MN} = N - M = (-3, -\sqrt{3}, \sqrt{6})$. $|\vec{MN}|^2 = 9 + 3 + 6 = 18$. 따라서 $|MN| = 3\sqrt{2}$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 정사면체에서 마주보는 두 모서리(교인 위치)의 중점을 잇는 선분이 두 모서리 모두에 수직이며, 그 길이가 한 변의 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 배라는 일반 성질. 좌표를 잡아 직접 계산하여 검증.

정사면체에서 마주보는 모서리 쌍은 3쌍 있고, 각 쌍의 중점을 잇는 세 선분은 한 점(정사면체 무게중심)에서 만나며 서로 직교한다. 즉 정사면체에는 '숨겨진 직교축' 3개가 존재.

Q233 수열 극한·급수 심화

수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 1$ 이고, 모든 자연수 n 에 대하여 $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{2}{3^n}$ 을 만족할 때 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 값은?

- ① ① 2
- ② ② $\frac{5}{2}$
- ③ ③ 3
- ④ ④ $\frac{7}{2}$

정답: ③ 3

1단계: 급수 수렴성 확인. 점화식의 양변을 3^n 곱하면 $b_{n+1} = 3^{n+1}a_{n+1} = 3^n a_n + 6 = b_n + 6$ 이 아닌데, 다시 정리. 점화식 양변에 3^{n+1} 곱하면 $3^{n+1}a_{n+1} = 3^n a_n + 2 \cdot 3$. $b_n = 3^n a_n$ 으로 놓으면 $b_{n+1} = b_n + 6$, $b_1 = 3a_1 = 3$. 따라서

$$b_n = 3 + 6(n-1) = 6n - 3, \text{ 즉 } a_n = \frac{6n-3}{3^n}.$$

2단계: 합 분리. $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6n-3}{3^n} = 6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} - 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$.

3단계: 공식 활용. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1/3}{1-1/3} = \frac{1}{2}$. $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$ 에 $x = 1/3$ 대입하면 $\frac{1/3}{(2/3)^2} = \frac{3}{4}$. 따라서

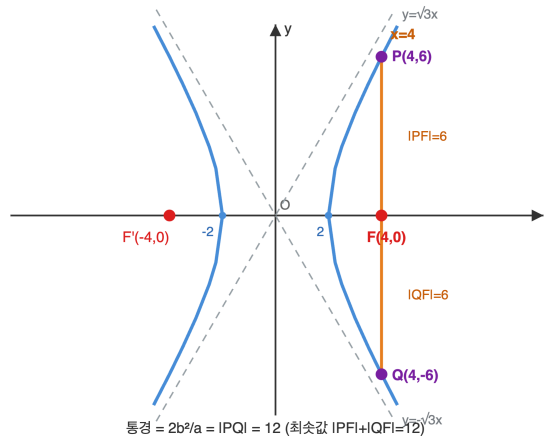
$$S = 6 \cdot \frac{3}{4} - 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{2} - \frac{3}{2} = 3.$$

풀이 전략: 핵심 아이디어는 점화식의 일반항을 직접 구한 뒤 산술-기하급수($\sum nx^n$) 공식을 사용. 점화식 양변에 3^{n+1} 을 곱해 등차수열로 변환하는 치환이 결정적.

💡 $\sum nx^n$ 형태의 산술-기하급수는 17세기 야코프 베르누이가 도박의 기댓값 계산 중 체계화했으며, 현대에는 확률에서 기하분포의 평균 계산에 직결.

Q234 이차곡선 심화

쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ 의 한 초점 $F(4, 0)$ 을 지나는 직선이 쌍곡선의 오른쪽 가지와 서로 다른 두 점 P, Q 에서 만난다.
 $|PF| + |QF|$ 의 최솟값은?



- ① ① 8
- ② ② 12
- ③ ③ 16
- ④ ④ 24

정답: ② 12

1단계: 쌍곡선 정보. $a = 2, b = 2\sqrt{3}, c = \sqrt{a^2 + b^2} = 4$. 오른쪽 가지 위의 점 P 에 대해 초점-거리 공식 $|PF| = ex - a$ ($e = c/a = 2$) 가 성립.

