📝 고2 수학 일반

총 40문제 · 문제와 정답·풀이 포함

Q1 지수와 로그

$\log_2 32 + \log_3 27$ 의 값은?

①) ① 6

②) ② 7

③) ③ 8

④) ④ 9

🎯 **정답: ③ 8**

📖 1단계: $\log_2 32 = \log_2 2^5 = 5$. 2단계: $\log_3 27 = \log_3 3^3 = 3$. 3단계: 두 값을 더하면 $5 + 3 = 8$.

💡 로그는 17세기 네이피어가 큰 수의 곱셈을 덧셈으로 바꾸기 위해 고안했습니다.

Q2 지수와 로그

$\log_2 5 = a$ 라 할 때, $\log_2 500$ 을 a에 관한 식으로 나타내면?

①) ① $a + 2$

②) ② $2a + 3$

③) ③ $3a + 2$

④) ④ $3a + 3$

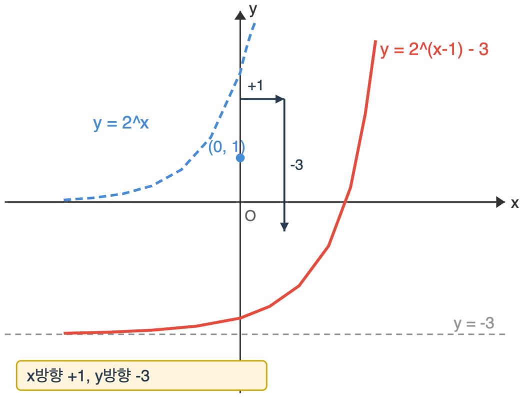
🎯 **정답: ③ $3a + 2$**

📖 1단계: $500 = 2^2 \times 5^3$ 으로 소인수분해. 2단계: $\log_2 500 = \log_2 2^2 + \log_2 5^3 = 2 + 3\log_2 5$. 3단계: $\log_2 5 = a$ 이므로 $\log_2 500 = 3a + 2$.

💡 지진 규모를 나타내는 리히터 척도는 밑이 10인 상용로그를 사용합니다.

Q3 지수·로그함수

함수 $y = 2^x$ 의 그래프를 x축 방향으로 1만큼, y축 방향으로 -3만큼 평행이동한 그래프의 식은?



①) ① $y = 2^{x-1} - 3$

②) ② $y = 2^{x+1} - 3$

③) ③ $y = 2^{x-1} + 3$

④) ④ $y = 2^{x-3} - 1$

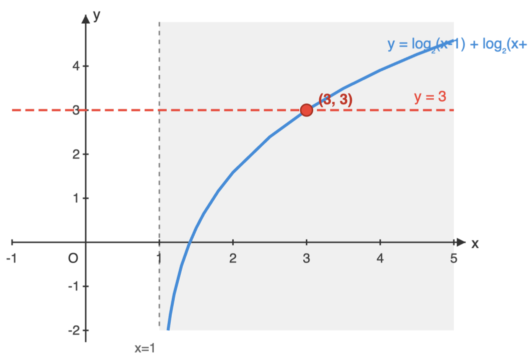
🎯 **정답:** ① $y = 2^{x-1} - 3$

📖 1단계: x축으로 p만큼 평행이동하면 x 대신 $x - p$ 대입. 2단계: y축으로 q만큼 평행이동하면 전체 식에 $+q$ 추가. 3단계: x 대신 $x - 1$ 을 넣고 전체에 -3 을 더하면 $y = 2^{x-1} - 3$.

💡 지수함수의 그래프는 아무리 평행이동해도 점근선의 기울기는 변하지 않습니다.

Q4 지수·로그함수

방정식 $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) = 3$ 의 해는?



x = 3 에서 교차 (진수조건: x > 1)

①) ① $x = 2$

②) ② $x = 3$

③) ③ $x = \pm 3$

④) ④ 해 없음

🎯 **정답:** ② $x = 3$

📖 1단계: 진수조건 $x - 1 > 0$ 이고 $x + 1 > 0$ 이므로 $x > 1$. 2단계: 로그 합을 곱으로 바꾸면 $\log_2(x-1)(x+1) = 3$, 즉 $\log_2(x^2 - 1) = 3$. 3단계: $x^2 - 1 = 2^3 = 8$, 따라서 $x^2 = 9$, $x = \pm 3$. 4단계: 진수조건 $x > 1$ 을 만족하는 값은 $x = 3$ 뿐.

💡 로그방정식을 풀 때 진수조건을 놓치면 없는 해를 정답으로 오해하기 쉽습니다.

Q5 삼각함수

$\sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{3}$ 의 값은?

①) ① $\frac{1}{2}$

②) ② $\frac{\sqrt{3}}{2}$

③) ③ 1

④) ④ $\sqrt{3}$

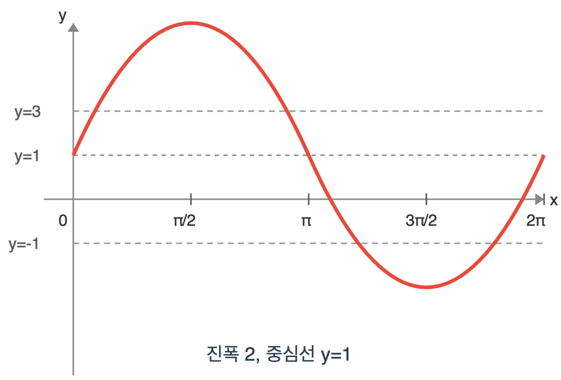
🎯 **정답:** ③ 1

📖 1단계: $\sin\frac{\pi}{6} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$. 2단계: $\cos\frac{\pi}{3} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$. 3단계: 두 값을 더하면 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

💡 $\sin\theta = \cos(90^\circ - \theta)$ 라서 30° 의 sin 값과 60° 의 cos 값이 같습니다.

Q6 삼각함수

함수 $y = 2\sin x + 1$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?



①) ① 0

②) ② 1

③) ③ 2

④) ④ 3

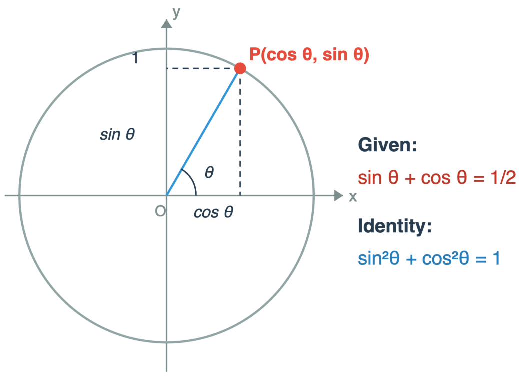
🎯 **정답:** ③ 2

📖 1단계: $\sin x$ 의 범위는 $-1 \leq \sin x \leq 1$. 2단계: $2\sin x$ 의 범위는 $-2 \leq 2\sin x \leq 2$, 즉 $2\sin x + 1$ 의 범위는 $-1 \leq y \leq 3$. 3단계: 최댓값 3, 최솟값 -1, 합 $= 3 + (-1) = 2$.

💡 음파나 전기 신호의 크기는 $A\sin(\omega t) + B$ 꼴로 모델링되며 A는 진폭, B는 평균값을 나타냅니다.

Q7 삼각함수

$\sin\theta + \cos\theta = \frac{1}{2}$ 일 때, $\sin\theta \cdot \cos\theta$ 의 값은?



①) ① $-\frac{3}{8}$
②) ② $-\frac{1}{4}$
③) ③ $\frac{1}{4}$
④) ④ $\frac{3}{8}$

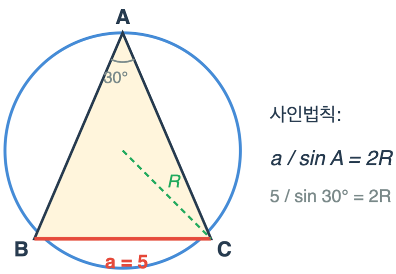
🎯 **정답:** ① $-\frac{3}{8}$

📖 1단계: 주어진 식 양변을 제곱하면 $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = \frac{1}{4}$. 2단계: 좌변 전개하면 $\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \frac{1}{4}$. 3단계: 항등식 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ 대입하면 $1 + 2\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{4}$. 4단계: $2\sin\theta\cos\theta = -\frac{3}{4}$ 이므로 $\sin\theta\cos\theta = -\frac{3}{8}$.

💡 $\sin\theta + \cos\theta$ 의 최댓값은 $\sqrt{2}$, 최솟값은 $-\sqrt{2}$ 입니다.

Q8 삼각함수 활용

삼각형 ABC에서 $A = 30°$, $a = 5$ 일 때, 외접원의 반지름 R 의 값은?



①) ① 5
②) ② $5\sqrt{2}$
③) ③ 10
④) ④ $10\sqrt{2}$

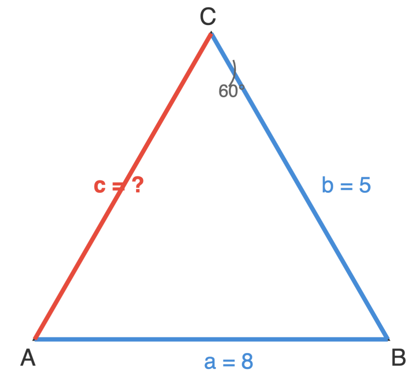
🎯 **정답:** ① 5

📖 1단계: 사인법칙 $\frac{a}{\sin A} = 2R$ 을 활용. 2단계: 값을 대입하면 $\frac{5}{\sin 30°} = 2R$. 3단계: $\sin 30° = \frac{1}{2}$ 이므로 $\frac{5}{1/2} = 10 = 2R$. 4단계: $R = 5$.

💡 사인법칙은 삼각형의 어느 한 각이 특이하게 크더라도 항상 성립하는 관계식입니다.

Q9 삼각함수 활용

삼각형 ABC에서 $a = 8$, $b = 5$, $C = 60^\circ$ 일 때, 변 c 의 길이는?



코사인법칙: c² = a² + b² - 2ab cos C

①) ① 6

②) ② 7

③) ③ $\sqrt{39}$

④) ④ $5\sqrt{2}$

🎯 **정답:** ② 7

📖 1단계: 코사인법칙 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ 적용. 2단계: 값 대입, $c^2 = 8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cos 60^\circ$. 3단계: $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ 이므로 $c^2 = 64 + 25 - 80 \cdot \frac{1}{2} = 89 - 40 = 49$. 4단계: $c = 7$.

💡 코사인법칙에서 $C = 90^\circ$ 이면 $\cos C = 0$ 이 되어 피타고라스 정리와 같아집니다.

Q10 수열

첫째항이 2, 공차가 3 인 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 a_{10} 의 값은?

①) ① 26

②) ② 27

③) ③ 28

④) ④ 29

🎯 **정답:** ④ 29

📖 1단계: 등차수열의 일반항은 $a_n = a_1 + (n-1)d$. 2단계: $a_1 = 2$, $d = 3$, $n = 10$ 대입. 3단계: $a_{10} = 2 + (10-1) \cdot 3 = 2 + 27 = 29$.

💡 가우스가 어릴 때 1부터 100까지의 합을 순식간에 구한 방법도 등차수열의 합 공식과 같은 원리입니다.

Q11 수열

$\sum_{k=1}^{10}(2k+1)$ 의 값은?

①) ① 100

②) ② 110

③) ③ 120

④) ④ 130

🎯 **정답:** ③ 120

📖 1단계: 시그마의 선형성으로 분리하면 $\sum_{k=1}^{10}(2k+1) = 2\sum_{k=1}^{10}k + \sum_{k=1}^{10}1$. 2단계: $\sum_{k=1}^{10}k = \frac{10\cdot 11}{2} = 55$ 이고 $\sum_{k=1}^{10}1 = 10$. 3단계: 대입하면 $2\cdot 55 + 10 = 110 + 10 = 120$.

💡 1 부터 시작하는 연속된 홀수 n 개의 합은 항상 n^2 입니다.

Q12 극한과 연속

$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$ 의 값은?

①) ① 0

②) ② 2

③) ③ 4

④) ④ 발산

🎯 **정답:** ③ 4

📖 1단계: $x=2$ 대입 시 $\frac{0}{0}$ 의 부정형이므로 인수분해 필요. 2단계: 분자를 인수분해하면 $x^2-4=(x-2)(x+2)$. 3단계: 약분하면 $\lim_{x\to 2}(x+2)$. 4단계: 극한값은 $2+2=4$.

💡 $\frac{0}{0}$ 꼴 부정형은 '값이 없다'가 아니라 '더 분석해야 한다'는 뜻입니다.

Q13 미분

함수 $f(x)=x^3-3x^2+4$ 의 극댓값은?

①) ① 0

②) ② 2

③) ③ 4

④) ④ 6

🎯 **정답:** ③ 4

📖 1단계: 도함수를 구하면 $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$. 2단계: $f'(x)=0$ 의 해는 $x=0$ 또는 $x=2$. 3단계: 증감표 작성. $x<0$ 에서 $f'>0$ (증가), $0<x<2$ 에서 $f'<0$ (감소), $x>2$ 에서 $f'>0$ (증가). 4단계: $x=0$ 에서 극대이므로 극댓값은 $f(0)=0-0+4=4$.

💡 3차함수는 극값이 0개 또는 2개만 존재하며, 1개인 경우는 없습니다.

Q14 적분

$\int_0^2 (3x^2 + 2x)\,dx$ 의 값은?

①) ① 10

②) ② 12

③) ③ 14

④) ④ 16

🎯 **정답:** ② 12

📖 1단계: $3x^2$ 의 부정적분은 x^3, $2x$ 의 부정적분은 x^2. 2단계: 따라서 $\int (3x^2 + 2x)\,dx = x^3 + x^2 + C$. 3단계: 정적분 계산 $[x^3 + x^2]_0^2 = (8 + 4) - (0 + 0) = 12$.

💡 미분과 적분은 서로의 역연산이라는 사실을 미적분학의 기본정리라 부릅니다.

Q15 미분

곡선 $y = x^2 + 2x$ 위의 점 $(1, 3)$에서의 접선의 방정식은?

①) ① $y = 2x + 1$

②) ② $y = 3x$

③) ③ $y = 4x - 1$

④) ④ $y = 4x + 1$

🎯 **정답:** ③ $y = 4x - 1$

📖 1단계: $f(x) = x^2 + 2x$의 도함수 $f'(x) = 2x + 2$.

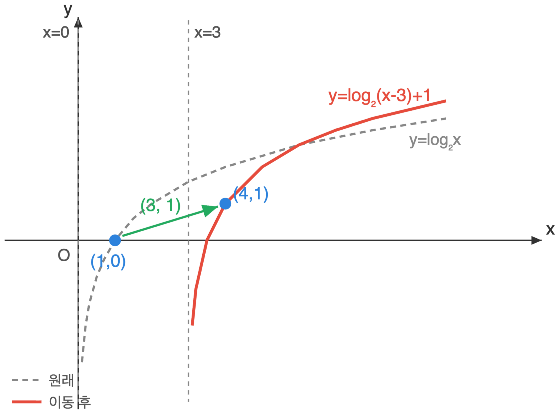
2단계: 접점 $x = 1$에서의 기울기 $f'(1) = 2(1) + 2 = 4$.

3단계: 점$(1, 3)$을 지나고 기울기 4인 직선: $y - 3 = 4(x - 1)$, 정리하면 $y = 4x - 1$.

💡 접선의 기울기는 그 점에서의 순간변화율(미분계수)과 같다.

Q16 지수·로그함수

곡선 $y = \log_2 x$를 x축 방향으로 3만큼, y축 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프의 방정식은?



①) ① $y = \log_2(x+3)+1$

②) ② $y = \log_2(x-3)+1$

③) ③ $y = \log_2(x-3)-1$

④) ④ $y = \log_2(x+3)-1$

정답: ② $y = \log_2(x-3)+1$

1단계: 평행이동 공식: $y = f(x)$를 x축으로 p, y축으로 q만큼 이동하면 $y - q = f(x-p)$.

2단계: $f(x) = \log_2 x$, $p = 3$, $q = 1$ 대입.

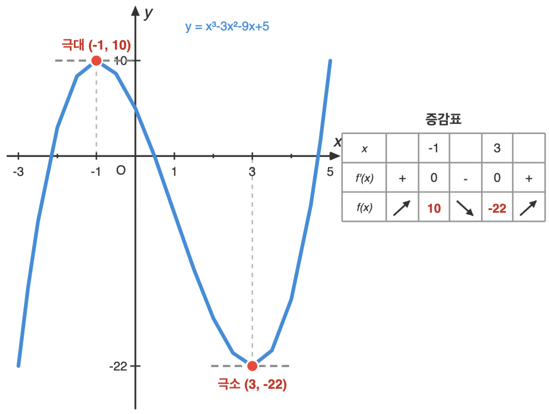
3단계: $y - 1 = \log_2(x-3)$, 즉 $y = \log_2(x-3)+1$.

검산: 원 그래프 위 점 $(1,0)$은 이동 후 $(4,1)$이고, $\log_2(4-3)+1 = 0+1 = 1$로 맞음.

로그함수의 평행이동은 수직점근선도 함께 이동한다. 이 문제에서는 점근선이 $x = 0$에서 $x = 3$으로 이동한다.

Q17 미분

함수 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$의 극댓값과 극솟값의 차는?



①) ① 24

②) ② 28

③) ③ 32

④) ④ 36

🎯 **정답: ③ 32**

📖 1단계: $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x-3)(x+1)$.

2단계: $f'(x) = 0$에서 $x = -1$ 또는 $x = 3$. 증감표로 $x = -1$에서 극대, $x = 3$에서 극소.

3단계: 극댓값 $f(-1) = -1 - 3 + 9 + 5 = 10$.

4단계: 극솟값 $f(3) = 27 - 27 - 27 + 5 = -22$.

5단계: 차 = $10 - (-22) = 32$.

💡 3차함수의 극댓값과 극솟값의 차는 두 극값을 주는 x 좌표 차의 세제곱에 비례한다.

Q18 적분

정적분 $\int_0^2 (3x^2 - 2x + 1)\,dx$의 값을 구하시오.

①) ① 6

②) ② 8

③) ③ 10

④) ④ 12

🎯 **정답: ① 6**

📖 부정적분을 구하면 $\int (3x^2 - 2x + 1)\,dx = x^3 - x^2 + x + C$이다. 미적분 기본정리에 의해 $\int_0^2 (3x^2 - 2x + 1)\,dx = [x^3 - x^2 + x]_0^2 = (2^3 - 2^2 + 2) - 0 = 8 - 4 + 2 = 6$이다. 항별로 계산해도 $\int_0^2 3x^2\,dx = [x^3]_0^2 = 8$, $\int_0^2 (-2x)\,dx = [-x^2]_0^2 = -4$, $\int_0^2 1\,dx = 2$이므로 합은 $8 - 4 + 2 = 6$이다. 따라서 정답은 ① 6이다.

💡 미적분 기본정리는 뉴턴과 라이프니츠가 17세기에 독립적으로 발견했어요.

Q19 극한과 연속

극한 $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$의 값을 구하시오.

①) ① 2

②) ② 3

③) ③ 4

④) ④ 5

🎯 **정답: ③ 4**

📖 $\frac{0}{0}$ 부정형이므로 분자를 인수분해하면 $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$. 따라서 $\lim_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \to 2}(x+2) = 4$.

💡 극한 개념은 코시(Cauchy)가 19세기에 엄밀하게 정립했어요.

Q20 수열

등비수열 $\{a_n\}$에서 $a_1 = 3$, 공비 $r = 2$일 때, a_5의 값을 구하시오.

①) ① 24

②) ② 36

③) ③ 48

④) ④ 96

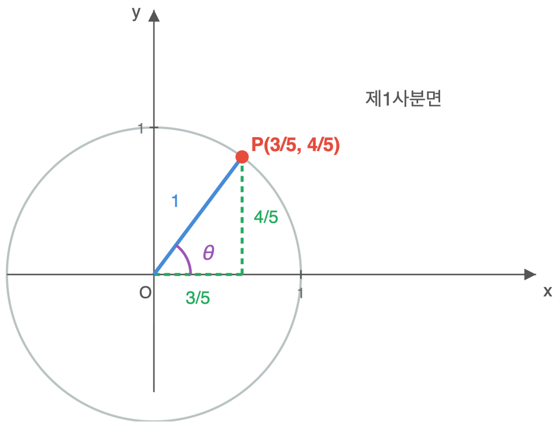
🎯 **정답: ③ 48**

📖 등비수열의 일반항은 $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$. 따라서 $a_5 = 3 \cdot 2^{5-1} = 3 \cdot 16 = 48$.

💡 등비수열은 복리 이자 계산의 기본 모형이에요.

Q21 삼각함수

$\cos\theta = \frac{3}{5}$이고 θ가 제1사분면의 각일 때, $\sin\theta$의 값을 구하시오.



①) ① $\frac{2}{5}$

②) ② $\frac{3}{5}$

③) ③ $\frac{4}{5}$

④) ④ $\frac{1}{5}$

🎯 **정답: ③ $\frac{4}{5}$**

📖 항등식 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$에서 $\sin^2\theta = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$. 제1사분면이므로 $\sin\theta > 0$, 따라서 $\sin\theta = \frac{4}{5}$.

💡 3:4:5는 가장 작은 정수 피타고라스 수 조합이에요.

Q22 수학적 귀납법과 점화식

수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 3a_n - 1$로 정의될 때, a_3의 값을 구하시오.

①) ① 11

②) ② 13

③) ③ 14

④) ④ 17

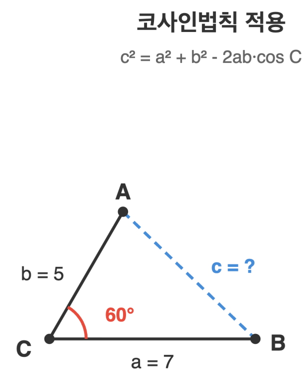
🎯 **정답: ③ 14**

📖 점화식에 차례로 대입한다. $a_2 = 3a_1 - 1 = 3 \cdot 2 - 1 = 5$. $a_3 = 3a_2 - 1 = 3 \cdot 5 - 1 = 14$.

💡 점화식은 컴퓨터의 재귀 함수와 본질적으로 같은 개념이에요.

Q23 삼각함수 활용

삼각형 ABC에서 $a = 7$, $b = 5$, $C = 60°$일 때, 변 c의 길이를 구하시오.



①) ① $\sqrt{37}$
②) ② $\sqrt{39}$
③) ③ $\sqrt{41}$
④) ④ $\sqrt{43}$

정답: ② $\sqrt{39}$

코사인법칙 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$를 적용한다. $c^2 = 49 + 25 - 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot \cos 60° = 74 - 70 \cdot \frac{1}{2} = 74 - 35 = 39$. 따라서 $c = \sqrt{39}$.

코사인법칙은 피타고라스 정리를 일반각으로 확장한 형태예요.

Q24 극한과 연속

함수 $f(x) = \begin{cases} x^2 + a & (x \leq 1) \\ 2x + 3 & (x > 1) \end{cases}$ 이 $x = 1$에서 연속일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

①) ① 2
②) ② 3
③) ③ 4
④) ④ 5

정답: ③ 4

$x = 1$에서 연속이려면 $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$이어야 한다. 좌극한: $\lim_{x \to 1^-}(x^2 + a) = 1 + a$. 우극한: $\lim_{x \to 1^+}(2x + 3) = 5$. 따라서 $1 + a = 5$, $a = 4$.

연속함수는 그래프를 그릴 때 펜을 떼지 않고 그릴 수 있는 함수예요.

Q25 미분

함수 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$이 극대가 되는 x의 값을 구하시오.

①) ① $x = 0$

②) ② $x = 1$

③) ③ $x = 2$

④) ④ $x = 3$

🎯 **정답:** ② $x = 1$

📖 $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$. $f'(x) = 0$의 해는 $x = 1, 3$. 증감표를 살펴보면 $x = 1$에서 f'의 부호가 양에서 음으로, $x = 3$에서 음에서 양으로 바뀐다. 따라서 $x = 1$에서 극대, $x = 3$에서 극소.

💡 극값(extremum)은 라틴어 '가장 바깥의'에서 유래한 말이에요.

Q26 지수와 로그

$8^{\frac{2}{3}} \times 27^{-\frac{1}{3}} \times 16^{\frac{1}{4}}$의 값을 구하시오.

①) ① $\frac{4}{3}$

②) ② $\frac{8}{3}$

③) ③ $\frac{16}{3}$

④) ④ 4

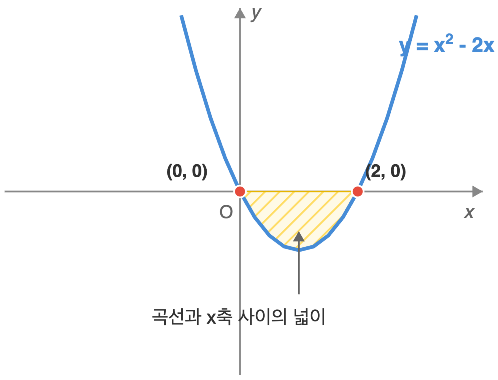
🎯 **정답:** ② $\frac{8}{3}$

📖 각 항을 소인수의 거듭제곱으로 표현한다. $8^{\frac{2}{3}} = (2^3)^{\frac{2}{3}} = 2^2 = 4$. $27^{-\frac{1}{3}} = (3^3)^{-\frac{1}{3}} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$. $16^{\frac{1}{4}} = (2^4)^{\frac{1}{4}} = 2$. 따라서 $4 \times \frac{1}{3} \times 2 = \frac{8}{3}$.

