📝 고3 수학 일반

총 40문제 · 문제와 정답·풀이 포함

Q1 수열의 극한과 급수

극한값 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+2n-1}{2n^2+5}$을 구하시오.

①) ① 1

②) ② $\frac{3}{2}$

③) ③ 2

④) ④ 3

🎯 **정답: ② $\frac{3}{2}$**

📖 1단계: 분자와 분모를 최고차항 n^2으로 나눈다. $\dfrac{3n^2+2n-1}{2n^2+5}=\dfrac{3+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}{2+\frac{5}{n^2}}$. 2단계: $n\to\infty$이면 $\frac{1}{n},\frac{1}{n^2}\to 0$이므로 극한값은 $\frac{3}{2}$이다.

💡 ∞/∞ 꼴 유리식 수열의 극한은 최고차항 계수의 비로 빠르게 구할 수 있다.

Q2 초월함수의 미분

함수 $f(x)=e^{3x}$의 도함수 $f'(x)$를 구하시오.

①) ① e^{3x}

②) ② $3e^{3x}$

③) ③ $\frac{1}{3}e^{3x}$

④) ④ $3xe^{3x-1}$

🎯 **정답: ② $3e^{3x}$**

📖 1단계: $(e^{g(x)})'=g'(x)e^{g(x)}$ (합성함수 미분). 2단계: $g(x)=3x$이면 $g'(x)=3$이므로 $f'(x)=3e^{3x}$.

💡 e^x는 도함수가 자기 자신인 유일한 초월함수 꼴로, 미적분의 자연상수 e가 그래서 '자연'이라 불린다.

Q3 초월함수의 적분

정적분 $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos x\,dx$의 값을 구하시오.

①) ① 0

②) ② $\frac{1}{2}$

③) ③ 1

④) ④ 2

🎯 **정답: ③ 1**

📖 1단계: $\int\cos x\,dx=\sin x+C$. 2단계: $[\sin x]_0^{\pi/2}=\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0=1-0=1$.

💡 $\cos x$를 0부터 $\pi/2$까지 적분한 값 1은 단위원에서 x축 방향 성분의 총합과 같다.

Q4 확률

주사위 한 개를 던져 짝수의 눈이 나왔을 때, 그 눈이 4 이상일 확률을 구하시오.

①) ① $\frac{1}{3}$
②) ② $\frac{1}{2}$
③) ③ $\frac{2}{3}$
④) ④ $\frac{3}{4}$

정답: ③ $\frac{2}{3}$

1단계: 사건 A: 짝수, 사건 B: 4 이상. $P(A) = \frac{3}{6}$, $P(A \cap B) = P(\{4, 6\}) = \frac{2}{6}$. 2단계: 조건부확률 $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{2/6}{3/6} = \frac{2}{3}$.

조건부확률은 표본공간을 '조건이 일어난 세계'로 축소해 다시 확률을 재는 일과 같다.

Q5 수열의 극한과 급수

무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{6^n}$의 합을 구하시오.

①) ① 1
②) ② $\frac{3}{2}$
③) ③ $\frac{5}{3}$
④) ④ 2

정답: ② $\frac{3}{2}$

1단계: $\frac{3^n + 2^n}{6^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n$로 분리한다. 2단계: 등비급수 공식 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \frac{r}{1-r}$ ($|r| < 1$). 3단계: $\frac{1/2}{1-1/2} + \frac{1/3}{1-1/3} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

등비급수의 분리는 '어려운 급수를 쉬운 급수의 합으로 바꾸기'의 대표 기술이다.

Q6 초월함수의 미분

함수 $y = \ln(x^2 + 1)$의 도함수 $\frac{dy}{dx}$를 구하시오.

①) ① $\frac{1}{x^2 + 1}$
②) ② $\frac{2x}{x^2 + 1}$
③) ③ $\frac{x}{x^2 + 1}$
④) ④ $\frac{2}{x^2 + 1}$

정답: ② $\frac{2x}{x^2 + 1}$

1단계: 합성함수 미분 $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$. 2단계: $u = x^2 + 1$이면 $u' = 2x$. 3단계: $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x^2 + 1}$.

$\ln(x^2 + 1)$은 모든 실수에서 정의되는 드문 로그 합성 형태로, 적분에서도 자주 등장한다.

Q7 초월함수의 적분

정적분 $\int_0^1 x e^{x^2} dx$의 값을 구하시오.

①) ① $\frac{e-1}{2}$

②) ② $e-1$

③) ③ $\frac{e}{2}$

④) ④ $\frac{e^2-1}{2}$

🎯 **정답:** ① $\frac{e-1}{2}$

📖 1단계: $u = x^2$으로 치환하면 $du = 2x\,dx$, 즉 $x\,dx = \frac{1}{2}du$. 2단계: $x = 0 \Rightarrow u = 0$, $x = 1 \Rightarrow u = 1$. 3단계: $\int_0^1 xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 e^u du = \frac{1}{2}[e^u]_0^1 = \frac{e-1}{2}$.

💡 e^{x^2} 자체는 초등함수로 적분 불가능하지만, 앞에 x가 붙으면 치환으로 깔끔히 풀린다.

Q8 미적분 활용

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 위치가 $x(t) = t^3 - 3t^2 + 2$이다. 시각 $t = 2$에서의 점 P의 가속도를 구하시오.

①) ① 0

②) ② 3

③) ③ 6

④) ④ 12

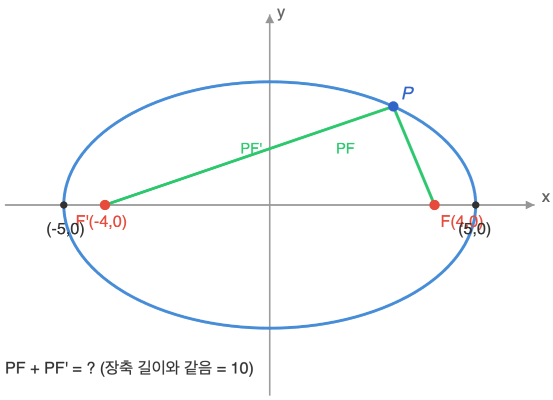
🎯 **정답:** ③ 6

📖 1단계: 속도 $v(t) = x'(t) = 3t^2 - 6t$. 2단계: 가속도 $a(t) = v'(t) = 6t - 6$. 3단계: $a(2) = 6 \cdot 2 - 6 = 6$.

💡 위치를 시간에 대해 두 번 미분하면 가속도, 세 번 미분하면 '저크(jerk)'라 불린다.

Q9 이차곡선

타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$의 두 초점을 F, F'이라 할 때, 타원 위의 점 P에 대하여 $\overline{PF}+\overline{PF'}$의 값을 구하시오.



①) ① 6

②) ② 8

③) ③ 10

④) ④ 14

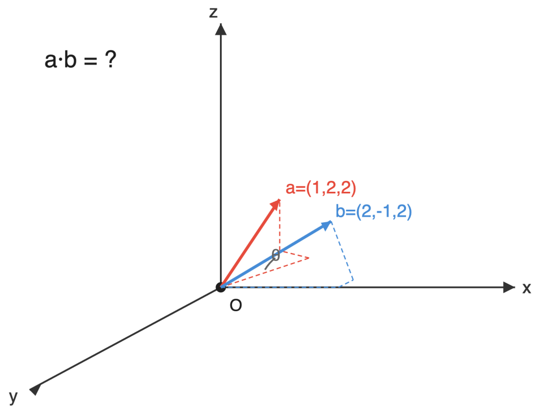
🎯 **정답:** ③ 10

📖 1단계: 표준형 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b)$에서 $a=5,\ b=3$. 2단계: 타원의 정의에 의해 두 초점까지의 거리의 합은 장축의 길이 $2a$와 같다. 3단계: $\overline{PF}+\overline{PF'}=2a=10$.

💡 타원의 '두 초점에서의 거리의 합이 일정'이라는 성질은 정원사가 두 말뚝과 끈으로 타원 화단을 그릴 수 있게 하는 원리다.

Q10 평면·공간벡터

공간의 두 벡터 $\vec{a}=(1,2,2), \vec{b}=(2,-1,2)$에 대하여 내적 $\vec{a}\cdot\vec{b}$의 값을 구하시오.



①) ① 2

②) ② 3

③) ③ 4

④) ④ 5

🎯 **정답:** ③ 4

📖 1단계: 공간벡터의 내적 공식 $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$. 2단계: $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot2+2\cdot(-1)+2\cdot2=2-2+4=4$.

💡 내적은 두 벡터가 '얼마나 같은 방향을 향하는가'를 수치로 표현한 것으로, 0이면 수직, 음수이면 둔각이다.

Q11 수열의 극한과 급수

확률변수 X가 이항분포 $B\left(100, \frac{1}{5}\right)$을 따를 때, X의 평균 $E(X)$와 분산 $V(X)$를 구하시오.

①) ① $E(X) = 20,\ V(X) = 16$
②) ② $E(X) = 20,\ V(X) = 20$
③) ③ $E(X) = 25,\ V(X) = 20$
④) ④ $E(X) = 20,\ V(X) = 4$

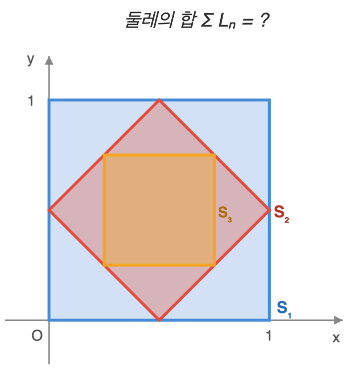
🎯 **정답:** ① $E(X) = 20,\ V(X) = 16$

📖 1단계: $X \sim B(n, p)$이면 $E(X) = np,\ V(X) = np(1-p)$. 2단계: $n = 100,\ p = \frac{1}{5}$이므로 $E(X) = 100 \cdot \frac{1}{5} = 20$. 3단계: $V(X) = 100 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} = 16$.

💡 이항분포의 분산은 $p = \frac{1}{2}$에서 최대가 되어 '완전한 불확실성'일 때 가장 퍼져 있다.

Q12 수열의 극한과 급수

한 변의 길이가 1인 정사각형 S_1의 네 변의 중점을 이어 새 정사각형 S_2를 만들고, 같은 방법으로 $S_3, S_4,\ \ldots$ 를 만든다. 이때 $\sum_{n=1}^{\infty}$ (정사각형 S_n의 둘레)의 값을 구하시오.



①) ① 8
②) ② $8 + 4\sqrt{2}$
③) ③ 12
④) ④ $16 + 8\sqrt{2}$

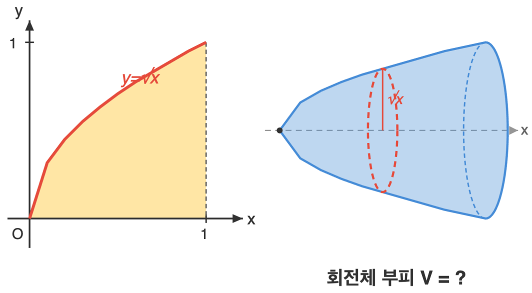
🎯 **정답:** ② $8 + 4\sqrt{2}$

📖 1단계: S_1의 한 변은 1, 둘레 $L_1 = 4$. S_2의 한 변은 $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 2단계: 한 변이 매번 $\frac{\sqrt{2}}{2}$배가 되므로 둘레 수열 $\{L_n\}$은 공비 $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$인 등비수열, $|r| < 1$. 3단계: 무한등비급수의 합 $S = \frac{L_1}{1-r} = \frac{4}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{8}{2 - \sqrt{2}} = \frac{8(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})} = \frac{8(2+\sqrt{2})}{2} = 4(2+\sqrt{2}) = 8 + 4\sqrt{2}$.

💡 자기 닮음(self-similar)으로 무한히 축소되는 도형 문제는 '비'만 정확히 잡으면 고등학교 등비급수 공식으로 풀린다.

Q13 미적분 활용

곡선 $y = \sqrt{x}$ $(0 \le x \le 1)$와 x축 및 직선 $x = 1$로 둘러싸인 영역을 x축 둘레로 1회전시킨 회전체의 부피 V를 구하시오.



①) ① $\frac{\pi}{3}$
②) ② $\frac{\pi}{2}$
③) ③ $\frac{2\pi}{3}$
④) ④ π

🎯 **정답: ② $\frac{\pi}{2}$**

📖 1단계: x축 회전체의 부피 공식 $V = \pi \int_a^b \{f(x)\}^2 dx$. 2단계: $f(x) = \sqrt{x}$ 이므로 $\{f(x)\}^2 = x$. 3단계: $V = \pi \int_0^1 x\,dx = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$.

💡 $y = \sqrt{x}$ 를 회전시켜 만든 입체는 '포물면(paraboloid)'의 일부로, 위성 안테나 접시의 기본 형태다.

Q14 순열·조합 심화 + 이항정리

사과, 배, 감 세 종류의 과일 중에서 중복을 허용하여 5개를 고르는 방법의 수를 구하시오. (단, 같은 종류의 과일끼리는 서로 구별하지 않는다.)

①) ① 15
②) ② 21
③) ③ 35
④) ④ 56

🎯 **정답: ② 21**

📖 서로 다른 3종류의 과일에서 중복을 허용하여 5개를 고르는 경우의 수는 중복조합 ${}_3H_5$이다. ${}_3H_5 = {}_{3+5-1}C_5 = {}_7C_5 = {}_7C_2 = \frac{7 \times 6}{2 \times 1} = 21$. 따라서 방법의 수는 21이다.

💡 중복조합은 방정식 $x_1 + x_2 + x_3 = 5$ $(x_i \ge 0$인 정수)의 해의 개수와 같고, 칸막이 2개와 공 5개를 한 줄로 배치하는 ${}_7C_2$와 동치이다.

Q15 순열·조합 심화 + 이항정리

$(x+2)^6$의 전개식에서 x^4의 계수를 구하시오.

①) ① 30

②) ② 48

③) ③ 60

④) ④ 96

🎯 **정답: ③ 60**

📖 이항정리에 의하여 $(x+2)^6$의 일반항은 ${}_6C_k\, x^{6-k} \cdot 2^k$이다. x^4항이 되려면 $6-k=4$, 즉 $k=2$이다. 따라서 x^4의 계수는 ${}_6C_2 \cdot 2^2 = 15 \times 4 = 60$이다.

💡 이항계수 ${}_nC_k$는 파스칼 삼각형의 n행 k번째 수와 같으며, $(x+y)^n$을 전개할 때 모든 항의 계수 합은 $x=y=1$을 대입한 2^n이다.

Q16 확률

한 번의 시행에서 성공할 확률이 $\frac{1}{3}$인 독립시행을 4번 반복할 때, 정확히 2번 성공할 확률을 구하시오.

①) ① $\frac{4}{27}$

②) ② $\frac{8}{27}$

③) ③ $\frac{8}{81}$

④) ④ $\frac{16}{81}$

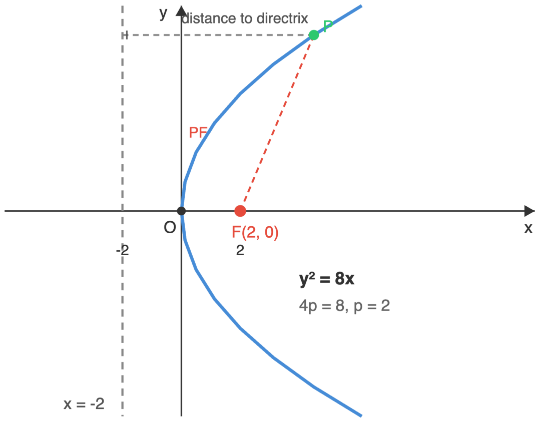
🎯 **정답: ② $\frac{8}{27}$**

📖 4번의 독립시행에서 2번 성공하는 경우의 수는 ${}_4C_2 = 6$이고, 각 경우의 확률은 $\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{81}$이다. 따라서 구하는 확률은 $6 \times \frac{4}{81} = \frac{24}{81} = \frac{8}{27}$이다.

💡 독립시행의 확률 공식 ${}_nC_r\, p^r(1-p)^{n-r}$은 각 시행이 서로 영향을 주지 않는다는 '독립' 가정 아래서만 성립한다. 현실 데이터에서는 이 가정이 깨지는 경우가 많아 주의해야 한다.

Q17 이차곡선

포물선 $y^2 = 8x$의 초점의 좌표와 준선의 방정식을 구하시오.



①) ① 초점 $(1, 0)$, 준선 $x = -1$

②) ② 초점 $(2, 0)$, 준선 $x = -2$

③) ③ 초점 $(4, 0)$, 준선 $x = -4$

④) ④ 초점 $(8, 0)$, 준선 $x = -8$

🎯 **정답: ② 초점 $(2, 0)$, 준선 $x = -2$**

📖 포물선 $y^2 = 4px$의 표준형과 비교하면 $4p = 8$이므로 $p = 2$이다. 따라서 초점은 $(p, 0) = (2, 0)$이고, 준선은 $x = -p$, 즉 $x = -2$이다.

💡 포물선 위의 모든 점은 '초점과의 거리'와 '준선까지의 거리'가 같다는 성질을 가진다. 이 반사 성질 때문에 포물면 안테나는 평행하게 들어오는 신호를 초점 한 곳으로 모은다.

Q18 통계

확률변수 X가 정규분포 $N(50, 10^2)$을 따를 때, $P(40 \le X \le 70)$의 값을 표준정규분포표의 값 $P(0 \le Z \le 1) = 0.3413$, $P(0 \le Z \le 2) = 0.4772$를 이용하여 구하시오.

①) ① 0.6826

②) ② 0.8185

③) ③ 0.9544

④) ④ 0.9772

🎯 **정답: ② 0.8185**

📖 $Z = \frac{X - 50}{10}$으로 표준화하면 $X = 40$일 때 $Z = -1$, $X = 70$일 때 $Z = 2$이다. 따라서 $P(40 \le X \le 70) = P(-1 \le Z \le 2) = P(-1 \le Z \le 0) + P(0 \le Z \le 2) = 0.3413 + 0.4772 = 0.8185$이다.

💡 정규분포에서 평균 $\pm 1\sigma$ 범위에는 약 68%, $\pm 2\sigma$ 범위에는 약 95%, $\pm 3\sigma$ 범위에는 약 99.7%의 데이터가 들어간다는 '68-95-99.7 법칙'이 자주 쓰인다.

Q19 순열·조합 심화 + 이항정리

남학생 3명과 여학생 3명이 원형탁자에 둘러앉을 때, 남학생과 여학생이 서로 번갈아 앉는 방법의 수를 구하시오.

①) ① 6

②) ② 12

③) ③ 24

④) ④ 36

🎯 **정답: ② 12**

📖 먼저 남학생 3명을 원탁에 앉히는 방법은 원순열이므로 $(3-1)! = 2! = 2$가지이다. 이때 남학생 사이의 3개 자리에 여학생 3명을 배치하는 방법은 $3! = 6$가지이다. 따라서 구하는 방법의 수는 $2 \times 6 = 12$이다.

💡 원순열에서 한 명을 기준으로 고정하는 이유는, 원형 배치는 회전시켜도 같은 배열로 간주하기 때문이다. 팔찌처럼 뒤집기까지 같게 본다면 염주순열이 되어 경우의 수가 더 줄어든다.

Q20 확률

어떤 제품을 공장 A에서 60%, 공장 B에서 40% 생산한다. A 공장 제품의 불량률은 2%, B 공장 제품의 불량률은 5%이다. 전체 제품 중 하나를 임의로 골랐을 때 그것이 불량품이었다. 이 제품이 A 공장에서 생산되었을 확률을 구하시오.

①) ① $\frac{1}{4}$

②) ② $\frac{3}{8}$

③) ③ $\frac{1}{2}$

④) ④ $\frac{5}{8}$

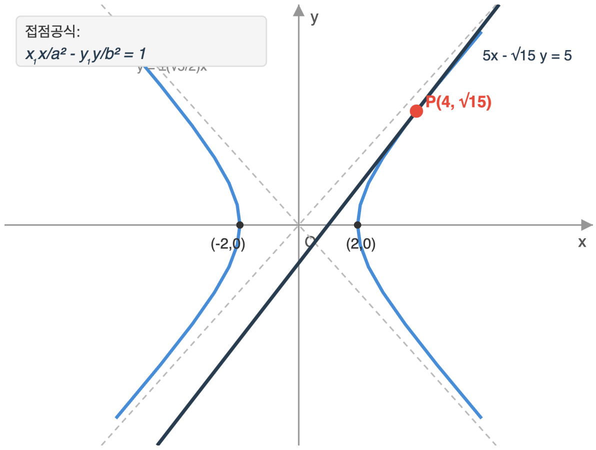
🎯 **정답: ② $\frac{3}{8}$**

📖 사건 A: A 공장 제품, B: B 공장 제품, D: 불량품이라 하자. $P(A \cap D) = 0.6 \times 0.02 = 0.012$, $P(B \cap D) = 0.4 \times 0.05 = 0.020$. 따라서 $P(D) = 0.012 + 0.020 = 0.032$. 구하는 확률은 $P(A|D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{0.012}{0.032} = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}$이다.

💡 이런 유형의 추론을 '베이즈 추론'이라 하며, 관측된 결과를 보고 원인의 확률을 역으로 갱신하는 사고방식이다. 스팸 메일 필터, 의료 진단 등 현대 AI 시스템의 핵심 아이디어이다.

Q21 이차곡선

쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ 위의 점 $(4, \sqrt{15})$에서의 접선의 방정식을 구하시오.



①) ① $5x - \sqrt{15}\ y = 5$
②) ② $4x - \sqrt{15}\ y = 1$
③) ③ $5x + \sqrt{15}\ y = 5$
④) ④ $2x - \sqrt{15}\ y = 4$

🎯 **정답:** ① $5x - \sqrt{15}\ y = 5$

📖 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은 $\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1$이다. $a^2 = 4$, $b^2 = 5$, $(x_1, y_1) = (4, \sqrt{15})$을 대입하면 $\frac{4x}{4} - \frac{\sqrt{15}\ y}{5} = 1$, 즉 $x - \frac{\sqrt{15}}{5}y = 1$이다. 양변에 5를 곱하면 $5x - \sqrt{15}\ y = 5$를 얻는다. (검산: $\frac{16}{4} - \frac{15}{5} = 4 - 3 = 1$로 점이 쌍곡선 위에 있다.)

💡 이차곡선 접선공식은 '원래 식에서 $x^2 \to x_1 x$, $y^2 \to y_1 y$로 바꾸는 방법'으로 기억하면 편하다. 원, 타원, 쌍곡선에 모두 공통으로 적용된다.

Q22 순열·조합 심화 + 이항정리

숫자 $1, 1, 2, 2, 3, 3$을 일렬로 나열할 때, 같은 숫자끼리 서로 이웃하지 않게 나열하는 경우의 수를 구하시오.

①) ① 24
②) ② 30
③) ③ 36
④) ④ 42

🎯 **정답:** ② 30

📖 전체 나열 수는 $\frac{6!}{2!\,2!\,2!} = \frac{720}{8} = 90$이다. 사건 A, B, C를 각각 '1끼리 이웃', '2끼리 이웃', '3끼리 이웃'이라 하고 포함-배제 원리를 쓴다. $|A| = \frac{5!}{2!\,2!} = 30$이고, $|B| = |C| = 30$이다. $|A \cap B| = \frac{4!}{2!} = 12$이고, $|A \cap C| = |B \cap C| = 12$이다. $|A \cap B \cap C| = 3! = 6$. 따라서 $|A \cup B \cup C| = 3 \times 30 - 3 \times 12 + 6 = 60$이고, 이웃하지 않는 경우는 $90 - 60 = 30$이다.

💡 '이웃'이라는 조건은 묶음 처리로, '이웃하지 않음'은 여사건이나 포함-배제로 푸는 것이 정석이다. 같은 숫자가 여러 쌍 있을 때는 여사건을 쓰면 계산이 훨씬 깔끔해진다.

Q23 통계

모표준편차가 4인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기 16인 표본을 임의추출하였다. 이 표본을 이용하여 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간을 구할 때, 신뢰구간의 길이를 구하시오. (단, $P(0 \le Z \le 1.96) = 0.475$로 계산한다.)

①) ① 1.96
②) ② 2.94
③) ③ 3.92
④) ④ 7.84

🎯 **정답: ③ 3.92**

📖 모평균 m의 신뢰도 95% 신뢰구간은 $\bar{X} - 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \bar{X} + 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$이다. 따라서 신뢰구간의 길이는 $2 \times 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2 \times 1.96 \times \frac{4}{\sqrt{16}} = 2 \times 1.96 \times 1 = 3.92$이다.

💡 신뢰구간의 길이는 모표준편차 σ에 비례하고 $\sqrt{n}$ 에 반비례한다. 즉, 표본 크기를 4배 늘리면 신뢰구간의 길이는 절반으로 줄어든다. 정밀도를 높이는 데 비용이 급격히 커지는 이유이다.

Q24 순열·조합 심화 + 이항정리

$\left(2x - \frac{1}{x^2}\right)^9$의 전개식에서 상수항을 구하시오.

①) ① -5376
②) ② -672
③) ③ 672
④) ④ 5376

🎯 **정답: ① -5376**

📖 일반항은 ${}_9C_r(2x)^{9-r}\left(-\frac{1}{x^2}\right)^r = {}_9C_r 2^{9-r}(-1)^r x^{9-r-2r} = {}_9C_r 2^{9-r}(-1)^r x^{9-3r}$이다. 상수항이 되려면 $9 - 3r = 0$, 즉 $r = 3$이다. 따라서 상수항은 ${}_9C_3 \cdot 2^6 \cdot (-1)^3 = 84 \times 64 \times (-1) = -5376$이다.

💡 $\left(ax^m + \frac{b}{x^n}\right)^k$ 꼴에서 상수항이 존재하려면 'x의 지수 합=0'을 만족하는 정수 해가 있어야 한다. 해가 없으면 상수항은 존재하지 않는다.

Q25 초월함수의 적분

정적분 $\int_1^e x\ln x\,dx$의 값을 구하시오.

①) ① $\frac{e^2-1}{4}$
②) ② $\frac{e^2+1}{4}$
③) ③ $\frac{e^2-1}{2}$
④) ④ $\frac{e^2+1}{2}$

🎯 **정답: ② $\frac{e^2+1}{4}$**

📖 부분적분에서 $u = \ln x$, $dv = x\,dx$로 놓으면 $du = \frac{1}{x}dx$, $v = \frac{x^2}{2}$이다. 따라서 $\int_1^e x\ln x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}dx = \frac{e^2}{2} \cdot 1 - 0 - \int_1^e \frac{x}{2}dx = \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2+1}{4}$이다.

💡 부분적분에서 어느 쪽을 u로 둘지 정할 때 'LIATE 규칙'(Logarithm, Inverse trig, Algebraic, Trig, Exponential 순서로 u 우선)을 쓰면 편하다. $\ln x$는 Logarithm이라 1순위이다.

Q26 수열의 극한과 급수

다음 극한값을 구하시오.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n(n+k)}$$

①) ① $\ln 2$

②) ② $1-\ln 2$

③) ③ $2\ln 2-1$

④) ④ $1+\ln 2$

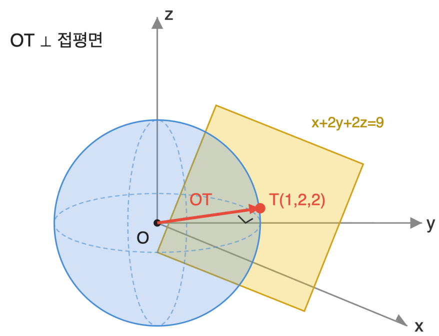
정답: ② $1-\ln 2$

📖 식을 변형하면 $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n(n+k)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{k/n}{1+k/n}$이다. $x_k=\frac{k}{n}$으로 두면 이는 구분구적법에 의해 $\int_0^1\frac{x}{1+x}dx$로 바뀐다. 피적분함수를 $\frac{x}{1+x}=1-\frac{1}{1+x}$로 분해하면 $\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x}\right)dx=\left[x-\ln(1+x)\right]_0^1=(1-\ln 2)-0=1-\ln 2$이다.

💡 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx$는 리만 합의 정의 그 자체이며, '유한 합을 적분으로 바꿔 푸는' 핵심 도구이다.

Q27 평면·공간벡터

구 $x^2+y^2+z^2=9$ 위의 점 $(1,2,2)$에서의 접평면의 방정식을 구하시오.



①) ① $x+2y+2z=9$

②) ② $x+2y+2z=3$

③) ③ $2x+y+2z=9$

④) ④ $x+y+z=5$

정답: ① $x+2y+2z=9$

📖 중심이 원점인 구 위의 점 $T(1,2,2)$에서의 접평면의 법선벡터는 $\vec{OT}=(1,2,2)$이다. 따라서 접평면은 점 T를 지나고 법선벡터가 $(1,2,2)$인 평면이므로 $1\cdot(x-1)+2\cdot(y-2)+2\cdot(z-2)=0$, 즉 $x+2y+2z=9$이다. (또는 공식 $x_1x+y_1y+z_1z=r^2$을 써서 $x+2y+2z=9$로 바로 구할 수 있다. 점이 구 위에 있음을 확인: $1+4+4=9$.)

💡 중심이 원점인 구 $x^2+y^2+z^2=r^2$ 위의 점 (x_1,y_1,z_1)에서의 접평면은 $x_1x+y_1y+z_1z=r^2$으로, 이차곡선의 접선공식과 완전히 같은 구조를 가진다.

Q28 통계

확률변수 X 에 대하여 $E(X)=10$, $V(X)=4$ 이다. 확률변수 $Y=3X-5$ 일 때, $E(Y)+V(Y)$ 의 값은?

①) ① 31

②) ② 49

③) ③ 55

④) ④ 61

🎯 **정답: ④ 61**

📖 기댓값의 일차성: $E(aX+b)=aE(X)+b$.

$E(Y)=3E(X)-5=3\times 10-5=25$.

분산의 일차변환: $V(aX+b)=a^2V(X)$ (상수 b 는 분산에 영향 없음).

$V(Y)=3^2\times V(X)=9\times 4=36$.

따라서 $E(Y)+V(Y)=25+36=61$.

💡 $V(aX+b)=a^2V(X)$ 에서 b 가 사라지는 건, 평행이동은 분포의 모양(퍼진 정도)을 바꾸지 않기 때문. 스케일 a 만이 분산에 영향을 준다.

Q29 초월함수의 미분

함수 $f(x)=\ln(2x+1)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g'(\ln 5)$의 값을 구하시오.

①) ① $\frac{2}{5}$

②) ② 1

③) ③ $\frac{5}{2}$

④) ④ 5

🎯 **정답: ③**

📖 1단계: $g(\ln 5)=a$라 하면 $f(a)=\ln 5$이므로 $\ln(2a+1)=\ln 5$, 즉 $2a+1=5$이고 $a=2$.

2단계: $f'(x)=\dfrac{2}{2x+1}$이므로 $f'(2)=\dfrac{2}{5}$.

3단계: 역함수의 미분법에 의해 $g'(\ln 5)=\dfrac{1}{f'(g(\ln 5))}=\dfrac{1}{f'(2)}=\dfrac{5}{2}$.

💡 역함수 미분법은 자전거 페달과 바퀴의 회전 비율 관계처럼 한쪽 변화율을 알면 반대쪽도 자동으로 결정됩니다.

Q30 확률

두 사건 A, B가 서로 독립이고 $P(A)=\dfrac{1}{3}$, $P(B)=\dfrac{2}{5}$일 때, $P(A\cup B)$의 값을 구하시오.

①) ① $\frac{7}{15}$

②) ② $\frac{8}{15}$

③) ③ $\frac{3}{5}$

④) ④ $\frac{11}{15}$

🎯 **정답: ③**

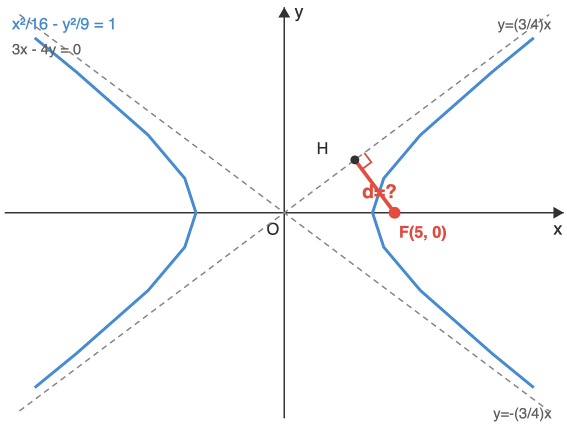
📖 1단계: A, B가 독립이므로 $P(A\cap B)=P(A)P(B)=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{5}=\dfrac{2}{15}$.

2단계: 합사건 공식 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\dfrac{5}{15}+\dfrac{6}{15}-\dfrac{2}{15}=\dfrac{9}{15}=\dfrac{3}{5}$.

💡 독립과 배반은 전혀 다른 개념이라 동시에 만족하는 경우는 둘 중 하나의 확률이 0인 극단적 상황뿐입니다.

Q31 이차곡선

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$의 한 초점에서 점근선까지의 거리를 구하시오.



①) ① 2

②) ② 3

③) ③ 4

④) ④ 5

🎯 **정답: ②**

📖 1단계: $a^2 = 16,\ b^2 = 9$이므로 $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{25} = 5$, 따라서 한 초점은 $F(5, 0)$.

2단계: 점근선 방정식은 $y = \pm\dfrac{3}{4}x$, 즉 $3x \mp 4y = 0$.

3단계: 점 $(5, 0)$에서 직선 $3x - 4y = 0$까지의 거리는 $\dfrac{|3 \cdot 5 - 4 \cdot 0|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \dfrac{15}{5} = 3$.

💡 쌍곡선 초점에서 점근선까지의 거리는 항상 b와 같다는 깔끔한 성질이 있어 이번처럼 $b = 3$이면 곧바로 답이 나옵니다.

Q32 통계

확률변수 X가 정규분포 $N(60, 8^2)$을 따를 때, $P(52 \le X \le 76)$의 값을 구하시오. (단, $P(0 \le Z \le 1) = 0.3413$, $P(0 \le Z \le 2) = 0.4772$)

①) ① 0.7745

②) ② 0.8185

③) ③ 0.8413

④) ④ 0.9544

🎯 **정답: ②**

📖 1단계: 표준화 $Z = \dfrac{X - 60}{8}$. $X = 52$일 때 $Z = -1$, $X = 76$일 때 $Z = 2$.

2단계: $P(-1 \le Z \le 2) = P(-1 \le Z \le 0) + P(0 \le Z \le 2) = 0.3413 + 0.4772 = 0.8185$.

💡 평균을 중심으로 표준편차의 1배와 2배 구간은 좌우로 비대칭하게 잡으면 표준정규분포표 두 값을 더하는 것만으로 답이 나옵니다.

Q33 평면·공간벡터

두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$에 대하여 $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4$이고 두 벡터가 이루는 각의 크기가 $60°$일 때, $\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})$의 값을 구하시오.