2단계: 두 점 P, Q 가 모두 오른쪽 가지에 있을 때 $|PF| + |QF| = e(x_p + x_q) - 2a = 2(x_p + x_q) - 4$. 이 값이 최소가 되려면 $x_p + x_q$ 가 최소.

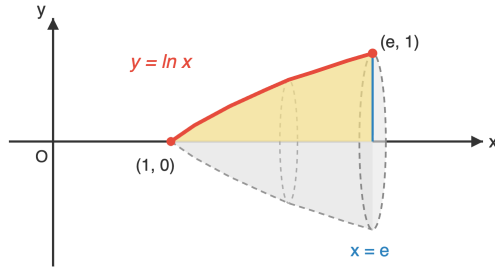
3단계: F 를 지나는 직선이 오른쪽 가지를 두 번 만나려면 직선의 기울기가 점근선 기울기 $\pm\sqrt{3}$ 보다 절댓값이 커야 한다. 가장 대칭적인 경우는 직선이 주축에 수직인 통경(latus rectum). 그때 $x_p = x_q = 4$ 로 $x_p + x_q = 8$ 최소. 따라서 최솟값 $= 2 \cdot 8 - 4 = 12$.
 검산: $x = 4$ 대입하면 $4 - y^2/12 = 1, y = \pm 6, |PF| = |QF| = 6$, 합 12.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 쌍곡선의 초점-거리 공식 $|PF| = |ex - a|$ 와, '같은 가지에 두 점' 이라는 제약이 직선 기울기에 부등식을 부여한다는 점. 그 안에서 $x_p + x_q$ 의 최소가 통경(주축에 수직)에서 달성.

쌍곡선의 통경 길이 $\frac{2b^2}{a}$ 는 케플러 제1법칙에서 비주기 혜성 궤도(쌍곡선)의 '근일점 부근 두께'를 결정하는 양으로, 천체역학에서 직접 등장.

Q235 미적분 통합 활용

곡선 $y = \ln x$ 와 x 축, 직선 $x = e$ 로 둘러싸인 부분을 x 축 둘레로 회전시켜 얻은 회전체의 부피는?



- ① ① $\pi(e - 2)$
- ② ② $\pi(e - 1)$
- ③ ③ 2π
- ④ ④ πe

정답: ① $\pi(e - 2)$

1단계: 회전체 부피 공식 (디스크법). $V = \pi \int_1^e (\ln x)^2 dx$.

2단계: 부분적분 1회. $u = (\ln x)^2$, $dv = dx$, $du = \frac{2\ln x}{x} dx$, $v = x$. $\int (\ln x)^2 dx = x(\ln x)^2 - \int 2\ln x dx$.

3단계: $\int \ln x dx = x \ln x - x$ (다시 부분적분). 정리하면 $\int (\ln x)^2 dx = x(\ln x)^2 - 2(x \ln x - x) + C$. 구간 $[1, e]$ 평가:
 $[x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x]_1^e = (e \cdot 1 - 2e + 2e) - (0 - 0 + 2) = e - 2$. 따라서 $V = \pi(e - 2)$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 디스크법으로 $\pi \int [f(x)]^2 dx$ 적용 후 $(\ln x)^2$ 의 정적분을 부분적분 두 번으로 처리. $\ln x$ 의 적분 $x \ln x - x$ 는 표준 결과로 암기.

💡 $\int (\ln x)^n dx$ 형태는 환원공식 $I_n = x(\ln x)^n - nI_{n-1}$ 을 만족하며, 이 점화식 구조가 감마함수 $\Gamma(n+1) = n!$ 의 적분 표현과 직접 연결됨.

Q236 통계 추론

한 시행에서 사건 A 가 일어날 확률이 $\frac{1}{4}$ 이다. 이 시행을 192번 독립적으로 반복할 때 사건 A 가 일어난 횟수를 X 라 하자.

$P(36 \leq X \leq 60)$ 의 값을 정규근사를 이용하여 구하면? (단, $P(0 \leq Z \leq 1) = 0.3413$, $P(0 \leq Z \leq 2) = 0.4772$)

- ① ① 0.6826
- ② ② 0.8185
- ③ ③ 0.9544
- ④ ④ 0.9772

정답: ③ 0.9544

1단계: 이항분포 모수. $X \sim B\left(192, \frac{1}{4}\right)$. $E(X) = 192 \cdot \frac{1}{4} = 48$, $V(X) = 192 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = 36$, $\sigma = 6$.