💡 유리수 지수는 17세기 뉴턴이 체계적으로 정리했어요.

Q27 적분

곡선 $y = x^2 - 2x$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.



①) ① $\frac{2}{3}$
②) ② $\frac{4}{3}$
③) ③ 2
④) ④ $\frac{8}{3}$

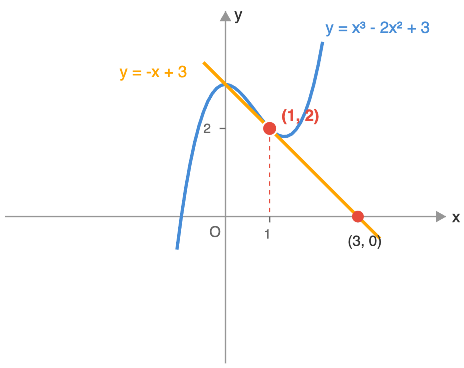
🎯 **정답:** ② $\frac{4}{3}$

📖 $y = x^2 - 2x = x(x-2)$이므로 x축과 만나는 점은 $x = 0, 2$. 이 구간에서 $y \le 0$이므로 넓이는 $S = \int_0^2 |x^2 - 2x|\,dx = -\int_0^2 (x^2 - 2x)\,dx = -\left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_0^2 = -\left(\frac{8}{3} - 4\right) = -\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3}$.

💡 적분 기호 $\int$은 라이프니츠가 'Summa(합)'의 첫 글자 S를 길게 늘린 거예요.

Q28 미분

곡선 $y = x^3 - 2x^2 + 3$ 위의 점 $(1, 2)$에서의 접선이 x축과 만나는 점의 x좌표를 구하시오.



①) ① $x = 2$
②) ② $x = 3$
③) ③ $x = 4$
④) ④ $x = 5$

🎯 **정답:** ② $x = 3$

📖 $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3$이라 하면 $f'(x) = 3x^2 - 4x$. 접점에서의 기울기는 $f'(1) = 3 - 4 = -1$. 접선의 방정식은 $y - 2 = -1(x - 1)$, 즉 $y = -x + 3$. x축과 만나는 점은 $y = 0$일 때이므로 $0 = -x + 3$, $x = 3$.

💡 접선은 곡선과 한 점에서 만나면서 그 점에서 곡선과 같은 기울기를 갖는 직선이에요.

Q29 극한과 연속

$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3x + 1} - x}{1}$의 값을 구하시오.

①) ① 1
②) ② $\frac{3}{2}$
③) ③ 2
④) ④ 3

🎯 **정답:** ② $\frac{3}{2}$

📖 $\infty - \infty$ 부정형이므로 분모와 분자에 $\sqrt{x^2 + 3x + 1} + x$를 곱한다.

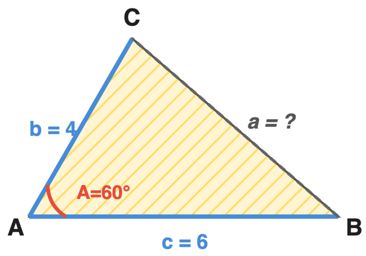
$\frac{(\sqrt{x^2 + 3x + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 3x + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 3x + 1} + x} = \frac{3x + 1}{\sqrt{x^2 + 3x + 1} + x}$. 분모·분자를 x로 나누면 $\frac{3 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1}$. $x \to \infty$일 때 $\frac{3 + 0}{\sqrt{1} + 1} = \frac{3}{2}$.

💡 무한대 부정형은 유리화·인수분해·치환 등 다양한 기법으로 풀어요.

Q30 삼각함수 활용

삼각형 ABC에서 $A = 60°$, $b = 4$, $c = 6$일 때, 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오.

S = (1/2) b c sin A



①) ① $4\sqrt{3}$
②) ② $6\sqrt{3}$
③) ③ $8\sqrt{3}$
④) ④ $12\sqrt{3}$

🎯 **정답:** ② $6\sqrt{3}$

📖 두 변과 그 사잇각이 주어졌으므로 삼각형의 넓이 공식 $S = \frac{1}{2}bc\sin A$를 적용한다. $S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot \sin 60° = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$.

💡 이 공식은 삼각형의 넓이를 두 변과 사잇각만으로 구할 수 있게 해주는 강력한 도구예요.

Q31 지수와 로그

방정식 $\log_2(x + 3) = 3$을 만족하는 실수 x의 값은?

①) ① $x = 2$
②) ② $x = 5$
③) ③ $x = 7$
④) ④ $x = 8$

🎯 **정답:** ② $x = 5$

📖 1단계: 로그의 정의에 의해 $\log_2(x + 3) = 3$은 $x + 3 = 2^3 = 8$과 같다.
2단계: $x = 8 - 3 = 5$.
3단계: 진수조건 $x + 3 > 0$, 즉 $x > -3$이고 $x = 5$는 이 조건을 만족한다.
따라서 답은 $x = 5$.

💡 로그는 17세기 네이피어가 천문 계산의 부담을 줄이기 위해 고안했습니다. 거대한 곱셈을 덧셈으로 바꿔주는 마법 같은 도구였지요.

Q32 수학적 귀납법과 점화식

수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 1$이고 $a_{n+1} = 2a_n + 3$을 만족할 때, a_3의 값은?

①) ① 7

②) ② 9

③) ③ 11

④) ④ 13

🎯 **정답: ④ 13**

📖 1단계: $a_2 = 2a_1 + 3 = 2 \times 1 + 3 = 5.$

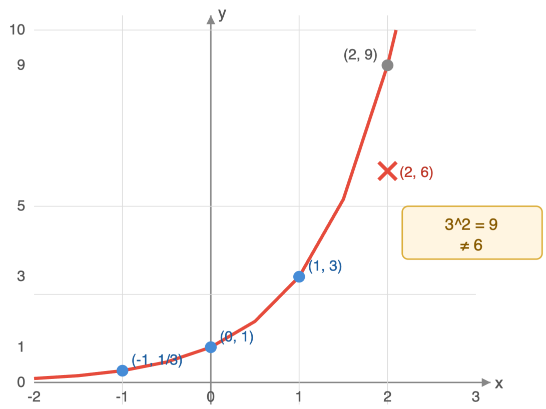
2단계: $a_3 = 2a_2 + 3 = 2 \times 5 + 3 = 13.$

따라서 $a_3 = 13.$

💡 $a_{n+1} = 2a_n + 3$ 형태의 점화식은 $a_n + 3$이라는 새 수열을 만들면 등비수열로 변해 한 번에 풀립니다.

Q33 지수·로그함수

지수함수 $y = 3^x$의 그래프 위에 있는 점으로 옳지 않은 것은?



①) ① $(0, 1)$

②) ② $(1, 3)$

③) ③ $\left(-1, \frac{1}{3}\right)$

④) ④ $(2, 6)$

🎯 **정답: ④** $(2, 6)$

📖 1단계: $x = 0$일 때 $3^0 = 1$이므로 ①은 그래프 위의 점이다.

2단계: $x = 1$일 때 $3^1 = 3$이므로 ②도 옳다.

3단계: $x = -1$일 때 $3^{-1} = \frac{1}{3}$이므로 ③도 옳다.

4단계: $x = 2$일 때 $3^2 = 9 \neq 6$이므로 $(2, 6)$은 그래프 위에 있지 않다.

따라서 옳지 않은 것은 ④.

💡 지수함수 $y = 3^x$는 x가 1 증가할 때마다 y가 3배씩 커집니다. 이렇게 배수로 자라는 성장을 '지수적 성장'이라 부르며, 세균 번식이나 복리 이자가 이 모양을 따릅니다.

Q34 삼각함수

각 θ가 제2사분면의 각이고 $\sin\theta = \frac{3}{5}$일 때, $\cos\theta$의 값은?

①) ① $-\frac{4}{5}$
②) ② $-\frac{3}{5}$
③) ③ $\frac{3}{5}$
④) ④ $\frac{4}{5}$

🎯 **정답:** ① $-\frac{4}{5}$

📖 1단계: 기본 관계식 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$을 이용한다.

2단계: $\cos^2\theta = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}.$

3단계: $\cos\theta = \pm\frac{4}{5}.$

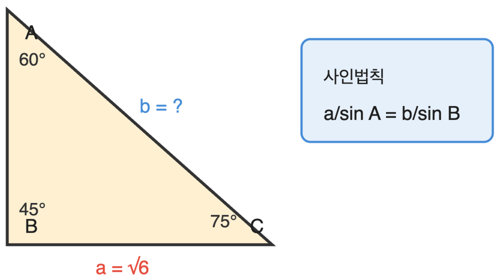
4단계: θ가 제2사분면의 각이므로 $\cos\theta < 0.$

따라서 $\cos\theta = -\frac{4}{5}.$

💡 각이 어느 사분면에 있느냐에 따라 $\sin, \cos, \tan$의 부호가 정해집니다. 'All Students Take Calculus' 같은 영어권 암기법이 있을 정도로 부호 결정은 기본기 중의 기본기입니다.

Q35 삼각함수 활용

삼각형 ABC에서 $\angle A = 60°$, $\angle B = 45°$, $\overline{BC} = \sqrt{6}$ 일 때, $\overline{AC}$의 길이는?



①) ① 2
②) ② $\sqrt{3}$
③) ③ $\sqrt{6}$
④) ④ 3

🎯 **정답:** ① 2

📖 1단계: 사인법칙에 의해 $\frac{\overline{BC}}{\sin A} = \frac{\overline{AC}}{\sin B}.$

2단계: $\frac{\sqrt{6}}{\sin 60°} = \frac{\overline{AC}}{\sin 45°}.$

3단계: $\overline{AC} = \frac{\sqrt{6} \cdot \sin 45°}{\sin 60°} = \frac{\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{4} = 2.$

따라서 $\overline{AC} = 2.$

💡 사인법칙은 삼각형의 '각과 마주보는 변'이 비례한다는 매우 대칭적인 성질을 담고 있습니다. 측량이나 항해에서 가까운 각도만 재고 먼 거리를 알아내는 데 지금도 쓰입니다.

Q36 수학적 귀납법과 점화식

다음은 모든 자연수 n에 대하여 $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하는 과정의 일부이다.

$n=k$일 때 성립한다고 가정하면

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$$

이다. 이 식의 양변에 ? 를 더하면

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)+\ ?\ =(k+1)^2$$

을 얻어 $n=k+1$일 때도 성립함을 보일 수 있다.

? 에 알맞은 식은?

①) ① $2k-1$

②) ② $2k$

③) ③ $2k+1$

④) ④ $k+1$

🎯 **정답:** ③ $2k+1$

📖 1단계: $n=k+1$일 때 좌변의 마지막 항은 $2(k+1)-1=2k+1$이다.

2단계: 따라서 가정식의 양변에 $2k+1$을 더해야 한다.

3단계: 확인: $k^2+(2k+1)=k^2+2k+1=(k+1)^2$ 로 우변이 성립한다.

따라서 정답은 $2k+1$.

💡 '연속한 홀수의 합은 제곱수가 된다'는 고대 그리스인들도 알고 있던 아름다운 성질입니다. 점을 정사각형 모양으로 쌓아 올리면 겹(層)마다 홀수 개의 점이 추가된다는 그림 하나로 직관적으로 이해할 수 있습니다.

Q37 지수와 로그

방정식 $9^x-4\cdot 3^x+3=0$의 모든 실근의 합은?

①) ① 0

②) ② 1

③) ③ 2

④) ④ 3

🎯 **정답:** ② 1

📖 1단계: $9^x=(3^x)^2$이므로 $3^x=t\ (t>0)$로 치환하면 $t^2-4t+3=0$.

2단계: 인수분해하면 $(t-1)(t-3)=0$이므로 $t=1$ 또는 $t=3$.

3단계: $t=1$이면 $3^x=1 \Rightarrow x=0$.

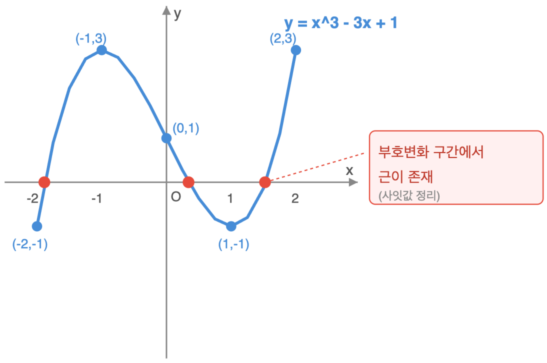
4단계: $t=3$이면 $3^x=3 \Rightarrow x=1$.

5단계: 두 실근의 합은 $0+1=1$.

💡 지수방정식에서 $a^x=t$로 치환하는 순간 '이차방정식 풀이'로 문제가 바뀝니다. 이처럼 치환은 복잡해 보이는 문제를 익숙한 문제로 내리는 가장 강력한 도구 중 하나입니다.

Q38 극한과 연속

함수 $f(x) = x^3 - 3x + 1$에 대하여, 방정식 $f(x) = 0$이 반드시 실근을 가짐을 중간값 정리로 보장할 수 있는 구간은?



①) ① $(-3, -2)$

②) ② $(-1, 0)$

③) ③ $(1, 2)$

④) ④ $(2, 3)$

🎯 **정답:** ③ $(1, 2)$

📖 1단계: f는 다항함수이므로 모든 구간에서 연속이다.

2단계: 각 후보 구간의 양 끝 함숫값을 계산한다.

- $f(-3) = -27 + 9 + 1 = -17 < 0$, $f(-2) = -8 + 6 + 1 = -1 < 0$: 부호 같음.
- $f(-1) = -1 + 3 + 1 = 3 > 0$, $f(0) = 1 > 0$: 부호 같음.
- $f(1) = 1 - 3 + 1 = -1 < 0$, $f(2) = 8 - 6 + 1 = 3 > 0$: 부호 다름.
- $f(2) = 3 > 0$, $f(3) = 27 - 9 + 1 = 19 > 0$: 부호 같음.

3단계: 구간 $(1, 2)$에서만 f의 부호가 바뀌므로 중간값 정리에 의해 실근이 반드시 존재한다.

따라서 답은 ③.

💡 중간값 정리는 '연속한 길을 따라 걷다가 해발 -10m와 +10m를 지났다면 중간 어딘가에서 해발 0m를 밟았다'는 당연해 보이는 사실입니다. 하지만 연속성이 없으면 이 '당연함'이 무너진다는 점이 핵심이지요.

Q39 미분

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치가 $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$일 때, 점 P의 속도가 0이 되는 모든 시각의 합은?

①) ① 2

②) ② 3

③) ③ 4

④) ④ 5

🎯 **정답:** ③ 4

📖 1단계: 속도 $v(t)$는 위치의 도함수이므로 $v(t) = x'(t) = 3t^2 - 12t + 9$.

2단계: $v(t) = 0$이면 $3t^2 - 12t + 9 = 0 \Rightarrow t^2 - 4t + 3 = 0$.

3단계: 인수분해: $(t-1)(t-3) = 0$ 이므로 $t = 1$ 또는 $t = 3$.

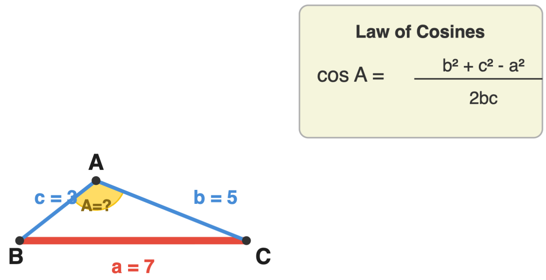
4단계: 두 시각의 합은 $1 + 3 = 4$.

따라서 답은 4.

💡 속도가 0이 되는 순간은 물체가 '방향을 바꾸는 순간'일 가능성이 큽니다. 던져 올린 공이 가장 높은 곳에서 잠시 멈추었다가 떨어지는 것처럼요.

Q40 삼각함수 활용

삼각형 ABC에서 세 변의 길이가 $a = 7$, $b = 5$, $c = 3$일 때, 세 내각 중 가장 큰 각의 크기는? (단, $a = \overline{BC}$, $b = \overline{CA}$, $c = \overline{AB}$.)



①) ① 90°

②) ② 105°

③) ③ 120°

④) ④ 135°

🎯 **정답:** ③ 120°

📖 1단계: 가장 긴 변 $a = 7$의 대각인 $\angle A$가 가장 크다.

2단계: 코사인법칙에 의해

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{25 + 9 - 49}{2 \cdot 5 \cdot 3} = \frac{-15}{30} = -\frac{1}{2}.$$

3단계: $0° < A < 180°$에서 $\cos A = -\frac{1}{2}$이므로 $A = 120°$.

따라서 가장 큰 각은 $120°$.

💡 피타고라스 정리 $a^2 = b^2 + c^2$는 사실 $A = 90°$인 특수한 경우의 코사인법칙입니다. $\cos 90° = 0$이므로 마지막 항이 사라져 피타고라스 정리가 튀어나오지요.

📝 고2 수학 일반

총 40문제 · 문제와 정답·풀이 포함

Q41 수학적 귀납법과 점화식

수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n + 2n\ (n \geq 1)$을 만족할 때, a_{10}의 값은?

①) ① 82

②) ② 90

③) ③ 92

④) ④ 100

🎯 **정답:** ③ 92

📖 1단계: 계차가 $a_{n+1} - a_n = 2n$이므로 계차수열 기법을 쓴다.

2단계: $n \geq 2$일 때

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k) = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 2k.$$

3단계: $\sum_{k=1}^{n-1} 2k = 2 \cdot \frac{(n-1)n}{2} = n(n-1)$이므로 $a_n = n^2 - n + 2$.

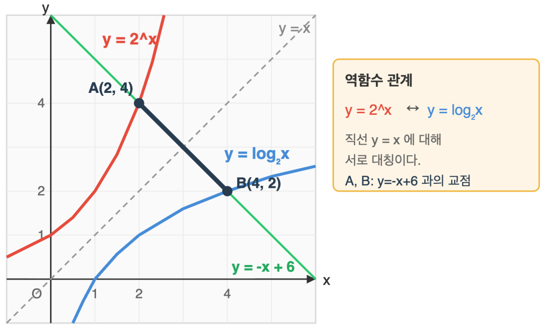
4단계: $a_{10} = 10^2 - 10 + 2 = 92$.

따라서 $a_{10} = 92$.

💡 $a_{n+1} - a_n$이 일정한 식($f(n)$)으로 주어지는 수열을 '계차수열'이라 합니다. 일반항을 한 방에 떠올리기 어려운 점화식도 계차의 합을 쌓아가면 깔끔하게 풀리는 경우가 많습니다.

Q42 지수·로그함수

좌표평면에서 곡선 $y = 2^x$ 위의 점 A와 곡선 $y = \log_2 x$ 위의 점 B가 모두 직선 $y = -x + 6$ 위에 있다. 선분 AB의 길이는?



①) ① $\sqrt{2}$
②) ② 2
③) ③ $2\sqrt{2}$
④) ④ 4

정답: ③ $2\sqrt{2}$

1단계: 점 $A(a, 2^a)$가 $y = -x + 6$ 위에 있으므로 $2^a = -a + 6$, 즉 $2^a + a = 6$.
2단계: $a = 2$를 대입하면 $4 + 2 = 6$ 성립. 따라서 $A = (2, 4)$.
3단계: 두 곡선 $y = 2^x$와 $y = \log_2 x$는 직선 $y = x$에 대해 대칭이고, 직선 $y = -x + 6$ 역시 $y = x$에 대해 대칭이다. 따라서 A를 $y = x$에 대해 대칭시킨 점 $(4, 2)$가 $y = \log_2 x$ 위의 점이며 동시에 $y = -x + 6$ 위에 있다. 즉 $B = (4, 2)$.
4단계: $\overline{AB} = \sqrt{(4-2)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$.
따라서 $\overline{AB} = 2\sqrt{2}$.

$y = 2^x$와 $y = \log_2 x$는 서로 역함수이고, 모든 역함수 쌍은 직선 $y = x$에 대해 대칭입니다. 문제의 직선 $y = -x + 6$은 기울기 -1이라 $y = x$에 수직이고, 그래서 두 점 A, B가 이토록 깔끔한 대칭을 이룹니다.

Q43 지수와 로그

$x > 1$일 때, $\log_3 x + \log_x 81$의 최솟값은?

①) ① 2
②) ② 3
③) ③ 4
④) ④ 5

정답: ③ 4

1단계: 밑 변환에 의해 $\log_x 81 = \dfrac{\log_3 81}{\log_3 x} = \dfrac{4}{\log_3 x}$.
2단계: $\log_3 x = t$로 놓으면 $x > 1$이므로 $t > 0$이고, 식은 $t + \dfrac{4}{t}$이 된다.
3단계: 산술-기하 평균 부등식에 의해

$$t + \frac{4}{t} \geq 2\sqrt{t \cdot \frac{4}{t}} = 2\sqrt{4} = 4.$$

4단계: 등호는 $t = \dfrac{4}{t}$, 즉 $t^2 = 4$에서 $t = 2$일 때. 이때 $\log_3 x = 2$이므로 $x = 9 > 1$ 로 조건을 만족한다.
따라서 최솟값은 4.

산술-기하 평균 부등식 $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 은 고등학교 수준의 부등식 중 가장 활용도 높은 도구 중 하나입니다. 두 양수의 합이 일정할 때는 둘이 같을 때 곱이 최대가 되고, 반대로 곱이 일정할 때는 둘이 같을 때 합이 최소가 됩니다.

Q44 적분

두 곡선 $y = x^3 - 2x$와 $y = x$로 둘러싸인 도형의 넓이는?

①) ① $\frac{9}{4}$

②) ② 3

③) ③ $\frac{9}{2}$

④) ④ 6

🎯 **정답: ③ $\frac{9}{2}$**

📖 1단계: 교점의 x좌표는 $x^3 - 2x = x$, 즉 $x^3 - 3x = 0$에서 $x(x^2 - 3) = 0$. 따라서 $x = -\sqrt{3}$, 0, $\sqrt{3}$.

2단계: 교점이 세 개이므로 두 개의 닫힌 영역이 생긴다.

- $0 < x < \sqrt{3}$ 에서 $x = 1$ 대입: $y = x$는 1, $y = x^3 - 2x$는 -1. 따라서 $x > x^3 - 2x$.

- $-\sqrt{3} < x < 0$에서 $x = -1$ 대입: $y = x$는 -1, $y = x^3 - 2x$는 1. 따라서 $x^3 - 2x > x$.

3단계: $f(x) = x - (x^3 - 2x) = 3x - x^3$로 두면 f는 기함수이므로 두 영역의 넓이가 같다.

4단계: 총 넓이

$$S = 2\int_0^{\sqrt{3}} (3x - x^3)\,dx = 2\left[\frac{3x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^{\sqrt{3}} = 2\left(\frac{9}{2} - \frac{9}{4}\right) = 2 \cdot \frac{9}{4} = \frac{9}{2}.$$

따라서 넓이는 $\frac{9}{2}$.

💡 두 곡선이 세 점에서 만나면 닫힌 영역이 두 개 생기고, 위아래 관계가 교점마다 뒤바뀝니다. 이때 두 식의 차가 기함수이면 두 영역의 넓이가 정확히 같아지는 아름다운 대칭이 생깁니다.

Q45 지수와 로그

$\log 2 = a$일 때, $\log 50$을 a로 나타내면?

①) ① $2 - a$

②) ② $2 + a$

③) ③ $1 - a$

④) ④ $1 + a$

🎯 **정답: ①**

📖 단계1: $50 = \frac{100}{2}$로 변형한다.

단계2: 로그의 성질에 의해 $\log 50 = \log 100 - \log 2$이다.

단계3: $\log 100 = 2$이고 $\log 2 = a$이므로 $\log 50 = 2 - a$이다.

💡 상용로그는 밑이 10인 로그로, 별의 겉보기 밝기(등급) 정의에도 쓰인다.

Q46 수열

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 3, 공차가 4일 때, 첫째항부터 제20항까지의 합 S_{20}을 구하여라.

①) ① 780

②) ② 800

③) ③ 820

④) ④ 840

🎯 **정답: ③**

📖 단계1: 등차수열의 합 공식 $S_n = \frac{n}{2}\{2a_1 + (n-1)d\}$을 사용한다.

단계2: $a_1 = 3,\ d = 4,\ n = 20$을 대입하면 $S_{20} = \frac{20}{2}(6 + 19 \cdot 4) = 10 \cdot 82$이다.

단계3: 따라서 $S_{20} = 820$이다.

💡 어린 가우스가 $1 + 2 + \ \cdots\ + 100 = 5050$을 순식간에 구한 일화가 바로 등차수열 합 공식의 아이디어이다.

Q47 극한과 연속

극한값 $\lim_{x \to 2}(x^3 - 3x + 1)$을 구하여라.

①) ① 1

②) ② 2

③) ③ 3

④) ④ 4

🎯 **정답: ③**

📖 단계1: 다항함수는 모든 실수에서 연속이므로 극한값은 함숫값과 일치한다.

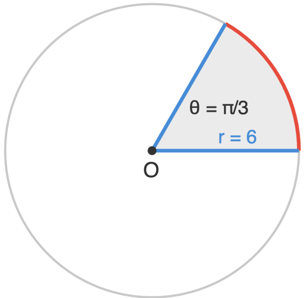
단계2: $x = 2$를 그대로 대입하면 $2^3 - 3 \cdot 2 + 1 = 8 - 6 + 1$이다.

단계3: 따라서 극한값은 3이다.

💡 다항함수의 연속성은 ϵ-δ 논법으로 엄밀히 증명할 수 있다.

Q48 삼각함수

반지름의 길이가 6이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$인 부채꼴의 넓이를 구하여라.