①) ① 12
②) ② 15
③) ③ 18
④) ④ 21

🎯 **정답: ②**

📖 1단계: 내적의 분배법칙에 의해 $\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}$.

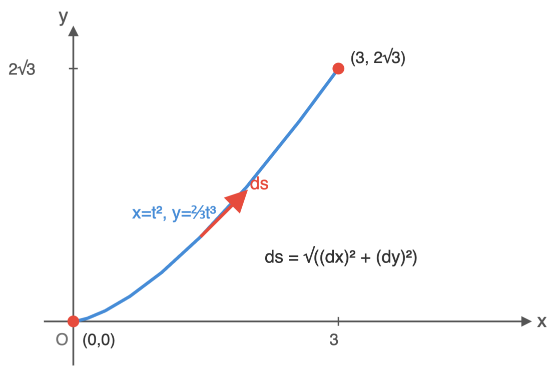
2단계: $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2 = 9, \vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ = 3\cdot 4\cdot\frac{1}{2} = 6$.

3단계: 합하면 $9+6=15$.

💡 벡터의 내적은 분배법칙이 성립해서 다항식처럼 전개할 수 있고, 이는 물리에서 일을 분해해 계산하는 발상의 기반이 됩니다.

Q34 미적분 활용

매개변수로 나타낸 곡선 $x = t^2, y = \frac{2}{3}t^3$ $(0 \le t \le \sqrt{3}$)의 길이를 구하시오.



①) ① $\frac{8}{3}$
②) ② $\frac{10}{3}$
③) ③ $\frac{14}{3}$
④) ④ $\frac{16}{3}$

🎯 **정답: ③**

📖 1단계: $\frac{dx}{dt} = 2t, \frac{dy}{dt} = 2t^2$이므로 $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{4t^2+4t^4} = 2t\sqrt{1+t^2}$ $(t \ge 0)$.

2단계: $L = \int_0^{\sqrt{3}} 2t\sqrt{1+t^2}\ dt$. $u = 1+t^2, du = 2t\,dt$로 치환하면 $t=0$일 때 $u=1, t=\sqrt{3}$ 일 때 $u=4$.

3단계: $L = \int_1^4 \sqrt{u}\ du = \left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_1^4 = \frac{2}{3}(8-1) = \frac{14}{3}$.

💡 매개변수 곡선의 길이 공식은 피타고라스 정리를 미소단위에 적용한 결과로, 빠른 자동차 GPS 거리계의 수학적 기반입니다.

Q35 순열·조합 심화 + 이항정리

방정식 $x+y+z+w=10$을 만족시키는 음이 아닌 정수해 (x, y, z, w)의 개수를 구하시오.

①) ① 220

②) ② 252

③) ③ 286

④) ④ 364

🎯 **정답: ③**

📖 1단계: 서로 다른 4종류 변수에서 합이 10이 되도록 분배하는 음이 아닌 정수해의 수는 중복조합 ${}_4H_{10}$.

2단계: ${}_4H_{10} = {}_{4+10-1}C_{10} = {}_{13}C_{10} = {}_{13}C_3$.

3단계: ${}_{13}C_3 = \dfrac{13\cdot 12\cdot 11}{3\cdot 2\cdot 1} = \dfrac{1716}{6} = 286$.

💡 중복조합은 막대 3개로 사탕 10개를 4칸에 배치하는 그림으로 이해되어 '막대와 별' 모형으로도 불립니다.

Q36 통계

모집단의 분포가 정규분포 $N(50,\ 6^2)$을 따른다. 이 모집단에서 크기가 9인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\bar{X}$라 할 때, $P(48 \le \bar{X} \le 53)$의 값을 구하시오. (단, $P(0 \le Z \le 1) = 0.3413$, $P(0 \le Z \le 1.5) = 0.4332$)

①) ① 0.6826

②) ② 0.7745

③) ③ 0.8664

④) ④ 0.9544

🎯 **정답: ②**

📖 1단계: 표본평균 $\bar{X}$는 $N\left(50,\ \left(\dfrac{6}{\sqrt{9}}\right)^2\right) = N(50,\ 2^2)$을 따른다.

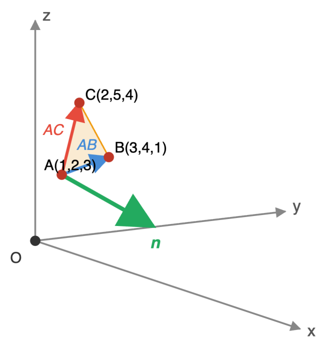
2단계: $Z = \dfrac{\bar{X}-50}{2}$로 표준화. $\bar{X}=48$이면 $Z=-1$, $\bar{X}=53$이면 $Z=1.5$.

3단계: $P(-1 \le Z \le 1.5) = P(0 \le Z \le 1) + P(0 \le Z \le 1.5) = 0.3413 + 0.4332 = 0.7745$.

💡 표본의 크기가 커질수록 표본평균의 표준편차는 $\sqrt{n}$ 분의 1로 줄어 분포가 점점 평균에 모이는데, 이것이 여론조사 표본을 늘릴수록 결과가 정밀해지는 이유입니다.

Q37 평면·공간벡터

공간의 세 점 $A(1,2,3)$, $B(3,4,1)$, $C(2,5,4)$를 지나는 평면의 방정식을 구하시오.



①) ① $2x - y + z = 3$

②) ② $2x + y - z = 2$

③) ③ $x - 2y + z = 0$

④) ④ $x + y + z = 6$

🎯 **정답: ①**

📖 1단계: $\vec{AB} = (2, 2, -2)$, $\vec{AC} = (1, 3, 1)$.

2단계: 법선벡터 $\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC}$. 성분 계산: $(2 \cdot 1 - (-2) \cdot 3,\ -2 \cdot 1 - 2 \cdot 1,\ 2 \cdot 3 - 2 \cdot 1) = (8, -4, 4)$, 즉 $\vec{n} \parallel (2, -1, 1)$.

3단계: 점 $A(1,2,3)$을 지나고 법선벡터가 $(2, -1, 1)$인 평면: $2(x-1) - (y-2) + (z-3) = 0$, 정리하면 $2x - y + z = 3$.

💡 세 점이 한 직선 위에 있지 않으면 단 하나의 평면이 결정되며, 외적은 두 변벡터의 수직 방향을 한 번에 알려줍니다.

Q38 초월함수의 미분

매개변수로 나타낸 곡선 $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$ 위의 $t = \dfrac{\pi}{2}$에 대응하는 점에서의 접선의 기울기를 구하시오.

①) ① -2

②) ② -1

③) ③ 0

④) ④ 1

🎯 **정답: ②**

📖 1단계: $\dfrac{dx}{dt} = e^t \cos t - e^t \sin t = e^t(\cos t - \sin t)$, $\dfrac{dy}{dt} = e^t \sin t + e^t \cos t = e^t(\sin t + \cos t)$.

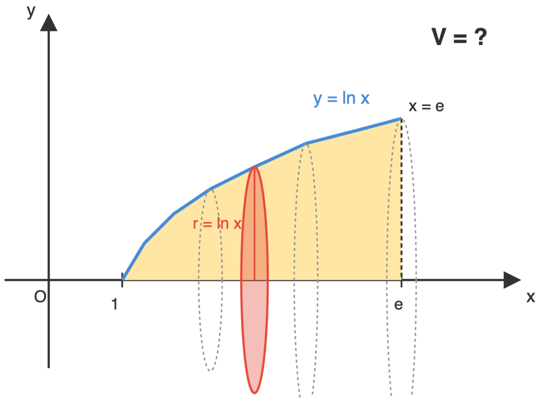
2단계: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sin t + \cos t}{\cos t - \sin t}$.

3단계: $t = \dfrac{\pi}{2}$일 때 분자 $= 1 + 0 = 1$, 분모 $= 0 - 1 = -1$이므로 기울기는 $\dfrac{1}{-1} = -1$.

💡 이 곡선은 로그나선의 일종으로, 앵무조개 껍데기와 은하의 나선팔에서 자연스럽게 관찰되는 형태입니다.

Q39 미적분 활용

곡선 $y = \ln x$와 x축 및 직선 $x = e$로 둘러싸인 영역을 x축 둘레로 회전시킨 회전체의 부피를 구하시오.



①) ① $\pi(e-1)$

②) ② $\pi(e-2)$

③) ③ $\pi(e^2-1)$

④) ④ $\pi(e^2-2)$

🎯 **정답: ②**

📖 1단계: $1 \le x \le e$에서 $\ln x \ge 0$이므로 $V = \pi \int_1^e (\ln x)^2\, dx$.

2단계: 부분적분을 두 번 사용. 먼저 $u = (\ln x)^2$, $dv = dx$로 두면 $\int (\ln x)^2 dx = x(\ln x)^2 - 2\int \ln x\, dx$. 그리고 $\int \ln x\, dx = x\ln x - x$.

3단계: 따라서 $\int_1^e (\ln x)^2 dx = \left[x(\ln x)^2 - 2(x\ln x - x)\right]_1^e$. $x = e$ 대입: $e \cdot 1 - 2(e-e) = e$. $x = 1$ 대입: $0 - 2(0-1) = 2$. 차이는 $e - 2$.

4단계: $V = \pi(e-2)$.

💡 $\ln x$의 제곱을 적분할 때 부분적분을 두 번 사용하는 방식은 e^x 곱 적분과 짝을 이루어 흔히 출제되는 구조입니다.

Q40 수열의 극한과 급수

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3}\sqrt{1+\frac{k^3}{n^3}}$의 값을 구하시오.

①) ① $\frac{2\sqrt{2}\ -1}{9}$

②) ② $\frac{2(2\sqrt{2}\ -1)}{9}$

③) ③ $\frac{2\sqrt{2}\ -1}{3}$

④) ④ $\frac{2(2\sqrt{2}\ -1)}{3}$

🎯 **정답: ②**

📖 1단계: 합을 변형하면 $\frac{k^2}{n^3}\sqrt{1+\frac{k^3}{n^3}}=\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{k}{n}\right)^2\sqrt{1+\left(\frac{k}{n}\right)^3}$.

2단계: $f(x)=x^2\sqrt{1+x^3}$ 로 두면 구분구적법에 의해 극한은 $\int_0^1 x^2\sqrt{1+x^3}\ dx$.

3단계: $u=1+x^3$, $du=3x^2\,dx$로 치환하면 $x=0$일 때 $u=1$, $x=1$일 때 $u=2$이므로

$\int_1^2\sqrt{u}\ \frac{du}{3}=\frac{1}{3}\left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_1^2=\frac{2}{9}(2\sqrt{2}\ -1)$.

💡 리만합의 극한이 정적분이 된다는 사실은 라이프니츠가 발견한 미적분의 기본 정리의 출발점이며, 이산을 연속으로 잇는 다리입니다.

📝 고3 수학 일반

총 40문제 · 문제와 정답·풀이 포함

Q41 평면·공간벡터

공간에서 구 $x^2 + y^2 + z^2 = 9$와 직선 $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{2}$가 만나서 생기는 두 점을 A, B라 할 때, 선분 AB의 길이를 구하시오.

① ① $\frac{2\sqrt{13}}{3}$
② ② $\frac{4\sqrt{13}}{3}$
③ ③ $2\sqrt{13}$
④ ④ $4\sqrt{13}$

🎯 **정답: ②**

📖 1단계: 직선 위의 점 $P_0(1, -1, 2)$, 방향벡터 $\vec{d} = (2, 1, 2)$, $|\vec{d}| = 3$. 구의 중심은 $O(0, 0, 0)$, 반지름 $r = 3$.

2단계: $\vec{P_0O} = (-1, 1, -2)$. 중심에서 직선까지의 거리 h는 $h = \frac{|\vec{OP_0} \times \vec{d}|}{|\vec{d}|}$. $\vec{OP}_0 = (1, -1, 2)$이므로

$\vec{OP_0} \times \vec{d} = ((-1)\cdot 2 - 2\cdot 1,\ 2\cdot 2 - 1\cdot 2,\ 1\cdot 1 - (-1)\cdot 2) = (-4, 2, 3)$.

3단계: $|\vec{OP_0} \times \vec{d}| = \sqrt{16+4+9} = \sqrt{29}$ 이므로 $h = \frac{\sqrt{29}}{3}$.

4단계: 현의 길이 공식 $|AB| = 2\sqrt{r^2 - h^2} = 2\sqrt{9 - \frac{29}{9}} = 2\sqrt{\frac{52}{9}} = \frac{4\sqrt{13}}{3}$.

💡 구와 직선의 교점거리는 원과 현의 관계를 3차원으로 확장한 것으로, 위성 궤도가 지구를 관통하지 않는지 판정할 때 같은 식이 쓰입니다.

Q42 초월함수의 미분

함수 $f(x) = \ln(x^2+1)$에 대하여 $f'(1)$의 값은?

① ① $\frac{1}{2}$
② ② 1
③ ③ $\frac{3}{2}$
④ ④ 2

🎯 **정답: ②**

📖 1단계: 합성함수 미분법을 적용하면 $f'(x) = \frac{1}{x^2+1} \cdot (x^2+1)' = \frac{2x}{x^2+1}$.

2단계: $x = 1$을 대입하면 $f'(1) = \frac{2\cdot 1}{1^2+1} = \frac{2}{2} = 1$.

💡 자연로그 $\ln x$의 도함수가 $\frac{1}{x}$라는 사실은 오일러가 이 함수를 '자연의 로그'라고 부르게 한 결정적 이유였다.

Q43 초월함수의 적분

정적분 $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x}dx$의 값은?

①) ① 0

②) ② $\frac{1}{2}$

③) ③ 1

④) ④ e

정답: ③

1단계: $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$이므로, $\int_1^e \frac{1}{x}dx = [\ln x]_1^e$.
2단계: 대입하면 $\ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1$.

곡선 $y = \frac{1}{x}$와 x축 사이 $x = 1$부터 $x = e$까지 넓이가 정확히 1이 되는 e는 이 성질로 정의되기도 한다.

Q44 확률

한 개의 주사위를 한 번 던져 짝수의 눈이 나왔을 때, 그 눈이 4 이상일 조건부확률은?

①) ① $\frac{1}{3}$

②) ② $\frac{1}{2}$

③) ③ $\frac{2}{3}$

④) ④ $\frac{5}{6}$

정답: ③

1단계: 사건 A: 짝수 $\{2, 4, 6\}$, $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
2단계: 사건 B: 4 이상 $\{4, 5, 6\}$. $A \cap B = \{4, 6\}$, $P(A \cap B) = \frac{2}{6}$.
3단계: $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{2/6}{3/6} = \frac{2}{3}$.

조건부확률은 18세기 베이즈 목사가 발견한 역확률 문제의 토대로, 오늘날 스팸 필터와 의료 진단의 핵심 원리이다.

Q45 초월함수의 미분

매개변수로 나타낸 곡선 $x = 2\cos t,\ y = \sin 2t$에서 $t = \frac{\pi}{4}$일 때 $\frac{dy}{dx}$의 값은?

①) ① -1

②) ② 0

③) ③ $\frac{1}{2}$

④) ④ 1

정답: ②

1단계: $\frac{dx}{dt} = -2\sin t,\ \frac{dy}{dt} = 2\cos 2t$.
2단계: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{2\cos 2t}{-2\sin t} = -\frac{\cos 2t}{\sin t}$.
3단계: $t = \frac{\pi}{4}$에서 $\cos\frac{\pi}{2} = 0$이므로 $\frac{dy}{dx} = 0$.

매개변수 방정식 $x = 2\cos t,\ y = \sin 2t$가 그리는 곡선은 8자 모양의 '리사주(Lissajous) 곡선'으로, 오실로스코프 화면에서 자주 볼 수 있다.

Q46 초월함수의 적분

정적분 $\displaystyle\int_0^1 x e^x \, dx$의 값은?

①) ① 0

②) ② 1

③) ③ $e-1$

④) ④ $e+1$

🎯 **정답: ②**

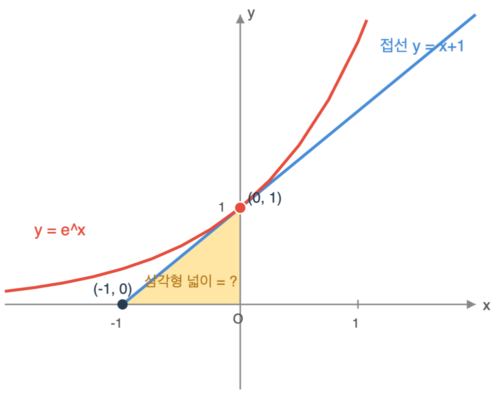
📖 1단계: 부분적분에서 $u = x,\ dv = e^x dx$로 두면 $du = dx,\ v = e^x$.

2단계: $\int_0^1 x e^x \, dx = [x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x \, dx = e - [e^x]_0^1 = e - (e-1) = 1.$

💡 xe^x의 정적분 기법은 물리학에서 방사성 물질의 평균 수명 계산에 직접 쓰인다.

Q47 미적분 활용

곡선 $y = e^x$ 위의 점 $(0,\ 1)$에서의 접선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이는?



①) ① $\frac{1}{4}$

②) ② $\frac{1}{2}$

③) ③ 1

④) ④ $\frac{3}{2}$

🎯 **정답: ②**

📖 1단계: $y' = e^x$이므로 $x = 0$에서 접선의 기울기는 $e^0 = 1$.

2단계: 접선의 방정식은 $y - 1 = 1 \cdot (x - 0)$, 즉 $y = x + 1$.

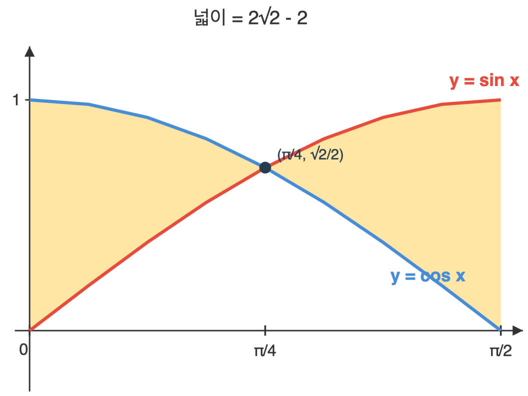
3단계: x절편은 -1, y절편은 1이므로 직각삼각형의 두 변의 길이는 각각 1.

4단계: 넓이 $= \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$.

💡 지수함수 e^x는 자기 자신이 도함수인 유일한 함수족으로, 그래서 어느 점에서의 접선 기울기도 그 점의 y좌표와 같다.

Q48 미적분 활용

구간 $[0,\ \frac{\pi}{2}]$에서 두 곡선 $y = \sin x$와 $y = \cos x$로 둘러싸인 부분의 넓이는?



①) ① $\sqrt{2} - 1$
②) ② $2 - \sqrt{2}$
③) ③ $2\sqrt{2} - 2$
④) ④ $2\sqrt{2}$

🎯 **정답: ③**
📖 1단계: 교점은 $\sin x = \cos x$에서 $x = \frac{\pi}{4}$.
2단계: $[0, \frac{\pi}{4}]$에서 $\cos x \geq \sin x$, $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$에서 $\sin x \geq \cos x$.
3단계: $\int_0^{\pi/4}(\cos x - \sin x)dx = [\sin x + \cos x]_0^{\pi/4} = \sqrt{2} - 1$.
4단계: $\int_{\pi/4}^{\pi/2}(\sin x - \cos x)dx = [-\cos x - \sin x]_{\pi/4}^{\pi/2} = -1 - (-\sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1$.
5단계: 합치면 $2(\sqrt{2} - 1) = 2\sqrt{2} - 2$.
💡 두 곡선 $\sin x$와 $\cos x$는 $\frac{\pi}{4}$만큼 수평이동한 관계로, 구간 $[0, \frac{\pi}{2}]$에서 만드는 넓이는 좌우 대칭이다.

Q49 확률

주머니 A에는 빨간 공 2개와 흰 공 3개, 주머니 B에는 빨간 공 4개와 흰 공 1개가 들어 있다. 두 주머니 중 하나를 임의로 선택해 공 한 개를 꺼냈더니 빨간 공이었다. 이 공이 주머니 A에서 나왔을 확률은?

①) ① $\frac{1}{4}$
②) ② $\frac{1}{3}$
③) ③ $\frac{1}{2}$
④) ④ $\frac{2}{3}$

🎯 **정답: ②**
📖 1단계: $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$, $P(\text{빨강}|A) = \frac{2}{5}$, $P(\text{빨강}|B) = \frac{4}{5}$.
2단계: 전확률의 법칙: $P(\text{빨강}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$.
3단계: $P(A|\text{빨강}) = \frac{P(A\cap\text{빨강})}{P(\text{빨강})} = \frac{1/5}{3/5} = \frac{1}{3}$.
💡 베이즈 정리에서 '사전확률'과 '관측 결과'가 만나 '사후확률'이 된다는 아이디어는 현대 인공지능의 신뢰도 추정에도 그대로 쓰인다.

Q50 순열·조합 심화 + 이항정리

방정식 $x+y+z+w=10$을 만족하는 음이 아닌 정수해 $(x,\ y,\ z,\ w)$의 순서쌍의 개수는?

①) ① 220

②) ② 256

③) ③ 286

④) ④ 364

🎯 **정답: ③**

📖 1단계: 서로 다른 4개의 문자에서 합이 10이 되는 음이 아닌 정수해의 수는 중복조합 ${}_4H_{10}$.

2단계: ${}_4H_{10} = {}_{4+10-1}C_{10} = {}_{13}C_{10} = {}_{13}C_3$.

3단계: ${}_{13}C_3 = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{1716}{6} = 286$.

💡 중복조합의 공식 ${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r$은 '같은 공을 다른 상자에 넣는' 별과 막대기(stars and bars) 논증으로 단번에 증명된다.

Q51 통계

어느 공장에서 생산하는 제품의 무게는 정규분포 $N(m,\ 4^2)$을 따른다고 한다. 이 제품 중 임의로 100개를 추출하여 얻은 표본평균이 250이었다. 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간을 $a \le m \le b$라 할 때 $b-a$의 값은? (단, $P(|Z| \le 1.96) = 0.95$)

①) ① 0.784

②) ② 1.568

③) ③ 1.96

④) ④ 3.92

🎯 **정답: ②**

📖 1단계: 신뢰구간은 $\bar{x} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \bar{x} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

2단계: 구간의 길이 $b-a = 2 \cdot 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

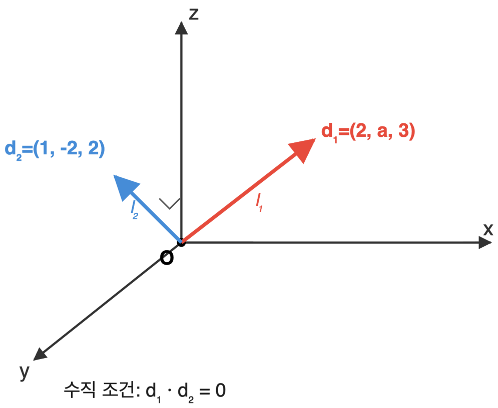
3단계: $\sigma = 4$, $n = 100$이므로 $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{4}{10} = 0.4$.

4단계: $b-a = 2 \cdot 1.96 \cdot 0.4 = 1.568$.

💡 신뢰구간의 길이는 표본 크기의 제곱근에 반비례하므로, 정밀도를 2배로 올리려면 표본 수가 4배로 늘어나야 한다.

Q52 평면·공간벡터

공간에서 두 직선 l_1: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{a} = \frac{z}{3}$과 l_2: $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{2}$가 서로 수직일 때, 실수 a의 값은?



①) ① 1
②) ② 2
③) ③ 3
④) ④ 4

🎯 **정답: ④**
📖 1단계: l_1의 방향벡터는 $\vec{d}_1 = (2, a, 3)$, l_2의 방향벡터는 $\vec{d}_2 = (1, -2, 2)$.
2단계: 두 직선이 수직일 조건은 $\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 = 0$.
3단계: $2 \cdot 1 + a \cdot (-2) + 3 \cdot 2 = 2 - 2a + 6 = 8 - 2a$.
4단계: $8 - 2a = 0$을 풀면 $a = 4$.
💡 공간의 두 직선이 수직인 것은 '꼬인 위치'에서도 가능해서, 한 번도 만나지 않는 수직 직선 쌍이 존재한다.

Q53 미적분 활용

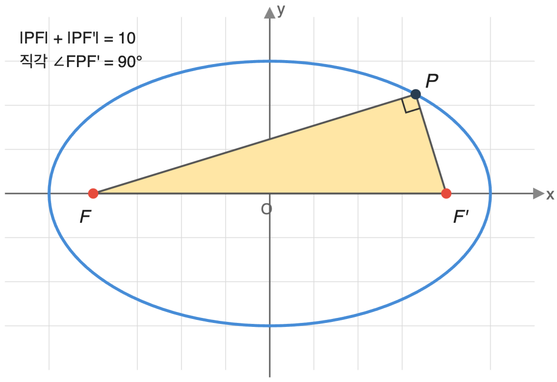
함수 $f(x) = \int_1^{x^2} e^{-t}\,dt$에 대하여 $f'(1)$의 값은?

①) ① $\frac{1}{e}$
②) ② $\frac{2}{e}$
③) ③ 1
④) ④ 2

🎯 **정답: ②**
📖 1단계: $F(u) = \int_1^u e^{-t}dt$로 두면 $F'(u) = e^{-u}$ (정적분으로 정의된 함수의 미분).
2단계: $f(x) = F(x^2)$이므로 합성함수 미분법에 의해 $f'(x) = F'(x^2) \cdot (x^2)' = e^{-x^2} \cdot 2x$.
3단계: $x = 1$을 대입하면 $f'(1) = e^{-1} \cdot 2 = \frac{2}{e}$.
💡 피적분함수 e^{-t^2}처럼 초등함수로 적분이 표현되지 않는 함수도, 상한이 움직이면 그 도함수는 정확히 계산할 수 있다.

Q54 이차곡선

타원 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$의 두 초점을 $F,\ F'$이라 하자. 타원 위의 한 점 P에 대하여 $\angle FPF' = 90°$일 때, 삼각형 FPF'의 넓이는?



①) ① 6
②) ② 9
③) ③ 12
④) ④ 18

🎯 **정답: ②**

📖 1단계: $a^2 = 25,\ b^2 = 9$이므로 $c^2 = a^2 - b^2 = 16,\ c = 4$. 따라서 $|FF'| = 2c = 8$.
2단계: 타원의 정의에서 $|PF| + |PF'| = 2a = 10$.
3단계: $\angle FPF' = 90°$이므로 피타고라스 정리에 의해 $|PF|^2 + |PF'|^2 = |FF'|^2 = 64$.
4단계: $(|PF| + |PF'|)^2 = |PF|^2 + |PF'|^2 + 2|PF||PF'|$에서 $100 = 64 + 2|PF||PF'|$, 즉 $|PF||PF'| = 18$.
5단계: 삼각형 넓이 $= \frac{1}{2}|PF||PF'| = \frac{1}{2} \times 18 = 9$.
💡 타원의 초점 삼각형에서 $\angle FPF'$가 직각일 때, 그 넓이는 항상 b^2과 같다는 아름다운 공식이 있다 (이 문제에서 $b^2 = 9$).

Q55 수열의 극한과 급수

무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$의 합은?

①) ① $\frac{1}{2}$
②) ② $\frac{3}{4}$
③) ③ 1
④) ④ $\frac{3}{2}$

🎯 **정답: ②**

📖 1단계: 부분분수 분해로 $\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$.
2단계: 부분합 $S_N = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$에서 망원(telescoping) 효과로 대부분 상쇄.
3단계: 남는 항은 $\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2}\right)$.
4단계: $N \to \infty$이면 뒤 두 항이 0으로 수렴하므로 $\lim_{N\to\infty} S_N = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$.
💡 부분분수 분해가 만드는 망원급수(telescoping series)는 연속한 항들이 '망원경처럼' 서로를 지워버리는 현상에서 이름을 따왔다.

Q56 초월함수의 적분

정적분 $\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx$ 의 값을 구하시오.

①) ① $\ln 2$

②) ② $2\ln 2$

③) ③ $\ln 3$

④) ④ 1

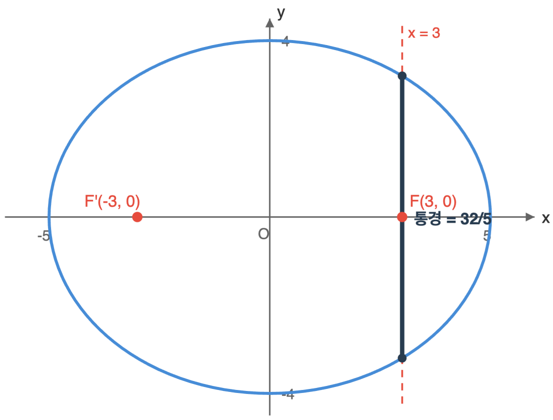
🎯 **정답:** ① $\ln 2$

📖 1) $u = x^2 + 1$로 치환하면 $du = 2x\,dx$. 2) 적분구간 변경: $x = 0 \Rightarrow u = 1$, $x = 1 \Rightarrow u = 2$. 3) $\int_1^2 \frac{1}{u}du = [\ln u]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$.

💡 $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$ 형태는 치환의 대표 예시입니다.

Q57 이차곡선

타원 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 의 한 초점을 지나고 장축에 수직인 현(통경)의 길이를 구하시오.



①) ① $\frac{16}{5}$

②) ② $\frac{24}{5}$

③) ③ $\frac{32}{5}$

④) ④ $\frac{40}{5}$

🎯 **정답:** ③ $\frac{32}{5}$

📖 1) $a^2 = 25$, $b^2 = 16$이므로 $c^2 = a^2 - b^2 = 9$, 초점 $(\pm 3, 0)$. 2) 현 $x = 3$을 타원에 대입: $\frac{9}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. 3) $y^2 = 16 \cdot \frac{16}{25}$, $y = \pm\frac{16}{5}$. 4) 현의 길이 $= 2 \cdot \frac{16}{5} = \frac{32}{5}$. (일반공식: 통경 $= \frac{2b^2}{a}$).

💡 타원의 통경 길이는 $\frac{2b^2}{a}$로, 이는 이심률과 무관하게 단축·장축의 비로 결정됩니다.

Q58 초월함수의 미분

함수 $f(x) = x\sin x$ 에 대하여 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 의 값을 구하시오.

①) ① 0
②) ② 1
③) ③ $\frac{\pi}{2}$
④) ④ π

정답: ② 1

1) 곱의 미분법 적용: $f'(x) = (x)'\sin x + x(\sin x)' = \sin x + x\cos x$. 2) $x = \frac{\pi}{2}$ 대입: $\sin\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{\pi}{2} \cdot 0 = 1$.

곱의 미분 $(fg)' = f'g + fg'$은 라이프니츠가 1675년 경 정립했습니다.

Q59 확률

한 개의 공정한 동전을 4번 던질 때, 앞면이 정확히 2번 나올 확률은?

①) ① $\frac{1}{4}$
②) ② $\frac{3}{8}$
③) ③ $\frac{1}{2}$
④) ④ $\frac{5}{8}$

정답: ② $\frac{3}{8}$

1) 독립시행의 확률: $P = {}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2$. 2) ${}_4C_2 = 6$. 3) $P = 6 \cdot \frac{1}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$.

이항분포 $B(n, p)$에서 가장 큰 확률값은 np 근처에서 발생합니다.

Q60 수열의 극한과 급수

극한 $\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1} - 2^n}{3^n + 2^{n+1}}$ 의 값을 구하시오.

①) ① 1
②) ② $\frac{3}{2}$
③) ③ 2
④) ④ 3

정답: ④ 3

1) 분자·분모의 최대지수 밑은 3이므로 분자·분모를 3^n으로 나눈다. 2) 분자: $\frac{3 \cdot 3^n - 2^n}{3^n} = 3 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$. 3) 분모: $\frac{3^n + 2 \cdot 2^n}{3^n} = 1 + 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$. 4) $n \to \infty$일 때 $(2/3)^n \to 0$이므로 극한 $= \frac{3-0}{1+0} = 3$.

$|r| < 1$인 r^n은 결국 0으로 수렴하며, 극한 문제에서 '가장 큰 밑'을 나누는 기법이 자주 쓰입니다.

Q61 통계

확률변수 X 가 이항분포 $B\left(100, \frac{1}{5}\right)$ 을 따를 때, $E(X)+V(X)$ 의 값을 구하시오.

①) ① 32

②) ② 34

③) ③ 36

④) ④ 40

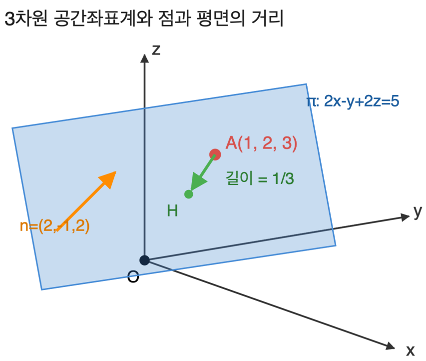
🎯 **정답: ③ 36**

📖 1) 이항분포 $B(n, p)$에서 $E(X)=np$, $V(X)=np(1-p)$. 2) $n=100,\ p=\frac{1}{5}$, $1-p=\frac{4}{5}$. 3) $E(X)=100\cdot\frac{1}{5}=20$. 4) $V(X)=100\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}=16$. 5) $E(X)+V(X)=20+16=36$.

💡 이항분포의 분산은 $p=1/2$일 때 최대이고, $p\to 0$ 또는 $p\to 1$이면 작아집니다.

Q62 평면·공간벡터

점 $A(1,2,3)$ 과 평면 $\pi: 2x-y+2z-5=0$ 사이의 거리를 구하시오.



①) ① $\frac{1}{3}$

②) ② $\frac{2}{3}$

③) ③ 1

④) ④ $\frac{5}{3}$

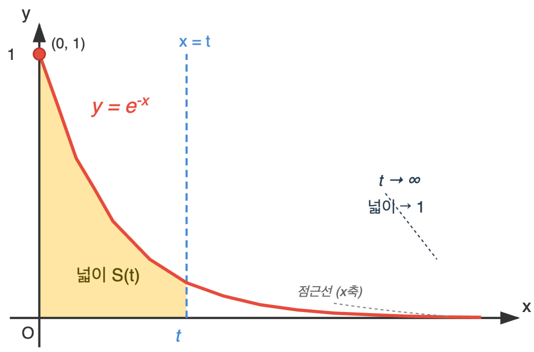
🎯 **정답: ① $\frac{1}{3}$**

📖 1) 점과 평면 사이의 거리 공식: $d=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$. 2) $a=2, b=-1, c=2, d=-5$, $(x_0, y_0, z_0)=(1,2,3)$. 3) 분자: $|2\cdot1+(-1)\cdot2+2\cdot3-5|=|2-2+6-5|=1$. 4) 분모: $\sqrt{4+1+4}=\sqrt{9}=3$. 5) $d=\frac{1}{3}$.