2단계: 정규근사. $n = 192$ 가 충분히 크므로 X 는 근사적으로 $N(48, 6^2)$ 을 따른다.

3단계: 표준화. $P(36 \leq X \leq 60) \approx P\left(\frac{36 - 48}{6} \leq Z \leq \frac{60 - 48}{6}\right) = P(-2 \leq Z \leq 2) = 2 \cdot 0.4772 = 0.9544$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 큰 n 에서 이항분포가 정규분포로 근사된다는 중심극한정리(드무아브르-라플라스). 평균과 분산을 구한 뒤 표준화하여 표 값을 활용.

💡 이항분포의 정규근사는 1733년 드무아브르가 동전 던지기 분석에서 처음 발견했으며, 이는 중심극한정리의 역사적 출발점.

Q237 미적분 통합 활용

매개변수로 나타낸 곡선 $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t$ ($0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$) 의 길이는?

- ① ① $e^{\pi/2} - 1$
- ② ② $\sqrt{2} (e^{\pi/2} - 1)$
- ③ ③ $2(e^{\pi/2} - 1)$
- ④ ④ $\sqrt{2} e^{\pi/2}$

정답: ② $\sqrt{2} (e^{\pi/2} - 1)$

1단계: 곡선의 길이 공식 $L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$.

2단계: 미분 계산. $\frac{dx}{dt} = e^t(\cos t - \sin t), \frac{dy}{dt} = e^t(\sin t + \cos t)$. 제곱합 $= e^{2t} [(\cos t - \sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2] = e^{2t} \cdot 2 (\cos^2 + \sin^2 = 1$ 두 번).

3단계: $\sqrt{2e^{2t}} = \sqrt{2} e^t$. 따라서 $L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{2} e^t dt = \sqrt{2} [e^t]_0^{\pi/2} = \sqrt{2} (e^{\pi/2} - 1)$.

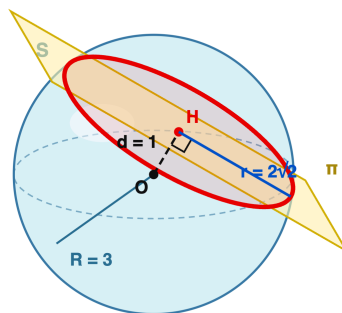
풀이 전략: 핵심 아이디어는 매개변수 곡선의 길이 공식과, $(\cos t - \sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2 = 2$ 라는 핵심 항등식을 이용해 적분식을 단순한 지수함수로 환원.

💡 이 곡선은 '로그 나선'의 한 예. 자연계의 앵무조개 껍데기, 은하 나선팔, 매가 먹이를 향해 내려오는 비행 경로 등이 모두 로그 나선을 그리며, 자기닮음 성질을 가짐.

Q238 벡터-공간도형 심화

공간에서 구 $S : x^2 + y^2 + z^2 = 9$ 와 평면 $\pi : x + 2y + 2z = 3$ 의 교선인 원의 넓이는?

구 S와 평면 π의 교선 = 원



$$r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{9 - 1} = 2\sqrt{2}, \text{ 넓이} = \pi r^2 = 8\pi$$

- ① ① 4π
- ② ② 6π
- ③ ③ 8π
- ④ ④ 9π

정답: ③ 8π

1단계: 구의 중심 $O(0, 0, 0)$, 반지름 $R = 3$. 평면의 법선벡터 $\vec{n} = (1, 2, 2), |\vec{n}| = 3$.

2단계: 점과 평면 사이의 거리 공식. $d = \frac{|0 + 0 + 0 - 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{3}{3} = 1$.

3단계: 교선 원의 반지름은 직각삼각형(반지름 R , 중심거리 d , 원의 반지름 r) 관계에서 $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{9 - 1} = 2\sqrt{2}$. 넓이 $= \pi r^2 = \pi(2\sqrt{2})^2 = 8\pi$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 구와 평면의 교선이 원이며, 그 원의 반지름 r 이 $(\text{구 반지름})^2 = (\text{중심에서 평면까지 거리})^2 + r^2$ 라는 피타고라스 관계로 결정된다는 것. 점과 평면의 거리를 정확히 계산하는 것이 핵심.