①) ① 4π

②) ② 6π

③) ③ 8π

④) ④ 12π

🎯 **정답: ②**

📖 단계1: 호도법에서 부채꼴 넓이 공식은 $S = \frac{1}{2}r^2\theta$이다.

단계2: $r = 6,\ \theta = \frac{\pi}{3}$을 대입하면 $S = \frac{1}{2} \cdot 36 \cdot \frac{\pi}{3}$이다.

단계3: 계산하면 $S = 6\pi$이다.

💡 호도법은 '호의 길이 / 반지름'으로 각도를 정의해 미적분에서 $\sin x$의 도함수를 $\cos x$로 깔끔하게 만든다.

Q49 수열

$\sum_{k=1}^{10} k(k+1)$의 값을 구하여라.

①) ① 380

②) ② 420

③) ③ 440

④) ④ 495

🎯 **정답: ③**

📖 단계1: 전개하면 $k(k+1) = k^2 + k$이므로 $\sum_{k=1}^{10}(k^2+k) = \sum_{k=1}^{10}k^2 + \sum_{k=1}^{10}k$이다.

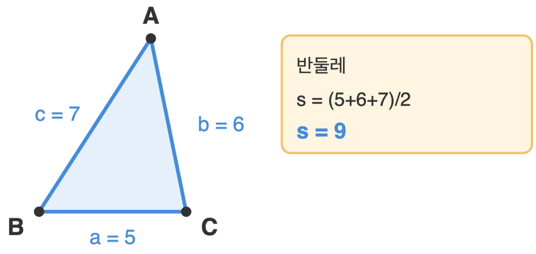
단계2: 공식에 의해 $\sum_{k=1}^{10}k^2 = \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} = 385,\ \sum_{k=1}^{10}k = \frac{10 \cdot 11}{2} = 55$이다.

단계3: 따라서 합은 $385 + 55 = 440$이다.

💡 $k(k+1) = \frac{1}{3}[k(k+1)(k+2) - (k-1)k(k+1)]$로 바꾸면 망원합(telescoping)으로도 풀린다.

Q50 삼각함수 활용

삼각형 ABC의 세 변의 길이가 $a = 5$, $b = 6$, $c = 7$일 때, 헤론의 공식을 이용하여 삼각형의 넓이를 구하여라.



①) ① $4\sqrt{6}$
②) ② $6\sqrt{6}$
③) ③ $12\sqrt{3}$
④) ④ $9\sqrt{6}$

🎯 **정답: ②**

📖 단계1: 반둘레 $s = \dfrac{5+6+7}{2} = 9$이다.
단계2: 헤론의 공식 $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ 에 대입하면 $S = \sqrt{9 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \sqrt{216}$ 이다.
단계3: $\sqrt{216} = \sqrt{36 \cdot 6} = 6\sqrt{6}$ 이므로 넓이는 $6\sqrt{6}$ 이다.
💡 헤론의 공식은 1세기 알렉산드리아의 수학자 헤론이 저서 '측정론(Metrica)'에서 제시한 것으로 유명하다.

Q51 수학적 귀납법과 점화식

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n = n^2 + 3n$일 때, a_{10}의 값을 구하여라.

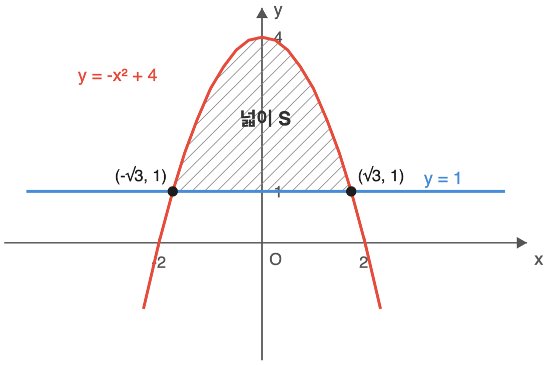
①) ① 20
②) ② 21
③) ③ 22
④) ④ 23

🎯 **정답: ③**

📖 단계1: $n \geq 2$에서 $a_n = S_n - S_{n-1}$을 이용한다.
단계2: $S_{n-1} = (n-1)^2 + 3(n-1) = n^2 - 2n + 1 + 3n - 3 = n^2 + n - 2$이다.
단계3: 따라서 $a_n = (n^2 + 3n) - (n^2 + n - 2) = 2n + 2$이고, $a_{10} = 22$이다.
💡 $a_1 = S_1$을 따로 확인해야 하는 이유는 $a_1 = S_1 - S_0$에서 S_0이 정의되지 않기 때문이다.

Q52 적분

곡선 $y = -x^2 + 4$와 직선 $y = 1$로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하여라.



①) ① $2\sqrt{3}$
②) ② $3\sqrt{3}$
③) ③ $4\sqrt{3}$
④) ④ $6\sqrt{3}$

🎯 **정답: ③**

📖 단계1: 교점은 $-x^2 + 4 = 1$에서 $x^2 = 3$, 즉 $x = \pm\sqrt{3}$ 이다.

단계2: 구간 $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$에서 위쪽 함수는 $-x^2 + 4$이므로 $S = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (3 - x^2)\,dx$이다.

단계3: 피적분함수가 우함수이므로 $S = 2\int_0^{\sqrt{3}} (3 - x^2)\,dx = 2\left[3x - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{3}} = 2(3\sqrt{3} - \sqrt{3}) = 4\sqrt{3}$ 이다.

💡 위로 볼록한 포물선과 수평선이 만드는 조각 넓이는 '$\frac{2}{3} \times$ 밑변 $\times$ 높이' (아르키메데스의 포물선 공식)과 같다.

Q53 미분

함수 $f(x) = x^3 - 3x^2$에 대하여 구간 $[1, 3]$에서의 평균변화율과 $x = 2$에서의 미분계수 $f'(2)$의 차 (평균변화율) $-$ $f'(2)$의 값을 구하여라.

①) ① -1
②) ② 0
③) ③ 1
④) ④ 2

🎯 **정답: ③**

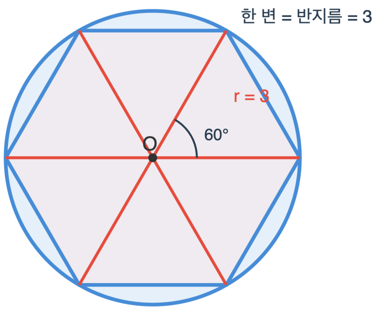
📖 단계1: 평균변화율은 $\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{(27 - 27) - (1 - 3)}{2} = \frac{0 - (-2)}{2} = 1$이다.
단계2: $f'(x) = 3x^2 - 6x$이므로 $f'(2) = 12 - 12 = 0$이다.
단계3: 따라서 (평균변화율) $-$ $f'(2) = 1 - 0 = 1$이다.

💡 평균값 정리는 구간 안 어딘가에서 평균변화율과 순간변화율이 같아지는 점의 존재를 보장한다.

Q54 삼각함수 활용

반지름의 길이가 3인 원에 내접하는 정육각형의 넓이를 구하여라.

정육각형의 내접: 6개의 정삼각형



중심각 60°, 변의 길이 = 반지름

①) ① $\frac{9\sqrt{3}}{2}$

②) ② $9\sqrt{3}$

③) ③ $\frac{27\sqrt{3}}{2}$

④) ④ $27\sqrt{3}$

🎯 **정답: ③**

📖 단계1: 원에 내접하는 정육각형은 중심각 $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$인 합동 정삼각형 6개로 나뉜다.

단계2: 각 정삼각형은 두 변이 반지름 3이고 끼인각이 $\frac{\pi}{3}$이므로 한 변의 길이가 모두 3인 정삼각형이고, 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 3^2 = \frac{9\sqrt{3}}{4}$이다.

단계3: 따라서 정육각형의 넓이는 $6 \times \frac{9\sqrt{3}}{4} = \frac{27\sqrt{3}}{2}$이다.

💡 정육각형이 벌집 모양에 쓰이는 이유는 같은 둘레에서 동일한 면적을 채우는 가장 경제적인 정규 타일 중 하나이기 때문이다.

Q55 수학적 귀납법과 점화식

$a_1 = 1$이고 $a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + 2a_n}$ $(n \geq 1)$로 정의된 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하여라.

①) ① $a_n = \frac{1}{n}$

②) ② $a_n = \frac{1}{2n-1}$

③) ③ $a_n = \frac{1}{2n+1}$

④) ④ $a_n = \frac{1}{n+1}$

🎯 **정답: ②**

📖 단계1: 양변의 역수를 취하기 위해 $b_n = \frac{1}{a_n}$으로 놓는다. 그러면 $b_{n+1} = \frac{1 + 2a_n}{a_n} = \frac{1}{a_n} + 2 = b_n + 2$이다.

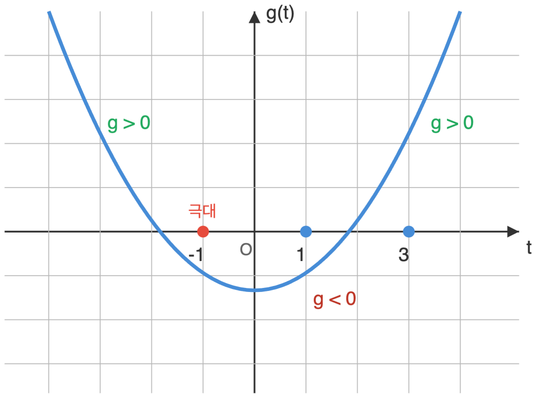
단계2: $\{b_n\}$은 $b_1 = \frac{1}{a_1} = 1$이고 공차가 2인 등차수열이므로 $b_n = 1 + 2(n-1) = 2n - 1$이다.

단계3: 따라서 $a_n = \frac{1}{b_n} = \frac{1}{2n-1}$이다.

💡 역수 치환은 이러한 분수형 점화식을 등차수열로 '선형화'하는 표준 기법으로, 미분방정식의 베르누이형 풀이와 원리가 비슷하다.

Q56 적분

함수 $f(x) = \int_0^x (t^2 - 4t + 3)\,dt$가 극댓값을 가질 때의 x의 값을 구하여라.



①) ① 0
②) ② 1
③) ③ 2
④) ④ 3

🎯 **정답: ②**

📖 단계1: 미적분학의 기본정리에 의해 $f'(x) = x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$이다.
단계2: $f'(x) = 0$의 해는 $x = 1$ 또는 $x = 3$이다.
단계3: $x = 1$ 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x = 1$에서 극댓값을 갖는다.
💡 미적분학의 기본정리는 '누적량의 미분은 순간 변화율과 같다'는 관점을 수학적으로 정확히 말해 준다.

Q57 극한과 연속

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(1) = 5$일 때, $\lim_{h \to 0} \frac{f(1+2h) - f(1-h)}{h}$의 값을 구하여라.

①) ① 5
②) ② 10
③) ③ 15
④) ④ 20

🎯 **정답: ③**

📖 단계1: 분자에 $f(1)$을 빼고 더해 두 부분으로 나눈다: $\lim_{h \to 0} \frac{f(1+2h) - f(1)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{f(1) - f(1-h)}{h}$.
단계2: 첫째 극한은 $2\lim_{h \to 0} \frac{f(1+2h) - f(1)}{2h} = 2f'(1)$이고, 둘째 극한은 $-h = k$로 치환하면 $\lim_{k \to 0} \frac{f(1+k) - f(1)}{k} = f'(1)$이다.
단계3: 따라서 두 극한의 합은 $2f'(1) + f'(1) = 3f'(1) = 3 \cdot 5 = 15$이다.
💡 이런 '양쪽으로 벌어지는 차분'은 수치미분에서 중심차분과 비슷한 아이디어로, 가중합의 계수가 곧 정답의 배율이 된다.

Q58 지수와 로그

$\log_3 18 - \log_3 2$의 값을 구하시오.

①) ① 1

②) ② 2

③) ③ 3

④) ④ 4

정답: ② 2

로그의 뺄셈은 진수의 나눗셈으로 바꿀 수 있다. $\log_3 18 - \log_3 2 = \log_3 \frac{18}{2} = \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2$이다.

로그는 17세기 네이피어가 천문학자들의 복잡한 곱셈 계산을 줄이기 위해 발명했어.

Q59 미분

함수 $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5$의 도함수 $f'(x)$를 구하시오.

①) ① $3x^2 - 4x$

②) ② $3x^2 - 2x$

③) ③ $3x^2 - 4x + 5$

④) ④ $x^2 - 4x$

정답: ① $3x^2 - 4x$

다항함수 미분법에 의해 $(x^n)' = nx^{n-1}$, 상수의 미분은 0이다. 따라서 $f'(x) = 3x^2 - 4x + 0 = 3x^2 - 4x$이다.

미분은 17세기 뉴턴과 라이프니츠가 거의 동시에 독립적으로 발견했어.

Q60 적분

$\int (4x^3 - 6x + 2)\,dx$를 구하시오. (단, C는 적분상수)

①) ① $x^4 - 3x^2 + 2x + C$

②) ② $4x^4 - 6x^2 + 2x + C$

③) ③ $x^4 - 6x^2 + 2x + C$

④) ④ $12x^2 - 6 + C$

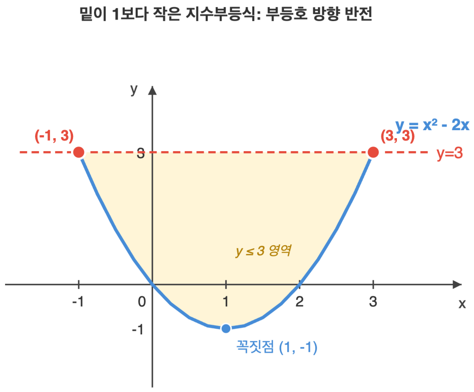
정답: ① $x^4 - 3x^2 + 2x + C$

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C\ (n \neq -1)$을 이용한다. $\int 4x^3 dx = x^4$, $\int (-6x) dx = -3x^2$, $\int 2dx = 2x$이므로 답은 $x^4 - 3x^2 + 2x + C$이다.

적분 기호 $\int$는 라이프니츠가 합(Summa)의 첫 글자 S를 길게 늘여 만든 거야.

Q61 지수·로그함수

부등식 $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-2x} \geq \frac{1}{27}$을 만족하는 x의 범위를 구하시오.



①) ① $-1 \leq x \leq 3$

②) ② $x \leq -1$ 또는 $x \geq 3$

③) ③ $-3 \leq x \leq 1$

④) ④ $0 \leq x \leq 2$

🎯 **정답: ① $-1 \leq x \leq 3$**

📖 $\frac{1}{27} = \left(\frac{1}{3}\right)^3$이므로 부등식은 $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-2x} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^3$이 된다. 밑 $\frac{1}{3} < 1$이므로 부등호 방향이 반전되어 $x^2 - 2x \leq 3$, 즉 $x^2 - 2x - 3 \leq 0$이다. 인수분해하면 $(x-3)(x+1) \leq 0$이므로 $-1 \leq x \leq 3$이다.

💡 밑이 1보다 작은 지수함수는 감소함수이기 때문에 부등호 방향이 뒤집히는 거야.

Q62 수열

수열 $\{a_n\}$의 일반항이 $a_n = 2n + 1$일 때, $\sum_{k=1}^{10} a_k$의 값을 구하시오.

①) ① 110

②) ② 120

③) ③ 130

④) ④ 140

🎯 **정답: ② 120**

📖 $\sum_{k=1}^{10}(2k+1) = 2\sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=1}^{10} 1 = 2 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} + 10 = 110 + 10 = 120$이다.

💡 $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ 공식은 가우스가 초등학생 때 1부터 100까지 합을 순식간에 구한 일화로 유명해.

Q63 극한과 연속

$\lim_{x \to 2}\frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$의 값을 구하시오.

①) ① 1

②) ② 2

③) ③ 3

④) ④ 4

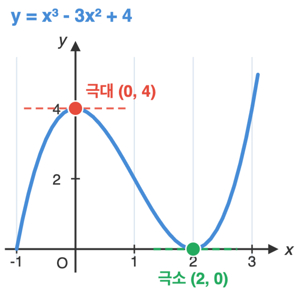
정답: ③ 3

📖 $x \to 2$일 때 분모, 분자가 모두 0이 되는 $\frac{0}{0}$ 부정형이다. 분자를 인수분해하면 $x^3 - 8 = (x-2)(x^2+2x+4)$, 분모는 $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$이다. $x \neq 2$에서 약분하면 $\frac{x^2+2x+4}{x+2}$이고, $x \to 2$ 대입하면 $\frac{4+4+4}{4} = \frac{12}{4} = 3$이다.

💡 $\frac{0}{0}$ 부정형은 0/0이 답이 아니라, 어떤 값으로 수렴할지 정해지지 않았다는 의미야.

Q64 미분

함수 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$의 극댓값을 구하시오.



증감표

x	⋯	0	⋯	2	⋯
f'(x)	+	0	-	0	+
f(x)	↗	4 극대	↘	0 극소	↗

①) ① 0

②) ② 2

③) ③ 4

④) ④ 6

정답: ③ 4

📖 $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$이다. $f'(x) = 0$의 해는 $x = 0, 2$이다. 증감표를 그리면 $x = 0$에서 부호가 +→-로 바뀌므로 극대, $x = 2$에서 -→+로 바뀌므로 극소이다. 따라서 극댓값은 $f(0) = 4$이다.

💡 3차함수는 극값이 0개 또는 2개(극대 1개, 극소 1개)로만 존재해. 1개만 있는 경우는 절대 없어.

Q65 수학적 귀납법과 점화식

수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + 3$ $(n \ge 1)$으로 정의될 때, a_4의 값을 구하시오.

①) ① 29

②) ② 31

③) ③ 45

④) ④ 61

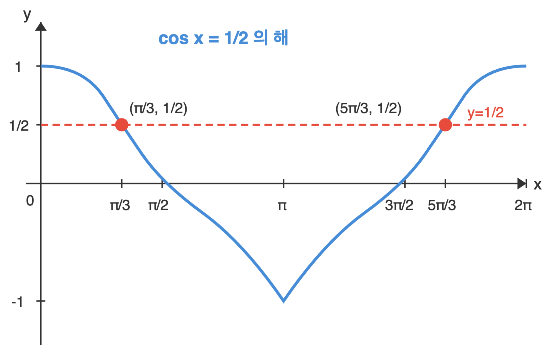
🎯 **정답: ① 29**

📖 점화식에 차례로 대입한다. $a_1 = 1$, $a_2 = 2 \cdot 1 + 3 = 5$, $a_3 = 2 \cdot 5 + 3 = 13$, $a_4 = 2 \cdot 13 + 3 = 29$이다. 일반항으로 검증하면 $a_{n+1} + 3 = 2(a_n + 3)$이므로 $a_n + 3 = (a_1 + 3) \cdot 2^{n-1} = 4 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1}$, 즉 $a_n = 2^{n+1} - 3$이다. 따라서 $a_4 = 2^5 - 3 = 32 - 3 = 29$이다. 정답은 ① 29이다.

💡 $a_{n+1} = pa_n + q$ 꼴 점화식은 양변에 $\frac{q}{p-1}$을 더해 등비수열로 변환할 수 있어.

Q66 삼각함수

$0 \le x < 2\pi$에서 방정식 $2\sin^2 x - 3\cos x = 0$의 모든 해의 합을 구하시오.



①) ① π

②) ② $\frac{4\pi}{3}$

③) ③ $\frac{5\pi}{3}$

④) ④ 2π

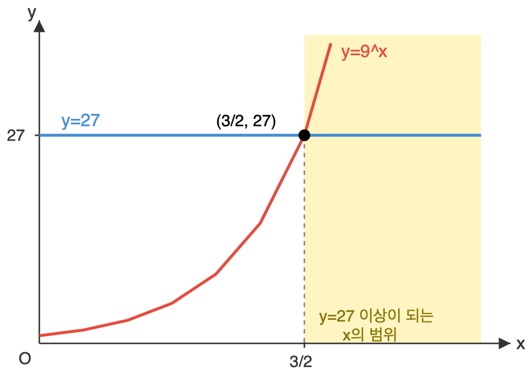
🎯 **정답: ④ 2π**

📖 $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$를 대입하면 $2(1 - \cos^2 x) - 3\cos x = 0$, 즉 $2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$이다. $\cos x = t$로 치환하면 $2t^2 + 3t - 2 = 0 \Rightarrow (2t-1)(t+2) = 0$, $t = \frac{1}{2}$ 또는 $t = -2$이다. $-1 \le \cos x \le 1$이므로 $\cos x = \frac{1}{2}$만 유효하다. $0 \le x < 2\pi$에서 해는 $x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$이고, 합은 $\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{3} = \frac{6\pi}{3} = 2\pi$이다.

💡 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ 항등식을 쓰면 sin과 cos이 섞인 방정식을 한 종류로 통일할 수 있어.

Q67 지수·로그함수

부등식 $9^x \ge 27$의 해를 구하시오.



①) ① $x \ge 1$

②) ② $x \ge \frac{3}{2}$

③) ③ $x \ge 2$

④) ④ $x \ge 3$

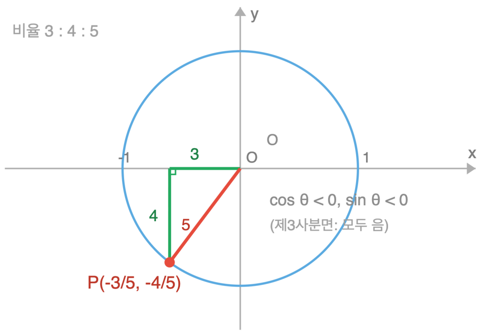
🎯 **정답:** ② $x \ge \frac{3}{2}$

📖 양변을 같은 밑으로 통일한다. $9^x = (3^2)^x = 3^{2x}$이고 $27 = 3^3$이므로 $3^{2x} \ge 3^3$. 밑 $3 > 1$이므로 지수의 부등호 방향이 그대로 유지되어 $2x \ge 3$, 따라서 $x \ge \frac{3}{2}$이다.

💡 지수함수의 밑이 1보다 크면 증가함수, 0과 1 사이면 감소함수예요. 부등호 방향 결정의 핵심!

Q68 삼각함수

θ가 제3사분면의 각이고 $\tan\theta = \frac{4}{3}$일 때, $\sin\theta + \cos\theta$의 값을 구하시오.



①) ① $-\frac{7}{5}$

②) ② $-\frac{1}{5}$

③) ③ $\frac{1}{5}$

④) ④ $\frac{7}{5}$

🎯 **정답:** ① $-\frac{7}{5}$

📖 $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{4}{3}$이므로 비례를 이용해 직각삼각형의 세 변을 3, 4, 5로 둘 수 있다. 제3사분면에서는 $\sin\theta < 0$, $\cos\theta < 0$이므로 $\sin\theta = -\frac{4}{5}$, $\cos\theta = -\frac{3}{5}$. 따라서 $\sin\theta + \cos\theta = -\frac{4}{5} - \frac{3}{5} = -\frac{7}{5}$.

💡 "All Students Take Calculus" - 사분면별 양의 부호 암기법! 1: 모두, 2: Sin, 3: Tan, 4: Cos.

Q69 수열

첫째항이 5, 공비가 -2인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫 6항의 합을 구하시오.

①) ① -105

②) ② -63

③) ③ 63

④) ④ 105

🎯 **정답:** ① -105

📖 등비수열의 합 공식 $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$ $(r \neq 1)$을 이용한다. $a_1 = 5, r = -2, n = 6$이므로 $r^6 = (-2)^6 = 64$. 따라서 $S_6 = \frac{5(1-64)}{1-(-2)} = \frac{5 \cdot (-63)}{3} = \frac{-315}{3} = -105$이다.

💡 공비가 음수인 등비수열은 부호가 번갈아 나타나서 합이 작아지기도 해요. 5, -10, 20, -40, 80, -160의 합!

Q70 미분

함수 $f(x) = x^3 - 4x$의 $x = 2$에서의 미분계수를 구하시오.

①) ① 4

②) ② 6

③) ③ 8

④) ④ 12

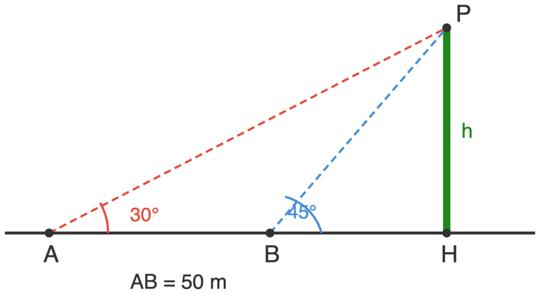
🎯 **정답:** ③ 8

📖 먼저 도함수를 구한다. $f(x) = x^3 - 4x$이므로 $f'(x) = 3x^2 - 4$. 미분계수 $f'(2)$를 구하면 $f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 4 = 12 - 4 = 8$이다.

💡 미분계수는 그래프 위 그 점에서의 '순간 기울기'! 곡선이 살짝 휘어진 정도를 숫자로 보여줘요.

Q71 삼각함수 활용

강 건너편의 나무 꼭대기 P를 보기 위해 강가의 두 지점 A, B에서 올려본 각의 크기가 각각 $30°$, $45°$이고 $\overline{AB} = 50\text{m}$이다. A, B, 나무의 밑 H가 일직선 위에 있고 B가 H에 더 가까울 때, 나무의 높이를 구하시오.