💡 점과 평면의 거리 공식은 법선벡터 방향의 정사영을 이용해 유도됩니다.

Q63 미적분 활용

함수 $f(x) = e^{-x}$ 에 대하여, 곡선 $y = f(x)$ 와 x 축, y 축 및 직선 $x = t$ $(t > 0)$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S(t)$ 라 할 때, $\lim_{t \to \infty} S(t)$ 의 값을 구하시오.



①) ① 0

②) ② $\frac{1}{e}$

③) ③ 1

④) ④ e

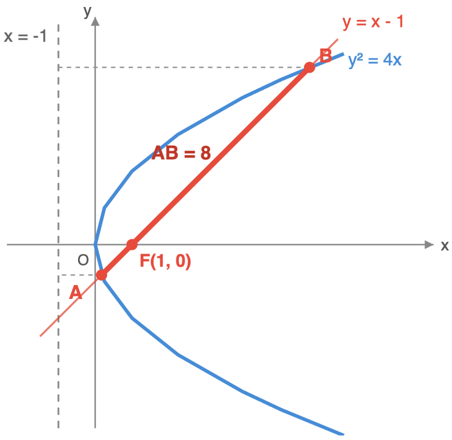
🎯 **정답:** ③ 1

📖 1) 넓이 $S(t) = \int_0^t e^{-x}\,dx$. 2) 부정적분: $\int e^{-x}\,dx = -e^{-x} + C$. 3) $S(t) = [-e^{-x}]_0^t = -e^{-t} - (-1) = 1 - e^{-t}$. 4) $t \to \infty$ 이면 $e^{-t} \to 0$ 이므로 $\lim_{t \to \infty} S(t) = 1$.

💡 $\int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1$ 은 지수분포의 전체 확률이 1이라는 사실과 직접 연결됩니다.

Q64 이차곡선

포물선 $y^2 = 4x$ 의 초점을 지나고 기울기가 1 인 직선이 포물선과 만나는 서로 다른 두 점을 A, B 라 할 때, 선분 $\overline{AB}$ 의 길이를 구하시오.



①) ① 6

②) ② 7

③) ③ 8

④) ④ 10

🎯 **정답:** ③ 8

📖 1) $y^2 = 4x$ 의 초점 $F(1, 0)$. 기울기 1인 직선: $y = x - 1$. 2) $(x-1)^2 = 4x$ 이므로 $x^2 - 6x + 1 = 0$. 두 근 x_1, x_2 에 대해 근과 계수 관계로 $x_1 + x_2 = 6$. 3) 포물선의 초점거리 성질: 준선 $x = -1$ 로부터의 거리가 초점거리와 같으므로 $\overline{AF} = x_1 + 1$, $\overline{BF} = x_2 + 1$. 4) $\overline{AB} = \overline{AF} + \overline{BF} = (x_1 + x_2) + 2 = 6 + 2 = 8$.

💡 초점을 지나는 현(초점현) 공식 $\overline{AB} = \dfrac{4p}{\sin^2\theta}$ (θ는 장축과의 각)에서 $\theta = 45°$, $p = 1$이면 $\dfrac{4}{1/2} = 8$.

Q65 초월함수의 미분

곡선 $x^2 + xy + y^2 = 3$ 위의 점 $(1, 1)$ 에서의 접선의 기울기를 구하시오.

①) ① -2

②) ② -1

③) ③ 0

④) ④ 1

🎯 **정답:** ② -1

📖 1) 음함수 미분법: 양변을 x로 미분한다. 2) $\dfrac{d}{dx}(x^2) + \dfrac{d}{dx}(xy) + \dfrac{d}{dx}(y^2) = 0$ 에서 $2x + (y + xy') + 2yy' = 0$. 3) y'에 대해 정리: $y'(x + 2y) = -(2x + y)$, 즉 $y' = -\dfrac{2x + y}{x + 2y}$. 4) $(x, y) = (1, 1)$ 대입: $y' = -\dfrac{2+1}{1+2} = -\dfrac{3}{3} = -1$.

💡 음함수 미분은 역함수, 극좌표, 매개변수 곡선 등 명시적으로 $y = f(x)$ 로 풀리지 않는 식의 접선을 구할 때 유용합니다.

Q66 확률

한 번의 시행에서 사건 A 가 일어날 확률이 $\frac{1}{3}$ 이다. 이 시행을 4 번 반복할 때, 사건 A 가 2 번 이상 일어날 확률은?

①) ① $\frac{8}{27}$
②) ② $\frac{11}{27}$
③) ③ $\frac{16}{27}$
④) ④ $\frac{19}{27}$

정답: ② $\frac{11}{27}$

1) A 가 일어난 횟수 X 는 이항분포 $B(4, 1/3)$. 2) 여사건: $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$. 3) $P(X = 0) = {}_4C_0(2/3)^4 = \frac{16}{81}$. 4) $P(X = 1) = {}_4C_1(1/3)(2/3)^3 = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{27} = \frac{32}{81}$. 5) $P(X \geq 2) = 1 - \frac{16}{81} - \frac{32}{81} = \frac{33}{81} = \frac{11}{27}$.

'적어도' 또는 '이상' 유형은 여사건으로 계산하면 경우가 크게 줄어 빠르게 풀 수 있습니다.

Q67 초월함수의 미분

함수 $f(x) = x^3 + 2x - 1$에 대하여 $g(x)$가 $f(x)$의 역함수일 때, $g'(2)$의 값은?

①) ① $\frac{1}{3}$
②) ② $\frac{1}{4}$
③) ③ $\frac{1}{5}$
④) ④ $\frac{1}{6}$

정답: ③

1단계: $f(1) = 1 + 2 - 1 = 2$이므로 $g(2) = 1$이다.
2단계: 역함수 미분법에 의해 $g'(2) = \frac{1}{f'(g(2))} = \frac{1}{f'(1)}$.
3단계: $f'(x) = 3x^2 + 2$이므로 $f'(1) = 3 + 2 = 5$.
4단계: 따라서 $g'(2) = \frac{1}{5}$.

역함수의 도함수는 원함수 그래프 위의 대응점에서 접선의 기울기 역수다. 함수와 역함수는 $y = x$에 대해 대칭이므로 기울기가 뒤집힌다.

Q68 순열·조합 심화

숫자 $1, 1, 2, 2, 3, 3$을 일렬로 나열하여 만들 수 있는 수의 개수는?

①) ① 60
②) ② 72
③) ③ 84
④) ④ 90

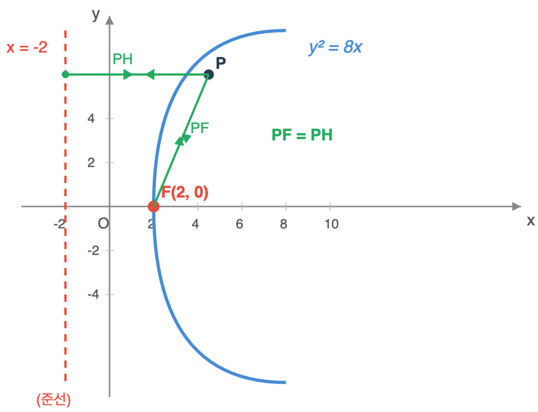
정답: ④

1단계: 6개의 숫자 중 1이 2개, 2가 2개, 3이 2개로 같은 것이 있다.
2단계: 같은 것이 있는 순열의 공식에 의해 경우의 수는 $\frac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!}$이다.
3단계: $\frac{720}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{720}{8} = 90$.
따라서 구하는 수의 개수는 90이다.

이 공식은 다항계수라 불리며, 이항정리를 여러 항으로 일반화한 다항정리의 계수와 같다.

Q69 이차곡선

포물선 $y^2 = 8x$의 준선의 방정식은?



①) ① $x = -1$

②) ② $x = -2$

③) ③ $x = -4$

④) ④ $x = -8$

🎯 **정답: ②**

📖 1단계: 포물선의 표준형 $y^2 = 4px$와 비교하면 $4p = 8$이므로 $p = 2$.

2단계: 이 형태의 포물선의 초점은 $(p, 0) = (2, 0)$이고 준선은 $x = -p$이다.

3단계: 따라서 준선의 방정식은 $x = -2$이다.

💡 포물선 위의 모든 점은 초점과 준선까지의 거리가 같다. 이 성질 덕분에 위성안테나가 파라볼라 모양이다.

Q70 확률

1부터 10까지의 자연수가 하나씩 적힌 10장의 카드에서 임의로 2장을 동시에 뽑을 때, 두 카드에 적힌 수의 합이 짝수일 확률은?

①) ① $\frac{1}{3}$

②) ② $\frac{4}{9}$

③) ③ $\frac{1}{2}$

④) ④ $\frac{5}{9}$

🎯 **정답: ②**

📖 1단계: 전체 경우의 수는 ${}_{10}C_2 = 45$.

2단계: 두 수의 합이 짝수이려면 두 수가 모두 홀수이거나 모두 짝수여야 한다.

3단계: 홀수 5개 중 2개: ${}_5C_2 = 10$, 짝수 5개 중 2개: ${}_5C_2 = 10$.

4단계: 유리한 경우의 수 $= 10 + 10 = 20$.

5단계: 따라서 확률 $= \frac{20}{45} = \frac{4}{9}$.

💡 짝수 + 짝수 = 짝수, 홀수 + 홀수 = 짝수, 짝수 + 홀수 = 홀수. 이 성질은 모듈러 2 연산으로 설명된다.

Q71 초월함수의 적분

정적분 $\int_0^{\pi/2} \sin x \cos x \, dx$의 값은?

①) ① $\frac{1}{4}$

②) ② $\frac{1}{3}$

③) ③ $\frac{1}{2}$

④) ④ 1

정답: ③

1단계: 배각공식 $\sin 2x = 2\sin x \cos x$를 이용하면 $\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$.

2단계: $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\sin 2x \, dx = \frac{1}{2} \cdot \left[-\frac{1}{2}\cos 2x \right]_0^{\pi/2}$.

3단계: $= -\frac{1}{4}(\cos\pi - \cos 0) = -\frac{1}{4}(-1-1) = \frac{1}{2}$.

따라서 값은 $\frac{1}{2}$이다.

💡 같은 적분을 $u = \sin x$로 치환해 $\int_0^1 u \, du = \frac{1}{2}$로 구할 수도 있다. 방법이 달라도 결과는 같다.

Q72 통계

확률변수 X의 확률분포가 $P(X = k) = \frac{k}{10}$ $(k = 1, 2, 3, 4)$로 주어질 때, $E(X)$와 $V(X)$의 값으로 알맞은 것은?

①) ① $E(X) = 2.5,\ V(X) = 1$

②) ② $E(X) = 3,\ V(X) = 1$

③) ③ $E(X) = 3,\ V(X) = 1.5$

④) ④ $E(X) = 2.5,\ V(X) = 1.5$

정답: ②

1단계: $E(X) = \sum k \cdot P(X = k) = 1 \cdot \frac{1}{10} + 2 \cdot \frac{2}{10} + 3 \cdot \frac{3}{10} + 4 \cdot \frac{4}{10} = \frac{1+4+9+16}{10} = 3$.

2단계: $E(X^2) = 1 \cdot \frac{1}{10} + 4 \cdot \frac{2}{10} + 9 \cdot \frac{3}{10} + 16 \cdot \frac{4}{10} = \frac{1+8+27+64}{10} = 10$.

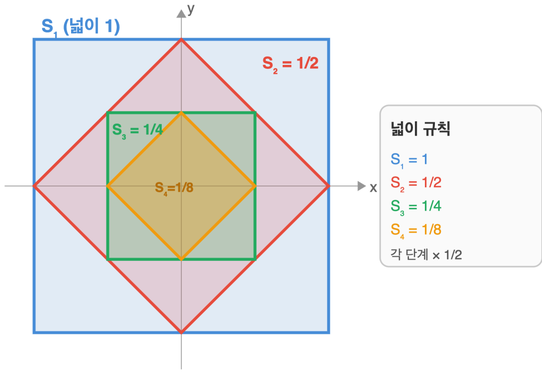
3단계: $V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = 10 - 9 = 1$.

따라서 $E(X) = 3$, $V(X) = 1$.

💡 $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. 이 공식들을 이용하면 확률 $\frac{k}{C}$ 꼴의 기댓값을 빠르게 구할 수 있다.

Q73 수열의 극한과 급수

한 변의 길이가 1인 정사각형 S_1의 각 변의 중점을 연결하여 정사각형 S_2를 만든다. 같은 방법으로 S_2의 각 변의 중점을 연결하여 S_3를 만드는 과정을 무한히 반복할 때, 모든 정사각형 S_n의 넓이의 합은?



각 단계 넓이는 직전의 1/2배 (중점 연결)

①) ① $\frac{3}{2}$
②) ② 2
③) ③ $\frac{5}{2}$
④) ④ 3

정답: ②

1단계: 한 변의 길이 a인 정사각형의 각 변 중점을 이어 만든 새 정사각형의 한 변의 길이는 $\frac{a}{\sqrt{2}}$이므로 넓이는 원래의 $\frac{1}{2}$배.

2단계: 따라서 S_n의 넓이는 $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

3단계: 이는 첫째항 1, 공비 $\frac{1}{2}$인 무한등비급수이다.

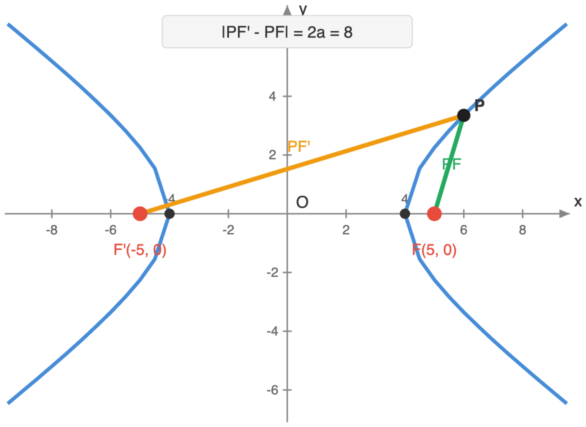
4단계: 합 $= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$.

따라서 모든 넓이의 합은 2이다.

💡 공비의 절댓값이 1보다 작은 무한등비급수는 반드시 수렴한다. 이를 이용해 '점근적으로 유한한 기하'를 만들 수 있다.

Q74 이차곡선

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$의 두 초점을 $F(5,0)$, $F'(-5,0)$이라 하자. 이 쌍곡선의 오른쪽 곡선 위의 점 P에 대하여 $\overline{PF}=12$일 때, $\overline{PF'}$의 값은?



①) ① 4
②) ② 10
③) ③ 16
④) ④ 20

정답: ④

1단계: 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$에서 $a^2=16$, 즉 $a=4$.
2단계: 쌍곡선의 정의에 의해 $|\overline{PF}-\overline{PF'}|=2a=8$.
3단계: 점 P가 오른쪽 곡선 위에 있으므로 F가 P에 가까운 초점이다. 따라서 $\overline{PF}<\overline{PF'}$이고 $\overline{PF'}-\overline{PF}=8$.
4단계: 따라서 $\overline{PF'}=\overline{PF}+8=12+8=20$.
쌍곡선은 '두 정점까지의 거리의 차의 절댓값이 일정한 점의 자취'다. 이 성질을 이용해 LORAN 같은 전파 항법이 위치를 계산한다.

Q75 평면·공간벡터

평면 위의 두 벡터 $\vec{a}=(3,-1)$, $\vec{b}=(1,2)$에 대하여 $(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$의 값은?

①) ① -1
②) ② 0
③) ③ 1
④) ④ 2

정답: ③

1단계: 전개하면 $(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{a}\cdot\vec{b}-2|\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}-2|\vec{b}|^2$.
2단계: $|\vec{a}|^2=3^2+(-1)^2=10$.
3단계: $\vec{a}\cdot\vec{b}=3\cdot1+(-1)\cdot2=1$.
4단계: $|\vec{b}|^2=1^2+2^2=5$.
5단계: 따라서 값은 $10+1-2\cdot5=1$.
벡터의 내적은 분배법칙이 성립해서 다항식처럼 전개할 수 있다. 단, $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$임에 주의해야 한다.

Q76 초월함수의 적분

정적분 $\int_0^1 x^2e^x\,dx$의 값은?

①) ① $e-1$

②) ② $e-2$

③) ③ $2e-3$

④) ④ $2e-1$

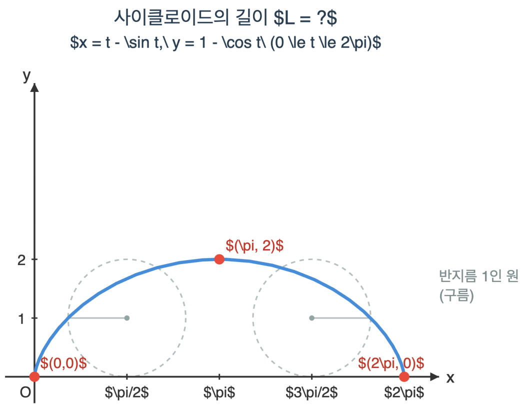
🎯 **정답: ②**

📖 1단계: 부분적분. $u=x^2$, $dv=e^x dx$로 놓으면 $du=2x\,dx$, $v=e^x$.
$\int x^2e^x\,dx = x^2e^x - \int 2xe^x\,dx$.
2단계: 다시 부분적분. $u=2x$, $dv=e^xdx$로 놓으면 $\int 2xe^x\,dx = 2xe^x - \int 2e^x\,dx = 2xe^x - 2e^x + C$.
3단계: 따라서 부정적분은 $x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C = (x^2-2x+2)e^x + C$.
4단계: 정적분 값은 $[(x^2-2x+2)e^x]_0^1 = (1-2+2)e - (0-0+2)\cdot 1 = e-2$.

💡 $\int x^ne^xdx$는 n번 부분적분하면 끝난다. 결과는 $e^x\cdot P_n(x)$ 꼴이 되는데, P_n은 계차가 $n!$로 뒤에서부터 결정되는 다항식이다.

Q77 미적분 활용

매개변수 방정식 $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$ $(0\le t\le 2\pi)$로 표현되는 사이클로이드의 곡선의 길이는?



①) ① 4

②) ② 2π

③) ③ 8

④) ④ 4π

🎯 **정답: ③**

📖 1단계: $\dfrac{dx}{dt} = 1-\cos t$, $\dfrac{dy}{dt} = \sin t$.
2단계: $\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2 = (1-\cos t)^2 + \sin^2 t = 1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t = 2 - 2\cos t$.
3단계: 반각공식 $1-\cos t = 2\sin^2\dfrac{t}{2}$를 이용하면 $=4\sin^2\dfrac{t}{2}$.
4단계: $0\le t\le 2\pi$에서 $\sin\dfrac{t}{2}\ge 0$이므로 $\sqrt{\cdots} = 2\sin\dfrac{t}{2}$.
5단계: $L = \int_0^{2\pi} 2\sin\dfrac{t}{2}\,dt = \left[-4\cos\dfrac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = -4(\cos\pi - \cos 0) = -4(-1-1) = 8$.

💡 사이클로이드는 '가장 빠른 하강 곡선'(brachistochrone)이자 '등시 곡선'(tautochrone)이다. 어디서 출발하든 도착 시각이 같은 희귀한 성질을 가진다.

Q78 순열·조합 심화

방정식 $x+y+z+w=10$을 만족시키는 음이 아닌 정수해 (x,y,z,w) 중에서 $x\geq 1,\ y\geq 2$를 만족시키는 순서쌍의 개수는?

①) ① 84

②) ② 120

③) ③ 165

④) ④ 220

🎯 **정답: ②**

📖 1단계: 조건을 제거하기 위해 $x'=x-1\geq 0,\ y'=y-2\geq 0$으로 치환한다.

2단계: 방정식은 $(x'+1)+(y'+2)+z+w=10$, 즉 $x'+y'+z+w=7$이 된다.

3단계: 모든 변수가 음이 아닌 정수이므로 해의 개수는 중복조합 ${}_{4}\mathrm{H}_{7}={}_{4+7-1}\mathrm{C}_{7}={}_{10}\mathrm{C}_{7}={}_{10}\mathrm{C}_{3}$.

4단계: ${}_{10}\mathrm{C}_{3}=\dfrac{10\cdot 9\cdot 8}{3!}=120$.

💡 ${}_{n}\mathrm{H}_{r}={}_{n+r-1}\mathrm{C}_{r}$ 공식은 '칸막이 (bars and stars)' 조합론으로 증명된다. r개의 별을 n개의 구분선이 나누는 경우의 수와 같다.

Q79 통계

어느 공장에서 생산하는 제품의 무게 X는 평균 $500\,\mathrm{g}$, 표준편차 $20\,\mathrm{g}$인 정규분포 $N(500, 20^2)$을 따른다. 이 제품 중 임의로 하나를 택할 때, 그 무게가 $480\,\mathrm{g}$ 이상 $540\,\mathrm{g}$ 이하일 확률은? (단, $P(0\leq Z\leq 1)=0.3413$, $P(0\leq Z\leq 2)=0.4772$)

①) ① 0.7372

②) ② 0.8185

③) ③ 0.8413

④) ④ 0.9544

🎯 **정답: ②**

📖 1단계: 표준화 $Z=\dfrac{X-500}{20}$.

2단계: $X=480$일 때 $Z=\dfrac{480-500}{20}=-1$, $X=540$일 때 $Z=\dfrac{540-500}{20}=2$.

3단계: $P(480\leq X\leq 540)=P(-1\leq Z\leq 2)$.

4단계: 대칭성을 이용해 $P(-1\leq Z\leq 0)=P(0\leq Z\leq 1)=0.3413$.

5단계: $P(-1\leq Z\leq 2)=P(-1\leq Z\leq 0)+P(0\leq Z\leq 2)=0.3413+0.4772=0.8185$.

💡 정규분포 $N(m,\sigma^2)$의 '$\pm 2\sigma$ 구간'에는 약 95.4%의 값이 들어 있다. 이 때문에 품질관리 실무에서 규격한계를 $m\pm 2\sigma$ 또는 $m\pm 3\sigma$로 잡는다.

Q80 확률

서로 다른 6개의 문자 A, B, C, D, E, F를 일렬로 나열할 때, A와 B가 서로 이웃하지 않고, C와 D도 서로 이웃하지 않을 확률은?

①) ① $\frac{2}{5}$
②) ② $\frac{7}{15}$
③) ③ $\frac{1}{2}$
④) ④ $\frac{8}{15}$

🎯 **정답: ②**

📖 1단계: 전체 나열의 경우의 수는 $6! = 720$.
2단계: 포함배제를 위해 사건을 정의한다. X: A, B가 이웃, Y: C, D가 이웃.
3단계: $n(X)$는 (AB) 덩어리와 나머지 4개를 나열 후 내부 순서까지 고려, $5! \cdot 2! = 240$. 마찬가지로 $n(Y) = 240$.
4단계: $n(X \cap Y)$는 (AB), (CD) 두 덩어리와 나머지 2개를 나열 후 각 내부 순서, $4! \cdot 2! \cdot 2! = 96$.
5단계: 포함배제로 $n(X \cup Y) = 240 + 240 - 96 = 384$.
6단계: 둘 다 이웃하지 않는 경우 $= 720 - 384 = 336$.
7단계: 확률 $= \frac{336}{720} = \frac{7}{15}$.
💡 '이웃하지 않는 조건'은 여사건(이웃하는 경우)을 포함배제 원리로 계산하는 것이 대개 더 편리하다. 덩어리 묶기 테크닉이 핵심이다.

📝 고3 수학 일반

총 40문제 · 문제와 정답·풀이 포함

Q81 수열의 극한과 급수

$\lim_{n \to \infty} \frac{3n^2 + 2n - 1}{n^2 + 4}$의 값은?

①) ① 0

②) ② 1

③) ③ 2

④) ④ 3

🎯 **정답: ④ 3**

📖 분자와 분모를 최고차항 n^2으로 나눈다. $\frac{3n^2 + 2n - 1}{n^2 + 4} = \frac{3 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{4}{n^2}}$. $n \to \infty$일 때 $\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2} \to 0$이므로 극한값은 $\frac{3 + 0 - 0}{1 + 0} = 3$이다.

💡 분자·분모의 차수가 같으면 극한은 최고차항 계수의 비와 같다.

Q82 초월함수의 미분

함수 $f(x) = e^x \sin x$에 대하여 $f'(0)$의 값은?

①) ① 0

②) ② 1

③) ③ e

④) ④ $2e$

🎯 **정답: ② 1**

📖 곱의 미분법을 적용한다. $f'(x) = (e^x)' \sin x + e^x (\sin x)' = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x (\sin x + \cos x)$. 따라서 $f'(0) = e^0 (\sin 0 + \cos 0) = 1 \cdot (0 + 1) = 1$이다.

💡 $e^x \sin x$ 형태는 감쇠 진동을 표현할 때 자주 등장한다.

Q83 평면·공간벡터

평면벡터 $\vec{a} = (3, 4)$와 방향이 같은 단위벡터를 구하시오.

①) ① $(3, 4)$

②) ② $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

③) ③ $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$

④) ④ $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right)$

🎯 **정답: ② $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$**

📖 벡터 $\vec{a}$의 크기를 구한다. $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$. 방향이 같은 단위벡터는 $\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} = \frac{1}{5}(3, 4) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$이다.

💡 3-4-5 직각삼각형의 변의 비는 단위벡터 문제에 자주 활용된다.

Q84 확률

어느 학급 학생 30명 중 남학생이 18명이고, 안경을 쓴 학생이 12명, 안경을 쓴 남학생이 8명이다. 이 학급에서 임의로 한 명을 뽑을 때, 그 학생이 남학생이라는 조건 아래에서 안경을 쓴 학생일 확률은?

①) ① $\frac{1}{3}$
②) ② $\frac{4}{9}$
③) ③ $\frac{1}{2}$
④) ④ $\frac{2}{3}$

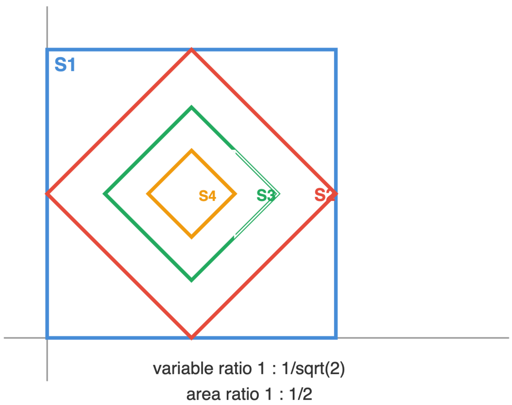
🎯 **정답:** ② $\frac{4}{9}$

📖 사건 A: 남학생, 사건 B: 안경 쓴 학생이라 하면, 표본공간이 남학생 18명으로 축소된다. $P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{8/30}{18/30} = \dfrac{8}{18} = \dfrac{4}{9}$이다.

💡 조건부확률은 새로운 정보가 주어졌을 때 표본공간이 줄어든 확률이다.

Q85 수열의 극한과 급수

한 변의 길이가 1인 정사각형을 S_1이라 하자. S_1의 네 변의 중점을 차례로 연결하여 만든 정사각형을 S_2라 하고, 같은 방법으로 $S_3, S_4, \cdots$ 를 만든다. 모든 정사각형 S_n의 넓이의 합 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?



①) ① 1
②) ② $\frac{3}{2}$
③) ③ 2
④) ④ 4

🎯 **정답:** ③ 2

📖 S_2의 한 변의 길이는 $\sqrt{(1/2)^2 + (1/2)^2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$이므로 넓이는 $\frac{1}{2}$이다. 같은 비율로 줄어들므로 S_n의 넓이는 첫째항 1, 공비 $\frac{1}{2}$인 등비수열이다. 무한등비급수의 합은 $\dfrac{1}{1 - 1/2} = 2$이다.

💡 정사각형의 중점을 연결할 때마다 넓이는 정확히 절반이 된다.

Q86 평면·공간벡터

공간벡터 $\vec{a} = (1, 2, 2)$, $\vec{b} = (2, -1, 2)$가 이루는 각을 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은?

①) ① $\frac{1}{3}$
②) ② $\frac{2}{9}$
③) ③ $\frac{4}{9}$
④) ④ $\frac{5}{9}$

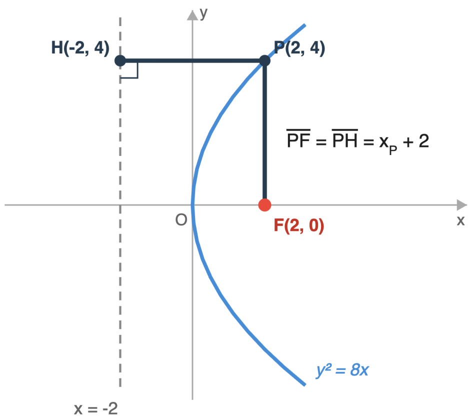
정답: ③ $\frac{4}{9}$

내적 공식 $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$를 이용한다. $\vec{a}\cdot\vec{b} = 1\cdot2 + 2\cdot(-1) + 2\cdot2 = 2 - 2 + 4 = 4$. $|\vec{a}| = \sqrt{1+4+4} = 3$, $|\vec{b}| = \sqrt{4+1+4} = 3$. 따라서 $\cos\theta = \frac{4}{3\cdot3} = \frac{4}{9}$이다.

공간벡터의 내적도 평면벡터와 같은 공식 $\sum a_i b_i$를 사용한다.

Q87 이차곡선

포물선 $y^2 = 8x$의 초점을 F라 할 때, 이 포물선 위의 점 $P(2, 4)$에 대하여 선분 $\overline{PF}$의 길이는?



①) ① 2
②) ② 3
③) ③ 4
④) ④ 5

정답: ③ 4

포물선 $y^2 = 4px$에서 $4p = 8$이므로 $p = 2$, 초점은 $F(2, 0)$, 준선은 $x = -2$이다. 포물선의 정의에 의해 포물선 위 임의의 점에서 초점까지의 거리는 그 점에서 준선까지의 거리와 같다. 점 $P(2, 4)$에서 준선 $x = -2$까지의 거리는 $2 - (-2) = 4$이므로 $\overline{PF} = 4$이다.

포물선 위의 점에서 초점까지 거리는 'x좌표 + p' 공식으로 즉시 구할 수 있다.

Q88 초월함수의 미분

매개변수로 나타낸 곡선 $x = \cos t$, $y = \sin t$ $(0 < t < \pi)$에서 $t = \frac{\pi}{4}$일 때 $\frac{dy}{dx}$의 값은?

①) ① $-\sqrt{2}$

②) ② -1

③) ③ 0

④) ④ 1

🎯 **정답: ② -1**

📖 매개변수 미분법에 의해 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$이다. $\frac{dx}{dt} = -\sin t$, $\frac{dy}{dt} = \cos t$이므로 $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\cot t$이다. $t = \frac{\pi}{4}$를 대입하면 $-\cot\frac{\pi}{4} = -1$이다.

💡 이 곡선은 단위원 위쪽 반원이며, $t = \pi/4$에서 접선의 기울기가 -1이라는 것은 기하적으로도 확인된다.

Q89 통계

정규분포 $N(m, 4^2)$을 따르는 모집단에서 크기 100인 표본을 임의추출하여 표본평균 $\overline{X} = 50$을 얻었다. 이 표본을 이용하여 구한 모평균 m에 대한 신뢰도 95% 신뢰구간의 길이는? (단, $P(|Z| \le 1.96) = 0.95$)

①) ① 0.784

②) ② 1.568

③) ③ 2.352

④) ④ 3.92

🎯 **정답: ② 1.568**

📖 신뢰도 95%에서 모평균의 신뢰구간은 $\overline{X} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{X} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$이고, 신뢰구간의 길이는 $2 \times 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$이다. $\sigma = 4$, $n = 100$이므로 길이는 $2 \times 1.96 \times \frac{4}{10} = 2 \times 1.96 \times 0.4 = 1.568$이다.

💡 신뢰구간의 길이는 표본 크기 n의 제곱근에 반비례한다.

Q90 초월함수의 미분

곡선 $x^2 + xy + y^2 = 7$ 위의 점 $(1, 2)$에서의 접선의 기울기는?

①) ① $-\frac{4}{5}$

②) ② $-\frac{3}{5}$

③) ③ $-\frac{2}{5}$

④) ④ $-\frac{1}{5}$

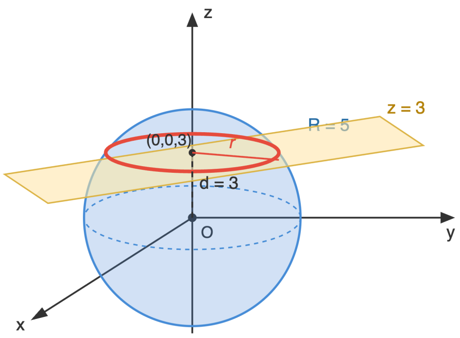
🎯 **정답: ① $-\frac{4}{5}$**

📖 음함수 미분을 양변에 적용한다. $\frac{d}{dx}(x^2 + xy + y^2) = 2x + y + x\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = 0$. 정리하면 $(x + 2y)\frac{dy}{dx} = -(2x + y)$, 즉 $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x + y}{x + 2y}$이다. 점 $(1, 2)$를 대입하면 $\frac{dy}{dx} = -\frac{2 \cdot 1 + 2}{1 + 2 \cdot 2} = -\frac{4}{5}$이다.

💡 $x^2 + xy + y^2 = c$ 형태의 곡선은 회전된 타원이다.

Q91 평면·공간벡터

공간에서 구 $x^2+y^2+z^2=25$와 평면 $z=3$이 만나서 생기는 원의 반지름은?



구 중심에서 평면까지 거리 d = 3
원의 반지름 r = √(R² - d²) = √(25 - 9) = 4

①) ① 2
②) ② 3
③) ③ 4
④) ④ $\sqrt{34}$

🎯 **정답:** ③ 4

📖 구의 중심은 원점 $O(0,0,0)$이고 반지름은 $R=5$이다. 평면 $z=3$과 원점 사이의 거리는 $d=3$이다. 구와 평면이 만나서 생기는 원의 반지름 r은 피타고라스 정리에 의해 $r=\sqrt{R^2-d^2} = \sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4$이다.

💡 구의 단면은 항상 원이며, 중심을 지나는 단면(대원)일 때 반지름이 가장 크다.

Q92 순열·조합 + 이항정리

$\left(2x-\frac{1}{x^2}\right)^6$의 전개식에서 상수항은?

①) ① 60
②) ② 120
③) ③ 240
④) ④ 480

🎯 **정답:** ③ 240

📖 이항정리에 의해 일반항은 ${}_6C_r(2x)^{6-r}\left(-\frac{1}{x^2}\right)^r = {}_6C_r\cdot2^{6-r}\cdot(-1)^r\cdot x^{6-r}\cdot x^{-2r} = {}_6C_r\cdot2^{6-r}\cdot(-1)^r\cdot x^{6-3r}$이다. 상수항이 되려면 x의 지수가 0이어야 하므로 $6-3r=0$, 즉 $r=2$이다. 상수항 $= {}_6C_2\cdot2^4\cdot(-1)^2 = 15\cdot16\cdot1 = 240$이다.