💡 위도선이 지구(구)와 위도면(평면)의 교선이고 모두 원이라는 사실은 정확히 이 정리의 응용. 적도(중심거리=0)일 때 반지름이 최대인 대원이 됨.

Q239 수열 극한·급수 심화

무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ 의 합을 구하여라.

- ① ① $\frac{1}{6}$
- ② ② $\frac{1}{4}$
- ③ ③ $\frac{1}{3}$
- ④ ④ $\frac{1}{2}$

☞ 정답: ② $\frac{1}{4}$

📖 1단계) 부분분수 분해: $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right]$. (양변 통분으로 검증 가능) 2단계) 부분합

$$S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{(N+1)(N+2)} \right] \text{ (망원합). 3단계) } N \rightarrow \infty \text{이면 둘째 항은 0으로 수렴하므로 합은 } \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

🧠 풀이 전략: 핵심 아이디어는 세 인수의 곱 분모를 두 단계 부분분수로 쪼개되, 인접한 두 인수의 곱 형태로 묶어 망원급수가 되도록 하는 것이다. 흔한 함정은 $\frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2}$ 로 분해해 망원성이 깨지는 것.

💡 $\sum 1/(n(n+1) \cdots (n+k)) = 1/(k \cdot k!)$ 의 일반화 공식이 존재하며, $k = 2$ 일 때 정확히 $1/4$ 이 된다.

Q240 순열·조합·이항 심화

$\sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k}^2$ 의 값을 구하여라.

- ① ① 92378
- ② ② 184756
- ③ ③ 369512
- ④ ④ 1048576

☞ 정답: ② 184756

📖 1단계) 항등식 유도: $(1+x)^{10}(1+x)^{10} = (1+x)^{20}$. 좌변에서 x^{10} 의 계수는 $\sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} \binom{10}{10-k} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k}^2$. 2단계) 우변에서 x^{10} 의 계수는 $\binom{20}{10}$. 3단계) $\binom{20}{10} = \frac{20!}{10! \cdot 10!} = 184756$. 따라서 답은 184756.

🧠 풀이 전략: 핵심 아이디어는 Vandermonde 항등식 $\sum_k \binom{m}{k} \binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r}$ 의 특수 형태로, 두 다항식의 곱에서 같은 차수 계수를 비교하는 발상이다. 함정은 $\binom{10}{k}^2$ 를 $\binom{10}{k} \binom{10}{10-k}$ 로 바꾸는 대칭성 $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ 을 놓치는 것.

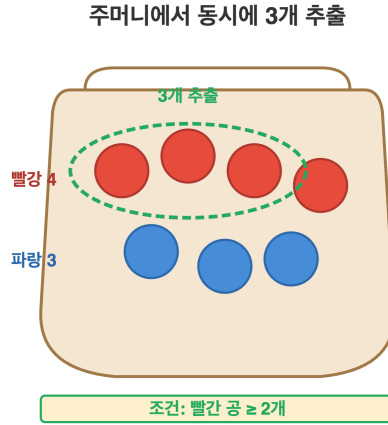
💡 $\binom{2n}{n}$ 은 격자경로 수와도 일치하며 $(0, 0)$ 에서 (n, n) 까지 격자에서 동/북으로만 가는 경로의 수이다.

고3 수학 심화

총 10문제 · 문제와 정답·풀이 포함

Q241 확률 심화

빨간 공 4개와 파란 공 3개가 들어 있는 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 빨간 공이 적어도 2개 포함될 확률을 구하여라.



- ① ① $\frac{18}{35}$
- ② ② $\frac{22}{35}$
- ③ ③ $\frac{24}{35}$
- ④ ④ $\frac{27}{35}$

🎯 정답: ② $\frac{22}{35}$

📖 1단계) 표본공간의 크기는 $\binom{7}{3} = 35$. 2단계) 빨간 공이 정확히 2개일 경우의 수는 $\binom{4}{2}\binom{3}{1} = 6 \times 3 = 18$, 정확히 3개일 경우의 수는 $\binom{4}{3}\binom{3}{0} = 4 \times 1 = 4$. 3단계) 따라서 빨간 공이 2개 이상일 확률은 $\frac{18 + 4}{35} = \frac{22}{35}$.