①) ① $25(\sqrt{3}-1)$
②) ② $25(\sqrt{3}+1)$
③) ③ $50(\sqrt{3}-1)$
④) ④ $50(\sqrt{3}+1)$

정답: ② $25(\sqrt{3}+1)$

📖 나무 높이를 h라 하자. 직각삼각형 BPH에서 $\tan 45° = \frac{h}{\overline{BH}}$이므로 $\overline{BH} = h$. 직각삼각형 APH에서 $\tan 30° = \frac{h}{\overline{AH}}$이므로 $\overline{AH} = \frac{h}{\tan 30°} = h\sqrt{3}$. $\overline{AH} - \overline{BH} = \overline{AB} = 50$이므로 $h\sqrt{3} - h = 50$, $h(\sqrt{3}-1) = 50$, $h = \frac{50}{\sqrt{3}-1} = \frac{50(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{50(\sqrt{3}+1)}{2} = 25(\sqrt{3}+1)$ (m).

💡 이런 측량법은 고대 이집트와 그리스에서 피라미드 높이 같은 거대한 구조물의 크기를 잰 방법이에요!

Q72 적분

정적분 $\int_{-1}^{2}(x^2+2x)dx$의 값을 구하시오.

①) ① 4
②) ② 5
③) ③ 6
④) ④ 7

정답: ③ 6

📖 먼저 부정적분(역도함수)을 구하면 $\int(x^2+2x)dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + C$. 정적분의 값은 위끝과 아래끝에서의 함숫값의 차다. 위끝 대입: $\frac{2^3}{3} + 2^2 = \frac{8}{3} + 4 = \frac{20}{3}$. 아래끝 대입: $\frac{(-1)^3}{3} + (-1)^2 = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$. 따라서 정적분의 값은 $\frac{20}{3} - \frac{2}{3} = \frac{18}{3} = 6$이다.

💡 정적분의 값은 곡선 아래 영역의 부호 있는 넓이! x축 위쪽은 +, 아래쪽은 -로 계산돼요.

Q73 극한과 연속

함수 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + ax - 6}{x - 2} & (x \neq 2) \\ b & (x = 2) \end{cases}$ 가 모든 실수 x에서 연속이 되도록 하는 상수 a, b에 대해 $a + b$의 값을 구하시오.

①) ① 5
②) ② 6
③) ③ 7
④) ④ 8

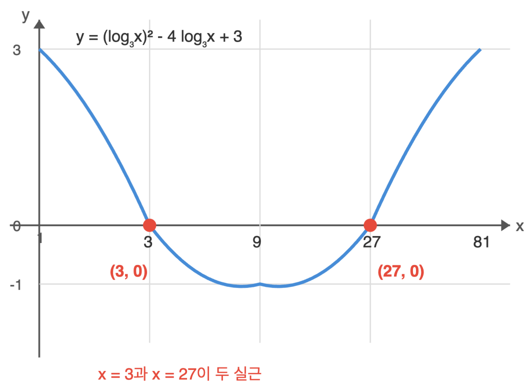
🎯 **정답: ② 6**

📖 $x \neq 2$에서는 분수함수가 연속이므로 $x = 2$에서의 연속만 확인하면 된다. $x \to 2$일 때 분모가 0이 되므로 극한이 존재하려면 분자도 $x = 2$를 대입했을 때 0이 되어야 한다. $4 + 2a - 6 = 0$이므로 $a = 1$. 이때 $\dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \dfrac{(x-2)(x+3)}{x - 2} = x + 3\ (x \neq 2)$. $\lim_{x \to 2}(x + 3) = 5$이므로 연속 조건에 의해 $b = 5$. 따라서 $a + b = 1 + 5 = 6$이다.

💡 분모가 0인 점에서 함수가 연속이려면 분자도 같이 0이 되어 약분 가능한 '제거 가능한 불연속점'이어야 해요.

Q74 지수·로그함수

방정식 $(\log_3 x)^2 - 4\log_3 x + 3 = 0$의 모든 실근의 곱을 구하시오.



①) ① 27
②) ② 54
③) ③ 81
④) ④ 243

🎯 **정답: ③ 81**

📖 $\log_3 x = t$로 치환하면 방정식은 $t^2 - 4t + 3 = 0$이 된다. 인수분해하면 $(t-1)(t-3) = 0$이므로 $t = 1$ 또는 $t = 3$. 즉 $\log_3 x = 1$이면 $x = 3$, $\log_3 x = 3$이면 $x = 27$. 두 실근의 곱은 $3 \times 27 = 81$이다.

💡 log가 들어간 식을 치환하면 익숙한 이차방정식으로 바뀌죠. 치환은 수학에서 가장 강력한 무기 중 하나!

Q75 수열

$\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$의 값을 구하시오.

① ① $\frac{9}{19}$
② ② $\frac{10}{21}$
③ ③ $\frac{11}{21}$
④ ④ $\frac{10}{19}$

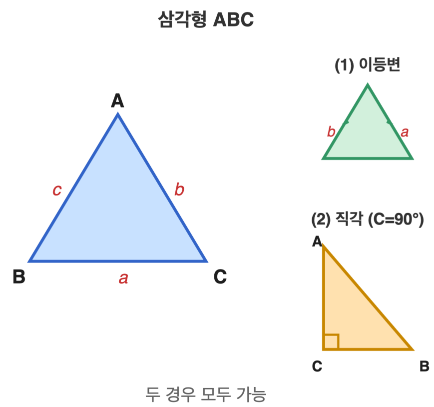
🎯 **정답: ② $\frac{10}{21}$**

📖 부분분수 분해를 이용한다. $\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)$. 따라서 $\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{19} - \frac{1}{21}\right)\right]$. 망원합(중간항 소거)으로 $= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{21}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{20}{21} = \frac{10}{21}$이다.

💡 이런 합을 'telescoping sum(망원경 합)'이라고 해요. 중간 항들이 마치 망원경 접히듯 사라져요!

Q76 삼각함수 활용

삼각형 ABC에서 $a\cos A = b\cos B$가 성립할 때, 이 삼각형의 모양으로 가능한 것을 〈보기〉에서 모두 고른 것은? 〈보기〉 ㄱ. $a = b$인 이등변삼각형 ㄴ. $C = 90°$인 직각삼각형 ㄷ. 정삼각형



① ① ㄱ만
② ② ㄱ, ㄴ
③ ③ ㄱ, ㄷ
④ ④ ㄱ, ㄴ, ㄷ

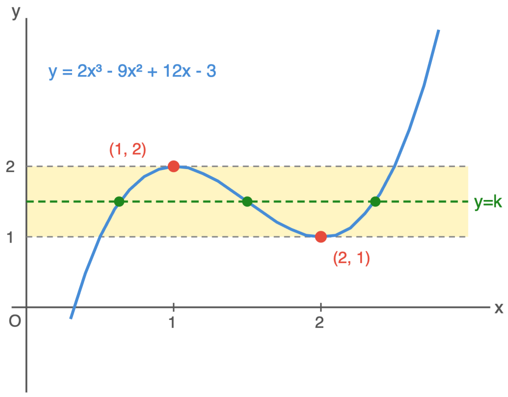
🎯 **정답: ④ ㄱ, ㄴ, ㄷ**

📖 사인법칙에 의해 $a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B$이므로 주어진 식 $a\cos A = b\cos B$의 양변에 대입하면 $2R\sin A\cos A = 2R\sin B\cos B$. 양변에 2를 곱하면 $\sin 2A = \sin 2B$. 이 식이 성립하려면 $2A = 2B$ 또는 $2A + 2B = \pi$이다. 첫째 경우 $A = B$이므로 $a = b$인 이등변삼각형(ㄱ). 둘째 경우 $A + B = \frac{\pi}{2}$이므로 $C = \pi - (A + B) = \frac{\pi}{2}$인 직각삼각형(ㄴ). 정삼각형은 $A = B = C = 60°$이므로 $A = B$를 만족하여 ㄱ에 포함되며 가능(ㄷ). 따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 가능하다.

💡 $\sin\alpha = \sin\beta$를 풀 때는 항상 두 가지 경우($\alpha = \beta$ 또는 $\alpha + \beta = \pi$)를 모두 따져야 해요!

Q77 미분

함수 $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$의 그래프와 직선 $y = k$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하시오.



①) ① $0 < k < 1$
②) ② $1 < k < 2$
③) ③ $1 \leq k \leq 2$
④) ④ $0 < k < 2$

🎯 **정답:** ② $1 < k < 2$

📖 $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1)(x-2)$이므로 $f'(x) = 0$의 해는 $x = 1, 2$. 증감을 살펴보면 $x < 1$에서 $f' > 0$(증가), $1 < x < 2$에서 $f' < 0$(감소), $x > 2$에서 $f' > 0$(증가). 따라서 $x = 1$에서 극댓값 $f(1) = 2 - 9 + 12 - 3 = 2$, $x = 2$에서 극솟값 $f(2) = 16 - 36 + 24 - 3 = 1$. 곡선 $y = f(x)$와 수평선 $y = k$가 서로 다른 세 점에서 만나려면 k가 극솟값과 극댓값 '사이'에 있어야 한다(등호 포함 시 두 점에서만 만남). 따라서 $1 < k < 2$이다.

💡 $y = k$가 극값과 정확히 같으면 곡선과 접하면서 만나 교점이 두 개로 줄어들어요. 그래서 등호는 빠져요!

Q78 지수와 로그

$8^{\frac{2}{3}} \times 4^{-\frac{1}{2}}$의 값을 구하시오.

①) ① 1
②) ② 2
③) ③ 3
④) ④ 4

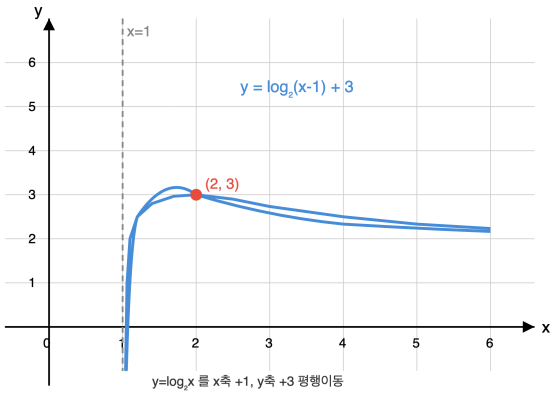
🎯 **정답: ② 2**

📖 1단계: 각 항을 소인수로 변환한다. $8^{\frac{2}{3}} = (2^3)^{\frac{2}{3}} = 2^2 = 4$
2단계: $4^{-\frac{1}{2}} = (2^2)^{-\frac{1}{2}} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$
3단계: 두 값을 곱한다. $4 \times \frac{1}{2} = 2$

💡 유리수 지수는 17세기 뉴턴이 체계적으로 정리하여 미적분학 발전의 토대가 되었다.

Q79 지수·로그함수

함수 $y = \log_2(x-1) + 3$의 그래프의 점근선의 방정식을 구하시오.



①) ① $x = 0$

②) ② $x = 1$

③) ③ $y = 1$

④) ④ $y = 3$

정답: ② $x = 1$

1단계: $y = \log_2 x$의 점근선은 $x = 0$ (y축)이다.

2단계: $y = \log_2(x-1) + 3$은 $y = \log_2 x$를 x축 방향으로 +1, y축 방향으로 +3만큼 평행이동한 그래프이다.

3단계: 점근선도 x축 방향으로 +1만큼 이동하므로 점근선은 $x = 1$이다.

로그함수의 점근선은 진수가 0이 되는 x값에서 나타나며, 로그의 정의역 조건과 일치한다.

Q80 삼각함수

$\sin\theta = \frac{3}{5}$이고 θ가 제2사분면의 각일 때, $\cos\theta$의 값을 구하시오.

①) ① $-\frac{4}{5}$

②) ② $-\frac{3}{5}$

③) ③ $\frac{3}{5}$

④) ④ $\frac{4}{5}$

정답: ① $-\frac{4}{5}$

1단계: $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$에서 $\cos^2\theta = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$

2단계: $\cos\theta = \pm\frac{4}{5}$

3단계: θ가 제2사분면의 각이므로 $\cos\theta < 0$이다. 따라서 $\cos\theta = -\frac{4}{5}$

제2사분면에서는 사인은 양수, 코사인은 음수이므로 'sin은 살아있다(+), cos는 죽었다(-)'로 외우기도 한다.

📝 고2 수학 일반

총 40문제 · 문제와 정답·풀이 포함

Q81 수열

등차수열 $\{a_n\}$에서 $a_3 = 7$, $a_7 = 19$일 때, 첫째항 a_1의 값을 구하시오.

①) ① 1

②) ② 2

③) ③ 3

④) ④ 4

🎯 **정답: ① 1**

📖 1단계: 등차수열의 일반항은 $a_n = a_1 + (n-1)d$이다.

2단계: $a_7 - a_3 = 4d = 19 - 7 = 12$이므로 공차 $d = 3$이다.

3단계: $a_3 = a_1 + 2d = a_1 + 6 = 7$이므로 $a_1 = 1$

💡 등차수열은 가우스가 초등학생 때 1부터 100까지의 합을 순식간에 계산한 일화로 유명하다.

Q82 지수와 로그

$\log_2 3 = a$, $\log_2 5 = b$일 때, $\log_2 45$를 a, b로 나타내시오.

①) ① $a + b$

②) ② $2a + b$

③) ③ $a + 2b$

④) ④ $2a + 2b$

🎯 **정답: ② $2a + b$**

📖 1단계: $45 = 9 \times 5 = 3^2 \times 5$로 소인수분해한다.

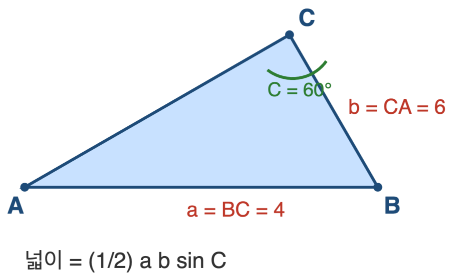
2단계: 로그의 성질에 의해 $\log_2 45 = \log_2(3^2 \times 5) = \log_2 3^2 + \log_2 5$

3단계: $= 2\log_2 3 + \log_2 5 = 2a + b$

💡 로그표는 17세기 네이피어가 발명했으며, 곱셈을 덧셈으로 바꾸어 천문학 계산 시간을 획기적으로 단축시켰다.

Q83 삼각함수 활용

삼각형 ABC에서 $a = 4$, $b = 6$, $C = 60°$일 때, 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오.



①) ① $3\sqrt{3}$

②) ② $6\sqrt{3}$

③) ③ $12\sqrt{3}$

④) ④ $24\sqrt{3}$

🎯 **정답: ②** $6\sqrt{3}$

📖 1단계: 두 변과 끼인각을 알 때 넓이 공식은 $S = \frac{1}{2}ab\sin C$이다.

2단계: $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$을 대입한다.

3단계: $S = \frac{1}{2} \times 4 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$

💡 이 넓이 공식은 고대 알렉산드리아의 헤론이 체계화했으며, 측량술의 기초가 되었다.

Q84 적분

$\int_0^2 (3x^2 - 2x + 1)dx$의 값을 구하시오.

①) ① 4

②) ② 6

③) ③ 8

④) ④ 10

🎯 **정답: ② 6**

📖 1단계: $\int (3x^2 - 2x + 1)dx = x^3 - x^2 + x + C$

2단계: 미적분의 기본정리에 의해 $\int_0^2 (3x^2 - 2x + 1)dx = [x^3 - x^2 + x]_0^2$

3단계: $= (8 - 4 + 2) - 0 = 6$

💡 미적분의 기본정리는 뉴턴과 라이프니츠가 독립적으로 발견했으며, 미분과 적분이 역연산임을 보여주는 수학의 위대한 성취이다.

Q85 지수·로그함수

방정식 $4^x - 5 \cdot 2^{x+1} + 16 = 0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha + \beta$의 값을 구하시오.

①) ① 2
②) ② 3
③) ③ 4
④) ④ 5

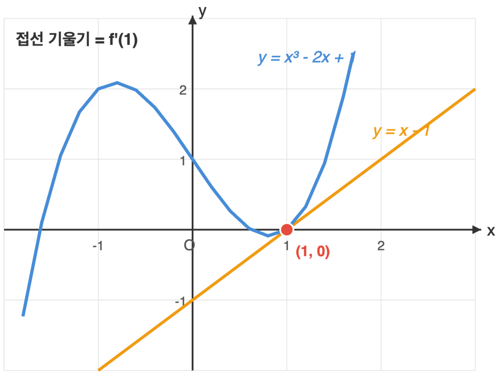
🎯 **정답: ③ 4**

📖 $2^x = t\ (t > 0)$로 치환하면 $4^x = t^2$, $2^{x+1} = 2 \cdot 2^x = 2t$이다. 방정식은 $t^2 - 10t + 16 = 0$이 된다. 이를 풀면 $t = \frac{10 \pm \sqrt{100-64}}{2} = \frac{10 \pm 6}{2}$이므로 $t_1 = 8$, $t_2 = 2$이다. $2^\alpha = 8 = 2^3$, $2^\beta = 2 = 2^1$이므로 $\alpha = 3$, $\beta = 1$이다. 따라서 $\alpha + \beta = 4$이다. (근과 계수의 관계로도 $2^{\alpha+\beta} = t_1 t_2 = 16 = 2^4$이므로 $\alpha + \beta = 4$이다.) 정답은 ③ 4이다.

💡 지수방정식의 치환풀이는 2차방정식으로 바꾸는 핵심 테크닉이다.

Q86 미분

곡선 $y = x^3 - 2x + 1$ 위의 점 $(1, 0)$에서의 접선이 x축과 만나는 점의 좌표를 구하시오.



①) ① $(-1, 0)$
②) ② $(0, 0)$
③) ③ $(1, 0)$
④) ④ $(2, 0)$

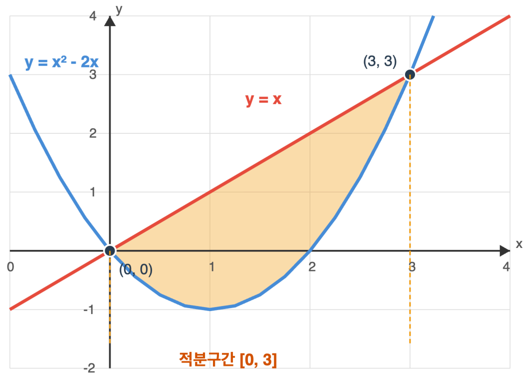
🎯 **정답: ③** $(1, 0)$

📖 1단계: $f(x) = x^3 - 2x + 1$의 도함수는 $f'(x) = 3x^2 - 2$이다.
2단계: 접선의 기울기는 $f'(1) = 3 - 2 = 1$이다.
3단계: 점 $(1, 0)$을 지나고 기울기가 1인 접선의 방정식은 $y - 0 = 1 \cdot (x - 1)$, 즉 $y = x - 1$이다.
4단계: $y = 0$일 때 $x = 1$이므로 x축과의 교점은 $(1, 0)$이다.

💡 접선이 접점에서 x축과 만나는 경우는 접점 자체가 x축 위의 점일 때 발생하는 특수한 상황이다.

Q87 적분

곡선 $y = x^2 - 2x$와 $y = x$로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.



①) ① $\frac{3}{2}$

②) ② $\frac{9}{2}$

③) ③ 6

④) ④ 9

🎯 **정답: ② $\frac{9}{2}$**

📖 1단계: 교점을 구한다. $x^2 - 2x = x$에서 $x^2 - 3x = 0$, $x(x-3) = 0$이므로 $x = 0$ 또는 $x = 3$이다.
2단계: $0 \le x \le 3$에서 $x \ge x^2 - 2x$이므로 넓이 $S = \int_0^3 \{x - (x^2 - 2x)\}dx = \int_0^3 (3x - x^2)dx$
3단계: $= \left[\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{27}{2} - 9 = \frac{27-18}{2} = \frac{9}{2}$

💡 두 곡선 사이의 넓이는 '위쪽 함수 - 아래쪽 함수'를 적분하며, 교점이 적분구간의 경계가 된다.

Q88 지수와 로그

방정식 $4^x = 8^{x-1}$을 만족하는 x의 값은?

①) ① 1

②) ② 2

③) ③ 3

④) ④ 4

🎯 **정답: ③ 3**

📖 양변을 밑 2로 통일한다. $4^x = (2^2)^x = 2^{2x}$, $8^{x-1} = (2^3)^{x-1} = 2^{3x-3}$. 밑이 같으므로 지수를 비교하면 $2x = 3x - 3$, 따라서 $x = 3$.

💡 밑을 같게 맞추는 방법은 지수방정식의 가장 기본 전략이지.

Q89 수열

첫째항이 3, 공차가 4인 등차수열 $\{a_n\}$의 제 10항 a_{10}의 값은?

①) ① 35
②) ② 37
③) ③ 39
④) ④ 41

🎯 **정답: ③ 39**

📖 등차수열의 일반항 공식 $a_n = a_1 + (n-1)d$를 이용한다. $a_n = 3 + (n-1) \cdot 4 = 4n - 1$이므로 $a_{10} = 4 \cdot 10 - 1 = 39$.

💡 등차수열은 같은 수를 계속 더하는 수열이라 일차함수 형태로 표현돼.

Q90 미분

함수 $f(x) = 2x^2 + 3x$에 대하여 $f'(1)$의 값은?

①) ① 5
②) ② 6
③) ③ 7
④) ④ 8

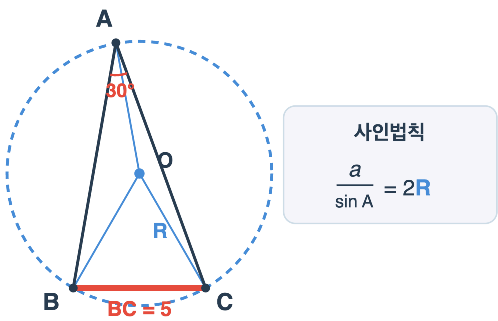
🎯 **정답: ③ 7**

📖 $f(x) = 2x^2 + 3x$의 도함수는 $f'(x) = 4x + 3$. 따라서 $f'(1) = 4 \cdot 1 + 3 = 7$.

💡 $f'(a)$는 $x = a$에서의 순간변화율이자 그래프의 기울기를 뜻해.

Q91 삼각함수 활용

삼각형 ABC에서 $\angle A = 30°$, $\overline{BC} = 5$일 때, 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는?



①) ① 16π
②) ② 20π
③) ③ 25π
④) ④ 36π

🎯 **정답: ③ 25π**

📖 사인법칙에 의해 $\dfrac{a}{\sin A} = 2R$. $a = \overline{BC} = 5$, $\sin 30° = \dfrac{1}{2}$이므로 $2R = \dfrac{5}{\frac{1}{2}} = 10$, 즉 $R = 5$. 따라서 외접원의 넓이는 $\pi R^2 = 25\pi$.

💡 사인법칙에서 $2R$이 상수로 튀어나오는 건 원주각 정리의 연장선이야.

Q92 수학적 귀납법과 점화식

수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 1$이고 $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1 + 2a_n}$ $(n \geq 1)$을 만족할 때, a_5의 값은?

①) ① $\frac{1}{7}$
②) ② $\frac{1}{9}$
③) ③ $\frac{1}{11}$
④) ④ $\frac{1}{13}$

🎯 **정답: ② $\frac{1}{9}$**

📖 점화식의 양변의 역수를 취하면 $\dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{1 + 2a_n}{a_n} = \dfrac{1}{a_n} + 2$. $b_n = \dfrac{1}{a_n}$으로 치환하면 $b_1 = 1$, 공차 2인 등차수열. $b_n = 1 + 2(n-1) = 2n - 1$이므로 $a_n = \dfrac{1}{2n-1}$. 따라서 $a_5 = \dfrac{1}{9}$.

💡 분수형 점화식은 역수 치환으로 등차·등비수열로 바뀌는 경우가 많아.

Q93 수열

첫째항이 2, 공비가 3인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 5항까지의 합 S_5의 값은?

①) ① 240
②) ② 242
③) ③ 244
④) ④ 246

🎯 **정답: ② 242**

📖 등비수열의 합 공식 $S_n = \dfrac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$ (단, $r \neq 1$)을 이용. $S_5 = \dfrac{2(3^5 - 1)}{3 - 1} = \dfrac{2 \cdot 242}{2} = 242$.

💡 $3^5 = 243$이라는 사실을 외워 두면 등비수열 계산이 빨라져.

Q94 극한과 연속

함수 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & (x \neq 1) \\ k & (x = 1) \end{cases}$ 이 $x = 1$에서 연속이 되도록 하는 상수 k의 값은?

①) ① 0
②) ② 1
③) ③ 2
④) ④ 3

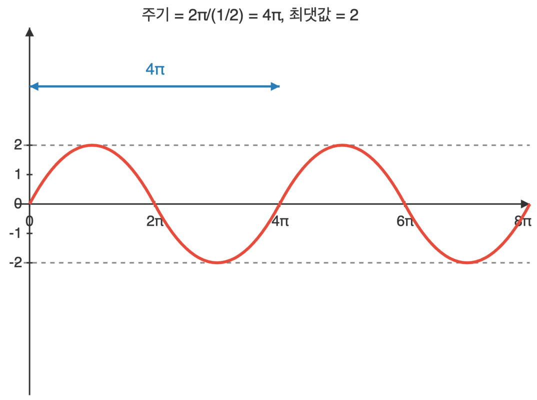
🎯 **정답: ③ 2**

📖 $x = 1$에서 연속일 조건은 $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1) = k$. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \dfrac{(x+1)(x-1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 2$. 따라서 $k = 2$.

💡 $\frac{0}{0}$ 꼴의 부정형은 대부분 인수분해로 풀려.

Q95 삼각함수

함수 $y = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)$의 주기와 최댓값의 합은?