💡 이항전개의 일반항에서 특정 차수의 항을 찾는 것은 수능의 단골 유형이다.

Q93 초월함수의 미분

함수 $f(x) = \ln(x^2+1)$에 대하여 $f'(2)$의 값은?

①) ① $\frac{2}{5}$

②) ② $\frac{3}{5}$

③) ③ $\frac{4}{5}$

④) ④ 1

🎯 **정답: ③**

📖 1단계: 합성함수 미분법을 적용한다. $\ln(g(x))$의 도함수는 $\frac{g'(x)}{g(x)}$이다.

2단계: $g(x) = x^2 + 1$이므로 $g'(x) = 2x$.

3단계: 따라서 $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$.

4단계: $x = 2$ 대입: $f'(2) = \frac{4}{4+1} = \frac{4}{5}$.

💡 $\ln(g(x))$의 미분에서 분자에는 항상 안쪽 함수의 도함수가 나타나는데, 이를 '로그미분의 사슬법칙'이라 부른다.

Q94 순열·조합 심화 + 이항정리

서로 다른 3종류의 사탕을 합하여 5개 구입하는 방법의 수는? (단, 같은 종류의 사탕은 서로 구별하지 않으며, 사지 않는 종류가 있어도 된다.)

①) ① 15

②) ② 21

③) ③ 35

④) ④ 56

🎯 **정답: ②**

📖 1단계: 서로 다른 3종류에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 중복조합 문제이다.

2단계: ${}_3H_5 = {}_{3+5-1}C_5 = {}_7C_5 = {}_7C_2$.

3단계: ${}_7C_2 = \frac{7\times 6}{2\times 1} = 21$.

💡 중복조합 ${}_nH_r$은 'n개의 서로 다른 칸에 똑같은 공 r개를 나누어 넣는 방법의 수'와 같다.

Q95 초월함수의 적분

$\int_0^1 xe^x\,dx$의 값은?

①) ① $e-1$

②) ② 1

③) ③ e

④) ④ $2e-1$

🎯 **정답: ②**

📖 1단계: 부분적분법을 사용한다. $u = x$, $dv = e^x\,dx$로 놓으면 $du = dx$, $v = e^x$.

2단계: $\int_0^1 xe^x\,dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx$.

3단계: $[xe^x]_0^1 = 1\cdot e - 0 = e$.

4단계: $\int_0^1 e^x\,dx = e - 1$.

5단계: 따라서 $e - (e-1) = 1$.

💡 LIATE 규칙(Log, Inverse trig, Algebraic, Trig, Exponential)에 따라 u를 정하면 부분적분이 깔끔하게 풀린다.

Q96 확률

흰 공 4개와 검은 공 6개가 들어 있는 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 흰 공이 적어도 한 개 포함될 확률은?

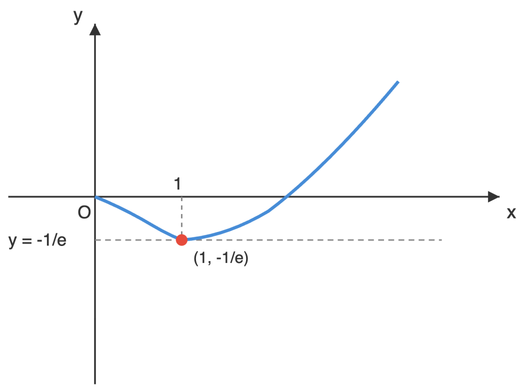
①) ① $\frac{1}{2}$
②) ② $\frac{2}{3}$
③) ③ $\frac{5}{6}$
④) ④ $\frac{11}{12}$

정답: ③

1단계: '적어도 하나'는 여사건 '모두 검은 공'을 이용한다.
2단계: 전체 경우의 수: ${}_{10}C_3 = 120$.
3단계: 모두 검은 공인 경우: ${}_{6}C_3 = 20$.
4단계: $P(\text{모두 검정}) = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$.
5단계: $P(\text{흰 공 적어도 1개}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.
여사건의 확률은 직접 세는 것보다 훨씬 빠를 때가 많다. '적어도'라는 표현이 보이면 여사건을 먼저 의심하라.

Q97 미적분 활용

함수 $f(x) = \int_0^x (t-1)e^{-t}\,dt$의 극솟값은?



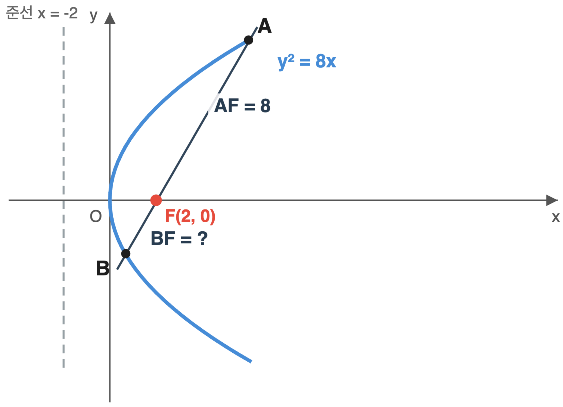
①) ① $-\frac{2}{e}$
②) ② $-\frac{1}{e}$
③) ③ $\frac{1}{e} - 1$
④) ④ -1

정답: ②

1단계: 미적분의 기본정리에 의해 $f'(x) = (x-1)e^{-x}$.
2단계: $e^{-x} > 0$이므로 $f'(x) = 0$이려면 $x = 1$. 부호는 $x < 1$에서 음, $x > 1$에서 양 $\to$ $x = 1$에서 극소.
3단계: $f(1) = \int_0^1 (t-1)e^{-t}\,dt$를 부분적분으로 계산. $u = t-1,\ dv = e^{-t}dt \to du = dt,\ v = -e^{-t}$.
4단계: $f(1) = [-(t-1)e^{-t}]_0^1 + \int_0^1 e^{-t}\,dt = (0-(-1)\cdot 1)\cdot(-1)$ ... 정리: $[-(t-1)e^{-t}]_0^1 = 0-(-1)(1) = -1$. 그리고 $\int_0^1 e^{-t}dt = 1 - \frac{1}{e}$.
5단계: $f(1) = -1 + \left(1 - \frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$.
적분으로 정의된 함수의 극값을 구할 때는 도함수 부호 분석으로 극점을 먼저 찾고, 그 점에서 적분값을 부분적분으로 계산하는 두 단계 풀이가 표준이다.

Q98 이차곡선

포물선 $y^2 = 8x$의 초점을 F라 하자. 초점을 지나는 직선이 포물선과 서로 다른 두 점 A, B에서 만나고 $\overline{AF} = 8$일 때, $\overline{BF}$의 값은?



①) ① $\frac{4}{3}$
②) ② 2
③) ③ $\frac{8}{3}$
④) ④ 4

🎯 **정답: ③**

📖 1단계: $y^2 = 4px$에서 $4p = 8$이므로 $p = 2$. 초점 $F(2, 0)$, 준선 $x = -2$.

2단계: 포물선 위 점에서 초점까지 거리는 준선까지 거리와 같다. 초점을 지나는 현의 두 점에 대해 다음 공식이 성립한다: $\frac{1}{\overline{AF}} + \frac{1}{\overline{BF}} = \frac{1}{p}$.

3단계: $\frac{1}{8} + \frac{1}{\overline{BF}} = \frac{1}{2}$.

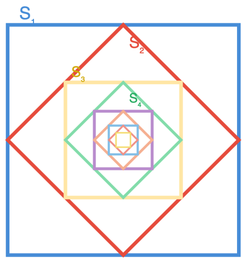
4단계: $\frac{1}{\overline{BF}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$.

5단계: $\overline{BF} = \frac{8}{3}$.

💡 이 공식은 포물선의 매개변수 표현 $(pt^2, 2pt)$에서 초점현 조건 $t_1t_2 = -1$로부터 유도된다. 통경(latus rectum)은 양 끝의 거리가 같은 $4p$가 된다.

Q99 수열의 극한과 급수

한 변의 길이가 4인 정사각형 S_1의 각 변의 중점을 차례로 이어 만든 정사각형을 S_2라 하고, 같은 방법으로 S_2로부터 S_3, S_3로부터 S_4, … 를 만든다. 정사각형 S_n의 넓이를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 값은?



a_n = 정사각형
S_n의 넓이

①) ① 24
②) ② 32
③) ③ 48
④) ④ 64

🎯 **정답: ②**

📖 1단계: S_1의 한 변이 4이므로 $a_1 = 16$.

2단계: 정사각형의 각 변의 중점을 이으면, 새 정사각형의 한 변은 원래의 $\frac{\sqrt{2}}{2}$배가 된다.

3단계: 따라서 넓이는 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$배. 즉 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}$ (공비 $r = \frac{1}{2}$).

4단계: 무한등비급수의 합 공식: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-r} = \frac{16}{1-\frac{1}{2}} = 32$.

💡 이렇게 만들어지는 정사각형들은 매번 $45°$씩 회전하며 닮음비 $\frac{\sqrt{2}}{2}$로 줄어든다. 외부 정사각형과 내부 정사각형의 면적비가 정확히 $2:1$인 점은 피타고라스 정리의 시각적 증명에도 활용된다.

Q100 순열·조합 심화 + 이항정리

같은 종류의 사탕 7개를 서로 다른 3개의 바구니 A, B, C 에 남김없이 나누어 담는 방법의 수를 구하시오. (단, 빈 바구니가 있어도 된다.)

①) ① 28
②) ② 36
③) ③ 45
④) ④ 84

🎯 **정답:** ② 36

📖 같은 것을 서로 다른 곳에 분배하는 문제이므로 중복조합을 이용한다.

3개의 바구니에서 7번 중복하여 뽑는 경우의 수와 같다.

$${}_3H_7 = {}_{3+7-1}C_7 = {}_9C_7 = {}_9C_2$$

$$= \frac{9 \cdot 8}{2 \cdot 1} = 36$$

따라서 정답은 36 가지.

💡 중복조합 ${}_nH_r$ 은 r개의 사탕과 $(n-1)$개의 칸막이를 한 줄로 배열하는 방법의 수와 같다. (칸막이 방법)

Q101 초월함수의 적분

$\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos x\, dx$의 값을 구하시오.

①) ① 0
②) ② $\frac{1}{2}$
③) ③ 1
④) ④ $\frac{\pi}{2}$

🎯 **정답:** ③ 1

📖 $\cos x$의 부정적분은 $\sin x$이므로 $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos x\, dx = [\sin x]_0^{\pi/2} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1$이다.

💡 $\sin x$와 $\cos x$는 미분과 적분에서 서로 짝을 이루며 부호와 함께 순환한다.

Q102 초월함수의 미분

함수 $f(x) = e^{2x}$에 대하여 $f'(0)$의 값을 구하시오.

①) ① 0
②) ② 1
③) ③ 2
④) ④ e^2

🎯 **정답:** ③ 2

📖 합성함수의 미분법에 의해 $f'(x) = e^{2x} \cdot (2x)' = 2e^{2x}$이다. 따라서 $f'(0) = 2 \cdot e^0 = 2 \cdot 1 = 2$이다.

💡 $y = e^{kx}$의 도함수는 $y' = ke^{kx}$로 자기 자신에 상수배만 곱해지는 특이한 성질을 갖는다.

Q103 확률

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 두 눈의 수의 합이 7일 확률을 구하시오.

①) ① $\frac{1}{12}$
②) ② $\frac{1}{9}$
③) ③ $\frac{1}{6}$
④) ④ $\frac{1}{4}$

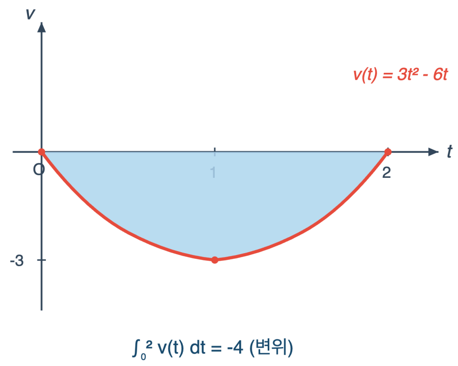
🎯 **정답:** ③ $\frac{1}{6}$

📖 전체 경우의 수는 $6 \times 6 = 36$가지이다. 합이 7이 되는 경우는 $(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)$의 6가지이므로 구하는 확률은 $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$이다.

💡 주사위 두 개의 합 중 가장 자주 나오는 값이 7이며, 합이 2나 12가 될 확률은 각각 $\frac{1}{36}$로 가장 작다.

Q104 미적분 활용

수직선 위를 움직이는 점 P가 시각 t에서의 속도가 $v(t) = 3t^2 - 6t$이다. 시각 $t = 0$에서 점 P가 원점에 있었을 때, 시각 $t = 2$에서의 점 P의 위치를 구하시오.



①) ① -4
②) ② -2
③) ③ 0
④) ④ 4

🎯 **정답:** ① -4

📖 위치는 속도의 적분이므로 $x(2) - x(0) = \int_0^2 (3t^2 - 6t)\,dt = [t^3 - 3t^2]_0^2 = (8 - 12) - 0 = -4$이다. $x(0) = 0$이므로 $x(2) = -4$이다.

💡 수직선 운동에서 변위는 속도의 정적분이지만, 이동거리는 속도의 절댓값을 적분해야 구할 수 있다.

Q105 통계

확률변수 X가 정규분포 $N(50, 10^2)$을 따를 때, $P(X \le 60)$의 값은? (단, $P(0 \le Z \le 1) = 0.3413$)

①) ① 0.3413

②) ② 0.6587

③) ③ 0.8413

④) ④ 0.9772

🎯 **정답:** ③ 0.8413

📖 $Z = \dfrac{X - 50}{10}$로 표준화하면 $X = 60$일 때 $Z = 1$이다. 따라서
$P(X \le 60) = P(Z \le 1) = P(Z \le 0) + P(0 \le Z \le 1) = 0.5 + 0.3413 = 0.8413$이다.

💡 정규분포에서 평균으로부터 $\pm 1\sigma$ 이내의 확률은 약 68.26%, $\pm 2\sigma$ 이내는 약 95.44%이다.

Q106 순열·조합 심화 + 이항정리

서로 다른 6명을 원형 탁자에 둘러앉히려 한다. 특정한 두 사람 A, B가 서로 이웃하여 앉는 경우의 수를 구하시오.

①) ① 24

②) ② 48

③) ③ 72

④) ④ 120

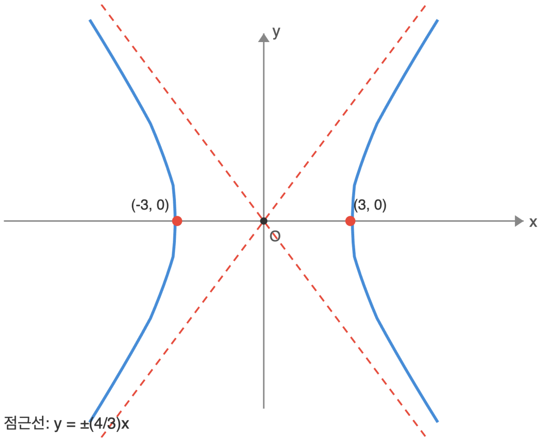
🎯 **정답:** ② 48

📖 A, B를 한 묶음으로 보면 묶음을 포함한 5개 대상의 원순열이므로 $(5-1)! = 4! = 24$가지이다. 묶음 내부에서 A, B가 자리를 바꾸는 경우는 $2! = 2$가지이므로 총 $24 \times 2 = 48$가지이다.

💡 원순열에서는 회전하여 같은 배열을 한 가지로 세므로 일렬 배열보다 정확히 n배 적은 $(n-1)!$가지가 된다.

Q107 이차곡선

쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$의 두 점근선의 방정식은?



①) ① $y = \pm\frac{3}{4}x$

②) ② $y = \pm\frac{4}{3}x$

③) ③ $y = \pm\frac{9}{16}x$

④) ④ $y = \pm\frac{16}{9}x$

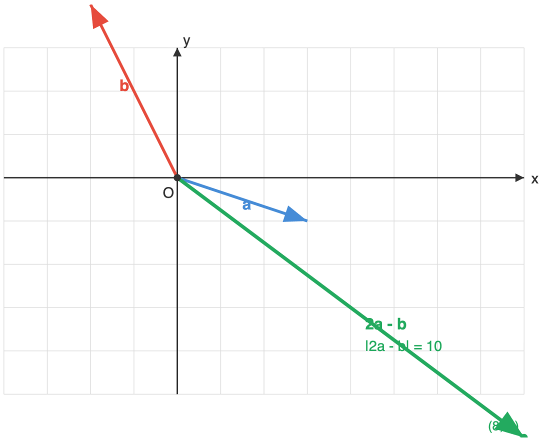
🎯 **정답:** ② $y = \pm\frac{4}{3}x$

📖 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$의 점근선은 $y = \pm\frac{b}{a}x$이다. 주어진 식에서 $a^2 = 9, b^2 = 16$이므로 $a = 3, b = 4$. 따라서 점근선은 $y = \pm\frac{4}{3}x$이다.

💡 쌍곡선은 무한히 멀어질수록 점근선에 한없이 가까워지지만 결코 점근선과 만나지는 않는다.

Q108 평면·공간벡터

두 평면벡터 $\vec{a} = (3, -1), \vec{b} = (-2, 4)$에 대하여 $|2\vec{a} - \vec{b}|$의 값을 구하시오.



①) ① 5

②) ② $\sqrt{50}$

③) ③ 10

④) ④ $5\sqrt{5}$

🎯 **정답:** ③ 10

📖 $2\vec{a} = (6, -2)$이므로 $2\vec{a} - \vec{b} = (6, -2) - (-2, 4) = (8, -6)$이다. 따라서
$|2\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$이다.

💡 평면벡터의 크기는 성분의 제곱합의 제곱근으로, 본질적으로 피타고라스 정리의 일반화이다.

Q109 통계

어느 모집단이 정규분포 $N(50, 8^2)$을 따른다. 이 모집단에서 크기 16인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$가 $48 \leq \overline{X} \leq 53$일 확률을 구하시오. (단, $P(0 \leq Z \leq 1) = 0.3413$, $P(0 \leq Z \leq 1.5) = 0.4332$)

①) ① 0.3413

②) ② 0.4332

③) ③ 0.7745

④) ④ 0.9544

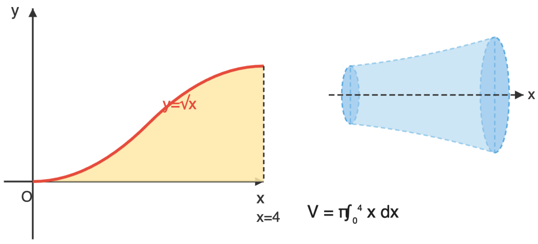
🎯 **정답:** ③ 0.7745

📖 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(50, \left(\frac{8}{\sqrt{16}}\right)^2\right) = N(50, 2^2)$을 따른다. $Z = \frac{\overline{X} - 50}{2}$로 표준화하면 $\overline{X} = 48$일 때 $Z = -1$, $\overline{X} = 53$일 때 $Z = 1.5$이다. 따라서 $P(48 \leq \overline{X} \leq 53) = P(-1 \leq Z \leq 1.5) = P(0 \leq Z \leq 1) + P(0 \leq Z \leq 1.5) = 0.3413 + 0.4332 = 0.7745$이다.

💡 표본평균 $\overline{X}$의 표준편차는 모표준편차를 표본크기의 제곱근으로 나눈 값으로, 표본이 클수록 분포가 좁아진다.

Q110 미적분 활용

곡선 $y = \sqrt{x}$ 와 x축 및 직선 $x = 4$로 둘러싸인 영역을 x축의 둘레로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피를 구하시오.



①) ① 4π

②) ② 6π

③) ③ 8π

④) ④ 16π

🎯 **정답:** ③ 8π

📖 x축 둘레로 회전한 회전체의 부피는 $V = \pi \int_0^4 y^2\,dx = \pi \int_0^4 (\sqrt{x}\,)^2\,dx = \pi \int_0^4 x\,dx = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = \pi \cdot \frac{16}{2} = 8\pi$이다.

💡 $y = \sqrt{x}$ 를 x축 주위로 회전시킨 입체는 옆으로 누운 포물면 모양이며, 같은 영역을 y축 둘레로 회전시키면 부피가 다르게 나온다.

Q111 순열·조합 심화 + 이항정리

$\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)^9$의 전개식에서 x^6의 계수를 구하시오.

①) ① 672

②) ② 1008

③) ③ 2016

④) ④ 4032

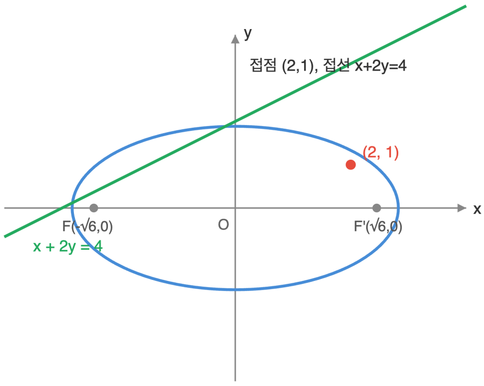
🎯 **정답:** ③ 2016

📖 일반항은 ${}_9C_k(x^2)^{9-k}\left(\frac{2}{x}\right)^k = {}_9C_k \cdot 2^k \cdot x^{18-2k-k} = {}_9C_k \cdot 2^k \cdot x^{18-3k}$이다. x^6이 되려면 $18 - 3k = 6$이므로 $k = 4$이다. 따라서 계수는 ${}_9C_4 \cdot 2^4 = 126 \cdot 16 = 2016$이다.

💡 $\left(x^a + \frac{c}{x^b}\right)^n$ 형태의 전개에서 특정 차수의 계수를 찾을 때는 일반항의 지수를 정수 방정식으로 풀면 된다.

Q112 이차곡선

타원 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$ 위의 점 $(2, 1)$에서의 접선의 방정식을 구하시오.



①) ① $x + y = 3$

②) ② $x + 2y = 4$

③) ③ $2x + y = 5$

④) ④ $x + 2y = 6$

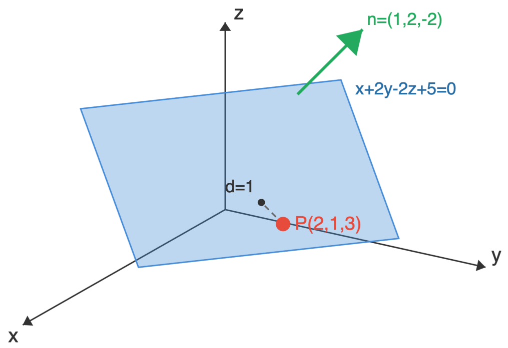
🎯 **정답:** ② $x + 2y = 4$

📖 점 $(2, 1)$이 타원 위에 있는지 확인: $\frac{4}{8} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$로 성립한다. 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선은 $\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$이다. 따라서 접선은 $\frac{2x}{8} + \frac{1 \cdot y}{2} = 1$, 즉 $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1$이고, 양변에 4를 곱하면 $x + 2y = 4$이다.

💡 타원 위의 한 점에서의 접선은 그 점에서 두 초점으로 향하는 두 선분이 이루는 각을 이등분하는 외각 방향이다.

Q113 평면·공간벡터

공간 좌표에서 점 $P(2, 1, 3)$과 평면 $x + 2y - 2z + 5 = 0$ 사이의 거리를 구하시오.



①) ① $\frac{1}{3}$
②) ② $\frac{2}{3}$
③) ③ 1
④) ④ $\frac{4}{3}$

🎯 **정답: ③ 1**

📖 점 (x_0, y_0, z_0)에서 평면 $ax + by + cz + d = 0$까지의 거리는 $\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$이다. 여기서 $a = 1, b = 2, c = -2, d = 5$이고 $(x_0, y_0, z_0) = (2, 1, 3)$이므로 거리는 $\frac{|1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + (-2) \cdot 3 + 5|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{|2 + 2 - 6 + 5|}{\sqrt{9}} = \frac{3}{3} = 1$이다.

💡 공간에서 점-평면 거리 공식은 평면의 법선벡터 방향으로 점을 정사영한 길이로 해석할 수 있다.

Q114 순열·조합 심화 + 이항정리

서로 다른 6명의 학생을 원형 식탁에 둘러앉히는 방법의 수는?

①) ① 24
②) ② 60
③) ③ 120
④) ④ 720

🎯 **정답: ③**

📖 서로 다른 n명을 원형으로 배열하는 원순열의 수는 $(n-1)!$이다. 한 사람을 기준으로 고정하고 나머지를 일렬로 세우는 것과 같기 때문이다. 따라서 $(6-1)! = 5! = 120$이다.

💡 원순열에서 회전이 같은 배치를 한 가지로 보기 때문에 일렬 순열 $n!$을 n으로 나눈 $(n-1)!$이 된다. 만약 좌우 대칭(뒤집기)까지 같다고 보면 염주순열 $\frac{(n-1)!}{2}$이 된다.

Q115 초월함수의 적분

정적분 $\int_0^{\ln 3} e^{2x}\,dx$의 값은?

①) ① 2

②) ② 4

③) ③ $\frac{9}{2}$

④) ④ 8

🎯 **정답: ②**

📖 $\int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C$이므로 $\int_0^{\ln 3} e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}[e^{2x}]_0^{\ln 3} = \frac{1}{2}(e^{2\ln 3} - e^0) = \frac{1}{2}(e^{\ln 9} - 1) = \frac{1}{2}(9-1) = 4$이다. 핵심은 $e^{\ln a} = a$, $e^{2\ln a} = a^2$이라는 지수와 로그의 관계이다.

💡 $e^{2\ln 3}$를 9로 바꾸는 단계는 로그의 지수 성질 $a\ln b = \ln b^a$와 e와 $\ln$이 서로 역함수라는 사실에서 따라온다.

Q116 수열의 극한과 급수

무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{6^n}$의 합은?

①) ① $\frac{1}{2}$

②) ② 1

③) ③ $\frac{3}{2}$

④) ④ 2

🎯 **정답: ③**

📖 $\frac{3^n + 2^n}{6^n} = \frac{3^n}{6^n} + \frac{2^n}{6^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n$로 분리한다. 두 등비급수 모두 공비의 절댓값이 1보다 작아 수렴한다. 등비급수 합 공식 $\frac{a}{1-r}$에 의해 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1/2}{1-1/2} = 1$, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1/3}{1-1/3} = \frac{1}{2}$. 따라서 합은 $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

💡 두 수렴급수의 합은 각 합의 합이라는 분리 성질은 매우 강력해서 복잡해 보이는 급수도 단순한 등비급수로 쪼개면 쉽게 풀린다.

Q117 미적분 활용

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 위치가 $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t + 1$이다. $t = 0$부터 $t = 4$까지 점 P가 움직인 거리는?

①) ① 4

②) ② 8

③) ③ 12

④) ④ 16

🎯 **정답: ③**

📖 속도 $v(t) = x'(t) = 3t^2 - 12t + 9 = 3(t-1)(t-3)$이다. $0 \leq t < 1$에서 $v > 0$, $1 < t < 3$에서 $v < 0$, $3 < t \leq 4$에서 $v > 0$이므로 점 P는 $t = 1$, $t = 3$에서 운동 방향을 바꾼다. 위치는 $x(0) = 1, x(1) = 5, x(3) = 1, x(4) = 5$이다. 움직인 거리는 각 구간 변위의 절댓값의 합 $|5-1| + |1-5| + |5-1| = 4+4+4 = 12$이다. 변위 $x(4) - x(0) = 4$와는 다르다는 점에 유의해야 한다.

💡 움직인 거리는 속도의 절댓값을 시간으로 적분한 것 $\int_0^4 |v(t)|dt$와 같다. 단순히 $x(4) - x(0)$를 구하면 되돌아온 거리는 상쇄되어 변위만 나온다.

Q118 통계

확률변수 X가 정규분포 $N(60,\ 8^2)$을 따를 때 $P(52 \le X \le 76)$의 값은? (단, $P(0 \le Z \le 1) = 0.3413$, $P(0 \le Z \le 2) = 0.4772$이다.)

①) ① 0.6826
②) ② 0.7745
③) ③ 0.8185
④) ④ 0.9544

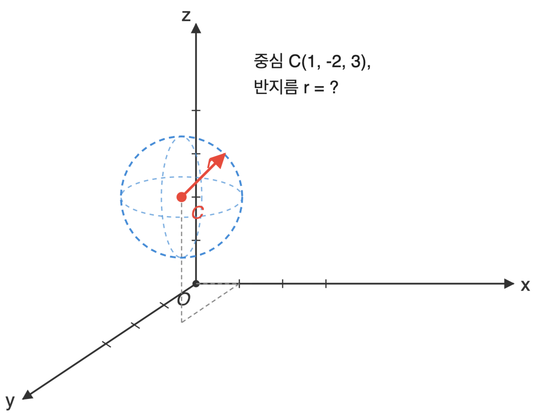
정답: ③

$Z = \dfrac{X - 60}{8}$로 표준화한다. $X = 52$이면 $Z = \dfrac{52 - 60}{8} = -1$, $X = 76$이면 $Z = \dfrac{76 - 60}{8} = 2$이다. 따라서 $P(52 \le X \le 76) = P(-1 \le Z \le 2) = P(-1 \le Z \le 0) + P(0 \le Z \le 2) = P(0 \le Z \le 1) + P(0 \le Z \le 2) = 0.3413 + 0.4772 = 0.8185$이다. (정규분포의 좌우 대칭 성질을 이용했다.)

표준정규분포 곡선은 $Z = 0$ 기준 좌우 대칭이라서 $P(-a \le Z \le 0) = P(0 \le Z \le a)$가 항상 성립한다. 비대칭 구간 확률은 양쪽을 따로 구한 뒤 더하면 된다.

Q119 평면·공간벡터

공간에서 방정식 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 5 = 0$이 나타내는 구의 반지름의 길이는?



①) ① 1
②) ② 2
③) ③ 3
④) ④ 4

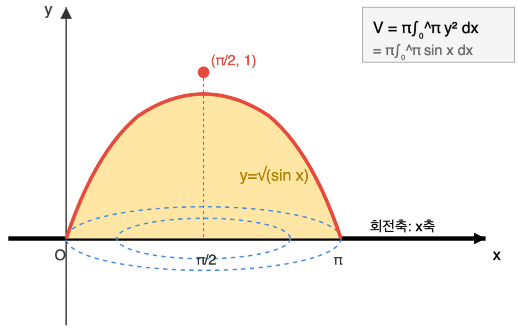
정답: ③

x, y, z 항을 각각 완전제곱한다. $x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$, $y^2 + 4y = (y+2)^2 - 4$, $z^2 - 6z = (z-3)^2 - 9$. 대입하면 $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 - 1 - 4 - 9 + 5 = 0$, 즉 $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9$이다. 따라서 중심은 $(1, -2, 3)$, 반지름은 $r = \sqrt{9} = 3$이다.

일반형 $x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$이 구를 나타내려면 $\dfrac{A^2 + B^2 + C^2}{4} - D > 0$이어야 한다. 그렇지 않으면 한 점이거나 공집합이 된다.

Q120 미적분 활용

곡선 $y = \sqrt{\sin x}$ $(0 \le x \le \pi)$와 x축으로 둘러싸인 부분을 x축의 둘레로 회전시켜 얻은 회전체의 부피는?



①) ① π

②) ② 2π

③) ③ π^2

④) ④ 4π

🎯 **정답: ②**

📖 회전체 부피 공식에 의해 $V = \pi \int_0^\pi y^2\,dx = \pi \int_0^\pi (\sqrt{\sin x}\,)^2\,dx = \pi \int_0^\pi \sin x\,dx.$ $\int \sin x\,dx = -\cos x$이므로 $\pi[-\cos x]_0^\pi = \pi(-\cos\pi + \cos 0) = \pi(1+1) = 2\pi$이다. 핵심은 제곱근이 들어간 함수의 제곱이 깔끔히 사라지면서 $\sin x$의 적분 문제로 환원된다는 점이다.

💡 $y = \sqrt{\sin x}$ 를 x축으로 회전시킨 입체는 한쪽이 부풀고 양 끝이 뾰족한 럭비공 모양으로, 부피가 정확히 2π인 우아한 결과이다.

📝 고3 수학 일반

총 40문제 · 문제와 정답·풀이 포함

Q121 확률

상자 A에는 빨간 공 3개와 흰 공 2개가, 상자 B에는 빨간 공 1개와 흰 공 4개가 들어 있다. 두 상자 중 하나를 임의로 선택하여 공을 한 개 꺼냈더니 빨간 공이었다. 이 빨간 공이 상자 A에서 나왔을 확률은?

①) ① $\frac{1}{2}$
②) ② $\frac{3}{5}$
③) ③ $\frac{2}{3}$
④) ④ $\frac{3}{4}$

🎯 **정답: ④**

📖 상자 A를 고르는 사건을 A, 빨간 공이 나오는 사건을 R이라 하자. $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$이고 $P(R \mid A) = \frac{3}{5}$, $P(R \mid B) = \frac{1}{5}$이다. 전체 빨간 공이 나올 확률은 $P(R) = P(A)P(R \mid A) + P(B)P(R \mid B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{10} + \frac{1}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$. 구하는 사후확률은 $P(A \mid R) = \frac{P(A \cap R)}{P(R)} = \frac{3/10}{4/10} = \frac{3}{4}$이다.

💡 이런 형태의 확률 갱신 사고를 베이즈 추론이라 하며, 의료 진단·스팸 필터·기계학습의 확률 모델에 폭넓게 쓰인다. 새로운 증거(빨간 공)가 사전 믿음(상자 선택 확률)을 어떻게 바꾸는지를 정량화하는 것이다.

Q122 초월함수의 적분

$\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx$의 값은?

①) ① 0
②) ② $\frac{1}{2}$
③) ③ 1
④) ④ 2

🎯 **정답: ③ 1**

📖 $\cos x$의 부정적분은 $\sin x$이다.
$\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx = [\sin x]_0^{\pi/2} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1$

💡 삼각함수 적분에서 $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$, $\int \cos x \, dx = \sin x + C$로 부호가 짝을 이룬다.

Q123 수열의 극한과 급수

$\lim_{n \to \infty} \frac{3n^2 - n + 1}{n^2 + 2n}$의 값은?

①) ① 0
②) ② 1
③) ③ 3
④) ④ ∞

🎯 **정답: ③ 3**

📖 분자, 분모를 n^2으로 나눈다.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{3n^2 - n + 1}{n^2 + 2n} = \lim_{n \to \infty} \frac{3 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{2}{n}} = \frac{3}{1} = 3$$

💡 유리식 수열의 극한은 분자, 분모의 차수가 같으면 최고차항 계수의 비로 결정된다.

Q124 초월함수의 미분

함수 $y = \ln(x^2+1)$의 도함수 $\dfrac{dy}{dx}$는?