🧠 풀이 전략: 핵심 아이디어는 '적어도 2개' 사건을 정확히 2개와 정확히 3개로 분할하여 각각의 비복원 추출 확률을 더하는 것이다. 함정은 '연속 추출(순서 고려)로 착각하거나, 여사건을 잡을 때 '0개와 1개'를 모두 빼야 함을 잊는 것.

💡 초기하분포 $\text{Hyp}(7, 4, 3)$ 에서 $P(X \geq 2)$ 를 구한 셈으로, 이는 카드게임의 핸드 확률 계산과 같은 구조다.

Q242 통계 추론

확률변수 X 가 정규분포 $N(50, 10^2)$ 을 따를 때, $P(40 \leq X \leq 65)$ 의 값을 구하여라. (단, $P(0 \leq Z \leq 1) = 0.3413$, $P(0 \leq Z \leq 1.5) = 0.4332$ 이다.)

- ① ① 0.6826
- ② ② 0.7745
- ③ ③ 0.8413
- ④ ④ 0.9332

🎯 정답: ② 0.7745

📖 1단계) 표준화 $Z = \frac{X - 50}{10}$. $X = 40$ 일 때 $Z = -1$, $X = 65$ 일 때 $Z = 1.5$. 2단계)

$P(40 \leq X \leq 65) = P(-1 \leq Z \leq 1.5) = P(-1 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 1.5)$. 3단계) 표준정규분포의 대칭성으로

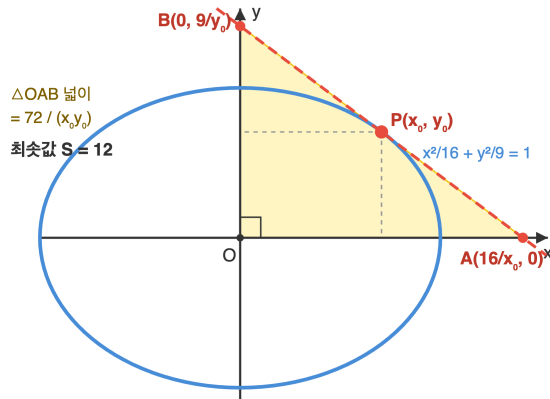
$P(-1 \leq Z \leq 0) = P(0 \leq Z \leq 1) = 0.3413$ 이므로 $P(-1 \leq Z \leq 1.5) = 0.3413 + 0.4332 = 0.7745$.

🧠 풀이 전략: 핵심 아이디어는 비대칭 구간 $[a, b]$ 를 0을 기준으로 좌·우 두 부분으로 쪼개고, 표준정규분포의 좌우대칭성 $P(-z \leq Z \leq 0) = P(0 \leq Z \leq z)$ 로 표를 사용하는 것이다. 함정은 $P(0 \leq Z \leq 1) + P(0 \leq Z \leq 1.5)$ 를 그냥 빼버리는 것.

💡 비대칭 구간 확률은 신호공학의 SNR 분석에서도 같은 방식으로 두 표값의 합으로 표현된다.

Q243 이차곡선 심화

타원 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ 위의 제1사분면의 점 P 에서 접선이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 A, B 라 하자. 삼각형 OAB 의 넓이의 최솟값을 구하여라. (단, O 는 원점이다.)



- ① ① 9
- ② ② 12
- ③ ③ 18
- ④ ④ 24

🎯 정답: ② 12

📖 1단계) 점 $P(x_0, y_0)$ 에서의 접선 방정식은 $\frac{xx_0}{16} + \frac{yy_0}{9} = 1$. 절편은 $A\left(\frac{16}{x_0}, 0\right), B\left(0, \frac{9}{y_0}\right)$. 2단계) 삼각형 OAB 의 넓이

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{x_0} \cdot \frac{9}{y_0} = \frac{72}{x_0 y_0}$$

이므로, S 를 최소화하려면 $x_0 y_0$ 를 최대화해야 한다. 3단계) 산술-기하 평균 부등식에서

$$1 = \frac{x_0^2}{16} + \frac{y_0^2}{9} \geq 2\sqrt{\frac{x_0^2 y_0^2}{144}} = \frac{x_0 y_0}{6}$$