①) ① $2\pi + 2$

②) ② $4\pi + 2$

③) ③ $4\pi + 1$

④) ④ $2\pi + 1$

🎯 **정답:** ② $4\pi + 2$

📖 $y = A\sin(bx)$의 주기는 $\frac{2\pi}{|b|}$, 최댓값은 $|A|$. 여기서 $A = 2$, $b = \frac{1}{2}$이므로 주기 $= \frac{2\pi}{1/2} = 4\pi$, 최댓값 $= 2$. 합은 $4\pi + 2$.

💡 sin 안의 x 계수가 작아질수록 그래프가 좌우로 늘어나 주기가 길어져.

Q96 적분

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t) = 2t + 3$일 때, $t = 0$에서 $t = 3$까지 점 P가 움직인 거리는? (단, $v(t) \geq 0$)

①) ① 15

②) ② 18

③) ③ 21

④) ④ 24

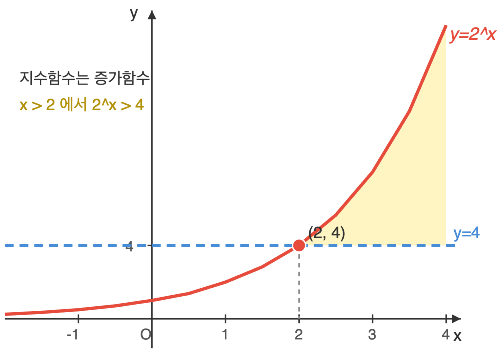
🎯 **정답: ② 18**

📖 속도가 음이 아닐 때 이동거리는 속도의 정적분과 같다. $\int_0^3 (2t+3)\,dt = \left[t^2 + 3t\right]_0^3 = (9+9) - 0 = 18$.

💡 속도를 적분하면 위치 변화량이고, 속력을 적분하면 실제 이동거리야.

Q97 지수·로그함수

부등식 $2^x > 4$를 만족하는 실수 x의 범위는?



①) ① $x > 1$

②) ② $x > 2$

③) ③ $x > 3$

④) ④ $x > 4$

🎯 **정답: ② $x > 2$**

📖 $2^x > 4 = 2^2$로 양변의 밑을 같게 만든다. 지수함수 $y = 2^x$은 밑이 1보다 크므로 증가함수. 따라서 $x > 2$.

💡 밑이 1보다 작을 때는 지수 비교 시 부등호 방향이 뒤집혀.

Q98 삼각함수 활용

세 변의 길이가 각각 2, 3, 4인 삼각형의 넓이는?

①) ① $\dfrac{3\sqrt{15}}{4}$

②) ② $\dfrac{\sqrt{15}}{2}$

③) ③ $\dfrac{3\sqrt{7}}{4}$

④) ④ $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

🎯 **정답: ① $\dfrac{3\sqrt{15}}{4}$**

📖 길이 2, 3 사이의 각을 C라 하면 대변은 4. 코사인법칙에서 $\cos C = \dfrac{2^2 + 3^2 - 4^2}{2 \cdot 2 \cdot 3} = \dfrac{-3}{12} = -\dfrac{1}{4}$. 삼각형의 내각이므로 $0 < C < \pi$에서 $\sin C > 0$. $\sin^2 C = 1 - \dfrac{1}{16} = \dfrac{15}{16}$이므로 $\sin C = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$. 넓이 $S = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sin C = 3 \cdot \dfrac{\sqrt{15}}{4} = \dfrac{3\sqrt{15}}{4}$.

💡 헤론의 공식으로도 같은 값이 나와. $s = \frac{9}{2}$에서 $\sqrt{s(s-2)(s-3)(s-4)}$ 를 계산해 보면 확인할 수 있어.

Q99 극한과 연속

$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x^2+5} - 3}{x-2}$의 값은?

①) ① $\frac{1}{3}$

②) ② $\frac{1}{2}$

③) ③ $\frac{2}{3}$

④) ④ 1

🎯 **정답: ③ $\frac{2}{3}$**

📖 $\frac{0}{0}$ 꼴이므로 분자를 유리화한다.

$\frac{\sqrt{x^2+5} - 3}{x-2} \cdot \frac{\sqrt{x^2+5} + 3}{\sqrt{x^2+5} + 3} = \frac{x^2+5-9}{(x-2)(\sqrt{x^2+5} + 3)} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5} + 3)} = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+5} + 3}$. $x \to 2$일 때 $\frac{4}{\sqrt{9} + 3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

💡 무리식이 들어간 극한은 켤레를 곱하는 유리화가 거의 만능 열쇠야.

Q100 미분

한 변의 길이가 12인 정사각형 모양의 판지에서 네 귀퉁이에 한 변의 길이가 x인 정사각형을 잘라낸 뒤 접어 뚜껑이 없는 직육면체 모양의 상자를 만든다. 이 상자의 부피가 최대일 때, 그 부피는? (단, $0 < x < 6$)

①) ① 108

②) ② 128

③) ③ 144

④) ④ 180

🎯 **정답: ② 128**

📖 밑면은 한 변의 길이가 $12-2x$인 정사각형, 높이는 x. 부피 $V(x) = x(12-2x)^2$.
$V'(x) = (12-2x)^2 + x \cdot 2(12-2x)(-2) = (12-2x)\{(12-2x) - 4x\} = (12-2x)(12-6x)$. $V'(x) = 0$에서 $x = 6$ 또는 $x = 2$. 정의역 $0 < x < 6$에서 $x = 2$가 유일한 임계점이고 이때 최대. $V(2) = 2 \cdot (12-4)^2 = 2 \cdot 64 = 128$.

💡 실생활 최적화 문제는 구간 끝값 처리를 빠뜨리기 쉬우니 항상 정의역을 먼저 확인하자.

Q101 지수와 로그

$\log_2\sqrt{2} + \log_4 8$의 값은?

①) ① 1

②) ② $\frac{3}{2}$

③) ③ 2

④) ④ $\frac{5}{2}$

🎯 **정답: ③ 2**

📖 단계 1: $\log_2\sqrt{2} = \log_2 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$.
단계 2: $\log_4 8$에서 밑변환을 한다. $\log_4 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 4} = \frac{3}{2}$.
단계 3: $\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$.

💡 $\log_{a^m} b^n = \frac{n}{m}\log_a b$ 공식을 쓰면 $\log_4 8 = \log_{2^2} 2^3 = \frac{3}{2}$로 빠르게 계산된다.

Q102 삼각함수

$\frac{5\pi}{6}$ 라디안을 도수법으로 나타내면?

①) ① $120°$

②) ② $135°$

③) ③ $150°$

④) ④ $165°$

정답: ③ $150°$

단계 1: 라디안을 도수로 변환할 때 π 라디안 = $180°$를 이용한다.

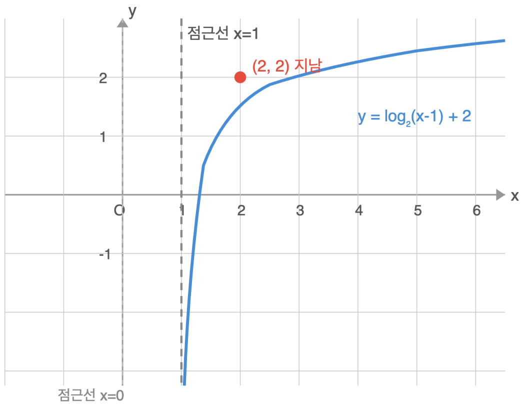
단계 2: $\frac{5\pi}{6}$ 라디안 $= \frac{5}{6} \times 180° = 150°$.

따라서 답은 $150°$이다.

호도법은 18세기 수학자 로저 코츠가 처음 도입했고, 미적분에서 삼각함수의 도함수가 가장 단순하게 나타나기 때문에 표준이 되었다.

Q103 지수·로그함수

함수 $y = \log_2(x-1) + 2$의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것은?



①) ① 점근선은 $x = 0$이다

②) ② 정의역은 모든 실수이다

③) ③ 점 $(2, 2)$를 지난다

④) ④ y축 방향으로 1만큼 이동한 그래프이다

정답: ③ 점 $(2, 2)$를 지난다

단계 1: $y = \log_2(x-1) + 2$는 $y = \log_2 x$를 x축 방향으로 +1, y축 방향으로 +2 평행이동한 그래프이다.

단계 2: 정의역은 $x - 1 > 0$, 즉 $x > 1$. 따라서 ②는 거짓.

단계 3: 점근선은 $x - 1 = 0$, 즉 $x = 1$. ①은 거짓.

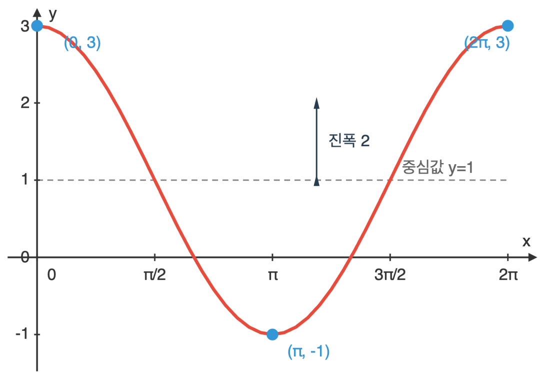
단계 4: $x = 2$ 대입: $y = \log_2 1 + 2 = 0 + 2 = 2$. 점 $(2, 2)$를 지난다. ③ 정답.

단계 5: y축 방향으로 +2만큼 이동했으므로 ④는 거짓.

로그함수의 점근선은 $\log$의 인수가 0이 되는 직선이다. 정의역의 경계와 점근선이 항상 일치한다.

Q104 삼각함수

$0 \leq x \leq 2\pi$에서 함수 $y = 2\cos x + 1$의 최댓값과 최솟값의 합은?



①) ① 0
②) ② 1
③) ③ 2
④) ④ 3

🎯 **정답: ③ 2**

📖 단계 1: $\cos x$의 치역은 $-1 \leq \cos x \leq 1$.
단계 2: $2\cos x$의 치역은 $-2 \leq 2\cos x \leq 2$.
단계 3: $2\cos x + 1$의 치역은 $-1 \leq 2\cos x + 1 \leq 3$.
단계 4: 최댓값 3 ($\cos x = 1$, 즉 $x = 0, 2\pi$일 때), 최솟값 -1 ($\cos x = -1$, 즉 $x = \pi$일 때).
단계 5: 합 $= 3 + (-1) = 2$.
💡 $y = a\cos x + b$ 꼴의 최댓값은 $|a| + b$, 최솟값은 $-|a| + b$이다. 두 값의 합은 항상 $2b$로 중심값의 2배다.

Q105 적분

$\int (3x^2 - 4x + 5)\,dx$를 계산한 결과는? (단, C는 적분상수)

①) ① $x^3 - 2x^2 + 5x + C$
②) ② $x^3 - 4x^2 + 5x + C$
③) ③ $6x - 4 + C$
④) ④ $x^3 + 2x^2 + 5x + C$

🎯 **정답: ①** $x^3 - 2x^2 + 5x + C$

📖 단계 1: 다항함수의 부정적분 공식 $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$를 항별로 적용한다.
단계 2: $\int 3x^2\,dx = 3 \cdot \frac{x^3}{3} = x^3$.
단계 3: $\int -4x\,dx = -4 \cdot \frac{x^2}{2} = -2x^2$.
단계 4: $\int 5\,dx = 5x$.
단계 5: 합치면 $x^3 - 2x^2 + 5x + C$.
💡 적분상수 C가 필요한 이유는 미분하면 상수가 사라지기 때문이다. 따라서 부정적분은 항상 함수족(family)을 의미한다.

Q106 미분

함수 $f(x) = x^2 + 3x$에서 x의 값이 1에서 4까지 변할 때의 평균변화율을 구하시오.

①) ① 6

②) ② 7

③) ③ 8

④) ④ 9

🎯 **정답: ③ 8**

📖 단계 1: 평균변화율의 정의는 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$이다.

단계 2: $f(4) = 16 + 12 = 28$.

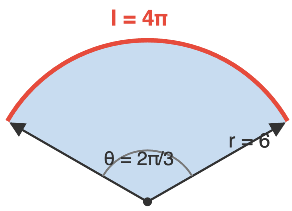
단계 3: $f(1) = 1 + 3 = 4$.

단계 4: 평균변화율 $= \frac{28-4}{4-1} = \frac{24}{3} = 8$.

💡 평균변화율은 두 점을 잇는 직선(할선)의 기울기와 같다. 구간을 점점 좁혀 한 점으로 보내면 접선의 기울기, 즉 미분계수가 된다.

Q107 삼각함수 활용

반지름의 길이가 6이고 호의 길이가 4π인 부채꼴의 넓이를 구하시오.



①) ① 8π

②) ② 10π

③) ③ 12π

④) ④ 15π

🎯 **정답: ③ 12π**

📖 단계 1: 호도법에서 호의 길이 $l = r\theta$이므로 중심각 $\theta = \frac{l}{r} = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$.

단계 2: 부채꼴의 넓이 공식 $S = \frac{1}{2}r^2\theta$를 이용한다.

단계 3: $S = \frac{1}{2} \cdot 36 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{36 \cdot 2\pi}{6} = 12\pi$.

별해: $S = \frac{1}{2}rl = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4\pi = 12\pi$로 더 빠르게 구할 수 있다.

💡 부채꼴 넓이를 호의 길이로 표현하면 $S = \frac{1}{2}rl$이 된다. 이는 삼각형 넓이 $\frac{1}{2} \times$ 밑변 $\times$ 높이와 같은 구조다.

Q108 수학적 귀납법과 점화식

수학적 귀납법으로 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$임을 증명할 때, $n=m$에서 $n=m+1$로 넘어가기 위해 양변에 더해야 하는 항은?

①) ① $m+1$

②) ② $2m-1$

③) ③ $2m+1$

④) ④ $2m+3$

정답: ③ $2m+1$

단계 1: $n=m$일 때 가정: $\sum_{k=1}^{m}(2k-1)=m^2$.
단계 2: $n=m+1$일 때 좌변: $\sum_{k=1}^{m+1}(2k-1)=\sum_{k=1}^{m}(2k-1)+(2(m+1)-1)$.
단계 3: 따라서 추가되는 항은 $k=m+1$일 때의 항인 $2(m+1)-1=2m+1$이다.
단계 4: 검증: $m^2+(2m+1)=(m+1)^2$이 성립하므로 귀납적 증명이 완료된다.

홀수의 합 $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$은 정사각형 격자에 'L자'를 추가하는 모양으로 시각화하면 직관적이다.

Q109 지수와 로그

부등식 $\log_2(x+1)+\log_2(x-2)\le 2$를 만족하는 자연수 x의 개수는?

①) ① 0

②) ② 1

③) ③ 2

④) ④ 3

정답: ② 1

단계 1: 진수조건 확인. $x+1>0$이고 $x-2>0$이어야 하므로 $x>2$.
단계 2: 좌변을 합친다. $\log_2((x+1)(x-2))\le 2=\log_2 4$.
단계 3: 밑이 2(>1)이므로 부등식 방향 유지: $(x+1)(x-2)\le 4$.
단계 4: 전개하면 $x^2-x-2\le 4$, 즉 $x^2-x-6\le 0$.
단계 5: 인수분해 $(x-3)(x+2)\le 0$, 따라서 $-2\le x\le 3$.
단계 6: 진수조건 $x>2$와의 교집합: $2<x\le 3$.
단계 7: 자연수는 $x=3$ 하나. 답은 1개.

로그 부등식에서 진수조건을 누락하면 큰 오답이 생긴다. 풀이 후 반드시 진수조건과의 교집합을 확인해야 한다.

Q110 미분

닫힌구간 $[-1, 3]$에서 함수 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오.

① ① -2

② ② 0

③ ③ 2

④ ④ 4

🎯 **정답:** ② 0

📖 단계 1: 도함수를 구한다. $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$.

단계 2: $f'(x) = 0$의 해는 $x = 0, 2$. 둘 다 닫힌구간 $[-1, 3]$ 내부에 있다.

단계 3: 끝점과 임계점에서의 함숫값을 계산한다.

$f(-1) = -1 - 3 + 2 = -2.$

$f(0) = 0 - 0 + 2 = 2.$

$f(2) = 8 - 12 + 2 = -2.$

$f(3) = 27 - 27 + 2 = 2.$

단계 4: 최댓값 $= 2$ ($x = 0$ 또는 $x = 3$에서), 최솟값 $= -2$ ($x = -1$ 또는 $x = 2$에서).

단계 5: 합 $= 2 + (-2) = 0.$

💡 닫힌구간에서 연속함수의 최댓값과 최솟값은 임계점 또는 구간의 끝점에서만 일어난다(최대최소 정리, 바이어슈트라스).

Q111 지수와 로그

$3^{\log_3 5} - \log_5 25 + \log_2 \sqrt{8}$ 의 값을 구하시오.

① ① $\frac{7}{2}$

② ② 4

③ ③ $\frac{9}{2}$

④ ④ 5

🎯 **정답:** ③ $\frac{9}{2}$

📖 각 항을 차례로 정리한다.

1) 항등식 $a^{\log_a x} = x$ 에 의해 $3^{\log_3 5} = 5$.

2) $\log_5 25 = \log_5 5^2 = 2$.

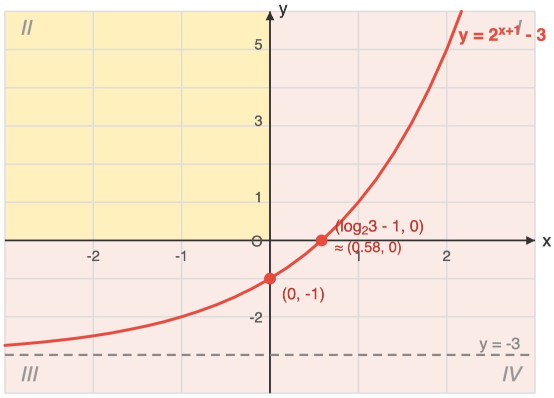
3) $\log_2 \sqrt{8} = \log_2 8^{1/2} = \frac{1}{2}\log_2 8 = \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2}$.

따라서 (주어진 식) $= 5 - 2 + \frac{3}{2} = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$.

💡 $a^{\log_a x} = x$ 는 지수와 로그가 서로 역연산임을 보여주는 가장 핵심적인 항등식이에요.

Q112 지수·로그함수

함수 $y = 2^{x+1} - 3$ 의 그래프가 지나지 않는 사분면을 구하시오.



①) ① 제1사분면

②) ② 제2사분면

③) ③ 제3사분면

④) ④ 제4사분면

🎯 **정답: ② 제2사분면**

📖 $y = 2^{x+1} - 3$ 의 점근선은 $y = -3$ 이고, $2^{x+1} > 0$ 이므로 항상 $y > -3$ 이다.

1) y절편: $x = 0 \Rightarrow y = 2 - 3 = -1$ (음수).

2) x절편: $2^{x+1} = 3 \Rightarrow x = \log_2 3 - 1 \approx 0.58$ (양수).

3) $x < 0$ 이면 $y < 2^1 - 3 = -1 < 0$ 이므로 점은 제3사분면 또는 y축 음의 부분.

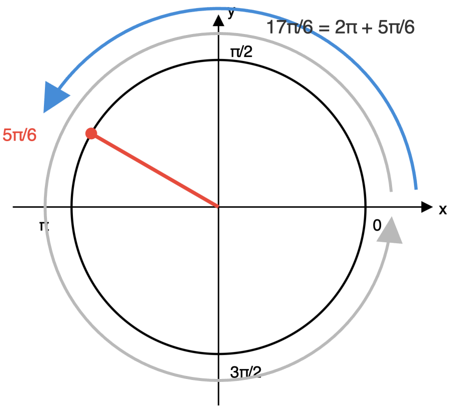
4) $x > 0$ 일 때, $0 < x < \log_2 3 - 1$ 이면 $y < 0$ 이므로 제4사분면, $x > \log_2 3 - 1$ 이면 $y > 0$ 이므로 제1사분면.

따라서 그래프는 제1, 3, 4 사분면을 지나지만 $x < 0,\ y > 0$ 인 제2사분면은 지나지 않는다.

💡 지수함수에 평행이동을 가하면 점근선도 함께 평행이동하여 사분면 통과 양상이 바뀝니다.

Q113 삼각함수

각 $\frac{17\pi}{6}$ 을 나타내는 동경과 같은 동경을 가지는 각 θ 중에서 $0 \le \theta < 2\pi$ 를 만족하는 θ 의 값을 구하시오.



①) ① $\frac{\pi}{3}$
②) ② $\frac{2\pi}{3}$
③) ③ $\frac{5\pi}{6}$
④) ④ $\frac{7\pi}{6}$

🎯 **정답:** ③ $\frac{5\pi}{6}$

📖 동경이 같다는 것은 두 각이 2π 의 정수배만큼 차이남을 뜻한다.

$\frac{17\pi}{6} - 2\pi = \frac{17\pi}{6} - \frac{12\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

이때 $0 \le \frac{5\pi}{6} < 2\pi$ 이므로 조건을 만족한다.

따라서 $\theta = \frac{5\pi}{6}$.

💡 $\frac{5\pi}{6}$ 은 $150°$ 와 같은 각이며, 제2사분면의 대표적인 특수각입니다.

Q114 수열

$\sum_{k=1}^{10} (2k+3)$ 의 값을 구하시오.

①) ① 130
②) ② 135
③) ③ 140
④) ④ 145

🎯 **정답:** ③ 140

📖 시그마의 분배성과 합 공식을 사용한다.

$\sum_{k=1}^{10} (2k+3) = 2\sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=1}^{10} 3$

$= 2 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} + 3 \cdot 10$

$= 2 \cdot 55 + 30 = 110 + 30 = 140.$

💡 $\sum k$ 는 어린 가우스가 1부터 100까지의 합을 순간에 계산한 일화로 유명한 공식입니다.

Q115 미분

함수 $f(x) = 2x^3 - x^2 + 5$ 에 대하여 $f'(2)$ 의 값을 구하시오.

①) ① 16

②) ② 18

③) ③ 20

④) ④ 22

🎯 **정답:** ③ 20

📖 다항함수의 미분법을 그대로 적용한다.

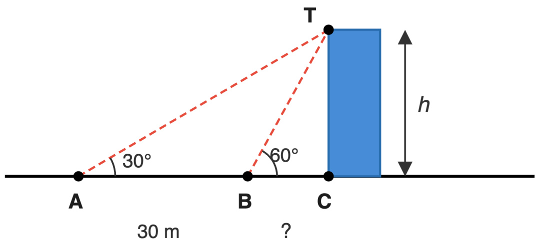
$f'(x) = 6x^2 - 2x.$

$f'(2) = 6 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 24 - 4 = 20.$

💡 x^n 의 도함수가 nx^{n-1} 이라는 규칙은 17세기 뉴턴과 라이프니츠가 거의 동시에 정립한 핵심 공식입니다.

Q116 삼각함수 활용

지면 위에 일직선으로 놓인 세 점 A, B, C 가 있고, 점 C 에서 지면에 수직으로 높이 h 의 탑이 세워져 있다. 점 B 는 점 A 와 점 C 사이에 있으며 $\overline{AB} = 30$ m 이다. 두 지점 A, B 에서 탑 꼭대기를 올려다본 각이 각각 $30°$ 와 $60°$ 일 때, 탑의 높이 h 를 구하시오.



①) ① $10\sqrt{3}$ m

②) ② 15 m

③) ③ $15\sqrt{3}$ m

④) ④ 30 m

🎯 **정답:** ③ $15\sqrt{3}$ **m**

📖 $\overline{BC} = x$ 라 두면 $\overline{AC} = x + 30.$

점 B에서: $\tan 60° = \frac{h}{x} \Rightarrow h = \sqrt{3}\ x$ ... ①

점 A에서: $\tan 30° = \frac{h}{x+30} \Rightarrow h = \frac{x+30}{\sqrt{3}}$ ... ②

①, ② 에서 $\sqrt{3}\ x = \frac{x+30}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow 3x = x + 30 \Rightarrow 2x = 30 \Rightarrow x = 15.$

따라서 $h = \sqrt{3} \cdot 15 = 15\sqrt{3}$ m.

💡 가까이 다가갈수록 올려다보는 각이 커진다는 사실은 측량과 천체 관측에서 거리를 추정하는 기본 원리입니다.

Q117 수학적 귀납법과 점화식

$a_1 = 1$ 이고, 모든 자연수 n 에 대하여 $a_{n+1} = 2a_n + 3$ 인 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_5 의 값을 구하시오.

①) ① 47

②) ② 55

③) ③ 61

④) ④ 67

🎯 **정답:** ③ 61

📖 점화식에 차례로 대입한다.

$a_1 = 1$

$a_2 = 2 \cdot 1 + 3 = 5$

$a_3 = 2 \cdot 5 + 3 = 13$

$a_4 = 2 \cdot 13 + 3 = 29$

$a_5 = 2 \cdot 29 + 3 = 61.$

[참고] 양변에 3을 더하면 $a_{n+1} + 3 = 2(a_n + 3)$ 이므로 수열 $\{a_n + 3\}$ 은 첫째항 4, 공비 2 인 등비수열이고,

$a_n + 3 = 4 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1}$, 즉 $a_n = 2^{n+1} - 3$. $a_5 = 2^6 - 3 = 61$.

💡 $a_{n+1} = pa_n + q$ 형태는 $\{a_n + \frac{q}{p-1}\}$ 가 등비수열이 되도록 변형하는 것이 표준 풀이법입니다.

Q118 적분

함수 $f(x) = \displaystyle\int_0^x (3t^2 - 2t)\,dt$ 에 대하여 $f(2)$ 의 값을 구하시오.

①) ① 2

②) ② 4

③) ③ 6

④) ④ 8

🎯 **정답:** ② 4

📖 적분 변수가 t 이고 위끝이 x 이므로 직접 계산한다.