①) ① $\dfrac{1}{x^2+1}$
②) ② $\dfrac{2x}{x^2+1}$
③) ③ $\dfrac{2}{x^2+1}$
④) ④ $\dfrac{2x}{\ln(x^2+1)}$

🎯 **정답: ② $\dfrac{2x}{x^2+1}$**

📖 합성함수 미분(연쇄법칙)을 이용한다.

$u = x^2 + 1$로 놓으면 $y = \ln u$.

$\dfrac{dy}{du} = \dfrac{1}{u}$, $\dfrac{du}{dx} = 2x$.

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{u} \cdot 2x = \dfrac{2x}{x^2+1}$

💡 $y = \ln f(x)$의 도함수는 일반적으로 $y' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$이며, 이는 로그미분법의 기초가 된다.

Q125 통계

이항분포 $B\left(100, \dfrac{1}{5}\right)$를 따르는 확률변수 X의 표준편차 $\sigma(X)$의 값은?

①) ① 2
②) ② 4
③) ③ 16
④) ④ 20

🎯 **정답: ② 4**

📖 이항분포 $B(n, p)$의 분산은 $V(X) = npq$ (단, $q = 1 - p$).

$n = 100, p = \dfrac{1}{5}, q = \dfrac{4}{5}$이므로

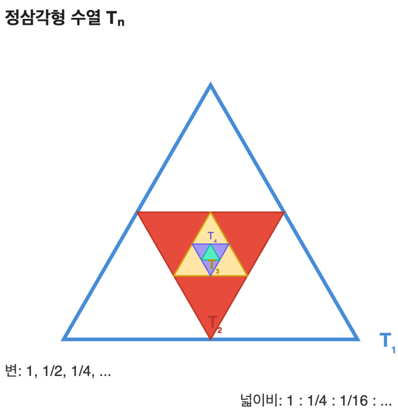
$V(X) = 100 \cdot \dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{4}{5} = 16$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{16} = 4$

💡 n이 충분히 크면 이항분포 $B(n, p)$는 정규분포 $N(np, npq)$로 근사된다(드 무아브르-라플라스 정리).

Q126 수열의 극한과 급수

한 변의 길이가 1인 정삼각형 T_1의 세 변의 중점을 이어 정삼각형 T_2를, 같은 방법으로 T_2 안에 T_3을, ... 이와 같이 T_n을 정의한다. 모든 정삼각형 $T_1, T_2, T_3,$ ... 의 넓이의 총합은?



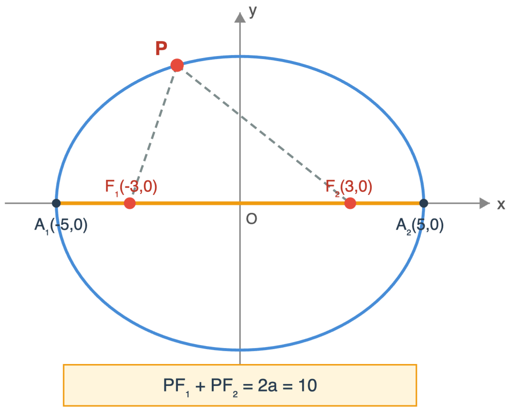
①) ① $\frac{\sqrt{3}}{3}$
②) ② $\frac{\sqrt{3}}{2}$
③) ③ $\frac{\sqrt{3}}{6}$
④) ④ $\sqrt{3}$

🎯 **정답:** ① $\frac{\sqrt{3}}{3}$

📖 한 변의 길이가 1인 정삼각형의 넓이는 $a_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}$.
중점을 이으면 닮음비 $\frac{1}{2}$, 넓이비 $\frac{1}{4}$이므로 공비 $r = \frac{1}{4}$인 등비수열.
$|r| = \frac{1}{4} < 1$이므로 무한등비급수의 합:
$S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\sqrt{3}/4}{1-1/4} = \frac{\sqrt{3}/4}{3/4} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
💡 도형이 무한히 작아져도 넓이의 합은 유한할 수 있다. 이것이 무한등비급수가 가진 흥미로운 성질이다.

Q127 이차곡선

타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 위의 한 점 P와 두 초점 F_1, F_2에 대하여 $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}$의 값은?



①) ① 8

②) ② 10

③) ③ 12

④) ④ 16

🎯 **정답: ② 10**

📖 타원의 정의: 타원 위의 임의의 점에서 두 초점까지 거리의 합은 일정하며, 그 값은 장축의 길이 $2a$이다.

주어진 타원에서 $a^2=25$이므로 $a=5$.

$\therefore \overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a=10$

💡 행성이 태양 주위를 도는 궤도는 타원이다(케플러 제1법칙). 태양은 두 초점 중 하나에 위치한다.

Q128 순열·조합 심화 + 이항정리

문자 BANANA의 6개 문자를 일렬로 모두 나열하는 방법의 수는?

①) ① 30

②) ② 60

③) ③ 90

④) ④ 120

🎯 **정답: ② 60**

📖 BANANA는 B 1개, A 3개, N 2개로 이루어져 있다.

같은 것이 있는 순열의 공식:

$$\frac{n!}{p!\,q!\,r!\,\cdots}$$

$$\frac{6!}{1!\cdot 3!\cdot 2!}=\frac{720}{12}=60$$

💡 같은 것이 있는 순열은 다항계수 $\binom{n}{p,q,r}$로도 표현되며, 이항정리의 일반화인 다항정리의 핵심 계수이다.

Q129 미적분 활용

곡선 $y = e^{-x^2}$의 두 변곡점의 x좌표는?

①) ① ± 1

②) ② $\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

③) ③ $\pm\sqrt{2}$

④) ④ ± 2

🎯 **정답:** ② $\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

📖 두 번 미분하여 $y'' = 0$이 되는 점을 찾고 부호 변화를 확인한다.

$y' = -2xe^{-x^2}$

$y'' = (-2)e^{-x^2} + (-2x)(-2x)e^{-x^2} = e^{-x^2}(4x^2 - 2)$

$y'' = 0 \;\Leftrightarrow\; 4x^2 - 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 = \dfrac{1}{2}$

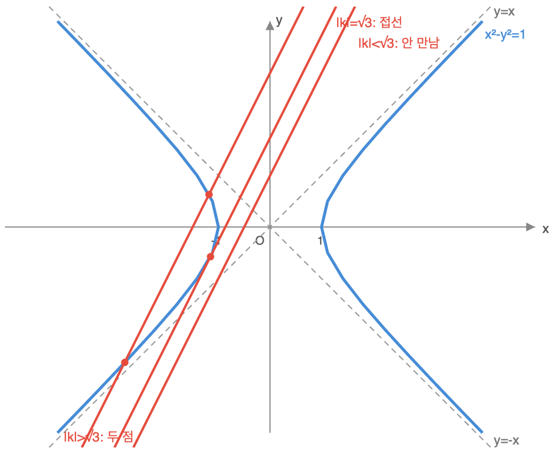
$\therefore x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

이 점들에서 y''의 부호가 바뀌므로 변곡점이 맞다.

💡 $y = e^{-x^2}$은 통계학의 가우스(정규) 분포 모양이며, 변곡점은 표준편차에 해당하는 위치를 알려준다.

Q130 이차곡선

쌍곡선 $x^2 - y^2 = 1$과 직선 $y = 2x + k$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위는?



①) ① $-\sqrt{3} < k < \sqrt{3}$

②) ② $k > \sqrt{3}$

③) ③ $|k| > \sqrt{3}$

④) ④ $|k| > 1$

🎯 **정답:** ③ $|k| > \sqrt{3}$

📖 직선의 식을 쌍곡선에 대입한다.

$x^2 - (2x + k)^2 = 1$

$x^2 - 4x^2 - 4kx - k^2 = 1$

$-3x^2 - 4kx - (k^2 + 1) = 0$

$3x^2 + 4kx + (k^2 + 1) = 0$

서로 다른 두 점에서 만나려면 이 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다(판별식 $D > 0$).

$\dfrac{D}{4} = (2k)^2 - 3(k^2 + 1) = 4k^2 - 3k^2 - 3 = k^2 - 3 > 0$

$\therefore k^2 > 3$, 즉 $|k| > \sqrt{3}$

💡 쌍곡선 $x^2 - y^2 = 1$의 점근선 기울기는 ± 1이고 직선의 기울기는 2로 더 가파르므로, $|k|$가 충분히 클 때만 두 가지 모두를 가로질러 두 점에서 만난다.

Q131 확률

어느 공장에서 두 기계 A, B가 전체 제품의 60%, 40%를 각각 생산한다. 기계 A의 불량률은 5%, 기계 B의 불량률은 10%이다. 임의로 뽑은 한 제품이 불량품일 때, 그 제품이 기계 A에서 생산되었을 확률은?

1) ① $\frac{1}{2}$
2) ② $\frac{2}{5}$
3) ③ $\frac{3}{7}$
4) ④ $\frac{4}{7}$

🎯 **정답: ③** $\frac{3}{7}$

📖 기계 A에서 생산된 제품을 사건 A, 기계 B에서 생산된 제품을 사건 B, 불량품인 사건을 D라 하자.

$P(A) = 0.6,\ P(B) = 0.4,\ P(D|A) = 0.05,\ P(D|B) = 0.10.$

$P(A \cap D) = P(A)P(D|A) = 0.6 \times 0.05 = 0.03$

$P(B \cap D) = P(B)P(D|B) = 0.4 \times 0.10 = 0.04$

$P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) = 0.07$

조건부확률(베이즈 정리):

$P(A|D) = \dfrac{P(A \cap D)}{P(D)} = \dfrac{0.03}{0.07} = \dfrac{3}{7}$

💡 이러한 추론을 베이즈 추론이라 하며, 의료 진단(검사 양성일 때 실제 질환자일 확률 추정), 스팸 필터링, 머신러닝의 핵심 도구로 쓰인다.

Q132 수열의 극한과 급수

$\lim_{n \to \infty}(\sqrt{n^2 + 4n} - n)$의 값은?

1) ① 1
2) ② 2
3) ③ 3
4) ④ 4

🎯 **정답: ②** 2

📖 무리식의 극한이므로 분자를 유리화한다. $\sqrt{n^2 + 4n} - n = \frac{(n^2 + 4n) - n^2}{\sqrt{n^2 + 4n} + n} = \frac{4n}{\sqrt{n^2 + 4n} + n}$. 분자, 분모를 n으로 나누면 $\frac{4}{\sqrt{1 + \frac{4}{n}} + 1}$.

$n \to \infty$일 때 $\frac{4}{\sqrt{1} + 1} = \frac{4}{2} = 2.$

💡 무리식 극한의 유리화는 공액식 곱셈을 이용해 분자/분모의 차이를 단순화하는 표준 기법이다.

Q133 초월함수의 미분

함수 $f(x) = \sin(3x)$에 대하여 $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$의 값은?

1) ① 0
2) ② 1
3) ③ $\frac{3}{2}$
4) ④ 3

🎯 **정답: ①** 0

📖 합성함수 미분법에 의해 $f'(x) = 3\cos(3x)$이다. $x = \frac{\pi}{6}$ 대입: $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 \cdot 0 = 0.$

💡 $\cos(\pi/2) = 0$이라는 사실 덕분에 답이 깔끔하게 0이 된다.

Q134 초월함수의 적분

$\int_1^{e^2} \frac{1}{x}dx$의 값은?

①) ① 1

②) ② 2

③) ③ e

④) ④ e^2-1

🎯 **정답:** ② 2

📖 $\frac{1}{x}$의 부정적분은 $\ln|x|$이다. $\int_1^{e^2} \frac{1}{x}dx = [\ln x]_1^{e^2} = \ln e^2 - \ln 1 = 2 - 0 = 2.$

💡 $\ln e^n = n$이라는 사실은 자연로그가 e의 지수를 직접 읽어주는 함수임을 보여준다.

Q135 순열·조합 심화 + 이항정리

$(1+x)^{10}$을 전개했을 때 모든 항의 계수의 합은?

①) ① 512

②) ② 1024

③) ③ 2048

④) ④ 4096

🎯 **정답:** ② 1024

📖 $(1+x)^{10} = \sum_{k=0}^{10} {}_{10}C_k\, x^k$이므로 모든 항의 계수의 합은 $x=1$을 대입한 값과 같다. 따라서 $(1+1)^{10} = 2^{10} = 1024$이다.

💡 이항계수의 모든 합이 2^n이라는 사실은 부분집합의 개수가 2^n임과 같은 의미를 갖는다.

Q136 확률

빨간 공 3개와 파란 공 2개가 들어 있는 주머니에서 한 개씩 차례로 비복원으로 두 번 꺼낼 때, 첫 번째 공이 빨간 공이었다는 조건에서 두 번째 공이 파란 공일 확률은?

①) ① $\frac{1}{4}$

②) ② $\frac{2}{5}$

③) ③ $\frac{1}{2}$

④) ④ $\frac{3}{5}$

🎯 **정답:** ③ $\frac{1}{2}$

📖 첫 번째 공이 빨간 공이었으므로 주머니에는 빨간 공 2개, 파란 공 2개, 총 4개가 남는다. 두 번째 공이 파란 공일 조건부확률은 $P(B|A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$이다.

💡 비복원 추출에서 첫 번째 결과는 두 번째 시행의 표본공간을 줄여 주므로 조건부확률 계산이 단순해진다.

Q137 통계

확률변수 X가 정규분포 $N(50, 4^2)$을 따른다. 표준정규분포표에서 $P(0 \le Z \le 1) = 0.3413$일 때, $P(X \le 54)$의 값은?

①) ① 0.3413

②) ② 0.5

③) ③ 0.6587

④) ④ 0.8413

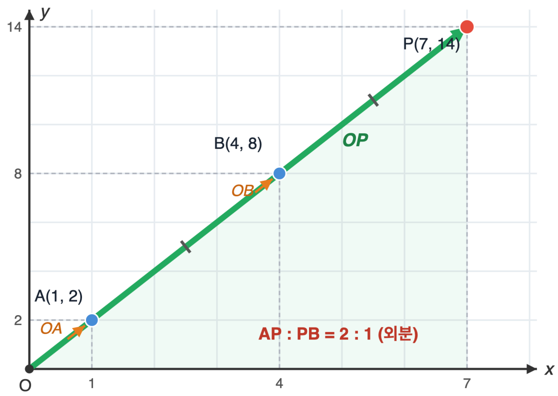
🎯 **정답:** ④ 0.8413

📖 $Z = \dfrac{X-50}{4}$로 표준화하면 $X = 54$일 때 $Z = 1$. 따라서
$P(X \le 54) = P(Z \le 1) = 0.5 + P(0 \le Z \le 1) = 0.5 + 0.3413 = 0.8413.$

💡 표준정규분포는 $Z = 0$을 기준으로 좌우 대칭이라 $P(Z \le 0) = 0.5$를 항상 활용할 수 있다.

Q138 평면·공간벡터

좌표평면 위의 두 점 $A(1, 2)$, $B(4, 8)$에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 외분하는 점 P의 위치벡터 $\vec{OP}$의 크기는?



①) ① $5\sqrt{7}$

②) ② $7\sqrt{5}$

③) ③ $5\sqrt{5}$

④) ④ $7\sqrt{7}$

🎯 **정답:** ② $7\sqrt{5}$

📖 선분 AB를 $m:n$으로 외분하는 점은 $\dfrac{m\vec{OB} - n\vec{OA}}{m-n}$이다. $m = 2$, $n = 1$이므로
$\vec{OP} = \dfrac{2(4,8)-(1,2)}{2-1} = (8-1, 16-2) = (7, 14)$. 따라서 $|\vec{OP}| = \sqrt{7^2+14^2} = \sqrt{49+196} = \sqrt{245} = 7\sqrt{5}$.

💡 외분점은 분모가 $m-n$이라 분자/분모 부호에 따라 점이 선분 바깥쪽에 위치한다.

Q139 통계

확률변수 X가 정규분포 $N(170,\ 6^2)$을 따른다. 표준정규분포표에서 $P(0 \le Z \le 1) = 0.3413$, $P(0 \le Z \le 1.5) = 0.4332$일 때, $P(164 \le X \le 179)$의 값은?

①) ① 0.6826

②) ② 0.7745

③) ③ 0.8664

④) ④ 0.9544

🎯 **정답:** ② 0.7745

📖 $Z = \dfrac{X - 170}{6}$으로 표준화한다. $X = 164$일 때 $Z = -1$, $X = 179$일 때 $Z = 1.5$.

$P(164 \le X \le 179) = P(-1 \le Z \le 1.5) = P(0 \le Z \le 1) + P(0 \le Z \le 1.5) = 0.3413 + 0.4332 = 0.7745.$

💡 표준정규분포의 좌우 대칭성 덕분에 $P(-1 \le Z \le 0) = P(0 \le Z \le 1)$이 성립한다.

Q140 확률

한 시행에서 성공할 확률이 $\frac{1}{3}$인 시행을 5번 독립적으로 반복할 때, 적어도 한 번 성공할 확률은?

①) ① $\frac{32}{243}$

②) ② $\frac{80}{243}$

③) ③ $\frac{211}{243}$

④) ④ $\frac{242}{243}$

🎯 **정답:** ③ $\frac{211}{243}$

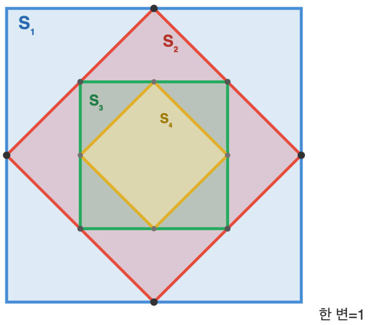
📖 여사건(한 번도 성공하지 못함)의 확률을 이용한다. 한 번도 성공하지 못할 확률은 $\left(1 - \frac{1}{3}\right)^5 = \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243}$. 따라서 적어도 한 번 성공할 확률은 $1 - \frac{32}{243} = \frac{211}{243}$.

💡 '적어도 한 번' 형 확률은 항상 여사건이 더 빠른 길이다(직접 합산하면 4가지 경우를 더해야 한다).

Q141 수열의 극한과 급수

한 변의 길이가 1인 정사각형 S_1의 각 변의 중점을 이어 만든 정사각형을 S_2라 하고, 같은 방법으로 S_n의 각 변의 중점을 이어 만든 정사각형을 S_{n+1}이라 한다. 모든 정사각형 $S_1, S_2, S_3, \cdots$ 의 넓이의 합을 구하시오.

닮은 정사각형 (중점 연결)



넓이비 r = 1/2, 무한합 = 1·1/(1−1/2) = 2 ?

①) ① $\frac{4}{3}$
②) ② $\frac{3}{2}$
③) ③ 2
④) ④ 4

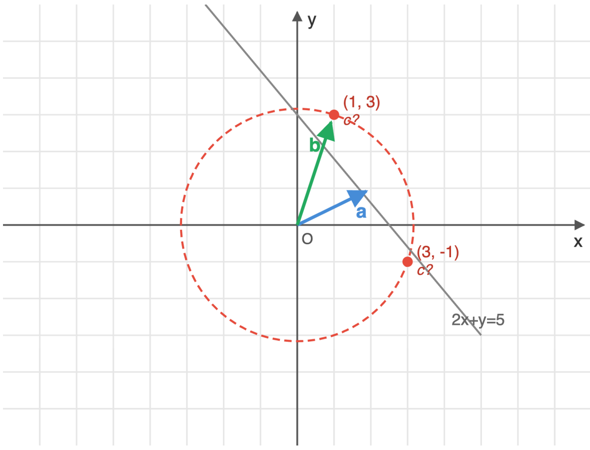
🎯 **정답:** ③ 2

📖 S_n의 한 변을 a_n이라 하면 S_{n+1}의 한 변은 직각삼각형의 빗변으로 $a_{n+1} = \sqrt{(a_n/2)^2 + (a_n/2)^2} = \frac{a_n}{\sqrt{2}}$이다. 따라서 S_{n+1}의 넓이는 S_n의 넓이의 $\frac{1}{2}$배이다. 첫째항 1, 공비 $\frac{1}{2}$인 무한등비급수이므로 합은 $\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$.

💡 정사각형의 변의 중점을 이으면 면적이 정확히 절반이 되는데, 이는 닮음비 $\frac{1}{\sqrt{2}}$의 제곱이라는 사실과 같다.

Q142 평면·공간벡터

평면벡터 $\vec{a} = (2,\ 1)$, $\vec{b} = (1,\ 3)$에 대하여 $|\vec{c}| = \sqrt{10}$ 이고 $\vec{c} \cdot \vec{a} = 5$를 만족하는 평면벡터 $\vec{c}$가 있다. $\vec{c} \cdot \vec{b}$의 최댓값을 구하시오.



①) ① 5

②) ② $\dfrac{10}{3}$

③) ③ $5\sqrt{2}$

④) ④ 10

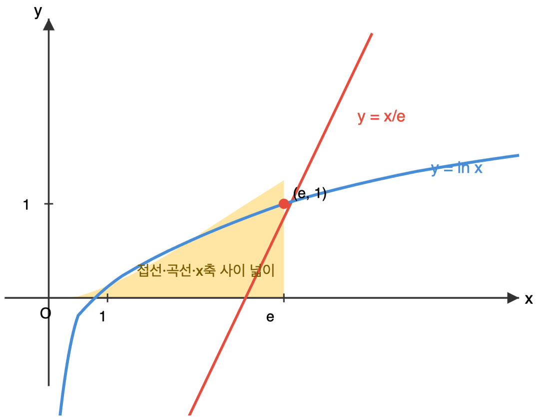
🎯 **정답:** ④ 10

📖 $\vec{c} = (x,\ y)$라 하자. 조건에서 $x^2 + y^2 = 10$이고 $2x + y = 5$이다. $y = 5 - 2x$를 대입하면 $x^2 + (5 - 2x)^2 = 10$, 즉 $5x^2 - 20x + 15 = 0$, $x^2 - 4x + 3 = 0$. 따라서 $x = 1$ 또는 $x = 3$. 이때 $\vec{c} = (1,\ 3)$ 또는 $(3,\ -1)$. $\vec{c} \cdot \vec{b}$를 계산하면 $(1, 3) \cdot (1, 3) = 1 + 9 = 10$, $(3,\ -1) \cdot (1, 3) = 3 - 3 = 0$. 따라서 최댓값은 10.

💡 두 조건(크기 고정 + 한 벡터와의 내적 고정)이 평면 위에 두 점만 결정짓는 것은 원과 직선이 두 점에서 만나기 때문이다.

Q143 미적분 활용

곡선 $y = \ln x$ 위의 점 $(e, 1)$에서의 접선과 곡선 $y = \ln x$, 그리고 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.



①) ① $\frac{e}{2} - 1$

②) ② $e - 2$

③) ③ $1 - \frac{e}{2}$

④) ④ $\frac{e}{2} + 1$

🎯 **정답:** ① $\frac{e}{2} - 1$

📖 $y = \ln x$의 도함수는 $y' = \frac{1}{x}$. 점 $(e, 1)$에서 접선의 기울기는 $\frac{1}{e}$이다. 접선의 방정식은 $y - 1 = \frac{1}{e}(x - e)$, 즉 $y = \frac{x}{e}$로 원점을 지난다. 둘러싸인 영역은 (접선·x축 아래 삼각형, $0 \le x \le e$) - (곡선·x축 아래 부분, $1 \le x \le e$)이다. 삼각형 넓이는 $\frac{1}{2} \cdot e \cdot 1 = \frac{e}{2}$. 곡선 아래 넓이는 $\int_1^e \ln x\, dx = [x\ln x - x]_1^e = (e - e) - (0 - 1) = 1$. 따라서 구하는 넓이는 $\frac{e}{2} - 1$.

💡 $\int \ln x\, dx = x\ln x - x + C$는 부분적분으로 얻으며, $y = \ln x$의 곡선 아래 넓이를 구할 때 핵심이 된다.

Q144 초월함수의 미분

함수 $f(x) = \sin(2x) + \cos x$ 에 대하여 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 의 값을 구하여라.

①) ① -3

②) ② -1

③) ③ 0

④) ④ 1

🎯 **정답:** ① -3

📖 1단계: 합성함수 미분으로 $f'(x) = 2\cos(2x) - \sin x$.

2단계: $x = \frac{\pi}{2}$ 대입.

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\cos\pi - \sin\frac{\pi}{2} = 2(-1) - 1 = -3.$

💡 $\sin(2x)$ 의 도함수는 2 가 곱해지는 것을 잊기 쉬워 모의고사에서 자주 함정으로 출제됩니다.

Q145 확률

주머니 A에는 빨간공 4 개와 파란공 1 개, 주머니 B에는 빨간공 2 개와 파란공 3 개가 들어 있다. 동전을 던져 앞면이면 A에서, 뒷면이면 B에서 공 한 개를 꺼낸다. 꺼낸 공이 빨간공이었을 때, 그것이 주머니 A에서 나왔을 확률은?

①) ① $\frac{1}{3}$
②) ② $\frac{1}{2}$
③) ③ $\frac{2}{3}$
④) ④ $\frac{3}{4}$

🎯 **정답:** ③ $\frac{2}{3}$

📖 1단계: $P(A \cap R) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{2}{5}$.

2단계: $P(B \cap R) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$.

3단계: $P(R) = \frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$.

4단계: $P(A|R) = \frac{P(A \cap R)}{P(R)} = \frac{2/5}{3/5} = \frac{2}{3}$.

💡 이런 유형은 베이즈 정리의 직관적 형태로, 의료 진단 결과 해석에도 똑같은 원리가 쓰입니다.

Q146 통계

확률변수 X 가 정규분포 $N(50, 4^2)$ 을 따를 때, $P(X \geq 58)$ 의 값은? (단, $P(0 \leq Z \leq 2) = 0.4772$ 이다.)

①) ① 0.0228
②) ② 0.0456
③) ③ 0.1587
④) ④ 0.4772

🎯 **정답:** ① 0.0228

📖 1단계: 표준화. $Z = \frac{X - 50}{4}$.

2단계: $X = 58$ 일 때 $Z = \frac{58 - 50}{4} = 2$.

3단계: $P(X \geq 58) = P(Z \geq 2) = 0.5 - P(0 \leq Z \leq 2) = 0.5 - 0.4772 = 0.0228$.

💡 2σ 바깥쪽 확률은 약 4.56% 로, 통계학에서 '드문 사건'의 기준으로 쓰입니다.

Q147 초월함수의 적분

$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx$ 의 값을 구하여라.

①) ① $\frac{\pi}{8}$
②) ② $\frac{\pi}{4}$
③) ③ $\frac{\pi}{2}$
④) ④ π

🎯 **정답:** ② $\frac{\pi}{4}$

📖 1단계: 반각공식 적용. $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$.

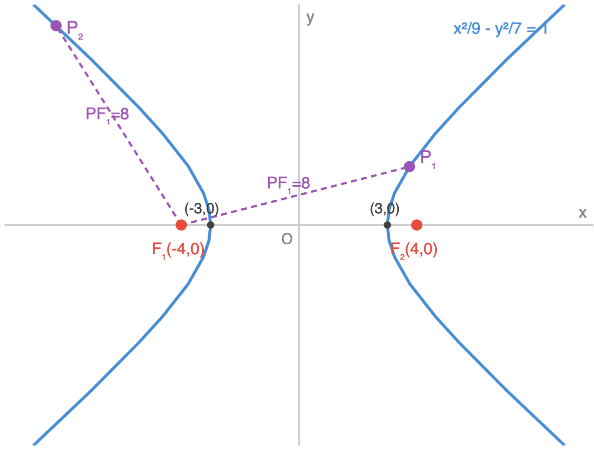
2단계: $\int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} \right]_0^{\pi/2}$.

3단계: $= \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\sin \pi}{4} \right) - (0 - 0) = \frac{\pi}{4}$.

💡 $[0, \pi/2]$ 구간에서 $\sin^2 x$ 와 $\cos^2 x$ 의 적분값은 둘 다 $\pi/4$ 로 같습니다.

Q148 이차곡선

쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$ 위의 한 점 P 와 두 초점 F_1, F_2 에 대하여 $|PF_1| = 8$ 일 때, $|PF_2|$ 가 가질 수 있는 모든 값의 합을 구하여라.



①) ① 12

②) ② 14

③) ③ 16

④) ④ 18

🎯 **정답:** ③ 16

📖 1단계: $a^2 = 9, b^2 = 7$ 이므로 $a = 3, c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16} = 4$. 거리차 $\left| |PF_1| - |PF_2| \right| = 2a = 6$.

2단계: P 가 F_2 쪽 분지에 있을 때, $|PF_1| - |PF_2| = 6 \Rightarrow |PF_2| = 2$ (최솟값 $c - a = 1$ 이상이므로 가능).

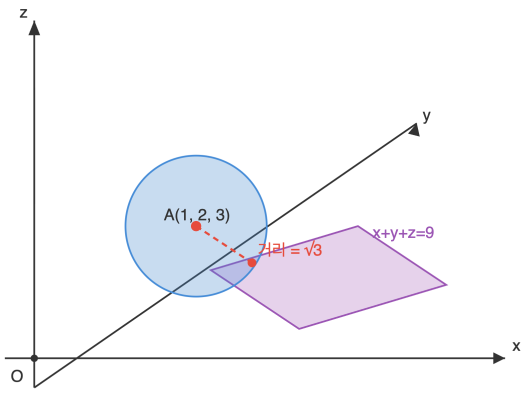
3단계: P 가 F_1 쪽 분지에 있을 때, $|PF_2| - |PF_1| = 6 \Rightarrow |PF_2| = 14$.

4단계: 모든 값의 합 $= 2 + 14 = 16$.

💡 쌍곡선의 정의는 두 초점까지 거리의 '차'가 일정한 것이며, 타원의 정의(거리의 합 일정)와 짝을 이룹니다.

Q149 평면·공간벡터

점 $A(1, 2, 3)$ 을 중심으로 하고 평면 $x + y + z = 9$ 에 접하는 구의 반지름을 구하여라.



①) ① 1

②) ② $\sqrt{2}$

③) ③ $\sqrt{3}$

④) ④ 2

🎯 **정답: ③ $\sqrt{3}$**

📖 1단계: 평면이 구에 접할 때, 평면과 중심 사이 거리가 곧 구의 반지름이다.

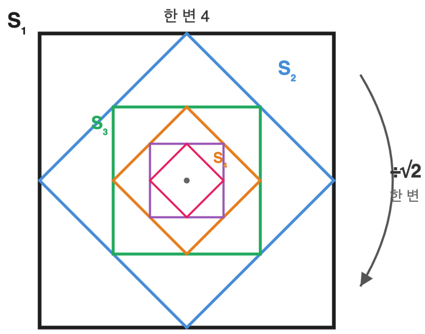
2단계: 점 (x_0, y_0, z_0) 와 평면 $ax + by + cz + d = 0$ 의 거리 공식 $\dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ 적용.

3단계: $\dfrac{|1 + 2 + 3 - 9|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \dfrac{|-3|}{\sqrt{3}} = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

💡 공간에서 점과 평면 사이 거리 공식은 평면의 단위 법선벡터에 위치벡터를 정사영시키는 의미입니다.

Q150 수열의 극한과 급수

한 변의 길이가 4 인 정사각형 S_1 에서 각 변의 중점을 차례로 이어 새로운 정사각형 S_2 를 만든다. 같은 방법으로 S_2 에서 S_3, S_3 에서 S_4, ... 를 무한히 만들 때, 모든 정사각형 $S_1, S_2, S_3, \ldots$ 의 넓이의 합을 구하여라.



각 단계마다 한 변의 길이가 √2 로 나누어짐 (무한 반복)

①) ① 16
②) ② 24
③) ③ 32
④) ④ 64

🎯 **정답:** ③ 32

📖 1단계: S_1 의 넓이 $= 4^2 = 16.$

2단계: 각 변 중점을 이은 정사각형의 한 변 = $\dfrac{(\text{이전 한 변})}{\sqrt{2}}$ 이므로 넓이는 $\dfrac{1}{2}$ 배. 공비 $r = \dfrac{1}{2}$.

3단계: 무한등비급수의 합 $= \dfrac{16}{1-1/2} = 32.$

💡 이 도형 수열은 '둠스데이 도형'으로도 알려져 있으며, 각도가 매번 $45°$ 씩 회전합니다.

Q151 초월함수의 적분

$\displaystyle\int_1^e (\ln x)^2\, dx$ 의 값을 구하여라.

①) ① $e-2$
②) ② $2e-1$
③) ③ $e+1$
④) ④ $2-e$

🎯 **정답:** ① $e-2$

📖 1단계: 부분적분 1회. $u = (\ln x)^2$, $dv = dx$ 로 두면 $du = \dfrac{2\ln x}{x}dx$, $v = x$.

$\displaystyle\int (\ln x)^2 dx = x(\ln x)^2 - \int 2\ln x\, dx.$

2단계: $\displaystyle\int \ln x\, dx = x\ln x - x$ (이미 알려진 결과).

3단계: 따라서 $\displaystyle\int_1^e (\ln x)^2 dx = \left[x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x\right]_1^e.$

4단계: $x = e$: $e(1) - 2e(1) + 2e = e$. $x = 1$: $0 - 0 + 2 = 2$.

5단계: $e - 2$.

💡 $(\ln x)^n$ 의 적분은 부분적분을 n 번 반복하는 점화식 구조를 갖습니다.

Q152 초월함수의 미분

매개변수로 나타낸 곡선 $x = 2\cos t,\ y = 3\sin t\ \left(0 < t < \frac{\pi}{2}\right)$ 에 대하여, $t = \frac{\pi}{4}$ 인 점에서 $\frac{dy}{dx}$ 의 값을 구하여라.

①) ① $-\frac{3}{2}$

②) ② -1

③) ③ 1

④) ④ $\frac{3}{2}$

🎯 **정답:** ① $-\frac{3}{2}$

📖 1단계: $\frac{dx}{dt} = -2\sin t,\ \frac{dy}{dt} = 3\cos t.$

2단계: 매개변수 미분 공식 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{3\cos t}{-2\sin t} = -\frac{3}{2}\cot t.$

3단계: $t = \frac{\pi}{4}$ 일 때 $\cot t = 1$ 이므로 $\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{2}.$

💡 이 매개변수는 타원 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 을 나타내며, 위 결과는 그 타원 위 점에서의 접선의 기울기입니다.

Q153 미적분 활용

두 곡선 $y = e^x,\ y = e^{-x}$ 와 직선 $x = 1$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

①) ① $e - \frac{1}{e}$

②) ② $e + \frac{1}{e} - 2$

③) ③ $2e - 2$

④) ④ $e^2 + 1$

🎯 **정답:** ② $e + \frac{1}{e} - 2$

📖 1단계: 두 곡선의 교점은 $e^x = e^{-x} \Rightarrow x = 0$, 점 $(0, 1)$.

2단계: $x \in [0, 1]$ 에서 $e^x \geq e^{-x}$ 이므로 위 곡선이 $y = e^x$.