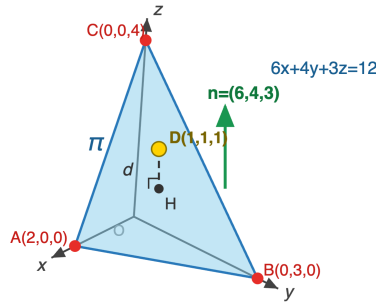
이므로 $x_0 y_0 \leq 6$ (등호는 $\frac{x_0^2}{16} = \frac{y_0^2}{9} = \frac{1}{2}$ 일 때). 따라서 $S_{\min} = \frac{72}{6} = 12$.

🧠 풀이 전략: 핵심 아이디어는 타원 위 점의 접선 절편을 매개화하고, 두 양수의 곱 $x_0 y_0$ 를 타원조건 하에서 AM-GM으로 최대화하는 것이다. 함정은 라그랑주 승수법이나 y_0 를 x_0 로 표현해 미분하는 길로 가서 계산이 무거워지는 것.

💡 이 결과 $S_{\min} = ab$ (a, b 는 반축)는 일반화되며, 타원에 외접하는 모든 절편 삼각형 중 절반-반축 곱이 항상 최소 넓이가 된다.

Q244 벡터·공간도형 심화

공간의 세 점 $A(2, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$, $C(0, 0, 4)$ 가 결정하는 평면을 π 라 하자. 점 $D(1, 1, 1)$ 과 평면 π 사이의 거리를 구하여라.



- ① ① $\frac{1}{\sqrt{21}}$
- ② ② $\frac{2\sqrt{61}}{61}$
- ③ ③ $\frac{\sqrt{61}}{61}$
- ④ ④ $\frac{\sqrt{61}}{30}$

☞ 정답: ③ $\frac{\sqrt{61}}{61}$

📖 1단계) 절편형 평면 방정식 $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$ 의 양변에 12를 곱하면 $6x + 4y + 3z = 12$. 따라서 법선벡터는 $\vec{n} = (6, 4, 3)$ 이고

$|\vec{n}| = \sqrt{36 + 16 + 9} = \sqrt{61}$. 2단계) 점과 평면 사이의 거리 공식 $d = \frac{|6 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 3 \cdot 1 - 12|}{\sqrt{61}} = \frac{|6 + 4 + 3 - 12|}{\sqrt{61}} = \frac{1}{\sqrt{61}} \cdot 3$

단계) 분모 유리화하면 $d = \frac{\sqrt{61}}{61}$.

🧠 풀이 전략: 핵심 아이디어는 절편형 방정식을 표준형($ax + by + cz = d$)으로 정리해 법선벡터를 즉시 읽어내고, 점-평면 거리 공식 $|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|/|\vec{n}|$ 을 적용하는 것이다. 함정은 절편형 그대로 분자에 대입하여 분모의 정규화를 빼먹는 것.

💡 점-평면 거리 공식은 정사영의 길이 $|\vec{AD} \cdot \hat{n}|$ 로 해석되며, 법선벡터의 단위화가 핵심이다.

Q245 초월함수 미분 심화

함수 $f(x) = (x^2 - 3)e^x$ 의 극솟값을 구하여라.

- ① ① $-2e$
- ② ② $-e$
- ③ ③ $-3e^{-3}$
- ④ ④ $-6e^{-3}$

☞ 정답: ① $-2e$

📖 1단계) 곱의 미분으로 $f'(x) = 2xe^x + (x^2 - 3)e^x = e^x(x^2 + 2x - 3) = e^x(x + 3)(x - 1)$. 2단계) $e^x > 0$ 이므로 부호는 $(x + 3)(x - 1)$ 로 결정. $f'(x) = 0$ 에서 $x = -3$ 또는 $x = 1$. 부호변화 분석: $x < -3$ 에서 $f' > 0$, $-3 < x < 1$ 에서 $f' < 0$, $x > 1$ 에서 $f' > 0$ 이므로 $x = -3$ 은 극대, $x = 1$ 은 극소. 3단계) 극솟값 $f(1) = (1 - 3)e^1 = -2e$.