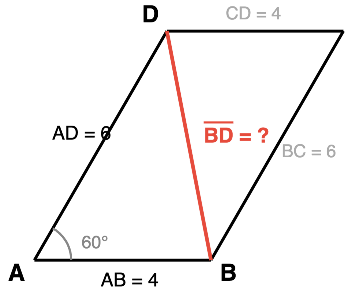
$$f(x) = \int_0^x (3t^2 - 2t)\,dt = \left[t^3 - t^2\right]_0^x = x^3 - x^2.$$

따라서 $f(2) = 2^3 - 2^2 = 8 - 4 = 4$.

💡 위끝이 변수인 정적분은 새로운 함수를 정의하고, 미분하면 적분 안의 함수가 다시 나옵니다(미적분의 기본정리).

Q119 삼각함수 활용

평행사변형 ABCD 에서 $\overline{AB} = 4$, $\overline{AD} = 6$, $\angle BAD = 60°$ 일 때, 대각선 $\overline{BD}$ 의 길이를 구하시오.



①) ① $2\sqrt{5}$
②) ② $2\sqrt{6}$
③) ③ $2\sqrt{7}$
④) ④ $4\sqrt{2}$

🎯 **정답:** ③ $2\sqrt{7}$

📖 삼각형 ABD 에서 $\overline{AB} = 4$, $\overline{AD} = 6$, 끼인각 $\angle BAD = 60°$.

끼인각이 주어진 두 변의 대변에 대한 공식을 적용하면:

$\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AD} \cos 60°$

$= 16 + 36 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2}$

$= 52 - 24 = 28.$

따라서 $\overline{BD} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$.

💡 평행사변형의 두 대각선 제곱의 합은 네 변 제곱의 합과 같다는 평행사변형 법칙도 같은 공식에서 유도됩니다.

Q120 수열

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = n^2 + 2n$ 일 때, $\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{a_k a_{k+1}}$ 의 값을 구하시오.

①) ① $\frac{5}{69}$

②) ② $\frac{10}{69}$

③) ③ $\frac{1}{7}$

④) ④ $\frac{20}{69}$

🎯 **정답: ② $\frac{10}{69}$**

📖 1) 일반항을 구한다.

$n \geq 2$ 일 때 $a_n = S_n - S_{n-1} = (n^2 + 2n) - \{(n-1)^2 + 2(n-1)\}$

$= (n^2 - (n-1)^2) + 2 = (2n-1) + 2 = 2n + 1.$

또 $a_1 = S_1 = 3 = 2 \cdot 1 + 1$ 이므로 모든 자연수 n 에 대해 $a_n = 2n + 1.$

2) 부분분수 변환.

$$\frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3}\right).$$

3) 합 계산.

$$\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{23}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{20}{69} = \frac{10}{69}.$$

💡 S_n 으로부터 a_n 을 구할 때 $n = 1$ 의 경우를 따로 확인하는 습관은 수능에서 흔히 출제되는 함정입니다.

📝 고2 수학 일반

총 40문제 · 문제와 정답·풀이 포함

Q121 극한과 연속

$\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 + ax + b}{x - 2} = 5$ 일 때, 상수 a, b 에 대하여 $a + b$ 의 값을 구하시오.

①) ① -7

②) ② -5

③) ③ -3

④) ④ -1

🎯 **정답:** ② -5

📖 분모가 $x \to 2$ 일 때 0 으로 수렴하는데 극한값이 유한($=5$)하므로 분자도 $x \to 2$ 일 때 0 으로 수렴해야 한다.

1) $4 + 2a + b = 0 \Rightarrow b = -2a - 4$ ... ①

2) 분자를 $(x-2)(x+c)$ 형태로 인수분해하면 $x^2 + (c-2)x - 2c$, 따라서 $a = c - 2$, $b = -2c$.

3) 그러면 $\lim_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(x+c)}{x-2} = 2 + c = 5 \Rightarrow c = 3$.

4) $a = 3 - 2 = 1$, $b = -2 \cdot 3 = -6$.

따라서 $a + b = 1 + (-6) = -5$.

💡 극한값이 존재한다는 한 줄에서 분자도 0 이라는 정보를 추출하는 것은 미정계수 문제의 거의 모든 출발점입니다.

Q122 미분

함수 $f(x) = x^3 + ax^2 + (a+6)x + 5$ 가 극값을 갖지 않도록 하는 실수 a 의 값의 범위를 구하시오.

①) ① $-6 \le a \le 3$

②) ② $-3 \le a \le 6$

③) ③ $a \le -3$ 또는 $a \ge 6$

④) ④ $-3 < a < 6$

🎯 **정답:** ② $-3 \le a \le 6$

📖 $f(x)$ 가 극값을 갖지 않으려면 도함수 $f'(x)$ 가 부호를 바꾸지 않아야 한다. 즉, 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \ge 0$ 이어야 한다.

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + (a+6)$.

이차계수 $3 > 0$ 이므로 모든 x 에서 $f'(x) \ge 0$ 일 조건은 판별식 ≤ 0 이다.

$\dfrac{D}{4} = a^2 - 3(a+6) \le 0$

$\Rightarrow a^2 - 3a - 18 \le 0$

$\Rightarrow (a-6)(a+3) \le 0$

$\Rightarrow -3 \le a \le 6$.

[보충] $a = -3$ 또는 $a = 6$ 이면 $f'(x)$ 가 한 점에서 0 이고 다른 곳에서 양이므로 극값이 없다(증가함수). 등호 포함.

💡 삼차함수가 극값을 갖느냐 갖지 않느냐는 도함수(이차함수)의 판별식 부호에 의해 완전히 결정됩니다.

Q123 지수와 로그

$\sqrt[3]{27} \times 4^{\frac{1}{2}}$의 값을 구하시오.

①) ① 4

②) ② 5

③) ③ 6

④) ④ 7

🎯 **정답: ③**

📖 1단계: $\sqrt[3]{27} = 27^{\frac{1}{3}} = (3^3)^{\frac{1}{3}} = 3$

2단계: $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$

3단계: 두 값을 곱하면 $3 \times 2 = 6$

💡 분수 지수는 거듭제곱근의 또 다른 표현입니다. 일반적으로 $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ 가 성립합니다.

Q124 수열

첫째항이 3이고 공비가 2인 등비수열 $\{a_n\}$의 제5항 a_5의 값을 구하시오.

①) ① 24

②) ② 48

③) ③ 96

④) ④ 192

🎯 **정답: ②**

📖 1단계: 등비수열의 일반항 공식은 $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$이다.

2단계: $a_1 = 3$, $r = 2$이므로 $a_5 = 3 \cdot 2^{5-1} = 3 \cdot 16$

3단계: 따라서 $a_5 = 48$

💡 등비수열은 복리이자 계산이나 인구 증가 모델 등 실생활에서도 자주 등장합니다.

Q125 적분

함수 $F(x)$의 도함수가 $F'(x) = 3x^2 + 2x$이고 $F(1) = 5$일 때, $F(2)$의 값을 구하시오.

①) ① 11

②) ② 13

③) ③ 15

④) ④ 17

🎯 **정답: ③**

📖 1단계: $F(x) = \int (3x^2 + 2x)dx = x^3 + x^2 + C$

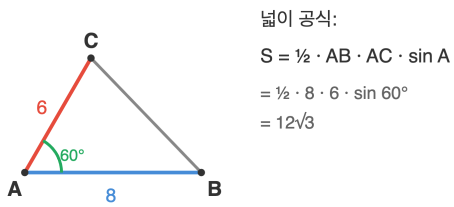
2단계: $F(1) = 1 + 1 + C = 2 + C = 5$이므로 $C = 3$

3단계: 따라서 $F(x) = x^3 + x^2 + 3$, $F(2) = 8 + 4 + 3 = 15$

💡 부정적분의 적분상수 C는 초기조건이 주어지면 유일하게 결정됩니다.

Q126 삼각함수 활용

삼각형 ABC에서 $\overline{AB} = 8$, $\overline{AC} = 6$, $\angle A = 60°$일 때, 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오.



①) ① $8\sqrt{3}$
②) ② $10\sqrt{3}$
③) ③ $12\sqrt{3}$
④) ④ $16\sqrt{3}$

🎯 **정답: ③**

📖 1단계: 두 변과 끼인각이 주어진 삼각형의 넓이는 $S = \frac{1}{2}bc\sin A$로 구한다.

2단계: $S = \frac{1}{2} \times 8 \times 6 \times \sin 60° = 24 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

3단계: 따라서 $S = 12\sqrt{3}$

💡 이 공식은 두 변의 길이와 끼인각만 알면 삼각형의 높이를 직접 구하지 않아도 넓이를 구할 수 있게 해 줍니다.

Q127 수학적 귀납법과 점화식

수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + 1$ $(n \geq 1)$을 만족할 때, a_5의 값을 구하시오.

①) ① 15
②) ② 23
③) ③ 31
④) ④ 63

🎯 **정답: ③**

📖 1단계: 점화식의 양변에 1을 더하면 $a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$

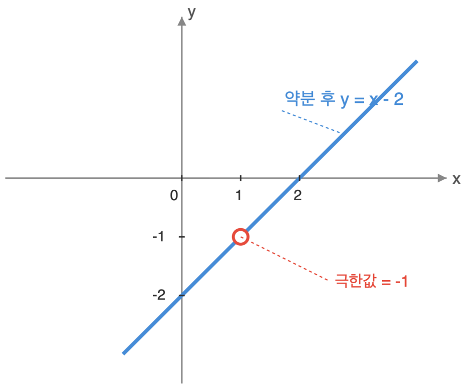
2단계: $b_n = a_n + 1$로 치환하면 $\{b_n\}$은 $b_1 = 2$, 공비 2인 등비수열이므로 $b_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$

3단계: 따라서 $a_n = 2^n - 1$이고, $a_5 = 2^5 - 1 = 31$

💡 $a_{n+1} = pa_n + q$ 꼴의 점화식은 $a_{n+1} - k = p(a_n - k)$ 형태로 변형해 등비수열로 풀 수 있습니다.

Q128 극한과 연속

$\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$의 값을 구하시오.



①) ① -2

②) ② -1

③) ③ 0

④) ④ 1

정답: ②

1단계: 분자 $x^2 - 3x + 2$를 인수분해하면 $(x-1)(x-2)$

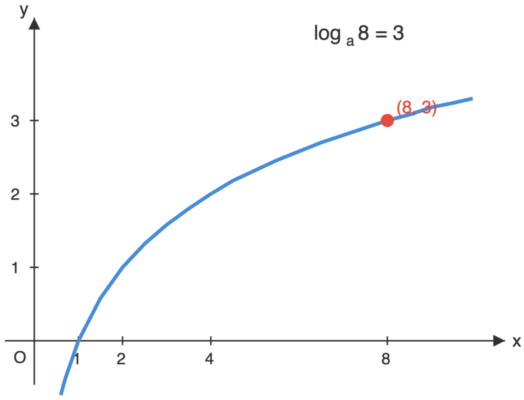
2단계: $\dfrac{(x-1)(x-2)}{x-1} = x - 2\ (x \neq 1)$

3단계: $\lim_{x \to 1}(x-2) = 1 - 2 = -1$

$\frac{0}{0}$ 형태의 부정형은 인수분해를 통해 공통인수를 약분하면 극한값을 구할 수 있습니다.

Q129 지수·로그함수

함수 $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$)의 그래프가 점 $(8, 3)$을 지날 때, 양수 a의 값을 구하시오.



①) ① 2

②) ② 3

③) ③ 4

④) ④ 8

🎯 **정답:** ①

📖 1단계: 그래프가 점 $(8, 3)$을 지나므로 $\log_a 8 = 3$

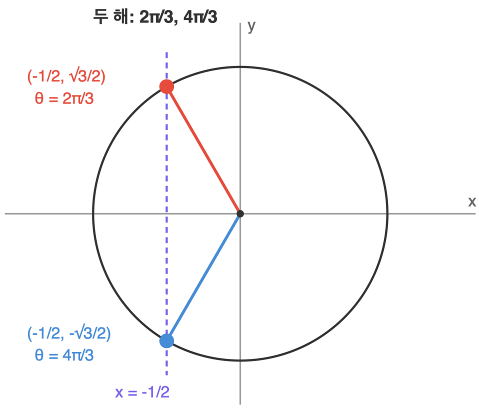
2단계: 로그의 정의에 의해 $a^3 = 8$

3단계: $8 = 2^3$이므로 $a = 2$

💡 로그함수 $y = \log_a x$는 지수함수 $y = a^x$의 역함수이며, 두 그래프는 직선 $y = x$에 대해 대칭입니다.

Q130 삼각함수

$0 \le x \le 2\pi$일 때, 방정식 $\cos x = -\frac{1}{2}$의 모든 해의 합을 구하시오.



①) ① π
②) ② $\frac{4\pi}{3}$
③) ③ $\frac{5\pi}{3}$
④) ④ 2π

🎯 **정답: ④**

📖 1단계: $\cos x = -\frac{1}{2}$인 기준각은 $\frac{\pi}{3}$이고, cos 값이 음수인 사분면은 제2, 제3사분면이다.
2단계: $0 \le x \le 2\pi$ 범위의 두 해는 $x = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$와 $x = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$
3단계: 두 해의 합은 $\frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = \frac{6\pi}{3} = 2\pi$

💡 $\cos x = k$의 두 해는 x축에 대해 대칭이므로 두 해의 합은 항상 2π가 됩니다.

Q131 적분

정적분 $\int_0^2 (3x^2 - 2x + 1)\,dx$의 값을 구하시오.

①) ① 4
②) ② 6
③) ③ 8
④) ④ 10

🎯 **정답: ②**

📖 1단계: 부정적분을 구하면 $\int (3x^2 - 2x + 1)\,dx = x^3 - x^2 + x + C$
2단계: $\int_0^2 (3x^2 - 2x + 1)\,dx = \left[x^3 - x^2 + x\right]_0^2$
3단계: $= (8 - 4 + 2) - 0 = 6$

💡 정적분은 곡선과 x축 사이의 부호가 있는 넓이를 의미합니다. 적분의 결과가 음수일 수도 있다는 점에 주의하세요.

Q132 수열

$\sum_{k=1}^{10}(2k-1)$의 값을 구하시오.

①) ① 80

②) ② 90

③) ③ 100

④) ④ 110

정답: ③

📖 1단계: 합을 분리하면 $\sum_{k=1}^{10}(2k-1) = 2\sum_{k=1}^{10}k - \sum_{k=1}^{10}1$

2단계: $\sum_{k=1}^{10}k = \frac{10\cdot 11}{2} = 55,\ \sum_{k=1}^{10}1 = 10$

3단계: $2\times 55 - 10 = 110 - 10 = 100$

💡 $1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$이라는 유명한 항등식이 있습니다. 즉, 첫째 자연수부터 n번째 홀수까지의 합은 n^2입니다.

Q133 삼각함수 활용

삼각형 ABC에서 $\overline{AB} = 6, \overline{AC} = 4, \cos A = \frac{1}{4}$일 때, 변 $\overline{BC}$의 제곱과 삼각형 ABC의 넓이 S의 곱 $\overline{BC}^2\cdot S$의 값을 구하시오.

①) ① $60\sqrt{15}$

②) ② $80\sqrt{15}$

③) ③ $120\sqrt{15}$

④) ④ $150\sqrt{15}$

정답: ③

📖 1단계: 코사인법칙에 의해 $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\cos A = 36+16-2\cdot 6\cdot 4\cdot\frac{1}{4} = 52-12 = 40$

2단계: $\sin^2 A = 1-\cos^2 A = 1-\frac{1}{16} = \frac{15}{16}$이므로 $\sin A = \frac{\sqrt{15}}{4}$ (A는 삼각형의 내각이므로 양수)

3단계: $S = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{15}}{4} = 3\sqrt{15}$, 따라서 $\overline{BC}^2\cdot S = 40\cdot 3\sqrt{15} = 120\sqrt{15}$

💡 한 각의 코사인 값만 알면 사인 값도 자동으로 결정되므로(부호 제외), 코사인법칙과 넓이 공식을 함께 활용할 수 있습니다.

Q134 미분

함수 $f(x) = x^3 - 3x^2 + k$의 그래프가 x축과 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

①) ① $-4 < k < 0$

②) ② $0 < k < 4$

③) ③ $-4 < k < 4$

④) ④ $k > 4$

정답: ②

📖 1단계: $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$이므로 $x = 0$에서 극대, $x = 2$에서 극소가 된다.

2단계: 극댓값은 $f(0) = k$, 극솟값은 $f(2) = 8-12+k = k-4$

3단계: 삼차함수가 x축과 서로 다른 세 점에서 만나려면 (극댓값) $\times$ (극솟값) < 0, 즉 $k(k-4) < 0$이므로 $0 < k < 4$

💡 삼차함수가 x축과 만나는 실근의 개수는 극댓값과 극솟값의 곱의 부호로 판별할 수 있습니다. 곱이 음수면 세 실근, 양수면 한 실근입니다.

Q135 적분

수직선 위의 원점에서 출발하는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t) = 6t^2 - 6t$일 때, $t = 0$부터 $t = 3$까지 점 P가 실제로 움직인 거리를 구하시오.

①) ① 25

②) ② 27

③) ③ 29

④) ④ 31

🎯 **정답: ③**

📖 1단계: $v(t) = 6t(t-1)$이므로 $v(t) = 0$인 시각은 $t = 0, 1$. $0 < t < 1$에서 $v(t) < 0$, $t > 1$에서 $v(t) > 0$

2단계: 실제 움직인 거리는 $\int_0^3 |v(t)|\, dt = \int_0^1 (6t - 6t^2)\, dt + \int_1^3 (6t^2 - 6t)\, dt$

3단계: $\int_0^1 (6t - 6t^2)\, dt = [3t^2 - 2t^3]_0^1 = 1$, $\int_1^3 (6t^2 - 6t)\, dt = [2t^3 - 3t^2]_1^3 = (54 - 27) - (2 - 3) = 28$. 따라서 총 이동거리는 $1 + 28 = 29$

💡 위치의 변화량(변위)은 $\int v\, dt$이지만, 실제로 움직인 거리는 $\int |v|\, dt$로 속도가 음수인 구간을 따로 처리해야 합니다.

Q136 지수와 로그

$\log_2 24 - \log_2 3$의 값을 구하시오.

①) ① 1

②) ② 2

③) ③ 3

④) ④ 4

🎯 **정답: ③ 3**

📖 로그의 뺄셈은 진수의 나눗셈과 같다. $\log_2 24 - \log_2 3 = \log_2 \frac{24}{3} = \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$이다.

💡 로그는 17세기 네이피어가 천문학 계산을 단순화하기 위해 발명했어요.

Q137 삼각함수

$\sin\theta = \frac{4}{5}$이고 θ가 제1사분면의 각일 때 $\cos\theta$의 값은?

①) ① $\frac{2}{5}$

②) ② $\frac{3}{5}$

③) ③ $\frac{4}{5}$

④) ④ $\frac{5}{3}$

🎯 **정답: ② $\frac{3}{5}$**

📖 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$이므로 $\cos^2\theta = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$. 제1사분면에서 $\cos\theta > 0$이므로 $\cos\theta = \frac{3}{5}$이다.

💡 $(3, 4, 5)$는 가장 작은 피타고라스 삼각형으로 고대 이집트에서 직각을 만드는 데 쓰였어요.

Q138 수열

등차수열 $\{a_n\}$에서 $a_1 = 3,\ a_5 = 19$일 때 공차 d의 값은?

①) ① 2

②) ② 3

③) ③ 4

④) ④ 5

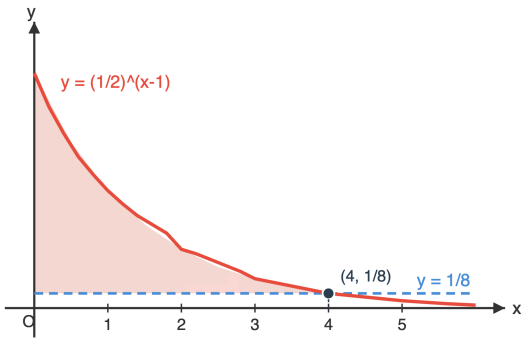
🎯 **정답: ③ 4**

📖 $a_5 = a_1 + 4d$이므로 $19 = 3 + 4d$. 따라서 $4d = 16,\ d = 4$이다.

💡 등차수열의 합 공식은 가우스가 어린 시절 1부터 100까지 합을 빠르게 구한 일화로 유명해요.

Q139 지수·로그함수

부등식 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} > \frac{1}{8}$을 만족시키는 x의 범위는?



①) ① $x < 3$

②) ② $x < 4$

③) ③ $x > 3$

④) ④ $x > 4$

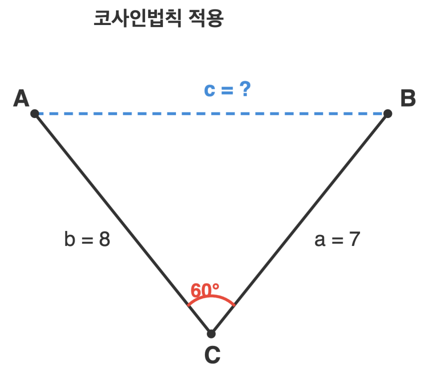
🎯 **정답: ② $x < 4$**

📖 $\frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$이므로 부등식은 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} > \left(\frac{1}{2}\right)^3$. 밑 $\frac{1}{2}$가 1보다 작으므로 부등호 방향이 바뀌어 $x - 1 < 3$, 즉 $x < 4$이다.

💡 밑이 1보다 작으면 지수함수는 감소하고, 부등식 방향도 뒤집힌답니다.

Q140 삼각함수 활용

삼각형 ABC에서 $a = 7$, $b = 8$, $C = 60°$일 때 변 c의 길이는?



①) ① $\sqrt{53}$
②) ② $\sqrt{57}$
③) ③ $\sqrt{60}$
④) ④ $\sqrt{65}$

🎯 **정답: ② $\sqrt{57}$**

📖 코사인법칙 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$를 적용하면 $c^2 = 49 + 64 - 2 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 113 - 56 = 57$. 따라서 $c = \sqrt{57}$ 이다.

💡 코사인법칙은 피타고라스 정리의 일반화로, $C = 90°$이면 $\cos C = 0$이라 피타고라스 정리가 됩니다.

Q141 극한과 연속

$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$의 값은?

①) ① 2
②) ② 3
③) ③ 4
④) ④ 발산

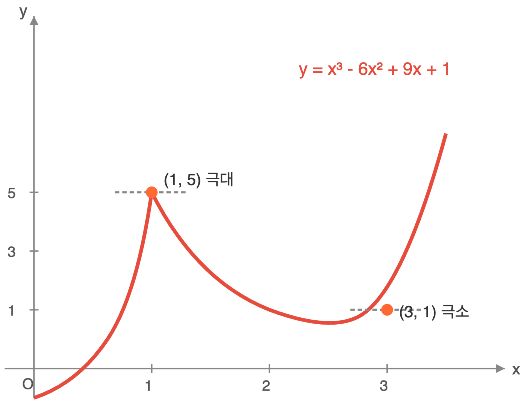
🎯 **정답: ③ 4**

📖 $\frac{0}{0}$ 부정형이므로 분자를 인수분해한다. $\frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2$. 따라서 $\lim_{x \to 2}(x+2) = 4$이다.

💡 $\frac{0}{0}$ 형태의 극한을 푸는 핵심 도구가 인수분해와 약분이에요.

Q142 미분

함수 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$의 극댓값과 극솟값의 차는?



①) ① 2
②) ② 4
③) ③ 6
④) ④ 8

🎯 **정답: ② 4**

📖 $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$이므로 $x = 1$에서 극대, $x = 3$에서 극소. $f(1) = 1 - 6 + 9 + 1 = 5$, $f(3) = 27 - 54 + 27 + 1 = 1$. 따라서 차는 $5 - 1 = 4$이다.

💡 3차함수의 극댓값과 극솟값의 차는 두 극값 사이 거리로 그래프의 굴곡 크기를 보여줘요.

Q143 적분

$\int_0^2 (3x^2 - 2x + 1)\,dx$의 값은?

①) ① 4
②) ② 6
③) ③ 8
④) ④ 10

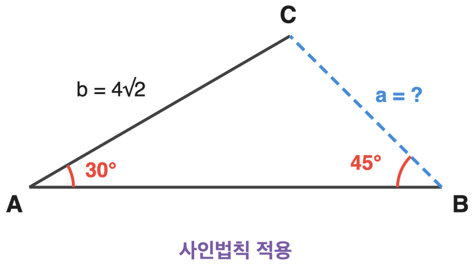
🎯 **정답: ② 6**

📖 $\int_0^2 (3x^2 - 2x + 1)\,dx = \left[x^3 - x^2 + x\right]_0^2 = (8 - 4 + 2) - 0 = 6$이다.

💡 정적분은 곡선 아래 넓이를 구하는 도구로, 17세기에 미적분학의 기본정리로 미분과 통합됐어요.

Q144 삼각함수 활용

삼각형 ABC에서 $A = 30°$, $B = 45°$, $b = 4\sqrt{2}$ 일 때 변 a의 길이는?



①) ① $2\sqrt{2}$
②) ② 4
③) ③ $2\sqrt{3}$
④) ④ $4\sqrt{2}$

🎯 **정답: ② 4**

📖 사인법칙 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$에서 $\frac{a}{\sin 30°} = \frac{4\sqrt{2}}{\sin 45°}$. 따라서 $a = \frac{\sin 30°}{\sin 45°} \cdot 4\sqrt{2} = \frac{1/2}{\sqrt{2}/2} \cdot 4\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 4\sqrt{2} = 4$이다.