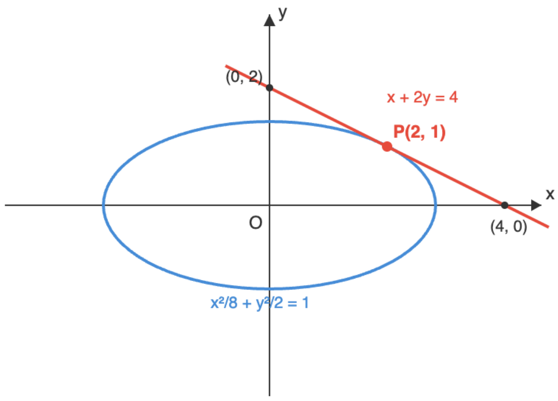
3단계: $S = \int_0^1 (e^x - e^{-x})dx = \left[e^x + e^{-x}\right]_0^1.$

4단계: $= \left(e + \frac{1}{e}\right) - (1 + 1) = e + \frac{1}{e} - 2.$

💡 $e^x + e^{-x}$ 는 쌍곡코사인 $2\cosh x$ 와 같으며, 현수선의 모양을 결정하는 함수입니다.

Q154 이차곡선

타원 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$ 위의 점 $(2,1)$ 에서의 접선의 방정식은?



①) ① $x+y=3$
②) ② $x+2y=4$
③) ③ $2x+y=5$
④) ④ $x+2y=6$

🎯 **정답:** ② $x+2y=4$

📖 1단계: 점 $(2,1)$ 이 타원 위에 있는지 확인. $\frac{4}{8}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$ ✓
2단계: 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 (x_1,y_1) 에서의 접선 공식 $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$ 적용.
3단계: $\frac{2\cdot x}{8}+\frac{1\cdot y}{2}=1\Rightarrow\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1.$
4단계: 양변에 4 를 곱하면 $x+2y=4.$

💡 이차곡선 접선 공식은 $x^2\to x_1x,\ y^2\to y_1y$ 로 '대칭 치환'한다고 외우면 빠릅니다.

Q155 순열·조합 심화 + 이항정리

어른 3 명과 어린이 3 명이 원탁에 둘러앉을 때, 어른과 어린이가 교대로 앉는 경우의 수를 구하여라.

①) ① 6
②) ② 12
③) ③ 24
④) ④ 36

🎯 **정답:** ② 12

📖 1단계: 먼저 어른 3 명을 원탁에 배열. 원순열이므로 $(3-1)!=2$ 가지.
2단계: 어른 사이에 만들어진 빈자리 3 개에 어린이 3 명을 일렬로 배치. $3!=6$ 가지.
3단계: 따라서 전체 경우의 수는 $2\times6=12.$

💡 교대 배치 문제는 두 그룹 인원 수가 같을 때만 가능하며, 차이가 1 이상이면 교대 배치 자체가 불가능합니다.

Q156 수열의 극한과 급수

$\lim_{n \to \infty} \frac{3n^2 + 2n - 1}{n^2 + 5}$의 값을 구하시오.

①) ① 1

②) ② 2

③) ③ 3

④) ④ 5

정답: ③ 3

분모와 분자가 모두 n의 다항식이고 차수가 같으므로, 분모와 분자를 최고차항 n^2으로 나눈다. $\lim_{n \to \infty} \frac{3 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{5}{n^2}} = \frac{3 + 0 - 0}{1 + 0} = 3.$

분모와 분자의 최고차항의 계수의 비가 극한값이 된다.

분모와 분자의 차수가 다르면 극한은 0 또는 무한대가 된다.

Q157 초월함수의 미분

함수 $f(x) = \sin x + x\cos x$의 도함수 $f'(x)$를 구하시오.

①) ① $\cos x - x\sin x$

②) ② $2\cos x - x\sin x$

③) ③ $\cos x + x\sin x$

④) ④ $-x\sin x$

정답: ② $2\cos x - x\sin x$

$(\sin x)' = \cos x$이다. 곱의 미분법으로 $(x\cos x)' = (x)'\cos x + x(\cos x)' = \cos x - x\sin x$이다. 따라서 $f'(x) = \cos x + (\cos x - x\sin x) = 2\cos x - x\sin x.$

Q158 초월함수의 적분

부정적분 $\int (\cos x + \sec^2 x)\, dx$를 구하시오. (단, C는 적분상수)

①) ① $\sin x + \tan x + C$

②) ② $\sin x - \tan x + C$

③) ③ $-\sin x + \tan x + C$

④) ④ $\cos x + \tan x + C$

정답: ① $\sin x + \tan x + C$

$\int \cos x\, dx = \sin x + C_1$ ($\because (\sin x)' = \cos x$). $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C_2$ ($\because (\tan x)' = \sec^2 x$). 두 부정적분을 합하면 $\sin x + \tan x + C$.

Q159 순열·조합 심화 + 이항정리

6명의 학생이 원형 탁자에 둘러앉는 경우의 수를 구하시오.

①) ① 24
②) ② 60
③) ③ 120
④) ④ 720

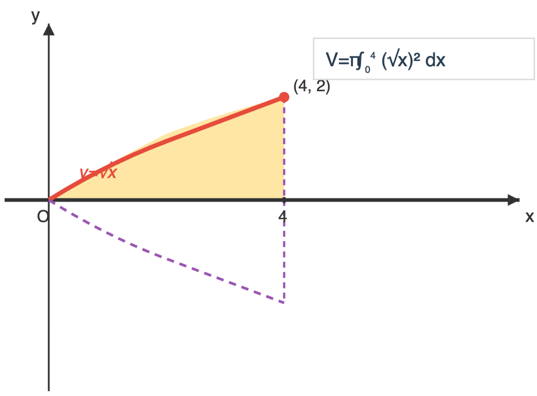
🎯 **정답:** ③ 120

📖 원순열의 수는 $(n-1)!$이다. 회전하여 같은 배열은 같은 것으로 보기 때문에 한 사람을 고정시키고 나머지를 일렬로 배열하는 방법의 수와 같다. 따라서 $(6-1)! = 5! = 120$가지.

💡 원순열은 n명을 일렬로 세우는 $n!$가지를 회전 동치 n가지로 나눈 것과 같다.

Q160 미적분 활용

곡선 $y = \sqrt{x}$ 와 x축, 직선 $x = 4$로 둘러싸인 영역을 x축 둘레로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피를 구하시오.



①) ① 4π
②) ② 8π
③) ③ 16π
④) ④ 32π

🎯 **정답:** ② 8π

📖 회전체의 부피 공식 $V = \pi \int_a^b \{f(x)\}^2 dx$를 이용한다. $V = \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^4 x\,dx = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = \pi \cdot \frac{16}{2} = 8\pi$.

📝 고3 수학 일반

총 40문제 · 문제와 정답·풀이 포함

Q161 초월함수의 미분

함수 $f(x) = e^{2x^2 - 1}$의 도함수 $f'(x)$를 구하시오.

①) ① $2xe^{2x^2 - 1}$

②) ② $4xe^{2x^2 - 1}$

③) ③ $4xe^{4x^2 - 2}$

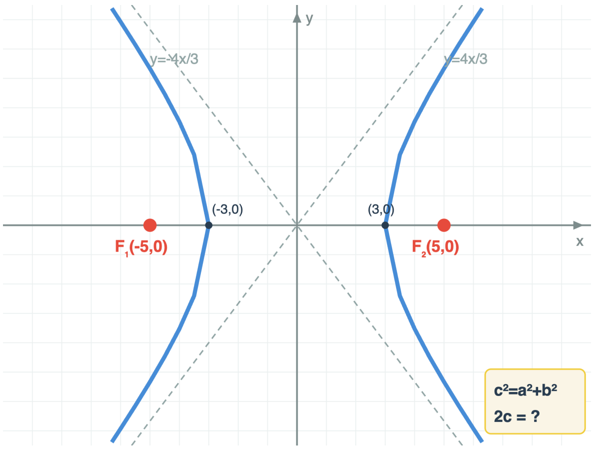
④) ④ $e^{2x^2 - 1}$

🎯 **정답:** ② $4xe^{2x^2 - 1}$

📖 합성함수 미분법(연쇄법칙)을 이용한다. 외함수는 e^u, 내함수는 $u = 2x^2 - 1$. $\frac{d}{dx}e^{g(x)} = e^{g(x)} \cdot g'(x)$이므로, $f'(x) = e^{2x^2 - 1} \cdot (2x^2 - 1)' = e^{2x^2 - 1} \cdot 4x = 4xe^{2x^2 - 1}$.

Q162 이차곡선

쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$의 두 초점 사이의 거리를 구하시오.



①) ① 6

②) ② 8

③) ③ 10

④) ④ 14

🎯 **정답:** ③ 10

📖 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$에서 초점은 $(\pm c, 0)$이고 $c^2 = a^2 + b^2$이다. $a^2 = 9$, $b^2 = 16$이므로 $c^2 = 9 + 16 = 25$, $c = 5$. 두 초점 사이의 거리는 $2c = 10$.

💡 타원에서는 $c^2 = a^2 - b^2$이지만 쌍곡선에서는 $c^2 = a^2 + b^2$로 부호가 반대다.

Q163 평면·공간벡터

점 $A(1,2,3)$을 지나고 벡터 $\vec{n}=(2,\ -1,3)$에 수직인 평면의 방정식을 구하시오.

①) ① $2x-y+3z=9$

②) ② $2x+y+3z=13$

③) ③ $2x-y+3z=6$

④) ④ $x-y+z=2$

🎯 **정답:** ① $2x-y+3z=9$

📖 점 (x_0, y_0, z_0)을 지나고 법선벡터가 (a,b,c)인 평면의 방정식은 $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$이다. 여기에 대입하면 $2(x-1)-(y-2)+3(z-3)=0$. 정리하면 $2x-y+3z-2+2-9=0$, 즉 $2x-y+3z=9$.

Q164 확률

주머니 A에는 빨간 공 3개, 파란 공 2개가 들어 있고, 주머니 B에는 빨간 공 2개, 파란 공 4개가 들어 있다. 두 주머니 중 하나를 임의로 선택하여 공 한 개를 꺼냈더니 빨간 공이었다. 이 공이 주머니 A에서 나왔을 확률을 구하시오.

①) ① $\frac{3}{5}$

②) ② $\frac{9}{14}$

③) ③ $\frac{1}{2}$

④) ④ $\frac{5}{14}$

🎯 **정답:** ② $\frac{9}{14}$

📖 R을 '빨간 공이 나오는 사건'이라 하자. 주머니를 임의로 고르므로 $P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$. 조건부확률 $P(R|A)=\frac{3}{5}$, $P(R|B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$. 베이즈 정리에 의해, $P(A|R)=\frac{P(A)P(R|A)}{P(A)P(R|A)+P(B)P(R|B)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=\frac{\frac{9}{30}}{\frac{9}{30}+\frac{5}{30}}=\frac{9}{14}$.

Q165 순열·조합 심화 + 이항정리

다항식 $(1+x)^4(1+2x)^3$을 전개했을 때, x^3의 계수를 구하시오.

①) ① 48

②) ② 72

③) ③ 96

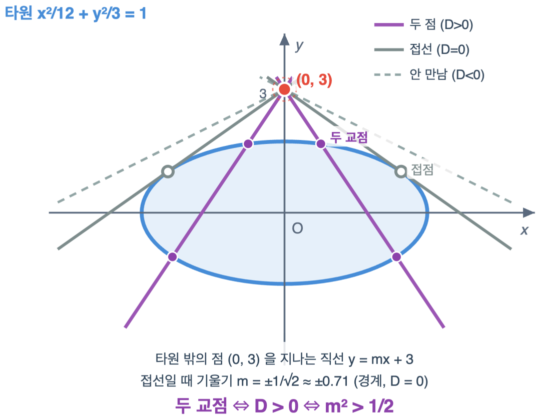
④) ④ 108

🎯 **정답:** ③ 96

📖 $(1+x)^4=\sum_{k=0}^{4} {}_4C_k x^k=1+4x+6x^2+4x^3+x^4$. $(1+2x)^3=\sum_{j=0}^{3} {}_3C_j(2x)^j=1+6x+12x^2+8x^3$. 두 다항식의 곱에서 x^3 계수는 $k+j=3$인 항들의 계수곱의 합이다. $(k=0, j=3): 1\cdot 8=8$. $(k=1, j=2): 4\cdot 12=48$. $(k=2, j=1): 6\cdot 6=36$. $(k=3, j=0): 4\cdot 1=4$. 합 $=8+48+36+4=96$.

Q166 이차곡선

타원 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{3}=1$과 직선 $y=mx+3$이 서로 다른 두 점에서 만날 때, 실수 m의 값의 범위를 구하시오.



①) ① $m^2<\frac{1}{2}$
②) ② $m^2>\frac{1}{2}$
③) ③ $m^2<\frac{1}{4}$
④) ④ $m^2>2$

🎯 **정답:** ② $m^2>\frac{1}{2}$

📖 $y=mx+3$을 타원 방정식에 대입한다. $\frac{x^2}{12}+\frac{(mx+3)^2}{3}=1$. 양변에 12를 곱하면 $x^2+4(mx+3)^2=12$. 전개하면 $x^2+4m^2x^2+24mx+36=12$, 즉 $(1+4m^2)x^2+24mx+24=0$. 서로 다른 두 점에서 만나려면 이차방정식의 판별식 $D>0$이어야 한다. $D=(24m)^2-4(1+4m^2)(24)=576m^2-96-384m^2=192m^2-96>0$. 따라서 $m^2>\frac{1}{2}$.

💡 점 $(0,3)$은 타원의 단축 끝점 $(0,\sqrt{3}\ )$ 위쪽 외부에 있어, 기울기가 충분히 크거나 작아야 두 교점이 생긴다.

Q167 초월함수의 미분

함수 $f(x)=e^x\sin x$일 때, $f'(0)$의 값은?

①) ① 0
②) ② 1
③) ③ 2
④) ④ e

🎯 **정답:** ②

📖 곱의 미분법을 이용하면 $f'(x)=(e^x)'\sin x+e^x(\sin x)'=e^x\sin x+e^x\cos x=e^x(\sin x+\cos x)$이다. 따라서 $f'(0)=e^0(\sin 0+\cos 0)=1\cdot(0+1)=1$이다.

💡 e^x와 삼각함수의 곱은 미분해도 같은 꼴이 유지되어 진동을 동반한 감쇠/증폭 신호 분석에 자주 사용된다.

Q168 초월함수의 적분

정적분 $\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx$의 값은?

①) ① 0

②) ② $\frac{1}{2}$

③) ③ 1

④) ④ $\frac{\pi}{2}$

🎯 **정답: ③**

📖 $\cos x$의 부정적분은 $\sin x$이다. 따라서 $\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = [\sin x]_0^{\pi/2} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1$이다.

💡 0부터 $\pi/2$까지 $\cos x$의 정적분이 1인 것은 $y = \cos x$ 그래프 아래 넓이가 정확히 단위 1임을 뜻한다.

Q169 순열·조합 심화

문자 P, A, R, A, L, L, E, L의 8개 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는?

①) ① 1680

②) ② 3360

③) ③ 6720

④) ④ 10080

🎯 **정답: ②**

📖 같은 것이 있는 순열 공식을 적용한다. 문자 A가 2개, L이 3개, 나머지(P, R, E)는 각 1개이다. 따라서 경우의 수는 $\frac{8!}{2! \cdot 3!} = \frac{40320}{2 \times 6} = \frac{40320}{12} = 3360$이다.

💡 같은 것이 있는 순열 공식은 다항계수와 깊이 연관되어 있고, 이항계수의 일반화로 볼 수 있다.

Q170 통계

확률변수 X가 정규분포 $N(50, 4^2)$을 따를 때, 확률 $P(X \le 54)$를 표준정규분포를 따르는 확률변수 Z를 이용하여 나타낸 것은?

①) ① $P(Z \le 0.5)$

②) ② $P(Z \le 1)$

③) ③ $P(Z \le 2)$

④) ④ $P(Z \le 4)$

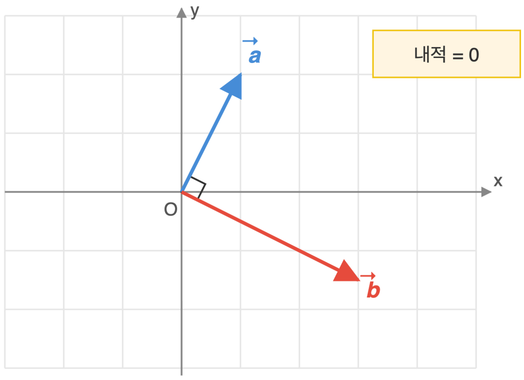
🎯 **정답: ②**

📖 정규분포 $N(m, \sigma^2)$을 따르는 X를 표준화하려면 $Z = \frac{X - m}{\sigma}$를 이용한다. 여기서 $m = 50$, $\sigma = 4$이므로 $X = 54$일 때 $Z = \frac{54 - 50}{4} = 1$이다. 따라서 $P(X \le 54) = P(Z \le 1)$이다.

💡 표준정규분포로의 변환은 모든 정규분포 문제를 단 하나의 표(표준정규분포표)로 해결할 수 있게 해주는 강력한 도구이다.

Q171 평면벡터

두 평면벡터 $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (3, k)$가 서로 수직일 때, 실수 k의 값은?



①) ① -3
②) ② $-\frac{3}{2}$
③) ③ $\frac{1}{2}$
④) ④ 3

🎯 **정답: ②**

📖 두 벡터가 수직일 필요충분조건은 내적이 0인 것이다. $\vec{a} \cdot \vec{b} = (1)(3) + (2)(k) = 3 + 2k$이고 이 값이 0이어야 하므로 $3 + 2k = 0$, 즉 $k = -\frac{3}{2}$이다.

💡 두 벡터의 수직 조건 '내적 = 0'은 차원에 관계없이 성립하여 공간벡터, n차원 벡터에서도 그대로 사용된다.

Q172 확률

어느 학교 전체 학생의 60%는 남학생, 40%는 여학생이다. 남학생의 30%, 여학생의 50%가 안경을 쓴다. 이 학교 학생 중 임의로 한 명을 뽑았더니 안경을 쓴 학생일 때, 그 학생이 남학생일 확률은?

①) ① $\frac{9}{25}$
②) ② $\frac{9}{19}$
③) ③ $\frac{10}{19}$
④) ④ $\frac{1}{2}$

🎯 **정답: ②**

📖 남학생을 사건 M, 안경 착용을 사건 G라 하면 $P(M) = 0.6$, $P(F) = 0.4$, $P(G|M) = 0.3$, $P(G|F) = 0.5$이다. 전확률공식으로 $P(G) = P(M)P(G|M) + P(F)P(G|F) = 0.6 \times 0.3 + 0.4 \times 0.5 = 0.18 + 0.20 = 0.38$. 조건부확률에 의해 $P(M|G) = \frac{P(M \cap G)}{P(G)} = \frac{0.18}{0.38} = \frac{18}{38} = \frac{9}{19}$이다.

💡 이런 형태의 추론은 베이즈 정리의 기본형으로, 의료진단·스팸필터 등에서 핵심적으로 사용된다.

Q173 수열의 극한과 급수

무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$의 값은?

①) ① $\frac{1}{2}$

②) ② 1

③) ③ 2

④) ④ 발산한다

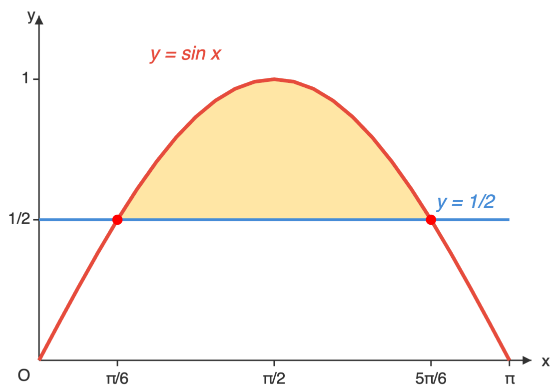
🎯 **정답: ②**

📖 부분분수 분해를 이용한다: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. 부분합을 구하면 $S_N = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1}$. $N \to \infty$일 때 $S_N \to 1$이므로 급수의 합은 1이다.

💡 이런 형태의 합을 망원경합(telescoping sum)이라 하며, 인접한 항이 상쇄되며 양 끝만 남는 우아한 기법이다.

Q174 미적분 활용

곡선 $y = \sin x$ $(0 \le x \le \pi)$와 직선 $y = \frac{1}{2}$로 둘러싸인 도형의 넓이는?



①) ① $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$

②) ② $\sqrt{3} - \frac{\pi}{6}$

③) ③ $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3}$

④) ④ $2\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$

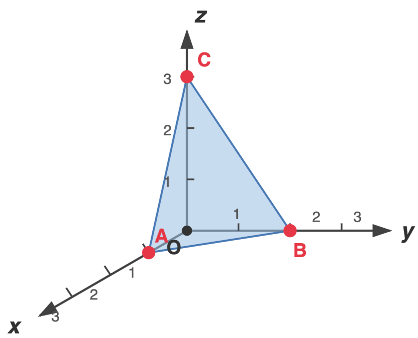
🎯 **정답: ①**

📖 교점을 구하면 $\sin x = \frac{1}{2}$에서 $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$이다. 이 구간에서 $\sin x \ge \frac{1}{2}$이므로 넓이는 $S = \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \left(\sin x - \frac{1}{2}\right) dx = \left[-\cos x - \frac{x}{2} \right]_{\pi/6}^{5\pi/6}$. 계산하면 $\left(-\cos\frac{5\pi}{6} - \frac{5\pi}{12}\right) - \left(-\cos\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{12}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5\pi}{12}\right) - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{3} - \frac{4\pi}{12} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$이다.

💡 수평선이 사인곡선을 가로지르며 만드는 영역은 음향공학에서 신호의 임계레벨 초과 영역을 분석할 때 사용된다.

Q175 공간벡터

공간의 세 점 $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$, $C(0,0,3)$을 지나는 평면의 방정식은?



①) ① $x+y+z=1$

②) ② $6x+3y+2z=6$

③) ③ $x+2y+3z=6$

④) ④ $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=6$

🎯 **정답: ②**

📖 세 좌표축과의 절편이 각각 $a=1$, $b=2$, $c=3$인 평면은 절편형 방정식 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, 즉 $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$로 나타낼 수 있다. 양변에 6을 곱하면 $6x+3y+2z=6$이다. 검산: $A(1,0,0)$ 대입 시 $6=6$ ✓, $B(0,2,0)$ 대입 시 $6=6$ ✓, $C(0,0,3)$ 대입 시 $6=6$ ✓.

💡 세 좌표축 절편을 알면 평면 방정식을 즉시 쓸 수 있는 절편형은 직선의 절편형 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$의 자연스러운 확장이다.

Q176 통계

정규분포 $N(50,10^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 25인 표본을 임의추출하여 그 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $P(48\le\overline{X}\le53)$의 값은? (단, 표준정규분포에서 $P(0\le Z\le1)=0.3413$, $P(0\le Z\le1.5)=0.4332$)

①) ① 0.6826

②) ② 0.7745

③) ③ 0.8413

④) ④ 0.9332

🎯 **정답: ②**

📖 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(50,\frac{10^2}{25}\right)=N(50,2^2)$을 따른다. 즉 평균 50, 표준편차 2. 표준화하면 $Z=\frac{\overline{X}-50}{2}$이고, $\overline{X}=48$일 때 $Z=-1$, $\overline{X}=53$일 때 $Z=1.5$. 따라서 $P(48\le\overline{X}\le53)=P(-1\le Z\le1.5)=P(0\le Z\le1)+P(0\le Z\le1.5)=0.3413+0.4332=0.7745$이다.

💡 표본 크기 n이 커질수록 표본평균의 표준편차가 $\frac{1}{\sqrt{n}}$에 비례하여 작아지므로, 추정의 정확도가 향상된다.

Q177 초월함수의 적분

정적분 $\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x}dx$의 값은?

①) ① $\frac{1}{3}$

②) ② $\frac{1}{2}$

③) ③ 1

④) ④ $\frac{e}{3}$

정답: ①

치환적분을 이용한다. $u=\ln x$로 놓으면 $du=\frac{1}{x}dx$이다. 적분 구간이 바뀌어, $x=1$일 때 $u=0$, $x=e$일 때 $u=1$이다. 따라서 $\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x}dx=\int_0^1 u^2\,du=\left[\frac{u^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}$이다.

치환적분에서 $u=\ln x$로 놓으면 분모의 $1/x$가 du로 자연스럽게 흡수되는 모습이 매우 우아하다.

Q178 초월함수의 미분

함수 $f(x)=\ln(\cos x)$ $(0<x<\frac{\pi}{2})$의 도함수 $f'(x)$를 구하시오.

①) ① $\tan x$

②) ② $-\tan x$

③) ③ $\cot x$

④) ④ $-\cot x$

정답: ②

합성함수 미분법을 적용한다. $f(x)=\ln(g(x))$ 꼴이므로 $f'(x)=\frac{g'(x)}{g(x)}$이다. 여기서 $g(x)=\cos x$, $g'(x)=-\sin x$. 따라서 $f'(x)=\frac{-\sin x}{\cos x}=-\tan x$.

$\int \tan x\,dx=-\ln|\cos x|+C$인 이유가 바로 이 미분 결과의 역방향이다.

Q179 통계

모표준편차가 $\sigma=6$인 모집단에서 크기 $n=9$인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\bar{X}$의 표준편차를 구하시오.

①) ① 1

②) ② 2

③) ③ 3

④) ④ 6

정답: ②

표본평균 $\bar{X}$의 표준편차는 $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$이다. 따라서 $\frac{6}{\sqrt{9}}=\frac{6}{3}=2$.

표본 크기를 4배로 늘리면 표본평균의 표준편차는 절반으로 줄어든다 ($\sqrt{n}$ 에 반비례하기 때문).

Q180 순열·조합 심화 + 이항정리

문자 a 4개와 b 3개를 일렬로 나열하는 방법의 수를 구하시오.

①) ① 21

②) ② 35

③) ③ 70

④) ④ 140

🎯 **정답: ②**

📖 같은 것이 있는 순열의 수는 $\frac{n!}{p!q!}$ (p, q는 같은 종류의 개수). 따라서 $\frac{7!}{4!3!} = \frac{5040}{24 \times 6} = \frac{5040}{144} = 35.$

💡 이는 ${}_7C_3$ 또는 ${}_7C_4$와 같다 - 7자리 중 b가 들어갈 3자리(또는 a가 들어갈 4자리)를 고르는 것과 동치이기 때문.

Q181 초월함수의 적분

정적분 $\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx$의 값을 구하시오.

①) ① $\ln 2$

②) ② $2\ln 2$

③) ③ $\frac{1}{2}\ln 2$

④) ④ $\ln 3$

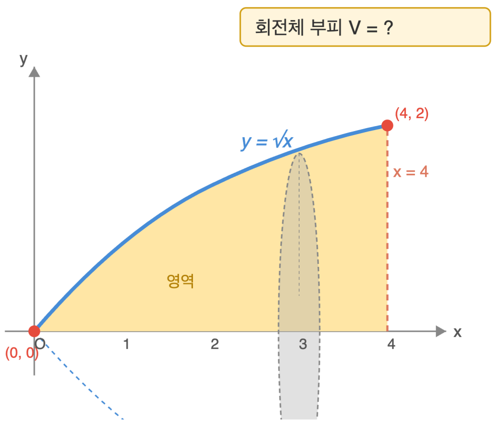
🎯 **정답: ①**

📖 $u = x^2 + 1$로 치환하면 $du = 2x\,dx$이고, $x = 0$일 때 $u = 1$, $x = 1$일 때 $u = 2$. 따라서 $\int_1^2 \frac{1}{u}du = [\ln u]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$ 또는 분자가 분모의 도함수임을 이용해 $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$ 공식을 바로 적용해도 된다.

💡 분자가 분모의 미분일 때는 자동으로 로그함수가 답으로 나온다 - 이를 '로그미분형 적분'이라고 부른다.

Q182 미적분 활용

곡선 $y = \sqrt{x}$ $(0 \le x \le 4)$와 x축으로 둘러싸인 영역을 x축 둘레로 회전시킨 회전체의 부피를 구하시오.



①) ① 4π

②) ② 8π

③) ③ 16π

④) ④ $\frac{32\pi}{3}$

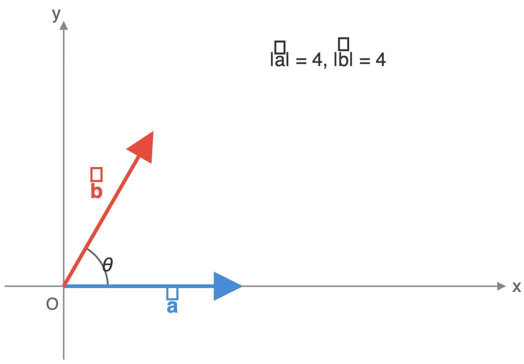
🎯 **정답: ②**

📖 x축 회전체의 부피 공식 $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2\,dx$를 적용한다. $V = \pi \int_0^4 (\sqrt{x}\,)^2\,dx = \pi \int_0^4 x\,dx = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = \pi \cdot 8 = 8\pi$.

💡 이 회전체는 옆면이 포물면인 '포물 회전체'로, 안테나 접시(파라볼라 안테나)와 같은 형태다.

Q183 평면·공간벡터

두 벡터 $\vec{a} = (4, 0), \vec{b} = (2, 2\sqrt{3}\,)$이 이루는 각의 크기를 구하시오.



①) ① $30°$

②) ② $45°$

③) ③ $60°$

④) ④ $90°$

🎯 **정답: ③**

📖 두 벡터의 내적: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \times 2 + 0 \times 2\sqrt{3}\ = 8$. 크기: $|\vec{a}| = \sqrt{16 + 0}\ = 4$, $|\vec{b}| = \sqrt{4 + 12}\ = 4$. 따라서 $\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{8}{4 \cdot 4} = \frac{1}{2}$. 그러므로 $\theta = 60°$.

💡 $(4, 0)$과 $(2, 2\sqrt{3}\,)$은 정삼각형의 두 변 - 한 꼭짓점에서 두 변의 끝까지의 벡터로 보면 $60°$가 자연스럽게 나온다.

Q184 미적분 활용

극한 $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\cos\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$의 값을 구하시오.

①) ① $\frac{2}{\pi}$
②) ② $\frac{1}{\pi}$
③) ③ $\frac{\pi}{2}$
④) ④ π

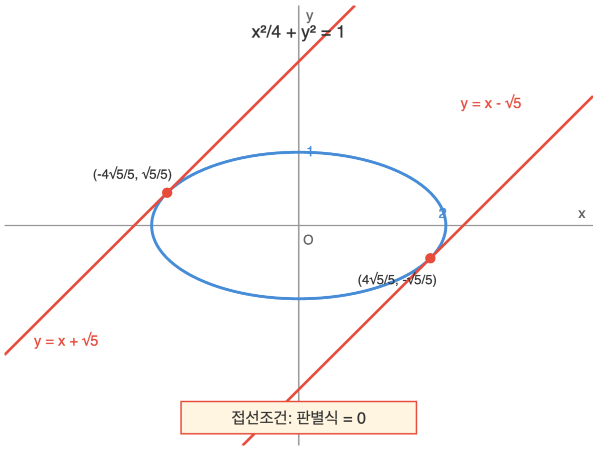
🎯 **정답: ①**

📖 $x_k = \frac{k}{n}$, $\Delta x = \frac{1}{n}$로 놓으면 주어진 합은 리만합 형태이다. $\frac{k\pi}{2n} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{k}{n}$이므로 극한은 $\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx$이다. 적분 계산: $u = \frac{\pi x}{2}$로 치환하면 $du = \frac{\pi}{2}dx$, 따라서 $\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx = \left[\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right]_0^1 = \frac{2}{\pi}(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0) = \frac{2}{\pi}$.

💡 리만합을 정적분으로 변환할 때 $\frac{k}{n}$ 부분이 적분변수 x가 되고, $\frac{1}{n}$ 부분이 dx가 된다는 것이 핵심.

Q185 이차곡선

직선 $y = x + k$가 타원 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$에 접하도록 하는 모든 실수 k의 값을 구하시오.



①) ① $\pm\sqrt{3}$
②) ② $\pm\sqrt{5}$
③) ③ ± 2
④) ④ $\pm\sqrt{7}$

🎯 **정답: ②**

📖 직선의 식을 타원에 대입: $\frac{x^2}{4} + (x+k)^2 = 1$. 양변에 4를 곱하면 $x^2 + 4(x+k)^2 = 4$. 전개: $x^2 + 4x^2 + 8kx + 4k^2 = 4$, 즉 $5x^2 + 8kx + 4k^2 - 4 = 0$. 접하려면 판별식 $D = 0$: $D = (8k)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (4k^2 - 4) = 64k^2 - 80k^2 + 80 = -16k^2 + 80 = 0$. 따라서 $k^2 = 5$, $k = \pm\sqrt{5}$.

💡 기울기 m인 직선이 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$에 접할 조건은 $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$ 이다. 여기에 $a = 2, b = 1, m = 1$을 대입하면 $\pm\sqrt{4+1} = \pm\sqrt{5}$ 로 같은 답.

Q186 초월함수의 미분

매개변수로 나타낸 곡선 $x = t^2 + 1,\ y = t^3 - t$ 위의 점 중 $t = 2$에 대응하는 점에서의 접선의 기울기를 구하시오.

①) ① $\frac{11}{4}$

②) ② $\frac{11}{2}$

③) ③ 3

④) ④ 4

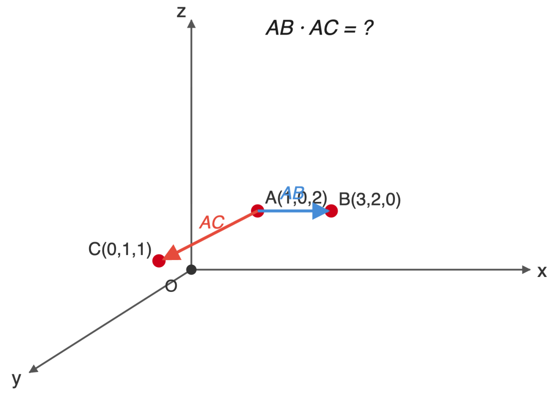
정답: ①

매개변수 미분법에 의해 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/dt}{dx/dt}$이다. $\frac{dx}{dt} = 2t$, $\frac{dy}{dt} = 3t^2 - 1$. 따라서 $\frac{dy}{dx} = \frac{3t^2-1}{2t}$. $t = 2$를 대입하면 $\frac{3\cdot 4-1}{2\cdot 2} = \frac{11}{4}$.

매개변수 미분법은 직접 y를 x로 표현하기 어려울 때(예: 사이클로이드 곡선) 매우 유용하다 - t를 매개로 두 함수를 연결하면 된다.

Q187 평면·공간벡터

공간좌표에서 세 점 $A(1,0,2)$, $B(3,2,0)$, $C(0,1,1)$이 있을 때, 두 벡터 $\vec{A}B$와 $\vec{A}C$의 내적 $\vec{A}B \cdot \vec{A}C$를 구하시오.