🧠 풀이 전략: 핵심 아이디어는 $e^x > 0$ 부호를 분리해 다항식 부분의 인수분해로 극값 위치와 종류를 빠르게 판정하는 것이다. 함정은 $x = -3$ 에서의 극댓값 $f(-3) = 6e^{-3}$ 를 극솟값으로 잘못 고르는 것(보기 ④의 부호 함정).

💡 $P(x)e^x$ 꼴 함수의 극값 위치는 $P'(x) + P(x) = 0$ 의 근으로 항상 다항식 차수만큼 발생한다.

Q246 미적분 통합 활용

곡선 $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 의 $0 \leq x \leq \ln 2$ 부분의 길이를 구하여라.

- ① ① $\frac{1}{2}$
- ② ② $\frac{3}{4}$
- ③ ③ 1
- ④ ④ $\frac{5}{4}$

☞ 정답: ② $\frac{3}{4}$

📖 1단계) $y' = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ 이므로 $1 + (y')^2 = 1 + \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2$. 2단계) 따라서

$$\sqrt{1 + (y')^2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ (양수임에 주의). 3단계) 곡선의 길이 } L = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx = \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right]_0^{\ln 2} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{2} - 0 = \frac{3}{4}.$$

🧠 풀이 전략: 핵심 아이디어는 현수선(cosh)과 그 도함수(sinh)의 항등식 $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ 로 인해 $1 + (y')^2$ 가 완전제곱이 되는 구조를 알아채는 것이다. 함정은 $\sqrt{(\dots)^2}$ 의 절댓값을 무시코 처리해 부호를 잘못 다루는 것.

💡 이 곡선은 현수선(catenary)으로, 양 끝을 잡고 늘어뜨린 사슬의 정확한 형태이다.

Q247 초월함수 적분 심화

$\int_0^\pi e^x \sin x dx$ 의 값을 구하여라.

- ① ① $\frac{e^\pi - 1}{2}$
- ② ② $\frac{e^\pi + 1}{2}$
- ③ ③ e^π
- ④ ④ $e^\pi + 1$

☞ 정답: ② $\frac{e^\pi + 1}{2}$

📖 1단계) $I = \int e^x \sin x dx$ 로 놓고 부분적분 1회: $u = \sin x, dv = e^x dx$ 로 두면 $I = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx$. 2단계) 다시 부분적분 1회: $\int e^x \cos x dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx = e^x \cos x + I$. 따라서 $I = e^x \sin x - e^x \cos x - I$, 정리하면 $I = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2} + C$. 3

단계) 정적분: $\left[\frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2}\right]_0^\pi = \frac{e^\pi(0 - (-1))}{2} - \frac{1 \cdot (0 - 1)}{2} = \frac{e^\pi}{2} + \frac{1}{2} = \frac{e^\pi + 1}{2}$.

🧠 풀이 전략: 핵심 아이디어는 부분적분 두 번 후 자기 자신(I)이 다시 등장하는 현상을 이용해 일차방정식으로 풀어내는 '회귀형 부분적분'이다. 함정은 두 번째 부분적분에서 u, dv 선택을 일관되게 하지 않아 부호가 뒤집히는 실수.

💡 $e^{ax} \sin bx$ 의 적분은 복소지수 $e^{(a+bi)x}$ 의 실수부로도 단번에 계산되며, 회귀형 부분적분은 이 기법의 실수 버전이다.

Q248 순열·조합·이항 심화

집합 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 에서 집합 $B = \{a, b, c\}$ 로의 함수 f 중에서 치역이 B 와 같은(즉, 전사인) 함수의 개수를 구하여라.

- ① ① 24
- ② ② 30
- ③ ③ 36
- ④ ④ 42

정답: ③ 36

1단계) A 에서 B 로의 모든 함수의 개수는 $3^4 = 81$. $i \in B$ 가 치역에 속하지 않는 사건을 E_i 라 하자. 2단계) 포함-배제 원리에 의해 전사 함수의 개수는 $3^4 - \binom{3}{1} \cdot 2^4 + \binom{3}{2} \cdot 1^4 - \binom{3}{3} \cdot 0^4 = 81 - 3 \cdot 16 + 3 \cdot 1 - 0$. 3단계) 계산하면 $81 - 48 + 3 = 36$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 '치역에서 어떤 원소가 빠진다'는 여사건들에 대해 포함-배제를 적용하여 전사 함수의 수를 계산하는 것이다. 일반식 $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m$ 을 기억하면 $m = 4, n = 3$ 케이스로 즉시 계산. 함정은 단순히 $4!$ 이나 $\binom{4}{2} \cdot 3!$ 로 어렵히는 것.