💡 사인법칙은 외접원 반지름 R과 연결되어 $\frac{a}{\sin A} = 2R$이라는 멋진 관계를 만들어요.

Q145 극한과 연속

함수 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + ax - 6}{x - 2} & (x \neq 2) \\ b & (x = 2) \end{cases}$ 가 $x = 2$에서 연속일 때 $a + b$의 값은?

①) ① 4
②) ② 5
③) ③ 6
④) ④ 7

🎯 **정답: ③ 6**

📖 $x = 2$에서 연속이려면 $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + ax - 6}{x - 2}$가 존재해야 한다. 분모가 0이 되므로 분자도 0이어야 하니 $4 + 2a - 6 = 0$, $a = 1$. 그러면 $\frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \frac{(x-2)(x+3)}{x - 2} = x + 3$이고 극한값은 5. 따라서 $b = 5$, $a + b = 6$이다.

💡 연속이 되도록 미정계수를 정하는 문제는 분자·분모가 함께 0이 되는 조건이 핵심이에요.

Q146 수열

$\sum_{k=1}^{10}(2k-1)^2$의 값은?

①) ① 1230

②) ② 1280

③) ③ 1330

④) ④ 1380

정답: ③ 1330

$(2k-1)^2 = 4k^2 - 4k + 1$이므로

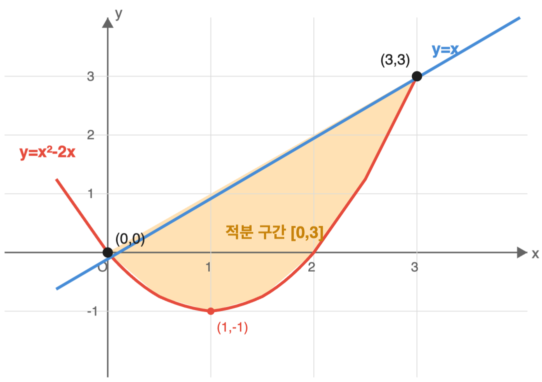
$$\sum_{k=1}^{10}(4k^2-4k+1) = 4\sum k^2 - 4\sum k + \sum 1 = 4\cdot\frac{10\cdot 11\cdot 21}{6} - 4\cdot\frac{10\cdot 11}{2} + 10 = 4\cdot 385 - 220 + 10 = 1540 - 220 + 10 = 1330$$

이다.

홀수 제곱의 합 $1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$ 공식이 있어요.

Q147 적분

곡선 $y = x^2 - 2x$와 직선 $y = x$로 둘러싸인 부분의 넓이는?



①) ① $\frac{7}{2}$

②) ② $\frac{9}{2}$

③) ③ $\frac{11}{2}$

④) ④ $\frac{13}{2}$

정답: ② $\frac{9}{2}$

교점은 $x^2 - 2x = x$에서 $x^2 - 3x = 0$, $x = 0$ 또는 $x = 3$. 구간 $[0, 3]$에서 직선이 포물선 위에 있으므로 넓이

$$S = \int_0^3 \{x - (x^2 - 2x)\}dx = \int_0^3 (3x - x^2)dx = \left[\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{27}{2} - 9 = \frac{9}{2}$$이다.

두 곡선 사이 넓이는 위쪽 함수에서 아래쪽 함수를 빼서 적분한답니다.

Q148 지수와 로그

$\log_3 27 + \log_2 \frac{1}{8}$의 값은?

①) ① -3

②) ② 0

③) ③ 3

④) ④ 6

🎯 **정답: ②**

📖 1단계: $\log_3 27 = \log_3 3^3 = 3$

2단계: $\log_2 \frac{1}{8} = \log_2 2^{-3} = -3$

3단계: $3 + (-3) = 0$

💡 로그는 17세기 네이피어가 천문 계산을 빠르게 하려고 발명했어요.

Q149 수열

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 2, 공비가 3일 때, a_4의 값은?

①) ① 18

②) ② 27

③) ③ 54

④) ④ 81

🎯 **정답: ③**

📖 1단계: 등비수열의 일반항 $a_n = a \cdot r^{n-1}$

2단계: $a_4 = 2 \cdot 3^{4-1} = 2 \cdot 27 = 54$

💡 등비수열은 인구 증가, 복리 이자 등 '비율로 변하는' 자연 현상을 모형화해요.

Q150 적분

$\int_0^2 (3x^2 + 1)\,dx$의 값은?

①) ① 8

②) ② 10

③) ③ 12

④) ④ 14

🎯 **정답: ②**

📖 1단계: $\int (3x^2 + 1)\,dx = x^3 + x + C$

2단계: $[x^3 + x]_0^2 = (8 + 2) - (0 + 0) = 10$

💡 정적분의 기호 $\int$는 '합'을 뜻하는 라틴어 Summa의 S를 길게 늘여 만든 거예요.

Q151 지수·로그함수

방정식 $\log_2(x-1)+\log_2(x+1)=3$의 해는?

①) ① $x=2$

②) ② $x=3$

③) ③ $x=\sqrt{7}$

④) ④ $x=3$ 또는 $x=-3$

🎯 **정답: ②**

📖 1단계: 진수 조건 $x-1>0,\ x+1>0$이므로 $x>1$

2단계: 좌변 $\log_2[(x-1)(x+1)]=\log_2(x^2-1)$

3단계: $x^2-1=2^3=8,\ x^2=9,\ x=\pm 3$

4단계: 진수 조건에서 $x>1$이므로 $x=3$

💡 로그방정식에서 진수 조건을 빠뜨리면 무연근이 답으로 들어가는 함정에 빠져요.

Q152 수열

$\sum_{k=1}^{10}(2k+3)$의 값은?

①) ① 120

②) ② 130

③) ③ 140

④) ④ 150

🎯 **정답: ③**

📖 1단계: $\sum_{k=1}^{10}(2k+3)=2\sum_{k=1}^{10}k+\sum_{k=1}^{10}3$

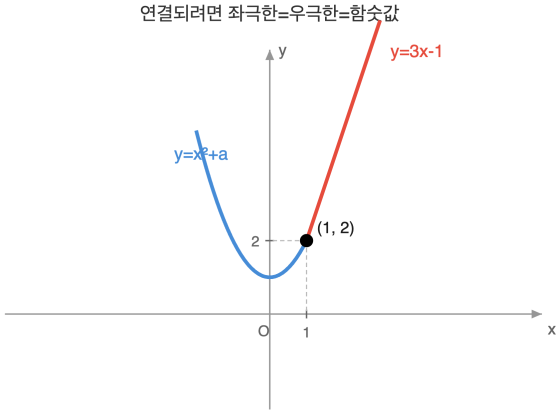
2단계: $\sum_{k=1}^{10}k=\frac{10\cdot 11}{2}=55$

3단계: $2\cdot 55+3\cdot 10=110+30=140$

💡 $2k+3$는 등차수열이라 합을 $\sum$ 공식 없이도 첫째항·끝항 평균에 항수를 곱해 구할 수 있어요: $\frac{5+23}{2}\cdot 10=140.$

Q153 극한과 연속

함수 $f(x) = \begin{cases} x^2 + a & (x \le 1) \\ 3x - 1 & (x > 1) \end{cases}$ 이 $x = 1$에서 연속일 때, 상수 a의 값은?



①) ① 0
②) ② 1
③) ③ 2
④) ④ 3

🎯 **정답: ②**
📖 1단계: 연속 조건 $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$
2단계: 좌극한 $\lim_{x \to 1^-}(x^2 + a) = 1 + a$
3단계: 우극한 $\lim_{x \to 1^+}(3x - 1) = 2$
4단계: $1 + a = 2$이므로 $a = 1$
💡 조각함수의 연속성은 '경계에서 좌·우극한과 함숫값이 모두 일치'해야 성립해요.

Q154 지수·로그함수

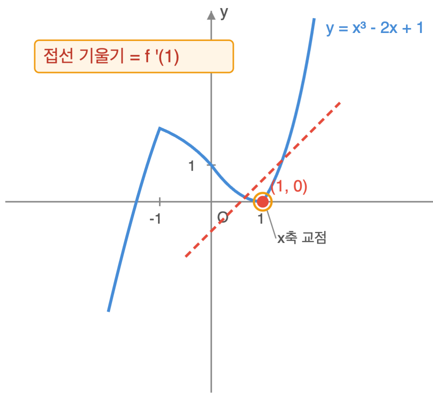
부등식 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2 - 3} \ge \left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$의 해의 집합은?

①) ① $-1 \le x \le 3$
②) ② $x \le -1$ 또는 $x \ge 3$
③) ③ $-3 \le x \le 1$
④) ④ $x \le -3$ 또는 $x \ge 1$

🎯 **정답: ①**
📖 1단계: 밑 $\frac{1}{2}$가 $0 <$ 밑 < 1이므로 부등식 방향이 뒤집힘
2단계: $x^2 - 3 \le 2x$
3단계: $x^2 - 2x - 3 \le 0$, $(x - 3)(x + 1) \le 0$
4단계: $-1 \le x \le 3$
💡 지수 부등식에서 밑이 1보다 작으면 부등호 방향이 반대가 됩니다. 자주 틀리는 함정이에요.

Q155 미분

곡선 $y = x^3 - 2x + 1$ 위의 점 $(1, 0)$에서의 접선이 x축과 만나는 점의 x좌표는?



①) ① -1

②) ② 0

③) ③ 1

④) ④ 2

정답: ③

1단계: $f(x) = x^3 - 2x + 1$, $f'(x) = 3x^2 - 2$

2단계: 점 $(1, 0)$에서 접선의 기울기 $f'(1) = 3 - 2 = 1$

3단계: 접선의 방정식 $y - 0 = 1 \cdot (x - 1)$, 즉 $y = x - 1$

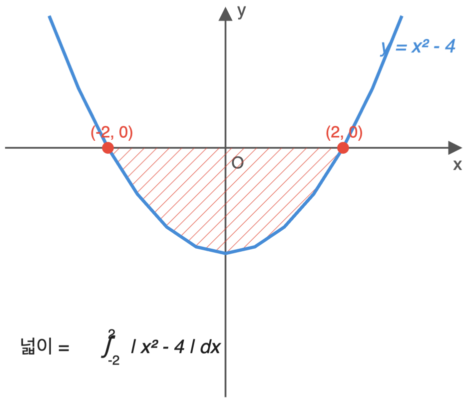
4단계: x축과 만나는 점은 $y = 0$일 때 $x = 1$

5단계: 접점이 x축 위의 점이므로 접선이 x축과 만나는 점은 접점 $(1, 0)$ 자체. 따라서 $x = 1$

접점이 이미 x축 위에 있으면 접선과 x축의 교점이 접점과 같습니다(접선이 x축과 평행이 아니면).

Q156 적분

곡선 $y = x^2 - 4$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는?



①) ① $\frac{16}{3}$
②) ② 8
③) ③ $\frac{32}{3}$
④) ④ 16

🎯 **정답: ③**

📖 1단계: $y = x^2 - 4 = 0$의 해는 $x = \pm 2$
2단계: 구간 $[-2, 2]$에서 $x^2 - 4 \le 0$이므로 곡선이 x축 아래
3단계: 넓이 $S = \int_{-2}^{2} |x^2 - 4|\,dx = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\,dx$
4단계: $\int_{-2}^{2} (4 - x^2)\,dx = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} = \left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(-8 + \frac{8}{3}\right) = 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3}$

💡 곡선이 x축 아래에 있을 때는 $|f(x)|$ 또는 $-f(x)$로 적분해야 넓이가 양수가 됩니다.

Q157 지수와 로그

$\log_3 \sqrt[4]{27}$ 의 값을 구하시오.

①) ① $\frac{1}{4}$
②) ② $\frac{1}{2}$
③) ③ $\frac{3}{4}$
④) ④ $\frac{4}{3}$

🎯 **정답: ③ $\frac{3}{4}$**

📖 $\sqrt[4]{27} = 27^{1/4} = (3^3)^{1/4} = 3^{3/4}$이다. 따라서 $\log_3 \sqrt[4]{27} = \log_3 3^{3/4} = \frac{3}{4}$이다.

💡 로그의 성질 $\log_a a^n = n$은 지수와 로그가 역연산 관계임을 보여준다.

Q158 미분

함수 $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 1$에 대하여 $f'(2)$의 값을 구하시오.

①) ① 11

②) ② 13

③) ③ 15

④) ④ 19

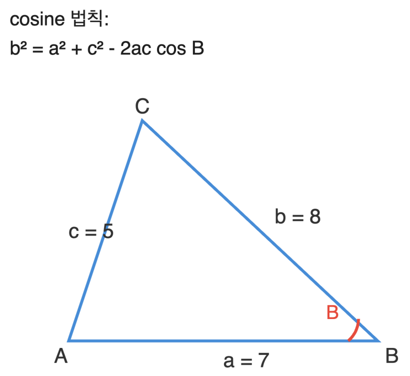
🎯 **정답:** ③ 15

📖 도함수 $f'(x) = 3x^2 + 4x - 5$를 구한다. $f'(2) = 3(4) + 4(2) - 5 = 12 + 8 - 5 = 15$이다.

💡 도함수 $f'(a)$는 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기를 나타낸다.

Q159 삼각함수 활용

삼각형 ABC에서 $a = 7$, $b = 8$, $c = 5$일 때, $\cos B$의 값을 구하시오. (단, a, b, c는 각각 A, B, C의 대변)



①) ① $\frac{1}{14}$

②) ② $\frac{1}{7}$

③) ③ $\frac{2}{7}$

④) ④ $\frac{5}{14}$

🎯 **정답:** ② $\frac{1}{7}$

📖 코사인법칙 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$에서 $64 = 49 + 25 - 2(7)(5)\cos B = 74 - 70\cos B$이다. 따라서 $70\cos B = 10$, $\cos B = \frac{10}{70} = \frac{1}{7}$이다.

💡 코사인법칙은 피타고라스 정리의 일반화로, 임의의 삼각형에서 세 변과 한 각의 관계를 나타낸다.

Q160 수열

$\sum_{k=1}^{10}(2k+1)^2 - \sum_{k=1}^{10}(2k-1)^2$의 값을 구하시오.

①) ① 200

②) ② 220

③) ③ 240

④) ④ 440

🎯 **정답:** ④ 440

📖 $(2k+1)^2-(2k-1)^2=\{(2k+1)+(2k-1)\}\{(2k+1)-(2k-1)\}=(4k)(2)=8k$이다. 따라서 $\sum_{k=1}^{10}\{(2k+1)^2-(2k-1)^2\}=\sum_{k=1}^{10}8k=8\cdot\frac{10\cdot 11}{2}=8\cdot 55=440$이다. 망원합으로 직접 계산해도 $\sum_{k=1}^{10}\{(2k+1)^2-(2k-1)^2\}=21^2-1^2=441-1=440$이다. 따라서 정답은 ④ 440이다.

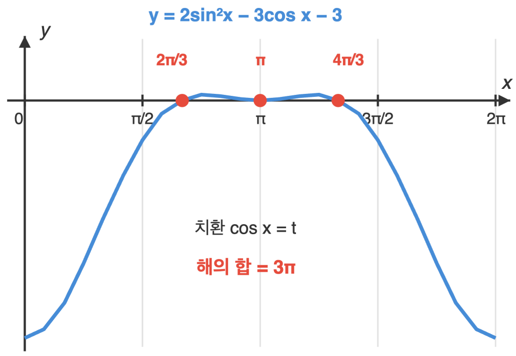
💡 인수분해 $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$를 이용하면 복잡한 합도 간단해진다.

📝 고2 수학 일반

총 40문제 · 문제와 정답·풀이 포함

Q161 삼각함수

$0 \leq x < 2\pi$에서 방정식 $2\sin^2 x - 3\cos x - 3 = 0$의 모든 해의 합을 구하시오.



①) ① π
②) ② $\frac{3\pi}{2}$
③) ③ 2π
④) ④ 3π

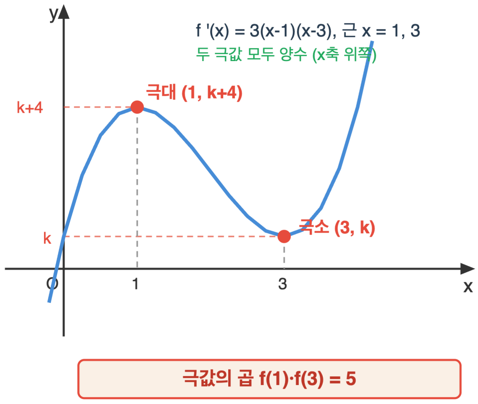
🎯 **정답:** ④ 3π

📖 $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$를 대입하면 $2(1 - \cos^2 x) - 3\cos x - 3 = 0$, 즉 $-2\cos^2 x - 3\cos x - 1 = 0$이고 양변에 -1을 곱하면 $2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$이다. $\cos x = t$로 치환하면 $(2t+1)(t+1) = 0$이므로 $t = -\frac{1}{2}$ 또는 $t = -1$이다. $\cos x = -\frac{1}{2}$일 때 $x = \frac{2\pi}{3}$ 또는 $x = \frac{4\pi}{3}$이고, $\cos x = -1$일 때 $x = \pi$이다. 따라서 모든 해의 합은 $\frac{2\pi}{3} + \pi + \frac{4\pi}{3} = \frac{2\pi + 3\pi + 4\pi}{3} = \frac{9\pi}{3} = 3\pi$이다.

💡 삼각함수 방정식에서 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$로 치환해 한 변수의 이차방정식으로 변형하는 것이 표준 전략이다.

Q162 미분

함수 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + k$의 극댓값과 극솟값의 곱이 5일 때, $f(x)$의 극댓값을 구하시오. (단, k는 상수이고 두 극값 모두 양수)



①) ① 4
②) ② 5
③) ③ 6
④) ④ 8

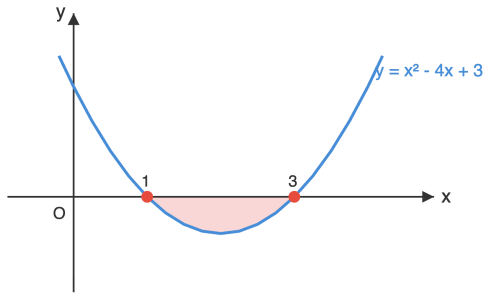
🎯 **정답:** ② 5

📖 $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$이므로 $f'(x) = 0$의 해는 $x = 1, 3$이다. $x = 1$에서 극대, $x = 3$에서 극소이다. 극댓값 $f(1) = 1 - 6 + 9 + k = 4 + k$, 극솟값 $f(3) = 27 - 54 + 27 + k = k$이다. 두 극값의 곱이 5이므로 $k(4 + k) = 5$, 즉 $k^2 + 4k - 5 = 0$, $(k-1)(k+5) = 0$에서 $k = 1$ 또는 $k = -5$이다. 두 극값이 모두 양수이려면 극솟값 $k > 0$이어야 하므로 $k = 1$이다. 따라서 극댓값은 $f(1) = 4 + k = 5$이다.

💡 3차함수 $ax^3 + bx^2 + cx + d$의 극댓값과 극솟값의 차는 계수 a, b, c에만 의존하며 d와 무관하다.

Q163 적분

곡선 $y = x^2 - 4x + 3$과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.



넓이 = $\int_1^3 (x^2 - 4x + 3)\,dx$

①) ① $\frac{2}{3}$
②) ② $\frac{4}{3}$
③) ③ 2
④) ④ $\frac{8}{3}$

🎯 **정답: ② $\frac{4}{3}$**

📖 $y = x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$의 x절편은 $x = 1, 3$이다. $1 < x < 3$에서 $y < 0$이므로 넓이는

$$S = -\int_1^3 (x^2 - 4x + 3)dx = -\left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right]_1^3$$
$$= -\left\{(9 - 18 + 9) - (\tfrac{1}{3} - 2 + 3)\right\} = -\left\{0 - \tfrac{4}{3}\right\} = \tfrac{4}{3}\text{이다.}$$

💡 포물선 $y = a(x-\alpha)(x-\beta)$와 x축이 둘러싼 넓이는 $\frac{|a|(\beta-\alpha)^3}{6}$ 공식으로 빠르게 구할 수 있다.

Q164 지수와 로그

$\log_4 32$의 값을 구하시오.

①) ① $\frac{3}{2}$
②) ② 2
③) ③ $\frac{5}{2}$
④) ④ 3

🎯 **정답: ③**

📖 밑변환 공식을 이용하여 밑을 2로 통일한다. $\log_4 32 = \frac{\log_2 32}{\log_2 4} = \frac{5}{2}$. 따라서 답은 $\frac{5}{2}$이다.

💡 $\log_4 32$를 분수 지수로 보면 $4^{5/2} = (2^2)^{5/2} = 2^5 = 32$임이 확인된다.

Q165 수열

첫째항이 3이고 공비가 -2인 등비수열 $\{a_n\}$의 제5항 a_5의 값을 구하시오.

①) ① -48

②) ② 24

③) ③ 48

④) ④ 96

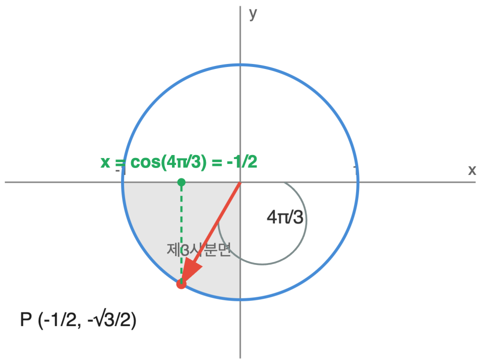
🎯 **정답: ③**

📖 등비수열의 일반항은 $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$이다. $a_5 = 3 \cdot (-2)^4 = 3 \cdot 16 = 48$. 음의 공비라도 짝수 번째 거듭제곱은 양수가 됨에 유의한다.

💡 공비가 음수인 등비수열은 부호가 번갈아 바뀌어 진동(oscillation)하는 형태가 된다.

Q166 삼각함수

$\cos\frac{4\pi}{3}$의 값을 구하시오.



①) ① -1

②) ② $-\frac{1}{2}$

③) ③ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

④) ④ $\frac{1}{2}$

🎯 **정답: ②**

📖 $\frac{4\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{3}$이므로 제3사분면 각이다. $\cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$. 단위원 위의 동경 끝점의 x좌표가 코사인 값임을 이용한다.

💡 코사인은 단위원의 x좌표를 의미하므로, 제2·3사분면에서는 음수, 제1·4사분면에서는 양수가 된다.

Q167 미분

함수 $f(x) = (x+1)^2$에 대하여 $f'(2)$의 값을 구하시오.

①) ① 4

②) ② 6

③) ③ 8

④) ④ 9

🎯 **정답: ②**

📖 $f(x) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$로 전개하면 $f'(x) = 2x + 2$. 따라서 $f'(2) = 2 \cdot 2 + 2 = 6$. 합성함수의 미분으로도 $f'(x) = 2(x+1)$로 같은 결과를 얻는다.

💡 $f(x) = (x+1)^2$ 의 그래프는 포물선을 왼쪽으로 1만큼 평행이동한 형태이며, $x = 2$에서 접선의 기울기가 6이다.

Q168 적분

$\int_{-1}^{1} (x^2+1)\,dx$의 값을 구하시오.

①) ① $\frac{4}{3}$

②) ② 2

③) ③ $\frac{8}{3}$

④) ④ $\frac{10}{3}$

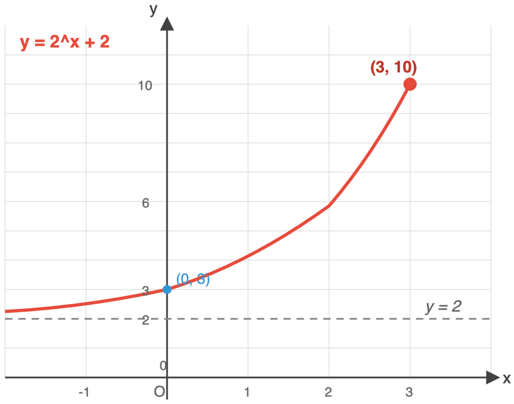
🎯 **정답: ③**

📖 $\int_{-1}^{1} (x^2+1)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_{-1}^{1} = \left(\frac{1}{3}+1\right) - \left(-\frac{1}{3}-1\right) = \frac{2}{3} + 2 = \frac{8}{3}$. 피적분함수가 우함수(짝수함수)이므로 $2\int_0^1 (x^2+1)\,dx$로 계산해도 된다.

💡 우함수의 대칭구간 정적분은 0부터 끝점까지의 적분의 2배와 같다는 성질이 자주 활용된다.

Q169 지수·로그함수

함수 $y = 2^x + a$의 그래프가 점 $(3, 10)$을 지날 때, 상수 a의 값을 구하시오.



①) ① 1

②) ② 2

③) ③ 3

④) ④ 4

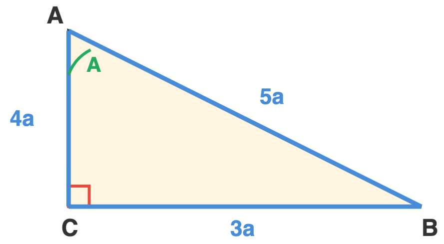
정답: ②

📖 점 $(3, 10)$을 함수식에 대입하면 $10 = 2^3 + a$. 즉 $10 = 8 + a$이므로 $a = 2$. 이때 그래프는 $y = 2^x$를 y축 방향으로 2만큼 평행이동한 것이며, 점근선은 $y = 2$이다.

💡 지수함수에 상수를 더하면 그래프가 위아래로 평행이동하면서 점근선도 함께 이동한다.