①) ① 0

②) ② 1

③) ③ 2

④) ④ 4

정답: ③

성분 계산: $\vec{A}B = B - A = (3-1, 2-0, 0-2) = (2, 2, -2)$, $\vec{A}C = C - A = (0-1, 1-0, 1-2) = (-1, 1, -1)$. 내적은 대응 성분의 곱의 합: $\vec{A}B \cdot \vec{A}C = (2)(-1) + (2)(1) + (-2)(-1) = -2 + 2 + 2 = 2$.

내적이 양수이면 두 벡터가 이루는 각이 예각, 0이면 직각, 음수이면 둔각이다. 여기서는 양수이므로 $\angle BAC$가 예각이다.

Q188 확률

주머니 안에 빨간 공 4개와 파란 공 6개가 들어 있다. 한 개씩 두 번 비복원으로 꺼낼 때, 두 번째에 꺼낸 공이 빨간색이라는 조건 아래 첫 번째에 꺼낸 공도 빨간색일 확률을 구하시오.

①) ① $\frac{1}{5}$
②) ② $\frac{1}{3}$
③) ③ $\frac{2}{5}$
④) ④ $\frac{1}{2}$

정답: ②

사건 A: 첫 번째가 빨강, 사건 B: 두 번째가 빨강. $P(A \cap B) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{12}{90} = \frac{2}{15}$. $P(B)$는 두 경우로 나누어 계산: $P(B) = P(A)P(B|A) + P(A^c)P(B|A^c) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} + \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{12+24}{90} = \frac{36}{90} = \frac{2}{5}$. 따라서 $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2/15}{2/5} = \frac{1}{3}$.

비복원 추출에서 $P(B) = P(A) = \frac{4}{10}$이라는 직관적 사실(첫 번째와 두 번째 자리는 대칭) - 이를 이용하면 분모를 빠르게 구할 수 있다.

Q189 수열의 극한과 급수

$\lim_{n \to \infty} \dfrac{2n^2 + 3n - 1}{n^2 + 5}$의 값을 구하시오.

①) ① 0
②) ② 1
③) ③ 2
④) ④ 3

정답: ③ 2

분자와 분모의 최고차항이 모두 n^2이다. 분자, 분모를 n^2으로 나누면 $\lim_{n \to \infty} \dfrac{2 + 3/n - 1/n^2}{1 + 5/n^2} = \dfrac{2}{1} = 2$이다. 분수꼴 수열의 극한에서 분모와 분자의 최고차항 차수가 같으면 극한값은 최고차항 계수의 비가 된다.

분모의 차수가 분자보다 크면 극한은 0, 같으면 최고차 계수비, 분자가 더 크면 발산한다.

Q190 순열·조합 심화 + 이항정리

서로 다른 6명을 원탁에 둘러앉게 하는 방법의 수를 구하시오.

①) ① 60
②) ② 120
③) ③ 360
④) ④ 720

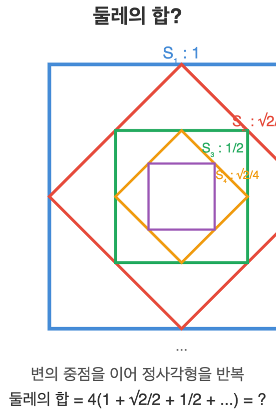
정답: ② 120

n명을 원탁에 앉히는 원순열의 수는 $(n-1)!$이다. 한 사람의 자리를 고정하면 회전을 통해 같아지는 경우를 중복 계산하지 않을 수 있고, 나머지 $n-1$명의 순서만 결정하면 되기 때문이다. 따라서 답은 $(6-1)! = 5! = 120$가지이다.

원순열은 회전을 같은 것으로 보지만 뒤집기까지 같다고 보면 염주순열이 되어 $(n-1)!/2$이 된다.

Q191 수열의 극한과 급수

한 변의 길이가 1인 정사각형 S_1이 있다. S_1의 네 변의 중점을 이어 만든 정사각형을 S_2, S_2의 네 변의 중점을 이어 만든 정사각형을 S_3이라 하자. 이와 같은 방법으로 정사각형 S_n을 한없이 만들 때, 모든 정사각형의 둘레의 합 $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$을 구하시오. (단, l_n은 S_n의 둘레이다.)



①) ① $4+2\sqrt{2}$
②) ② $8+4\sqrt{2}$
③) ③ $4+4\sqrt{2}$
④) ④ $8\sqrt{2}$

🎯 **정답:** ② $8+4\sqrt{2}$

📖 S_n의 한 변의 길이를 a_n이라 하면 $a_1 = 1$이다. 한 변의 중점을 이어 만든 새 정사각형의 변 길이는 원래의 $\frac{\sqrt{2}}{2}$배이므로 $a_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}a_n$이다. 둘레 $l_n = 4a_n$도 같은 공비로 등비수열을 이루며 $l_1 = 4$, 공비 $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$이다. $|r| < 1$이므로 무한등비급수의 합은 $\frac{4}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{8}{2-\sqrt{2}} = \frac{8(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})} = \frac{8(2+\sqrt{2})}{2} = 8+4\sqrt{2}$ 이다.

💡 변의 중점을 이은 정사각형은 원래 정사각형 넓이의 정확히 절반을 차지한다.

Q192 통계

확률변수 X가 정규분포 $N(50, 10^2)$을 따를 때 $P(X \geq 60)$의 값을 구하시오. (단, $P(0 \leq Z \leq 1) = 0.3413$이다.)

①) ① 0.0228
②) ② 0.1587
③) ③ 0.3413
④) ④ 0.4772

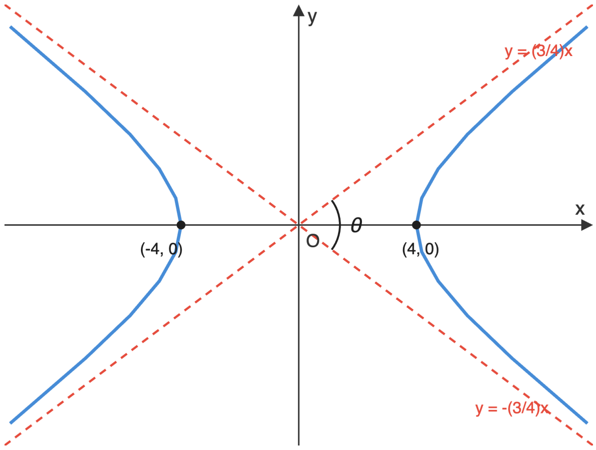
🎯 **정답: ② 0.1587**

📖 표준화 변수 $Z = \frac{X-50}{10}$을 이용한다. $X = 60$일 때 $Z = \frac{60-50}{10} = 1$이다. 따라서 $P(X \geq 60) = P(Z \geq 1) = 0.5 - P(0 \leq Z \leq 1) = 0.5 - 0.3413 = 0.1587$이다.

💡 정규분포는 평균을 중심으로 좌우대칭이며, 약 68%의 자료가 $\mu \pm \sigma$ 범위 안에 들어온다.

Q193 이차곡선

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$의 두 점근선이 이루는 예각을 θ라 할 때 $\tan\theta$의 값을 구하시오.



①) ① $\dfrac{7}{24}$

②) ② $\dfrac{24}{7}$

③) ③ $\dfrac{12}{5}$

④) ④ $\dfrac{5}{12}$

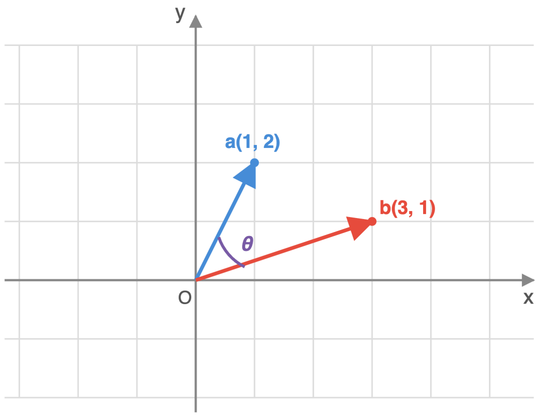
🎯 **정답: ② $\dfrac{24}{7}$**

📖 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 점근선은 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$이다. $a=4$, $b=3$이므로 점근선의 기울기는 $m_1=\dfrac{3}{4}$, $m_2=-\dfrac{3}{4}$이다. 두 직선이 이루는 각의 탄젠트는 $\tan\theta=\left|\dfrac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|=\dfrac{|3/4-(-3/4)|}{|1+(3/4)(-3/4)|}=\dfrac{3/2}{7/16}=\dfrac{24}{7}$이다. 이 값은 양수이므로 예각의 탄젠트값이다.

💡 쌍곡선의 두 점근선이 직각을 이루는 경우 직각쌍곡선이라 부르며, 이때 $a=b$이다.

Q194 평면·공간벡터

두 벡터 $\vec{a} = (1, 2), \vec{b} = (3, 1)$이 이루는 각을 θ라 할 때 $\cos\theta$의 값을 구하시오.



①) ① $\frac{1}{2}$
②) ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$
③) ③ $\frac{\sqrt{3}}{2}$
④) ④ $\frac{\sqrt{5}}{5}$

정답: ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$

내적 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 5$이다. 크기는 $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$, $|\vec{b}| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$ 이다. 따라서 $\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{5}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$이다. 즉 $\theta = 45°$이다.

두 벡터의 내적이 0이면 두 벡터는 서로 수직이며, 양수이면 예각, 음수이면 둔각을 이룬다.

Q195 통계

정규분포 $N(100, 25^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 25인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$가 95 이상 110 이하일 확률을 구하시오. (단, $P(0 \leq Z \leq 1) = 0.3413$, $P(0 \leq Z \leq 2) = 0.4772$이다.)

①) ① 0.6826
②) ② 0.8185
③) ③ 0.9544
④) ④ 0.5328

정답: ② 0.8185

표본크기 $n = 25$, 모표준편차 $\sigma = 25$이므로 표본평균의 분포는 $\overline{X} \sim N\left(100, \frac{25^2}{25}\right) = N(100, 5^2)$이다. 표준화 $Z = \frac{\overline{X} - 100}{5}$를 사용하면 $\overline{X} = 95$일 때 $Z = -1$, $\overline{X} = 110$일 때 $Z = 2$이다. 따라서
$P(95 \leq \overline{X} \leq 110) = P(-1 \leq Z \leq 2) = P(0 \leq Z \leq 1) + P(0 \leq Z \leq 2) = 0.3413 + 0.4772 = 0.8185$이다.

표본크기 n이 커질수록 표본평균의 분산은 $\frac{\sigma^2}{n}$로 작아져 모평균 추정의 정확도가 높아진다.

Q196 초월함수의 미분

함수 $f(x) = \ln(x^2 + 1)$에 대하여 $f'(1)$의 값은?

①) ① $\frac{1}{2}$
②) ② 1
③) ③ $\frac{3}{2}$
④) ④ 2

🎯 **정답:** ② 1

📖 1단계: $\ln u$의 미분은 u'/u이므로 $u = x^2 + 1$로 두면 $u' = 2x$.

2단계: $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$.

3단계: $x = 1$ 대입하면 $f'(1) = \frac{2 \cdot 1}{1^2+1} = \frac{2}{2} = 1$.

💡 $\ln(x^2 + 1)$은 모든 실수에서 정의되는 매끈한 함수라 미적분에서 자주 등장합니다.

Q197 확률

빨간 공 3개와 파란 공 2개가 들어 있는 주머니에서 한 개를 꺼내고 (꺼낸 공은 다시 넣지 않음), 다시 한 개를 꺼낼 때 두 개가 모두 빨간 공일 확률은?

①) ① $\frac{1}{5}$
②) ② $\frac{3}{10}$
③) ③ $\frac{2}{5}$
④) ④ $\frac{1}{2}$

🎯 **정답:** ② $\frac{3}{10}$

📖 1단계: 첫 번째에 빨간 공일 확률 $P(A) = \frac{3}{5}$.

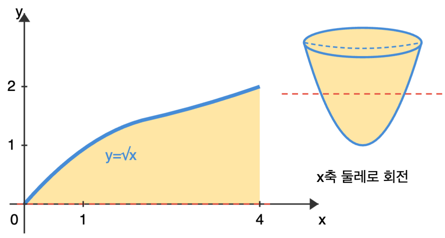
2단계: 첫 번째가 빨간 공일 때, 남은 4개 중 빨간 공이 2개이므로 두 번째도 빨간 공일 확률 $P(B|A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

3단계: 곱셈정리에 의해 $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$.

💡 비복원추출은 한 번 꺼낼 때마다 표본공간이 줄어들어 조건부확률이 자연스럽게 등장합니다.

Q198 미적분 활용

곡선 $y = \sqrt{x}$ 를 x축의 둘레로 회전시켜서 만든 회전체에서 $0 \leq x \leq 4$ 부분의 부피는?



①) ① 4π
②) ② 6π
③) ③ 8π
④) ④ 16π

🎯 **정답: ③ 8π**

📖 1단계: 회전체 부피 공식 $V = \pi \int_a^b y^2\, dx$를 적용한다.

2단계: $y = \sqrt{x}$ 이므로 $y^2 = x$.

3단계: $V = \pi \int_0^4 x\, dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^4$.

4단계: $\pi \cdot \frac{16}{2} = 8\pi$.

💡 $y = \sqrt{x}$ 의 회전체는 정확히 포물면(paraboloid) 모양이 됩니다.

Q199 순열·조합 심화 + 이항정리

영문자 S, U, C, C, E, S, S 7개를 일렬로 나열하는 경우의 수는?

①) ① 210
②) ② 420
③) ③ 720
④) ④ 840

🎯 **정답: ② 420**

📖 1단계: 7개의 문자 중 S가 3개, C가 2개, U와 E가 각각 1개씩이다.

2단계: 같은 것이 있는 순열의 수는 $\frac{n!}{p!q!\cdots}$ 공식을 이용한다.

3단계: 경우의 수 $= \frac{7!}{3! \cdot 2!} = \frac{5040}{6 \cdot 2} = \frac{5040}{12}$.

4단계: 따라서 420가지.

💡 같은 것이 있는 순열은 동전이나 깃발 배열, 격자 경로 문제에서도 똑같은 공식이 등장합니다.

Q200 확률

한 번의 시행에서 성공할 확률이 $\frac{1}{3}$인 시행을 4번 독립적으로 반복할 때, 정확히 2번 성공할 확률은?

①) ① $\frac{2}{9}$
②) ② $\frac{8}{27}$
③) ③ $\frac{1}{3}$
④) ④ $\frac{4}{9}$

🎯 **정답: ② $\frac{8}{27}$**

📖 1단계: 독립시행의 확률 공식 $P = {}_nC_r\, p^r(1-p)^{n-r}$을 사용한다.

2단계: $n = 4, r = 2, p = \frac{1}{3}, 1 - p = \frac{2}{3}$ 대입.

3단계: ${}_4C_2 = 6$이므로 확률 $= 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2$.

4단계: $6 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{24}{81} = \frac{8}{27}$.

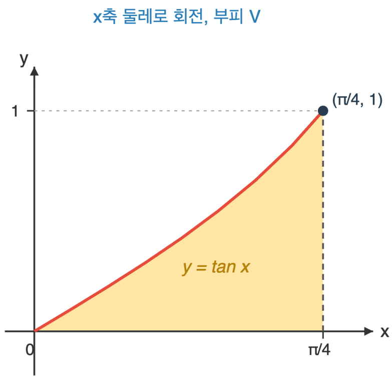
💡 이 분포가 바로 이항분포 $B(4, 1/3)$이며, 시행 횟수가 늘어나면 정규분포 모양에 가까워집니다.

📝 고3 수학 일반

총 40문제 · 문제와 정답·풀이 포함

Q201 미적분 활용

곡선 $y = \tan x$, x축, 직선 $x = \dfrac{\pi}{4}$로 둘러싸인 영역을 x축 둘레로 회전시킨 회전체의 부피는?



①) ① $\pi - \dfrac{\pi^2}{4}$

②) ② $\dfrac{\pi^2}{4}$

③) ③ $\pi + \dfrac{\pi^2}{4}$

④) ④ $1 - \dfrac{\pi}{4}$

🎯 **정답:** ① $\pi - \dfrac{\pi^2}{4}$

📖 1단계: 회전체 부피 공식 $V = \pi \displaystyle\int_0^{\pi/4} y^2\,dx = \pi \int_0^{\pi/4} \tan^2 x\,dx.$

2단계: 삼각함수 항등식 $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$을 이용한다.

3단계: $V = \pi \displaystyle\int_0^{\pi/4} (\sec^2 x - 1)\,dx = \pi \Big[\tan x - x\Big]_0^{\pi/4}.$

4단계: $\pi\left\{\left(\tan\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{4}\right) - (0-0)\right\} = \pi\left(1 - \dfrac{\pi}{4}\right) = \pi - \dfrac{\pi^2}{4}.$

💡 $\tan^2 x$의 적분 자체는 초등함수이지만 항등식 변환 없이는 풀리지 않는 대표적 트릭 적분입니다.

Q202 확률

어느 회사 직원의 60%는 남성, 40%는 여성이다. 남성 중 30%, 여성 중 50%가 안경을 쓴다. 임의로 한 직원을 뽑았을 때 그 직원이 안경을 쓰고 있다면, 그 직원이 여성일 확률은?

①) ① $\frac{9}{19}$
②) ② $\frac{10}{19}$
③) ③ $\frac{11}{19}$
④) ④ $\frac{12}{19}$

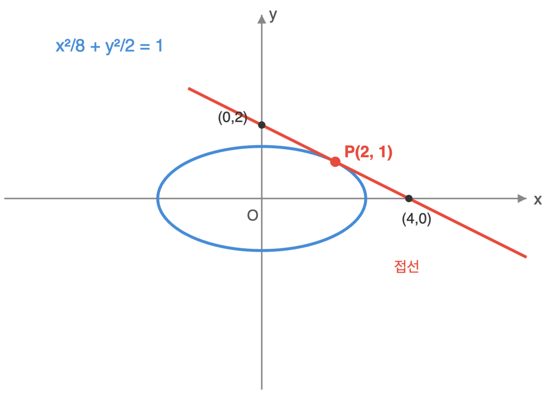
🎯 **정답:** ② $\frac{10}{19}$

📖 1단계: 사건을 정의한다. M: 남성, F: 여성, G: 안경 착용. $P(M) = 0.6, P(F) = 0.4, P(G|M) = 0.3, P(G|F) = 0.5$.
2단계: 전체확률 $P(G) = P(M)P(G|M) + P(F)P(G|F) = 0.6 \times 0.3 + 0.4 \times 0.5 = 0.18 + 0.20 = 0.38$.
3단계: 조건부확률 $P(F|G) = \frac{P(F)P(G|F)}{P(G)} = \frac{0.20}{0.38}$.
4단계: 분모 분자에 100을 곱하면 $\frac{20}{38} = \frac{10}{19}$.

💡 이 형태의 문제를 베이즈 정리(Bayes' theorem) 라 하며, 의료 진단이나 스팸 필터의 핵심 원리입니다.

Q203 이차곡선

타원 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$ 위의 점 $(2, 1)$에서의 접선의 방정식은?



①) ① $x + 2y = 2$
②) ② $x + 2y = 4$
③) ③ $x + y = 3$
④) ④ $2x + y = 5$

🎯 **정답:** ② $x + 2y = 4$

📖 1단계: 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점 (x_0, y_0)에서의 접선의 방정식은 $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$.
2단계: $a^2 = 8, b^2 = 2$이고 $(x_0, y_0) = (2, 1)$ 대입하면 $\frac{2x}{8} + \frac{1 \cdot y}{2} = 1$.
3단계: 정리하면 $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1$.
4단계: 양변에 4를 곱하면 $x + 2y = 4$.

💡 포물선, 타원, 쌍곡선 모두 '제곱을 곱으로 바꾸는' 접선 공식이 통용됩니다. 이는 음함수 미분과 같은 결과입니다.

Q204 수열의 극한과 급수

$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+4n+1} - n)$의 값은?

①) ① 1

②) ② 2

③) ③ 3

④) ④ 4

🎯 **정답: ②**

📖 분자를 유리화한다.
$\sqrt{n^2+4n+1} - n = \frac{(\sqrt{n^2+4n+1} - n)(\sqrt{n^2+4n+1} + n)}{\sqrt{n^2+4n+1} + n} = \frac{4n+1}{\sqrt{n^2+4n+1} + n}$
분자분모를 n으로 나누면 $\frac{4+1/n}{\sqrt{1+4/n+1/n^2} + 1}$.
$n\to\infty$이면 $\frac{4}{1+1} = 2$.

💡 $\sqrt{n^2+\cdots} - n$ 꼴 부정형은 거의 항상 분자유리화로 풀린다.

Q205 초월함수의 미분

함수 $f(x) = x\ln x$에 대하여 $f'(e)$의 값은? (단, e는 자연상수)

①) ① 1

②) ② 2

③) ③ e

④) ④ $e+1$

🎯 **정답: ②**

📖 곱의 미분법으로 $f'(x) = (x)'\ln x + x\cdot(\ln x)' = \ln x + x\cdot\frac{1}{x} = \ln x + 1$.
$x = e$를 대입하면 $f'(e) = \ln e + 1 = 1 + 1 = 2$.

💡 $f(x) = x\ln x$는 $x = 1/e$에서 최솟값 $-1/e$를 가진다.

Q206 초월함수의 적분

정적분 $\int_0^{\pi/4} \sec^2 x\,dx$의 값은?

①) ① 0

②) ② $\frac{1}{2}$

③) ③ 1

④) ④ $\sqrt{2}$

🎯 **정답: ③**

📖 $(\tan x)' = \sec^2 x$이므로 $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$.
$\int_0^{\pi/4} \sec^2 x\,dx = [\tan x]_0^{\pi/4} = \tan(\pi/4) - \tan 0 = 1 - 0 = 1$.

💡 $\sec^2$의 부정적분이 $\tan$이라는 사실은 $\tan$의 도함수 공식의 역에 해당한다.

Q207 통계

확률변수 X가 정규분포 $N(50, 5^2)$을 따를 때, $P(45 \le X \le 60)$의 값은? (단, $P(0 \le Z \le 1) = 0.3413$, $P(0 \le Z \le 2) = 0.4772$)

①) ① 0.6826

②) ② 0.7745

③) ③ 0.8185

④) ④ 0.9544

🎯 **정답: ③**

📖 $Z = \frac{X-50}{5}$로 표준화한다.

$X = 45 \Rightarrow Z = -1, X = 60 \Rightarrow Z = 2.$

따라서 $P(45 \le X \le 60) = P(-1 \le Z \le 2) = P(0 \le Z \le 1) + P(0 \le Z \le 2) = 0.3413 + 0.4772 = 0.8185.$

💡 정규분포에서 평균을 중심으로 한 비대칭 구간 확률은 두 양쪽 부분의 확률을 더해 얻는다.

Q208 수열의 극한과 급수

무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3^n} + \frac{1}{2^n}\right)$의 값은?

①) ① 1

②) ② $\frac{3}{2}$

③) ③ 2

④) ④ $\frac{5}{2}$

🎯 **정답: ③**

📖 두 무한등비급수로 분리한다.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} = \frac{2/3}{1-1/3} = \frac{2/3}{2/3} = 1.$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1/2}{1-1/2} = 1.$

따라서 합은 $1 + 1 = 2$.

💡 수렴하는 두 무한급수는 항별로 더해도 수렴값을 그대로 더할 수 있다(선형성).

Q209 순열·조합 심화 + 이항정리

다항식 $(2x+1)^7$의 전개식에서 x^5의 계수는?

①) ① 84

②) ② 336

③) ③ 672

④) ④ 1344

🎯 **정답: ③**

📖 이항정리에 의해 일반항은 $\binom{7}{r}(2x)^{7-r}(1)^r = \binom{7}{r}2^{7-r}x^{7-r}$.

x^5이 되려면 $7 - r = 5$, 즉 $r = 2$.

따라서 계수는 $\binom{7}{2} \cdot 2^5 = 21 \cdot 32 = 672$.

💡 $(ax+b)^n$의 일반항을 쓸 때 a의 거듭제곱을 빠뜨리는 실수가 시험에서 가장 흔하다.

Q210 초월함수의 적분

정적분 $\int_1^e x\ln x\,dx$의 값은?

①) ① $\frac{e^2-1}{4}$

②) ② $\frac{e^2+1}{4}$

③) ③ $\frac{e^2-1}{2}$

④) ④ $\frac{e^2+1}{2}$

🎯 **정답: ②**

📖 $u=\ln x,\ dv=x\,dx$로 두면 $du=\frac{1}{x}dx,\ v=\frac{x^2}{2}$.

$\int_1^e x\ln x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e-\int_1^e \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx$

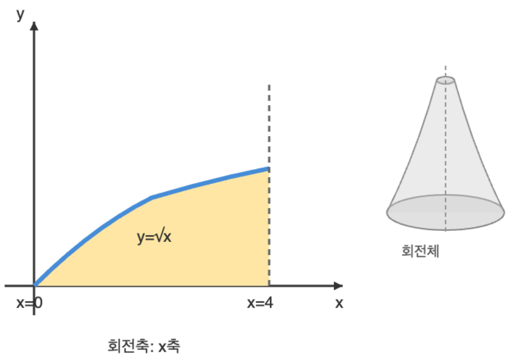
$=\frac{e^2}{2}\ln e-0-\int_1^e \frac{x}{2}dx=\frac{e^2}{2}-\left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e$

$=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{e^2+1}{4}$.

💡 $\ln x$가 들어가면 보통 $\ln x$를 u로 두는 것이 빠르다(미분이 깔끔해지므로).

Q211 미적분 활용

곡선 $y=\sqrt{x}$ $(0\le x\le 4)$와 x축, 직선 $x=4$로 둘러싸인 영역을 x축의 둘레로 회전시켜 만든 회전체의 부피는?



①) ① 4π

②) ② 6π

③) ③ 8π

④) ④ 16π

🎯 **정답: ③**

📖 x축 회전체의 부피 공식 $V=\pi\int_a^b y^2\,dx$ 적용.

$y^2=(\sqrt{x})^2=x$.

$V=\pi\int_0^4 x\,dx=\pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4=\pi\cdot\frac{16}{2}=8\pi$.

💡 $y=\sqrt{x}$ 의 회전체는 깔때기 모양이며, 같은 영역을 y축으로 회전시키면 부피는 달라진다.

Q212 확률

두 공장 A, B에서 같은 부품을 생산한다. 전체 부품 중 공장 A의 생산 비율이 60%이고 그 불량률은 2%, 공장 B의 생산 비율이 40%이고 그 불량률은 5%이다. 임의로 뽑은 부품이 불량일 때, 그 부품이 공장 A에서 생산되었을 조건부확률은?

①) ① $\frac{1}{4}$
②) ② $\frac{3}{8}$
③) ③ $\frac{1}{2}$
④) ④ $\frac{5}{8}$

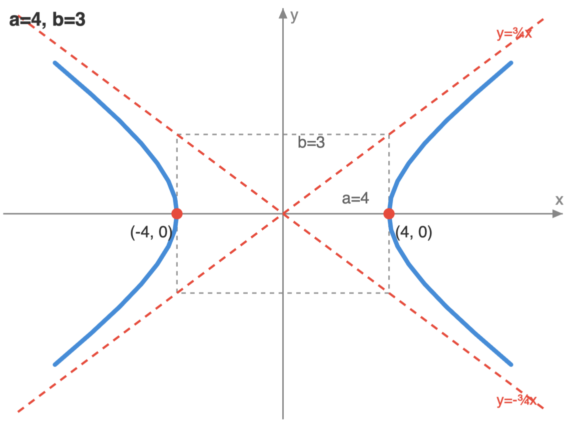
🎯 **정답: ②**

📖 사건을 정의: A=공장 A 생산, B=공장 B 생산, D=불량.
$P(A \cap D) = 0.6 \times 0.02 = 0.012.$
$P(B \cap D) = 0.4 \times 0.05 = 0.020.$
$P(D) = 0.012 + 0.020 = 0.032.$
$P(A|D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{0.012}{0.032} = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}.$

💡 공장 A가 더 많이 생산해도 불량률이 낮으면 '불량 한 개'의 출처는 공장 B가 더 유력할 수 있다.

Q213 이차곡선

쌍곡선 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$의 두 점근선의 방정식을 모두 옳게 나타낸 것은?



①) ① $y = \pm\frac{3}{4}x$
②) ② $y = \pm\frac{4}{3}x$
③) ③ $y = \pm\frac{9}{16}x$
④) ④ $y = \pm\frac{16}{9}x$

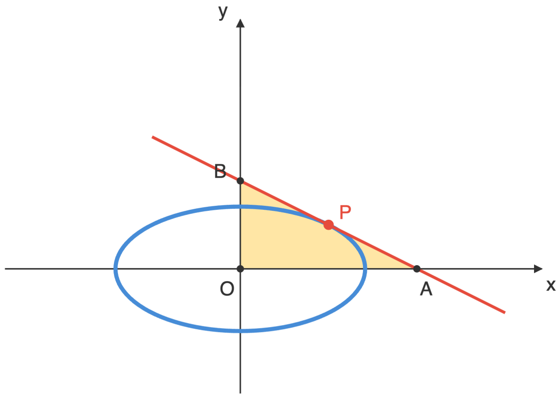
🎯 **정답: ①**

📖 표준형 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$의 점근선은 $y = \pm\frac{b}{a}x.$
$a^2 = 16$이므로 $a = 4$, $b^2 = 9$이므로 $b = 3.$
따라서 점근선은 $y = \pm\frac{3}{4}x.$

💡 쌍곡선의 점근선은 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$으로 두고 인수분해해도 얻을 수 있다.

Q214 이차곡선

타원 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$ 위의 점 $P(2,1)$에서의 접선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, 삼각형 OAB의 넓이는? (단, O는 원점)



①) ① 2
②) ② 3
③) ③ 4
④) ④ 5

🎯 **정답: ③**

📖 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 (x_1,y_1)에서의 접선은 $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$.
점 $P(2,1)$에서: $\frac{2x}{8}+\frac{1\cdot y}{2}=1$, 즉 $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1$.
x축과의 교점: $y=0 \Rightarrow x=4$, A$(4,0)$.
y축과의 교점: $x=0 \Rightarrow y=2$, B$(0,2)$.
삼각형 OAB의 넓이 $=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2=4$.
💡 타원 위 점에서의 접선식은 원 $x^2+y^2=r^2$의 접선식 $x_1x+y_1y=r^2$의 일반화이다.

Q215 통계

어느 회사 직원들의 통근 시간 X(분)는 정규분포 $N(40,8^2)$을 따른다. 이 회사의 직원 중 16명을 임의추출하여 표본평균 $\bar{X}$를 구할 때, $P(\bar{X}\geq 42)$의 값은? (단, $P(0\leq Z\leq 1)=0.3413$)

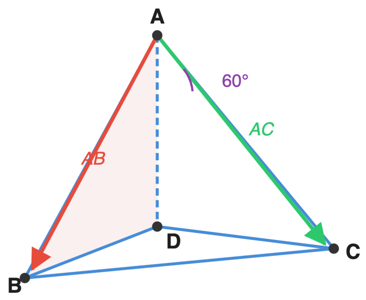
①) ① 0.0228
②) ② 0.1587
③) ③ 0.3085
④) ④ 0.3413

🎯 **정답: ②**

📖 표본평균의 분포는 $\bar{X}\sim N\left(40,\frac{8^2}{16}\right)=N(40,4)=N(40,2^2)$.
표준화: $Z=\frac{\bar{X}-40}{2}$.
$\bar{X}=42$일 때 $Z=\frac{42-40}{2}=1$.
$P(\bar{X}\geq 42)=P(Z\geq 1)=0.5-P(0\leq Z\leq 1)=0.5-0.3413=0.1587$.
💡 표본의 크기가 커질수록 표본평균의 분산은 σ^2/n로 작아져, 평균 주변에 더 좁게 모인다.

Q216 평면·공간벡터

한 모서리의 길이가 2인 정사면체 ABCD에서 $\vec{A}B \cdot \vec{A}C$의 값은?



①) ① 1

②) ② 2

③) ③ $2\sqrt{2}$

④) ④ 4

🎯 **정답: ②**

📖 정사면체의 모든 면은 정삼각형이므로, 면 ABC는 정삼각형이다.

따라서 $|\vec{A}B| = |\vec{A}C| = 2$이고 두 벡터 사이의 각은 $60°$.

$\vec{A}B \cdot \vec{A}C = |\vec{A}B||\vec{A}C|\cos 60° = 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 2.$

💡 정사면체에서 한 꼭짓점에서 나오는 세 모서리 사이의 각은 모두 $60°$로 같다.

Q217 초월함수의 적분

정적분 $\int_{e}^{e^2} \frac{1}{x\ln x} dx$의 값은?

①) ① 0

②) ② $\ln 2$

③) ③ 1

④) ④ 2

🎯 **정답: ②**

📖 $u = \ln x$로 치환하면 $du = \frac{1}{x}dx.$

적분 구간 변환: $x = e \Rightarrow u = \ln e = 1,\ x = e^2 \Rightarrow u = \ln e^2 = 2.$

$\int_{e}^{e^2} \frac{1}{x\ln x}dx = \int_{1}^{2} \frac{1}{u}du = [\ln u]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$

💡 $\frac{1}{x\ln x}$ 형태처럼 분모에 함수와 그 도함수의 단서가 함께 있으면 거의 항상 그 함수를 u로 두면 풀린다.

Q218 수열의 극한과 급수

$\lim_{n \to \infty} \frac{3n^2 + 5n - 1}{n^2 - 2n + 4}$의 값은?

①) ① 1

②) ② 2

③) ③ 3

④) ④ 5

🎯 **정답: ③**

📖 분자와 분모의 최고차항이 모두 n^2이므로, 분자와 분모를 n^2으로 나눈다.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{3n^2 + 5n - 1}{n^2 - 2n + 4} = \lim_{n \to \infty} \frac{3 + \frac{5}{n} - \frac{1}{n^2}}{1 - \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2}}$$

$n \to \infty$일 때 $\frac{1}{n} \to 0, \frac{1}{n^2} \to 0$이므로 극한값은 $\frac{3+0-0}{1-0+0} = 3$이다.

💡 분자와 분모가 같은 차수의 다항식이면 극한값은 최고차항 계수의 비와 같다는 사실을 외워두면 빠르게 답을 찾을 수 있다.

Q219 통계

확률변수 X가 정규분포 $N(70, 5^2)$을 따를 때, $P(60 \le X \le 80)$의 값은? (단, $P(0 \le Z \le 2) = 0.4772$)

①) ① 0.6826

②) ② 0.8413

③) ③ 0.9544

④) ④ 0.9772

🎯 **정답: ③**

📖 $X \sim N(70, 5^2)$이므로 $Z = \frac{X - 70}{5}$로 표준화한다.