전사 함수의 수는 제2종 스털링 수 $S(m, n)$ 과 $n!$ 의 곱으로도 표현되어, $S(4, 3) \cdot 3! = 6 \cdot 6 = 36$ 이 된다.

Q249 초월함수 적분 심화

함수 $f(x) = e^x \sin x$ 의 부정적분 중 $F(0) = 0$ 을 만족하는 함수를 $F(x)$ 라 할 때, $F(\pi)$ 의 값은?

- ① ① $\frac{e^\pi - 1}{2}$
- ② ② $\frac{e^\pi + 1}{2}$
- ③ ③ $\frac{e^\pi}{2} + 1$
- ④ ④ $e^\pi + 1$

정답: ②

1단계) $I = \int e^x \sin x dx$ 를 부분적분. $u = \sin x, dv = e^x dx$ 로 두면 $I = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx$.

2단계) $\int e^x \cos x dx$ 에 다시 부분적분($u = \cos x$). $\int e^x \cos x dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx = e^x \cos x + I$. 대입하면

$$2I = e^x(\sin x - \cos x), \text{ 즉 } F(x) = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2} + C.$$

$$3\text{단계) } F(0) = \frac{1 \cdot (0 - 1)}{2} + C = -\frac{1}{2} + C = 0 \text{ 이므로 } C = \frac{1}{2}. \text{ 따라서 } F(\pi) = \frac{e^\pi(0 - (-1)) + 1}{2} = \frac{e^\pi + 1}{2}.$$

풀이 전략: 핵심 아이디어는 $e^x \sin x$ 형태가 부분적분을 두 번 적용하면 자기 자신(I)이 다시 등장한다는 것. 이를 방정식 $2I = \dots$ 로 풀어 I 를 구하고, 초기조건 $F(0) = 0$ 으로 적분상수를 결정한 뒤 $F(\pi)$ 를 계산한다.

$e^{ax} \sin(bx)$ 형태의 적분은 복소수 $e^{(a+bi)x}$ 의 허수부와 같아서, 복소수를 쓰면 부분적분 없이도 한 줄로 계산된다.

Q250 확률 심화

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던져 나온 두 눈의 수의 합이 7 이하일 때, 두 눈의 수의 차가 2 이상일 조건부확률은?

- ① ① $\frac{1}{3}$
- ② ② $\frac{3}{7}$
- ③ ③ $\frac{4}{7}$
- ④ ④ $\frac{5}{7}$

정답: ③

1단계) 사건 A : 합이 7 이하. 합별 경우의 수는 1, 2, 3, 4, 5, 6 (= 합 2, 3, ..., 7)이므로 $n(A) = 21$.

2단계) 사건 $A \cap B$ (B : 차가 2 이상)를 합별로 세면, 합 = 4: $\{(1, 3), (3, 1)\}$ 2가지, 합 = 5: $\{(1, 4), (4, 1)\}$ 2가지, 합 = 6: $\{(1, 5), (5, 1), (2, 4), (4, 2)\}$ 4가지, 합 = 7: $\{(1, 6), (6, 1), (2, 5), (5, 2)\}$ 4가지. 합 = 2, 3은 차가 0 또는 1이라 제외. 총 $2 + 2 + 4 + 4 = 12$.

3단계) 조건부확률 $P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$.

풀이 전략: 핵심 아이디어는 표본공간 36이 아니라 조건 사건 A 로 축소된 표본공간 위에서 세는 것. 합과 차를 동시에 만족하는 순서쌍을 합별로 정리하면 누락 없이 카운트할 수 있다.

합과 차는 서로 독립이 아니다(예: 합이 2이면 차는 반드시 0). 그래서 조건부확률이 단순한 $P(B) = 20/36 = 5/9$ 와 달라진다.