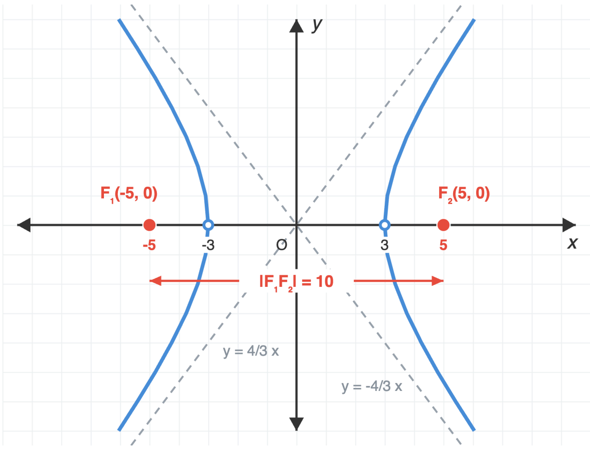
$X = 60$일 때 $Z = \frac{60 - 70}{5} = -2$, $X = 80$일 때 $Z = \frac{80 - 70}{5} = 2$

따라서 $P(60 \le X \le 80) = P(-2 \le Z \le 2) = 2 \cdot P(0 \le Z \le 2) = 2 \times 0.4772 = 0.9544$이다.

💡 정규분포에서 평균을 중심으로 표준편차의 2배 범위 안에 약 95.44%의 자료가 들어 있다는 점은 통계 분야에서 매우 자주 사용되는 사실이다.

Q220 이차곡선

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$의 두 초점 사이의 거리는?



①) ① 6

②) ② 8

③) ③ 10

④) ④ $2\sqrt{7}$

🎯 **정답: ③**

📖 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$의 초점은 $(\pm c, 0)$이고, $c^2 = a^2 + b^2$이다.

주어진 식에서 $a^2 = 9, b^2 = 16$이므로 $c^2 = 9 + 16 = 25$, 따라서 $c = 5$.

두 초점은 $(-5, 0), (5, 0)$이므로 두 초점 사이의 거리는 $|5 - (-5)| = 10$이다.

💡 쌍곡선은 타원과 달리 $c^2 = a^2 + b^2$로, 초점이 항상 꼭짓점보다 더 바깥쪽에 위치한다.

Q221 초월함수의 적분

정적분 $\displaystyle\int_1^e \ln x\,dx$의 값은?

①) ① $e - 1$

②) ② 1

③) ③ e

④) ④ 2

🎯 **정답: ②**

📖 부분적분법을 적용한다. $u = \ln x, dv = dx$로 놓으면 $du = \dfrac{1}{x}dx, v = x$이다.

$$\int_1^e \ln x\,dx = \left[x\ln x\right]_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x}dx$$

$$= (e \cdot 1 - 1 \cdot 0) - \int_1^e 1\,dx = e - (e - 1) = 1$$이다.

💡 $\ln x$의 부정적분 $x\ln x - x$는 부분적분의 대표적 예제로, 미적분 곳곳에서 등장한다.

Q222 수열의 극한과 급수

무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$의 값은?

①) ① $\frac{1}{2}$
②) ② $\frac{2}{3}$
③) ③ $\frac{3}{4}$
④) ④ 1

정답: ③

부분분수 분해를 한다. $\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$

부분합 $S_N = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2}\right)$

$N \to \infty$일 때 뒤의 두 항은 0으로 수렴하므로

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$이다.

인접하지 않은 두 항이 상쇄되는 망원급수는 항이 서로 멀리 떨어진 만큼 남는 항의 개수가 늘어난다.

Q223 평면·공간벡터

두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$가 $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$을 만족할 때, $|\vec{a} + \vec{b}|$의 값은?

①) ① $\sqrt{13}$
②) ② $\sqrt{17}$
③) ③ $\sqrt{19}$
④) ④ $\sqrt{21}$

정답: ③

벡터의 크기는 자기 자신과의 내적의 제곱근이다.

$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$

$= 2^2 + 2 \cdot 3 + 3^2 = 4 + 6 + 9 = 19$

따라서 $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{19}$ 이다.

이 식은 코사인법칙 $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$의 벡터 표현이다.

Q224 순열·조합 심화 + 이항정리

숫자 $0, 1, 2, 3$에서 중복을 허용하여 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는?

①) ① 64
②) ② 128
③) ③ 192
④) ④ 256

정답: ③

네 자리 자연수가 되려면 첫 자리(천의 자리)는 0이 될 수 없다.

천의 자리: $1, 2, 3$ 중 한 가지 $\to$ 3가지

백, 십, 일의 자리: $0, 1, 2, 3$ 중 각각 한 가지 (중복 허용) $\to$ 각 4가지

곱의 법칙에 의해 총 개수는 $3 \times 4 \times 4 \times 4 = 3 \times 4^3 = 192$이다.

중복순열은 ${}_n\Pi_r = n^r$로 표현하지만 첫 자리에 제한 조건이 붙는 자연수 문제에서는 자리별로 나누어 곱한다.

Q225 통계

모표준편차가 6인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 36인 표본을 임의추출하여 표본평균을 구하니 80이었다. 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은? (단, $P(|Z| \leq 1.96) = 0.95$)

①) ① (78.04, 81.96)

②) ② (78.50, 81.50)

③) ③ (79.04, 80.96)

④) ④ (76.08, 83.92)

🎯 **정답: ①**

📖 표본평균 $\bar{X}$의 표준편차는 $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{6}{\sqrt{36}} = 1$이다.

신뢰도 95%의 신뢰구간 공식:

$\bar{X} - 1.96 \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{X} + 1.96 \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

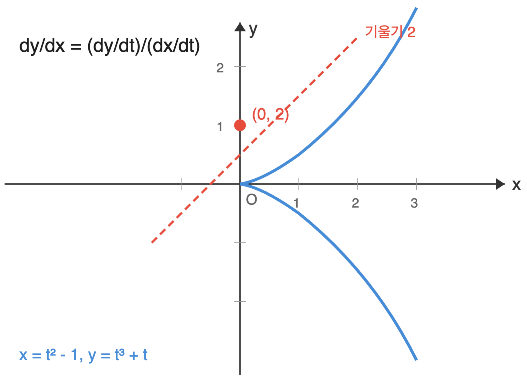
$80 - 1.96 \times 1 \leq m \leq 80 + 1.96 \times 1$

$78.04 \leq m \leq 81.96$, 즉 (78.04, 81.96)이다.

💡 신뢰도가 높을수록 신뢰구간의 폭은 넓어진다. 신뢰도 99%이면 1.96 대신 2.58을 사용한다.

Q226 미적분 활용

매개변수로 표현된 곡선 $x = t^2 - 1,\ y = t^3 + t$ 위의 $t = 1$에 대응하는 점에서의 접선의 기울기는?



①) ① 1

②) ② 2

③) ③ 3

④) ④ 4

🎯 **정답: ②**

📖 매개변수로 표현된 곡선의 접선의 기울기는 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/dt}{dx/dt}$이다.

$\dfrac{dx}{dt} = 2t,\ \dfrac{dy}{dt} = 3t^2 + 1$

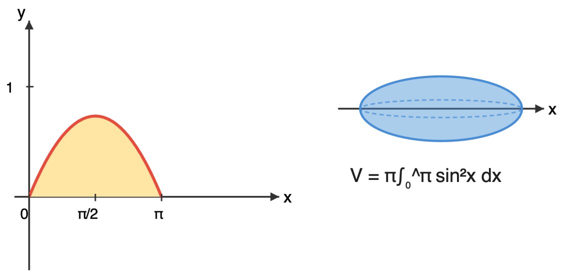
$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3t^2 + 1}{2t}$

$t = 1$일 때 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3 \cdot 1 + 1}{2 \cdot 1} = \dfrac{4}{2} = 2$이다.

💡 매개변수 미분은 물체의 운동을 다룰 때 시각 t에 대한 위치 변화율을 직접 다룰 수 있어 물리학에서 매우 자주 사용된다.

Q227 미적분 활용

곡선 $y = \sin x\,(0 \le x \le \pi)$와 x축으로 둘러싸인 부분을 x축 둘레로 회전시켜서 얻은 회전체의 부피는?



①) ① $\frac{\pi^2}{4}$
②) ② $\frac{\pi^2}{2}$
③) ③ π^2
④) ④ $2\pi^2$

🎯 **정답: ②**

📖 x축 회전체의 부피 공식: $V = \pi \int_a^b \{f(x)\}^2\,dx$

$V = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx$

반각공식 $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$를 사용한다.

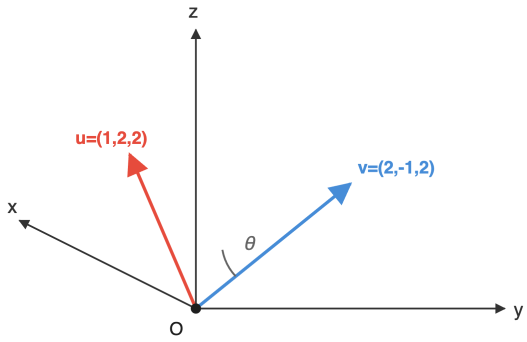
$V = \pi \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2}\,dx = \frac{\pi}{2}\left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi}$

$= \frac{\pi}{2}\{(\pi - 0) - (0 - 0)\} = \frac{\pi^2}{2}$이다.

💡 $\sin^2 x$나 $\cos^2 x$의 적분이 필요할 때 반각공식 $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$를 이용하면 차수를 낮춰 적분할 수 있다.

Q228 평면·공간벡터

공간 위의 두 직선 ℓ_1, ℓ_2의 방향벡터가 각각 $\vec{u} = (1, 2, 2)$, $\vec{v} = (2, -1, 2)$일 때, 두 직선이 이루는 각 θ $(0 \le \theta \le \frac{\pi}{2})$에 대하여 $\cos\theta$의 값은?



①) ① $\frac{2}{9}$
②) ② $\frac{1}{3}$
③) ③ $\frac{4}{9}$
④) ④ $\frac{5}{9}$

🎯 **정답: ③**

📖 두 직선이 이루는 각의 코사인값은 두 방향벡터의 내적과 크기로 구하되, 음수가 나오면 절댓값을 취한다.

내적: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 = 2 - 2 + 4 = 4$

크기: $|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$, $|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$

$\cos\theta = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{4}{3 \cdot 3} = \frac{4}{9}$이다.

💡 두 직선 사이의 각은 0에서 $\frac{\pi}{2}$ 범위로 정의하므로 내적이 음수일 때 절댓값을 취해 $\cos\theta \ge 0$이 되도록 한다.

Q229 순열·조합 심화 + 이항정리

$\left(2x + \frac{1}{x^2}\right)^9$의 전개식에서 상수항은?

①) ① 1344
②) ② 2688
③) ③ 5376
④) ④ 10752

🎯 **정답: ③**

📖 이항정리에 의해 일반항은

$\binom{9}{r}(2x)^{9-r}\left(\frac{1}{x^2}\right)^r = \binom{9}{r}2^{9-r}x^{9-r}x^{-2r} = \binom{9}{r}2^{9-r}x^{9-3r}$

상수항이 되려면 x의 지수가 0이어야 하므로 $9 - 3r = 0$, 즉 $r = 3$이다.

상수항 $= \binom{9}{3} \cdot 2^{9-3} = 84 \cdot 64 = 5376$이다.

💡 $\binom{9}{3} = 84$는 자주 등장하는 이항계수로 외워두면 편리하다.

Q230 수열의 극한과 급수

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{4n^2-3n+1}{2n^2+n-5}$의 값은?

①) ① 1

②) ② 2

③) ③ 3

④) ④ 4

정답: ② 2

📖 분모, 분자가 모두 n에 대한 이차식이므로 분모와 분자를 n^2으로 나눈다. $\dfrac{4-3/n+1/n^2}{2+1/n-5/n^2}$에서 $n\to\infty$일 때 $1/n, 1/n^2\to 0$이므로 분자는 4, 분모는 2로 수렴. 따라서 극한값은 $\dfrac{4}{2}=2$.

💡 같은 차수 유리식의 무한대 극한은 최고차항 계수의 비와 같다는 성질을 이용하면 한눈에 답을 찾을 수 있다.

Q231 초월함수의 미분

곡선 $y=\ln x$ 위의 점 $(1, 0)$에서의 접선의 방정식은?

①) ① $y=x$

②) ② $y=x-1$

③) ③ $y=x+1$

④) ④ $y=-x+1$

정답: ② $y=x-1$

📖 $y=\ln x$의 도함수는 $y'=\dfrac{1}{x}$. 점 $(1,0)$에서의 접선의 기울기는 $y'(1)=1$. 점 $(1,0)$을 지나고 기울기가 1인 직선은 $y-0=1\cdot(x-1)$, 즉 $y=x-1$.

💡 $y=\ln x$ 위의 점 $(1,0)$은 그래프가 x축과 만나는 유일한 점이며, 이 점에서의 접선의 기울기는 정확히 1이다.

Q232 초월함수의 적분

정적분 $\displaystyle\int_0^{\ln 2}\frac{e^x}{e^x+1}dx$의 값은?

①) ① $\ln 2$

②) ② $\ln 3$

③) ③ $\ln\dfrac{3}{2}$

④) ④ $\ln\dfrac{2}{3}$

정답: ③ $\ln\dfrac{3}{2}$

📖 $u=e^x+1$로 치환하면 $du=e^x dx$. $x=0$일 때 $u=2$, $x=\ln 2$일 때 $u=e^{\ln 2}+1=3$. 따라서

$$\int_0^{\ln 2}\frac{e^x}{e^x+1}dx=\int_2^3\frac{1}{u}du=[\ln u]_2^3=\ln 3-\ln 2=\ln\frac{3}{2}.$$

💡 분자가 분모의 도함수 형태인 적분 $\int\dfrac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C$를 인지하면 치환 없이도 답이 보인다.

Q233 확률

한 번 쏘아 표적에 명중시킬 확률이 $\frac{3}{4}$인 양궁 선수가 독립적으로 4발을 쏠 때, 정확히 3발이 명중할 확률은?

①) ① $\frac{9}{64}$
②) ② $\frac{27}{256}$
③) ③ $\frac{27}{64}$
④) ④ $\frac{81}{256}$

🎯 **정답: ③ $\frac{27}{64}$**

📖 각 시행은 독립이며 명중을 성공이라 하자. 명중 횟수 X는 이항분포를 따르고, 정확히 3발 명중할 확률은 ${}_4C_3\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^1 = 4\cdot\frac{27}{64}\cdot\frac{1}{4} = \frac{108}{256} = \frac{27}{64}$.

💡 이항분포의 성공 확률 p가 0.5보다 클 때 가장 그럴듯한 성공 횟수는 $\lfloor (n+1)p \rfloor$로 결정된다.

Q234 초월함수의 미분

매개변수로 나타내어진 곡선 $x = 2t^2,\ y = t^3 - 3t$에서 $t = 2$일 때 $\frac{dy}{dx}$의 값은?

①) ① $\frac{3}{4}$
②) ② $\frac{9}{8}$
③) ③ $\frac{3}{2}$
④) ④ $\frac{9}{4}$

🎯 **정답: ② $\frac{9}{8}$**

📖 매개변수 미분법: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$. $\frac{dx}{dt} = 4t$, $\frac{dy}{dt} = 3t^2 - 3$. 따라서 $\frac{dy}{dx} = \frac{3t^2-3}{4t}$. $t = 2$를 대입하면 $\frac{3\cdot 4 - 3}{4\cdot 2} = \frac{9}{8}$.

💡 매개변수 미분에서 $dx/dt = 0$이 되는 t값에서는 dy/dx가 정의되지 않으며, 그래프는 수직 접선을 가진다.

Q235 초월함수의 미분

함수 $f(x) = xe^{-x}$의 극댓값은?

①) ① 0
②) ② $\frac{1}{e}$
③) ③ 1
④) ④ e

🎯 **정답: ② $\frac{1}{e}$**

📖 곱의 미분법으로 $f'(x) = e^{-x} + x\cdot(-e^{-x}) = (1-x)e^{-x}$. $e^{-x} > 0$이므로 $f'(x) = 0$의 해는 $x = 1$. $x < 1$에서 $f' > 0$ (증가), $x > 1$에서 $f' < 0$ (감소)이므로 $x = 1$에서 극대. 극댓값은 $f(1) = 1\cdot e^{-1} = \frac{1}{e}$.

💡 xe^{-x} 형태의 함수는 감마분포·푸아송분포 등 통계학 곳곳에서 등장하며, 항상 $x = 1$에서 최대가 된다.

Q236 확률

A, B 두 사람이 이 순서로 번갈아 가며 공정한 동전을 던져 먼저 앞면이 나오는 사람이 이긴다. A가 처음으로 던질 때, A가 이길 확률은?

①) ① $\frac{1}{2}$
②) ② $\frac{2}{3}$
③) ③ $\frac{3}{4}$
④) ④ $\frac{4}{5}$

🎯 **정답:** ② $\frac{2}{3}$

📖 A가 이기는 경우는 1번째, 3번째, 5번째, ... 시행에서 처음으로 앞면이 나올 때이다. k번째 시행($k = 1, 3, 5, \ \dots$)에서 처음 앞면이 나올 확률은 $\left(\frac{1}{2}\right)^k$. 따라서 $P(A) = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \cdots$. 이는 첫째항 $\frac{1}{2}$, 공비 $\frac{1}{4}$인 등비급수이므로 $P(A) = \frac{1/2}{1 - 1/4} = \frac{1/2}{3/4} = \frac{2}{3}$.

💡 먼저 던지는 사람의 승리 확률이 정확히 2배(2/3 vs 1/3)이므로, 동전 뒤집기 게임에서 '먼저 시작'은 강력한 우위가 된다.

Q237 평면·공간벡터

좌표평면에서 두 벡터 $\vec{a} = (3, 4)$, $\vec{b} = (1, 2)$가 있다. 벡터 $\vec{a} + t\vec{b}$가 $\vec{b}$에 수직이 되도록 하는 실수 t의 값은?

①) ① $-\frac{11}{5}$
②) ② $-\frac{5}{11}$
③) ③ $\frac{5}{11}$
④) ④ $\frac{11}{5}$

🎯 **정답:** ① $-\frac{11}{5}$

📖 두 벡터가 수직일 조건은 내적이 0. $(\vec{a} + t\vec{b}) \cdot \vec{b} = 0$을 전개하면 $\vec{a} \cdot \vec{b} + t(\vec{b} \cdot \vec{b}) = 0$, 즉 $\vec{a} \cdot \vec{b} + t|\vec{b}|^2 = 0$.
$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 11$, $|\vec{b}|^2 = 1^2 + 2^2 = 5$. 따라서 $11 + 5t = 0 \Rightarrow t = -\frac{11}{5}$.

💡 $\vec{a} + t\vec{b}$ 형태에서 $\vec{b}$에 수직이 되는 t는 $\vec{a}$의 $\vec{b}$ 방향 정사영 성분을 정확히 상쇄하는 값이다.

Q238 수열의 극한과 급수

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} (2x - 3)^n$이 수렴하도록 하는 실수 x의 값의 범위는?

①) ① $0 < x < 1$
②) ② $1 < x < 2$
③) ③ $2 < x < 3$
④) ④ $0 < x < 2$

🎯 **정답:** ② $1 < x < 2$

📖 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$이 수렴하려면 첫째항이 0이거나 공비 r이 $|r| < 1$을 만족해야 한다. 주어진 식의 공비는 $r = 2x - 3$이므로 $|2x - 3| < 1$. 부등식을 풀면 $-1 < 2x - 3 < 1 \Rightarrow 2 < 2x < 4 \Rightarrow 1 < x < 2$.

💡 등비급수의 수렴 판정은 첫 항이 영(零)이 아닌 한 공비의 절댓값만으로 결정된다.

Q239 초월함수의 미분

함수 $f(x) = \ln(x^2+3)$일 때 $f'(2)$의 값은?

①) ① $\frac{2}{7}$
②) ② $\frac{3}{7}$
③) ③ $\frac{4}{7}$
④) ④ $\frac{5}{7}$

🎯 **정답:** ③ $\frac{4}{7}$

📖 합성함수 미분법에 의해 $f'(x) = \frac{(x^2+3)'}{x^2+3} = \frac{2x}{x^2+3}$. 따라서 $f'(2) = \frac{2\cdot 2}{2^2+3} = \frac{4}{7}$.

💡 $\ln(g(x))$ 꼴의 미분은 분자에 $g'(x)$, 분모에 $g(x)$를 두면 끝난다.

Q240 확률

한 개의 주사위를 5번 던질 때 6의 눈이 정확히 2번 나올 확률은?

①) ① $\frac{625}{3888}$
②) ② $\frac{125}{1296}$
③) ③ $\frac{500}{3888}$
④) ④ $\frac{1}{36}$

🎯 **정답:** ① $\frac{625}{3888}$

📖 한 번 시행에서 6이 나올 확률 $p = \frac{1}{6}$, 나오지 않을 확률 $q = \frac{5}{6}$. 5번 중 정확히 2번 6이 나올 확률은 독립시행 정리에 의해 ${}_5C_2\, p^2q^3 = 10 \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{125}{216} = \frac{1250}{7776} = \frac{625}{3888}$.

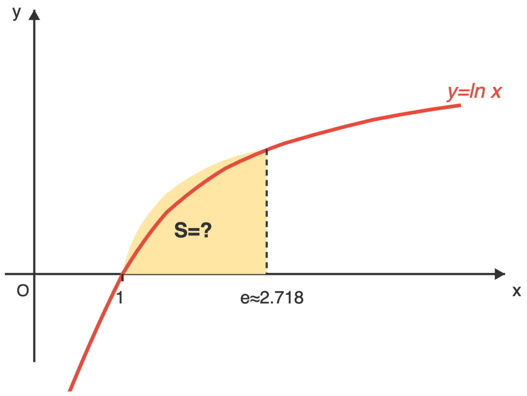
💡 독립시행 확률 공식 ${}_nC_r p^r q^{n-r}$은 베르누이 시행의 핵심이며, 이항분포의 확률질량함수와 동일하다.

📝 고3 수학 일반

총 10문제 · 문제와 정답·풀이 포함

Q241 미적분 활용

곡선 $y = \ln x$와 x축 및 직선 $x = e$로 둘러싸인 부분의 넓이는?



①) ① $\frac{1}{2}$

②) ② 1

③) ③ $e - 1$

④) ④ $\frac{e}{2}$

🎯 **정답:** ② 1

📖 $y = \ln x$는 $x = 1$에서 x축과 만나므로 적분구간은 $[1, e]$. 부분적분으로 $\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C$. 따라서 $S = \int_1^e \ln x\,dx = [x\ln x - x]_1^e = (e \cdot 1 - e) - (1 \cdot 0 - 1) = 0 - (-1) = 1$.

💡 $\int \ln x\,dx$는 $u = \ln x, dv = dx$로 두는 부분적분의 가장 대표적인 예시이다.

Q242 통계

어떤 공장에서 생산되는 제품의 무게 X(g)는 정규분포 $N(50, 4^2)$을 따른다. 임의로 한 개를 뽑았을 때 무게가 54g 이상일 확률은? (단, $P(0 \le Z \le 1) = 0.3413$)

①) ① 0.0228

②) ② 0.1587

③) ③ 0.3413

④) ④ 0.6587

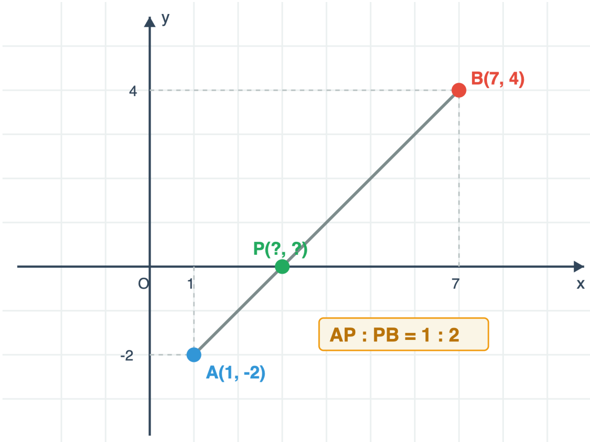
🎯 **정답:** ② 0.1587

📖 표준화: $Z = \frac{X - 50}{4}$. $X \ge 54 \Leftrightarrow Z \ge \frac{54 - 50}{4} = 1$. 정규분포의 대칭성에 의해 $P(Z \ge 1) = 0.5 - P(0 \le Z \le 1) = 0.5 - 0.3413 = 0.1587$.

💡 표준정규분포에서 평균±1σ 범위에 약 68%, ±2σ 범위에 약 95%, ±3σ 범위에 약 99.7%의 자료가 포함된다.

Q243 평면·공간벡터

두 점 $A(1,\,-2), B(7,4)$에 대하여 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점 P의 좌표는?



①) ① $(3,0)$

②) ② $(5,2)$

③) ③ $(3,\,-1)$

④) ④ $(4,1)$

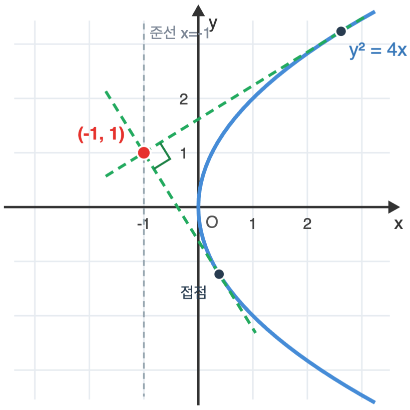
🎯 **정답:** ① $(3,0)$

📖 내분점 공식: 선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점은 $P=\frac{mB+nA}{m+n}$. $m=1, n=2$이므로
$P=\frac{1\cdot(7,4)+2\cdot(1,\,-2)}{1+2}=\frac{(7+2,\,4-4)}{3}=\frac{(9,0)}{3}=(3,0)$.

💡 내분점 공식의 분자에서 m과 n이 '엇갈려' 곱해지는 것이 핵심이며, 이는 지렛대 원리와 같은 구조이다.

Q244 이차곡선

점 $(-1, 1)$에서 포물선 $y^2 = 4x$에 그은 두 접선의 기울기의 곱은?



①) ① -2
②) ② -1
③) ③ 1
④) ④ 2

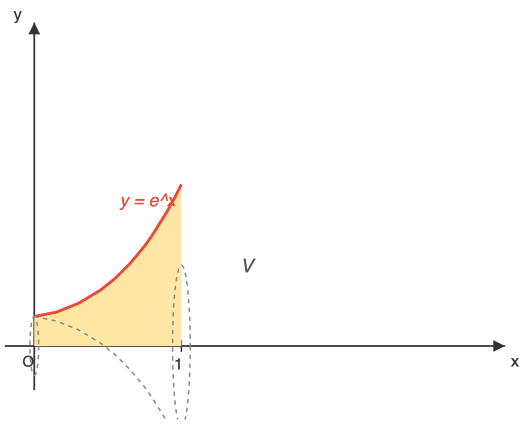
🎯 **정답: ② -1**

📖 포물선 $y^2 = 4x$에 접하는 기울기 m인 접선은 $y = mx + \frac{1}{m}$ $(m \neq 0)$. 이 직선이 $(-1, 1)$을 지나면 $1 = -m + \frac{1}{m}$. 양변에 m을 곱하면 $m = -m^2 + 1$, 즉 $m^2 + m - 1 = 0$. 두 접선의 기울기 m_1, m_2는 이 이차방정식의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의해 $m_1 m_2 = -1$.

💡 포물선 $y^2 = 4px$의 기울기 m인 접선의 공식 $y = mx + \frac{p}{m}$은 외부점 접선 문제의 표준 도구다.

Q245 미적분 활용

곡선 $y = e^x$와 x축 및 두 직선 $x = 0, x = 1$로 둘러싸인 부분을 x축의 둘레로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피는?



①) ① $\pi(e-1)$
②) ② $\frac{\pi}{2}(e-1)$
③) ③ $\frac{\pi(e^2-1)}{2}$
④) ④ $\pi(e^2-1)$

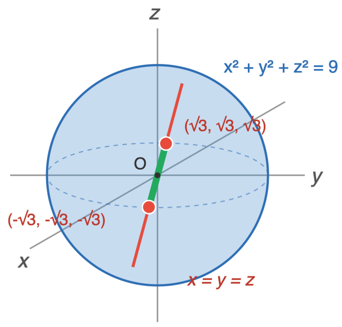
🎯 **정답: ③ $\frac{\pi(e^2-1)}{2}$**

📖 회전체 부피 공식: $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$. 따라서 $V = \pi \int_0^1 (e^x)^2 dx = \pi \int_0^1 e^{2x} dx = \pi \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}(e^2-1)$.

💡 $(e^x)^2 = e^{2x}$로 변환하는 단계가 핵심이며, 이는 지수법칙의 가장 기본적인 응용이다.

Q246 평면·공간벡터

구 $x^2 + y^2 + z^2 = 9$와 직선 $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$이 만나는 두 점 사이의 거리는?



①) ① $3\sqrt{2}$
②) ② $3\sqrt{3}$
③) ③ 6
④) ④ $6\sqrt{3}$

🎯 **정답:** ③ 6

📖 직선 위의 점을 (t, t, t)로 매개변수화하여 구의 방정식에 대입: $t^2 + t^2 + t^2 = 9 \Rightarrow t^2 = 3 \Rightarrow t = \pm\sqrt{3}$. 두 교점은 $P(\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3})$, $Q(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -\sqrt{3})$. 두 점 사이 거리 $= \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{36} = 6$. 또는 직선이 원점(구의 중심)을 지나므로 두 교점이 지름의 양 끝이라서 거리는 지름 $2 \cdot 3 = 6$.

💡 중심을 지나는 직선과 구의 두 교점 거리는 항상 지름과 같다는 성질을 알면 매개변수 풀이 없이도 즉시 답이 나온다.

Q247 미적분 활용

극한 $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \cos\frac{k\pi}{2n}$의 값은?

①) ① $\frac{1}{\pi}$
②) ② $\frac{2}{\pi}$
③) ③ $\frac{\pi}{2}$
④) ④ π

🎯 **정답:** ② $\frac{2}{\pi}$

📖 구분구적법(정적분의 정의)에 의해 $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)dx$이다. 주어진 극한에서 $\cos\frac{k\pi}{2n} = \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{k}{n}\right)$이므로 $f(x) = \cos\frac{\pi x}{2}$. 따라서 극한값은 $\int_0^1 \cos\frac{\pi x}{2} dx = \left[\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2}\right]_0^1 = \frac{2}{\pi}(\sin\frac{\pi}{2} - 0) = \frac{2}{\pi}$.

💡 구분구적법은 '$\frac{1}{n}$이 dx의 역할을, $\frac{k}{n}$이 x의 역할을 한다'는 시각적 변환으로 이해하면 쉽다.

Q248 초월함수의 적분

정적분 $\int_0^{\pi/2} \sin x \cos x \, dx$의 값은?

①) ① $\frac{1}{4}$

②) ② $\frac{1}{2}$

③) ③ 1

④) ④ $\frac{\pi}{4}$

🎯 **정답:** ② $\frac{1}{2}$

📖 치환적분으로 푼다. $u = \sin x$로 놓으면 $du = \cos x \, dx$이고, $x = 0$일 때 $u = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$일 때 $u = 1$이다.\n\n따라서\n $\int_0^{\pi/2} \sin x \cos x \, dx = \int_0^1 u \, du = \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$\n\n또는 배각공식 $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$를 이용해도 된다.\n $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} \sin 2x \, dx = \left[-\frac{\cos 2x}{4} \right]_0^{\pi/2} = -\frac{-1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$\n두 방법 모두 같은 결과를 준다.

💡 같은 적분을 치환적분과 배각공식, 두 가지 시각으로 풀 수 있다는 점은 미적분 도구가 서로 어떻게 연결되는지를 잘 보여 준다.

Q249 순열·조합 심화 + 이항정리

$(x + 2)^6$의 전개식에서 x^4의 계수는?

①) ① 30

②) ② 40

③) ③ 60

④) ④ 80

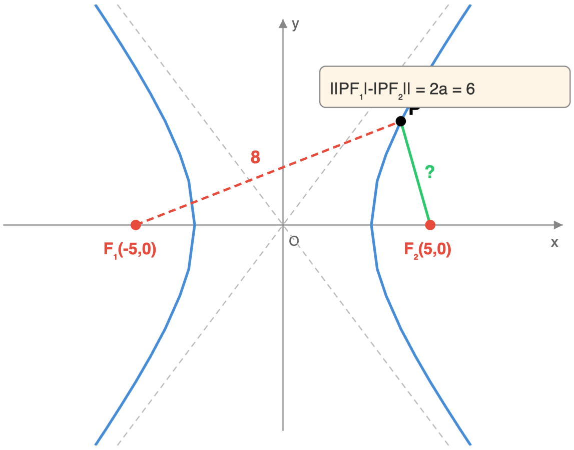
🎯 **정답:** ③ 60

📖 이항정리에 의해\n$(x + 2)^6 = \sum_{k=0}^{6} {}_6C_k \cdot x^{6-k} \cdot 2^k$\n\n$x^4$ 항을 얻으려면 $6 - k = 4$, 즉 $k = 2$여야 한다. 이때 일반항은\n ${}_6C_2 \cdot x^4 \cdot 2^2$\n\n${}_6C_2 = \frac{6 \cdot 5}{2!} = 15$이고 $2^2 = 4$이므로 x^4의 계수는\n$15 \times 4 = 60$

💡 이항계수 ${}_nC_k$는 파스칼 삼각형의 한 자리 값이자, 조합·확률·이항분포 등 여러 분야에서 같은 모습으로 다시 만나는 수학의 단골 손님이다.

Q250 이차곡선

쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$의 두 초점을 $F_1(-5, 0)$, $F_2(5, 0)$이라 하자. 쌍곡선의 오른쪽 가지 위의 점 P에 대하여 $|PF_1| = 8$일 때, $|PF_2|$의 값은?



①) ① 1
②) ② 2
③) ③ 4
④) ④ 6

🎯 **정답:** ② 2

📖 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$의 정의에 의해, 쌍곡선 위의 점 P는 두 초점까지의 거리 차의 절댓값이 일정하다.\n$||PF_1| - |PF_2|| = 2a$\n\n주어진 식에서 $a^2 = 9$이므로 $a = 3$, 따라서 $2a = 6$이다.\n\n점 P가 오른쪽 가지 위에 있으면 F_1(왼쪽 초점)이 더 멀고 F_2(오른쪽 초점)이 더 가까우므로\n$|PF_1| - |PF_2| = 2a = 6$\n\n$|PF_1| = 8$을 대입하면 $|PF_2| = 8 - 6 = 2$이다.\n\n검산: $c = 5$, $a = 3$이므로 오른쪽 가지에서 $|PF_2|$의 최솟값은 $c - a = 2$이고, 이는 P가 오른쪽 꼭짓점 $(3, 0)$일 때이다. 이때 $|PF_1| = c + a = 8$이 되어 조건과 일치한다.

💡 두 초점까지의 거리 차가 일정하다는 쌍곡선의 정의는 LORAN 같은 전파 항법과 GPS 위치 측정의 수학적 토대이기도 하다.