Q170 삼각함수 활용

삼각형 ABC에서 $\sin A : \sin B : \sin C = 3 : 4 : 5$일 때, $\cos A$의 값을 구하시오.



비례식 a:b:c = 3:4:5

①) ① $\frac{3}{5}$

②) ② $\frac{4}{5}$

③) ③ $\frac{3}{4}$

④) ④ $\frac{5}{4}$

🎯 **정답: ②**

📖 외접원 반지름을 R이라 하면 $a = 2R\sin A$이므로 $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C = 3 : 4 : 5$. $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$이므로 삼각형 ABC는 변 c가 빗변인 직각삼각형 ($\angle C = 90°$)이다. 따라서 각 A에서 $\cos A = \frac{\text{인접변}}{\text{빗변}} = \frac{b}{c} = \frac{4}{5}$.

💡 가장 작은 피타고라스 수 (3, 4, 5) 직각삼각형은 고대 이집트 측량에서 직각을 만드는 데 사용되었다.

Q171 수학적 귀납법과 점화식

수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 1$이고 $a_{n+1} = 2a_n + 1$ $(n \geq 1)$을 만족할 때, a_4의 값을 구하시오.

①) ① 7

②) ② 11

③) ③ 15

④) ④ 31

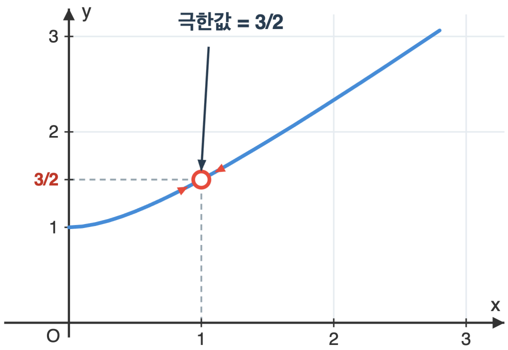
🎯 **정답: ③**

📖 점화식에 차례로 대입한다. $a_2 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$, $a_3 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$, $a_4 = 2 \cdot 7 + 1 = 15$. (참고로 일반항은 $a_n = 2^n - 1$로 메르센 수의 형태이다.)

💡 $a_n + 1 = 2(a_{n-1} + 1)$로 변형하면 $\{a_n + 1\}$이 등비수열이 되어 일반항을 깔끔하게 구할 수 있다.

Q172 극한과 연속

$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$의 값을 구하시오.



①) ① 1

②) ② $\frac{3}{2}$

③) ③ 2

④) ④ 3

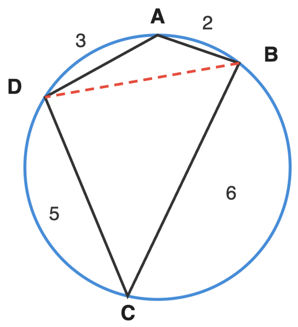
🎯 **정답: ②**

📖 $\frac{0}{0}$ 꼴의 부정형이므로 분자·분모를 인수분해한다. $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$, $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$. 따라서 $\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2+x+1}{x+1} = \frac{1+1+1}{1+1} = \frac{3}{2}$.

💡 $\frac{0}{0}$ 부정형은 인수분해, 유리화, 통분 등으로 공통인수를 약분해 해소하는 것이 기본 전략이다.

Q173 삼각함수 활용

원에 내접하는 사각형 $ABCD$에서 $\overline{AB} = 2$, $\overline{BC} = 6$, $\overline{CD} = 5$, $\overline{DA} = 3$일 때, 대각선 $\overline{BD}$의 길이를 구하시오.



∠A + ∠C = 180°

①) ① $\sqrt{19}$
②) ② $\sqrt{21}$
③) ③ 5
④) ④ $\sqrt{27}$

정답: ②

📖 원에 내접하는 사각형이므로 $\angle A + \angle C = 180°$, 즉 $\cos C = -\cos A$. 삼각형 ABD에서 $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD\cos A = 4 + 9 - 12\cos A = 13 - 12\cos A$. 삼각형 BCD에서 $BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2 \cdot BC \cdot CD\cos C = 36 + 25 + 60\cos A = 61 + 60\cos A$. 두 식을 연립하면 $13 - 12\cos A = 61 + 60\cos A$, $\cos A = -\frac{2}{3}$. 따라서 $BD^2 = 13 - 12 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = 13 + 8 = 21$, $\overline{BD} = \sqrt{21}$.

💡 원에 내접하는 사각형의 대각의 합이 180°라는 성질은 톨레미(Ptolemy) 정리의 토대가 된다.

Q174 수학적 귀납법과 점화식

수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 2$이고 $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1 + 2a_n}$을 만족할 때, a_5의 값을 구하시오.

①) ① $\frac{2}{15}$
②) ② $\frac{2}{17}$
③) ③ $\frac{2}{19}$
④) ④ $\frac{1}{9}$

정답: ②

📖 양변에 역수를 취하면 $\dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{1 + 2a_n}{a_n} = \dfrac{1}{a_n} + 2$. 즉 수열 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$은 첫째항 $\frac{1}{2}$, 공차 2인 등차수열이다. 일반항은 $\dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{2} + 2(n-1) = \dfrac{4n-3}{2}$이므로 $a_n = \dfrac{2}{4n-3}$. 따라서 $a_5 = \dfrac{2}{4 \cdot 5 - 3} = \dfrac{2}{17}$.

💡 분수형 점화식은 양변에 역수를 취해 등차수열로 변환하는 치환이 표준 풀이 전략이다.

Q175 미분

곡선 $y = x^3 - 3x^2 + a$ 위의 점 $(1, f(1))$에서의 접선이 원점을 지날 때, 상수 a의 값을 구하시오.

①) ① -2

②) ② -1

③) ③ 0

④) ④ 1

🎯 **정답: ②**

📖 $f(x) = x^3 - 3x^2 + a$이라 하면 $f(1) = 1 - 3 + a = a - 2$, $f'(x) = 3x^2 - 6x$, $f'(1) = -3$. 점 $(1, a-2)$에서의 접선은 $y - (a-2) = -3(x-1)$, 즉 $y = -3x + a + 1$. 이 직선이 원점 $(0,0)$을 지나므로 $0 = a + 1$, $a = -1$.

💡 접선이 원점을 지나는 조건은 직선의 y절편이 0임을 의미하므로, 접선 방정식의 상수항을 0으로 놓고 미정계수를 구할 수 있다.

Q176 지수와 로그

$\sqrt[3]{2} \times \sqrt[6]{4}$ 의 값은?

①) ① $\sqrt[3]{4}$

②) ② $\sqrt[3]{2}$

③) ③ $\sqrt[6]{8}$

④) ④ 2

🎯 **정답: ① $\sqrt[3]{4}$**

📖 거듭제곱근을 유리지수로 바꾸어 계산한다.

1단계: $\sqrt[3]{2} = 2^{1/3}$로 표현한다.

2단계: $\sqrt[6]{4} = \sqrt[6]{2^2} = 2^{2/6} = 2^{1/3}$이다.

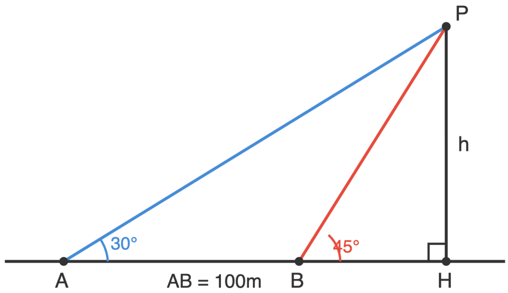
3단계: 두 값을 곱하면 $2^{1/3} \times 2^{1/3} = 2^{1/3+1/3} = 2^{2/3}$.

4단계: $2^{2/3} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$ 이다.

💡 근호와 지수가 다른 거듭제곱근도 유리지수로 통일하면 지수법칙으로 단번에 정리된다.

Q177 삼각함수 활용

지면의 한 지점 A에서 산 정상 P를 올려본 각이 $30°$이고, A에서 산 쪽으로 직선거리 100m 더 나아간 지점 B에서 P를 올려본 각이 $45°$이다. 산의 높이는? (단, A, B, 산 정상의 발 H는 같은 수직 평면 위에 있다.)



①) ① $50(\sqrt{3}-1)\text{m}$
②) ② $50(\sqrt{3}+1)\text{m}$
③) ③ $100(\sqrt{3}-1)\text{m}$
④) ④ $100\sqrt{3}\ \text{m}$

🎯 **정답:** ② $50(\sqrt{3}+1)\text{m}$

📖 산의 높이를 $h=PH$, 수평거리를 $BH=x$라 둔다.

1단계: $\triangle PBH$에서 $\tan 45° = \dfrac{h}{x} = 1$이므로 $x=h$.

2단계: $\triangle PAH$에서 $AH = AB + BH = 100 + h$이고 $\tan 30° = \dfrac{h}{100+h} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

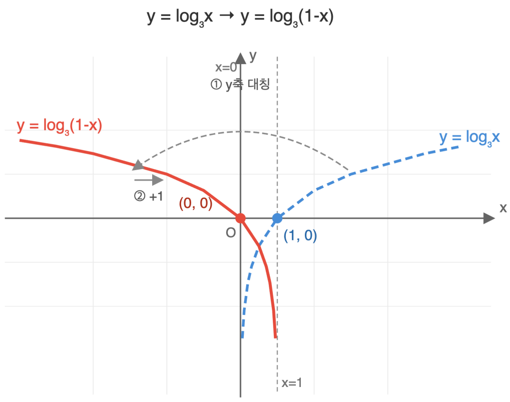
3단계: 양변에 $\sqrt{3}(100+h)$를 곱하면 $\sqrt{3}\,h = 100 + h$.

4단계: $h(\sqrt{3}-1) = 100$이므로 $h = \dfrac{100}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{100(\sqrt{3}+1)}{2} = 50(\sqrt{3}+1)$.

💡 두 지점에서의 올려본각 차이를 이용해 도달할 수 없는 산의 높이를 측량할 수 있다.

Q178 지수·로그함수

함수 $y = \log_3 x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동시킨 후, x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프의 식은?



점근선: x=0 (파란 점선) / x=1 (빨간 실선)

①) ① $y = \log_3(x-1)$
②) ② $y = \log_3(1-x)$
③) ③ $y = -\log_3(x-1)$
④) ④ $y = \log_3(x+1)$

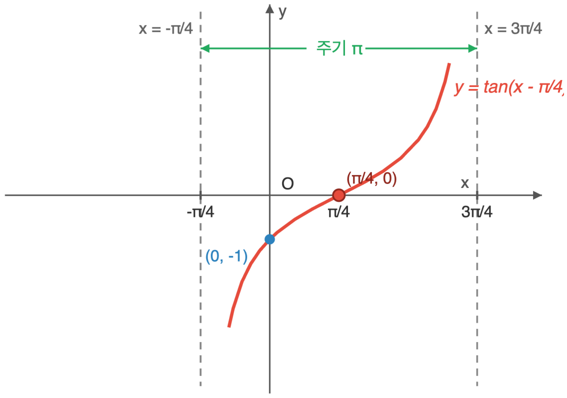
🎯 **정답:** ② $y = \log_3(1-x)$

📖 두 변환을 순서대로 적용한다.
1단계 (y축 대칭): x 자리에 $-x$를 대입한다. $y = \log_3 x \to y = \log_3(-x)$. 정의역은 $-x > 0$, 즉 $x < 0$.
2단계 (x축으로 $+1$ 평행이동): x 자리에 $x-1$을 대입한다. $y = \log_3(-(x-1)) = \log_3(1-x)$.
3단계: 정의역은 $1-x > 0$, 즉 $x < 1$이며 점근선은 $x = 1$이다.

💡 평행이동은 변수에 대입할 때 부호가 직관과 반대로 들어간다($+1$ 이동이면 $x-1$ 대입).

Q179 삼각함수

함수 $y = \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$의 그래프에서 점근선의 방정식 중 하나는?



①) ① $x = \frac{\pi}{4}$

②) ② $x = \frac{\pi}{2}$

③) ③ $x = \frac{3\pi}{4}$

④) ④ $x = \pi$

🎯 **정답:** ③ $x = \frac{3\pi}{4}$

📖 $y = \tan\theta$의 점근선은 $\theta = \frac{\pi}{2} + n\pi$ (n은 정수)이다.

1단계: $\theta = x - \frac{\pi}{4}$로 두면 $x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + n\pi$.

2단계: $x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + n\pi = \frac{3\pi}{4} + n\pi$.

3단계: $n = 0$일 때 $x = \frac{3\pi}{4}$로, 보기 ③과 일치한다.

4단계: 다른 보기 $x = \pi/4$는 x절편이고, $\pi/2$, π는 점근선 식 $\frac{3\pi}{4} + n\pi$를 만족하지 않는다.

💡 tan 함수의 점근선은 cos 함수가 0이 되는 곳에서 생기며, 평행이동에 따라 함께 이동한다.

Q180 적분

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t ($t \geq 0$)에서의 속도가 $v(t) = 3t^2 - 6t$이다. 시각 $t = 0$에서 $t = 3$까지 점 P의 위치 변화량은?

①) ① -6

②) ② -3

③) ③ 0

④) ④ 9

🎯 **정답:** ③ 0

📖 위치 변화량은 속도의 정적분 $\int_0^3 v(t)\,dt$로 구한다.

1단계: $\int_0^3 (3t^2 - 6t)\,dt = \left[t^3 - 3t^2\right]_0^3$.

2단계: $t = 3$ 대입: $27 - 27 = 0$.

3단계: $t = 0$ 대입: 0.

4단계: 따라서 위치 변화량은 $0 - 0 = 0$.

참고: 변화량이 0이라고 점이 움직이지 않은 것은 아니며, $0 \leq t \leq 2$에서는 음의 방향, $2 \leq t \leq 3$에서는 양의 방향으로 움직여 결과적으로 출발점으로 돌아온 것이다.

💡 속도의 정적분은 위치 변화량(변위)이고, 속도의 절댓값을 적분하면 실제 이동거리가 된다.

Q181 수열

첫째항이 2이고 공비가 3인 등비수열의 첫째항부터 제 4항까지의 합 S_4의 값은?

①) ① 54

②) ② 72

③) ③ 80

④) ④ 92

🎯 **정답:** ③ 80

📖 등비수열의 합 공식 $S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$ $(r \neq 1)$을 이용한다.

1단계: $a_1 = 2, r = 3, n = 4.$

2단계: $S_4 = \frac{2(3^4 - 1)}{3 - 1} = \frac{2(81 - 1)}{2} = 81 - 1 = 80.$

검산: 항을 직접 더하면 $2 + 6 + 18 + 54 = 80.$

💡 등비수열 합 공식은 $r^n - 1 = (r - 1)(r^{n-1} + r^{n-2} + \cdots + 1)$ 인수분해에서 자연스럽게 유도된다.

Q182 지수와 로그

부등식 $\log_3(2x - 1) \leq 2$를 만족시키는 자연수 x의 개수는?

①) ① 3

②) ② 4

③) ③ 5

④) ④ 6

🎯 **정답:** ③ 5

📖 로그부등식은 정의역 조건과 부등식 동치 조건을 함께 따져야 한다.

1단계 (정의역): 진수 $2x - 1 > 0$이어야 하므로 $x > \frac{1}{2}$.

2단계 (밑이 1보다 큼): 밑 $3 > 1$이므로 부등식의 방향이 유지된다. $\log_3(2x - 1) \leq 2 = \log_3 9.$

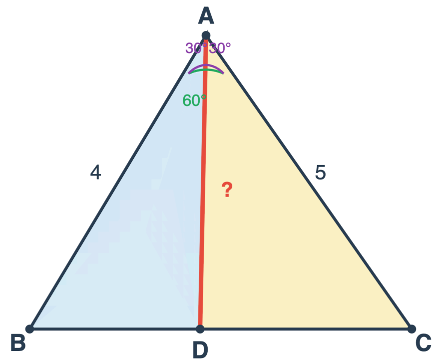
3단계: $2x - 1 \leq 9$이므로 $x \leq 5.$

4단계: $\frac{1}{2} < x \leq 5$를 만족하는 자연수는 $1, 2, 3, 4, 5$로 총 5개.

💡 로그부등식 풀이의 첫걸음은 항상 진수 양수 조건 확인이다.

Q183 삼각함수 활용

삼각형 ABC에서 $\overline{AB} = 4$, $\overline{AC} = 5$, $\angle A = 60°$이다. $\angle A$의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D라 할 때, 선분 $\overline{AD}$의 길이는?



①) ① $\frac{20\sqrt{3}}{9}$
②) ② $\frac{20}{9}$
③) ③ $\frac{10\sqrt{3}}{3}$
④) ④ $\frac{20\sqrt{3}}{3}$

정답: ① $\frac{20\sqrt{3}}{9}$

📖 삼각형 ABC의 넓이를 두 가지 방법으로 표현한 뒤 등식을 세운다.

1단계: 전체 넓이 $S(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \sin 60° = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$.

2단계: AD가 $\angle A$의 이등분선이므로 $\angle BAD = \angle CAD = 30°$.

$S(\triangle ABD) = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AD} \cdot \sin 30° = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \overline{AD} \cdot \frac{1}{2} = \overline{AD}$.

$S(\triangle ACD) = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD} \cdot \sin 30° = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \overline{AD} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5\overline{AD}}{4}$.

3단계: 두 부분의 넓이 합이 전체와 같다. $\overline{AD} + \frac{5\overline{AD}}{4} = \frac{9\overline{AD}}{4} = 5\sqrt{3}$.

4단계: $\overline{AD} = \frac{20\sqrt{3}}{9}$.

💡 각의 이등분선 길이는 '두 부분 넓이의 합 = 전체 넓이' 등식에서 자연스럽게 유도된다.

Q184 수학적 귀납법과 점화식

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 모든 자연수 n에 대하여 $S_n = 2a_n - 1$을 만족할 때, a_5의 값은?

①) ① 8
②) ② 12
③) ③ 16
④) ④ 32

정답: ③ 16

📖 S_n과 a_n 사이의 관계 $a_n = S_n - S_{n-1}$ $(n \geq 2)$을 활용한다.

1단계 (첫째항): $n = 1$이면 $S_1 = a_1 = 2a_1 - 1$이므로 $a_1 = 1$.

2단계 $(n \geq 2)$: $a_n = S_n - S_{n-1} = (2a_n - 1) - (2a_{n-1} - 1) = 2a_n - 2a_{n-1}$.

3단계: 정리하면 $a_n = 2a_{n-1}$이므로 $\{a_n\}$은 첫째항 1, 공비 2인 등비수열이다.

4단계: $a_n = 2^{n-1}$이므로 $a_5 = 2^4 = 16$.

💡 $S_n = pa_n + q$ 형태의 합 조건은 항상 $a_n = S_n - S_{n-1}$로 등비수열 점화식이 유도된다.

Q185 극한과 연속

$\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 + ax + b}{x - 2} = 5$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a + b$의 값은?

①) ① -7

②) ② -5

③) ③ -3

④) ④ -1

🎯 **정답:** ② -5

📖 극한값이 유한하므로 분모와 함께 분자도 0으로 수렴해야 한다.

1단계 (분자 영 조건): $x \to 2$에서 분모 $\to 0$인데 극한이 유한하므로 분자도 $\to 0$. 즉 $4 + 2a + b = 0$, 곧 $b = -2a - 4$ ... $(*)$

2단계 (인수분해): 분자를 $(x-2)(x-c)$ 형태로 두면 $x^2 + ax + b = x^2 - (2+c)x + 2c$. 비교하면 $a = -(2+c)$, $b = 2c$.

3단계 (극한 계산): $\lim_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(x-c)}{x-2} = \lim_{x \to 2}(x - c) = 2 - c = 5$이므로 $c = -3$.

4단계 (값 정리): $a = -(2 + (-3)) = 1$, $b = 2(-3) = -6$. 검산: $(*)$에서 $b = -2(1) - 4 = -6$ 일치.

5단계: $a + b = 1 + (-6) = -5$.

💡 $\dfrac{f(x)}{x-c} \to L$ 꼴 극한에서 분모가 0이라면 분자도 0이라는 사실은 미정계수 결정의 핵심 단서이다.

Q186 지수와 로그

$\sqrt[3]{27} + \sqrt[4]{81} - \sqrt{16}$ 의 값은?

①) ① 1

②) ② 2

③) ③ 3

④) ④ 4

🎯 **정답:** ②

📖 각 거듭제곱근을 정수로 정리한다.

- $\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$
- $\sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$
- $\sqrt{16} = \sqrt{4^2} = 4$

따라서 $3 + 3 - 4 = 2$.

💡 근호 기호 $\sqrt{}$는 16세기 독일 수학자 루돌프가 라틴어 'radix(뿌리)'의 r을 길게 흘려 쓴 데서 유래했다고 알려져 있어요.

Q187 수열

첫째항이 2이고 공비가 3인 등비수열 $\{a_n\}$에서 a_5의 값은?

①) ① 54

②) ② 108

③) ③ 162

④) ④ 324

🎯 **정답:** ③

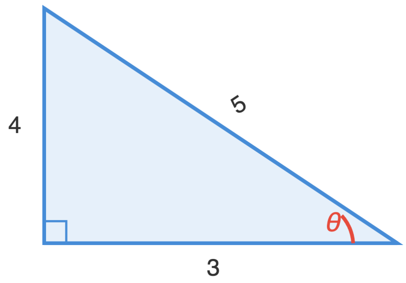
📖 등비수열의 일반항은 $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$이다.

- $a_1 = 2$, $r = 3$, $n = 5$
- $a_5 = 2 \cdot 3^{5-1} = 2 \cdot 3^4 = 2 \cdot 81 = 162$

💡 등비수열은 인구 증가, 방사성 원소의 반감기, 복리 계산처럼 곱셈적으로 변하는 자연·경제 현상을 모델링하는 데 쓰여요.

Q188 삼각함수

θ가 제1사분면의 각이고 $\tan\theta = \frac{4}{3}$일 때, $\sin\theta + \cos\theta$의 값은?



sin θ = 4/5, cos θ = 3/5

①) ① $\frac{1}{5}$
②) ② $\frac{3}{5}$
③) ③ $\frac{7}{5}$
④) ④ $\frac{9}{5}$

🎯 **정답: ③**

📖 $\tan\theta = \frac{4}{3}$이고 θ가 제1사분면이므로 $\sin\theta, \cos\theta > 0$이다.

• 직각삼각형에서 대변 4, 밑변 3이라 하면 빗변은 $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

• $\sin\theta = \frac{4}{5}, \cos\theta = \frac{3}{5}$

• $\sin\theta + \cos\theta = \frac{4}{5} + \frac{3}{5} = \frac{7}{5}$

💡 사분면별 삼각함수의 부호를 외울 때 'All Students Take Calculus'라는 영문 암기법이 자주 쓰여요. 1·2·3·4사분면에서 양수가 되는 함수의 첫 글자랍니다.

Q189 미분

곡선 $y = x^2 + 3x$ 위의 점 $(1, 4)$에서의 접선의 기울기는?

①) ① 3
②) ② 4
③) ③ 5
④) ④ 6

🎯 **정답: ③**

📖 한 점에서의 접선의 기울기는 그 점에서의 미분계수와 같다.

• $y' = 2x + 3$

• $x = 1$을 대입하면 $y'(1) = 2 \cdot 1 + 3 = 5$

따라서 접선의 기울기는 5.

💡 한 점에서의 접선의 기울기를 엄밀히 정의하려는 시도가 17세기 뉴턴과 라이프니츠가 미적분학을 만든 계기가 되었어요.

Q190 적분

$\int_1^3 (2x+1)\,dx$의 값은?

①) ① 8

②) ② 10

③) ③ 12

④) ④ 14

🎯 **정답: ②**

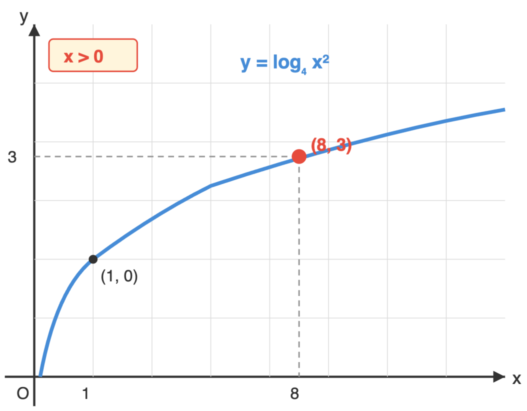
📖 부정적분을 먼저 구한다.

- $\int (2x+1)\,dx = x^2 + x + C$
- $\int_1^3 (2x+1)\,dx = \left[x^2+x\right]_1^3 = (9+3) - (1+1) = 12 - 2 = 10$

💡 적분 기호 $\int$ 는 라이프니츠가 라틴어 'Summa(합)'의 첫 글자 S를 길게 늘여 만든 것으로, '잘게 쪼갠 것을 모두 더한다'는 뜻을 그대로 담고 있어요.

Q191 지수·로그함수

함수 $y = \log_4 x^2$ $(x > 0)$의 그래프가 점 $(8, k)$를 지날 때, 상수 k의 값은?



①) ① 2

②) ② 3

③) ③ 4

④) ④ 6

🎯 **정답: ②**

📖 로그의 성질을 활용해 식을 정리한다.

- $y = \log_4 x^2 = 2\log_4 x$ $(x > 0)$
- $x = 8$을 대입: $k = 2\log_4 8$
- 밑변환: $\log_4 8 = \dfrac{\log_2 8}{\log_2 4} = \dfrac{3}{2}$
- 따라서 $k = 2 \cdot \dfrac{3}{2} = 3$

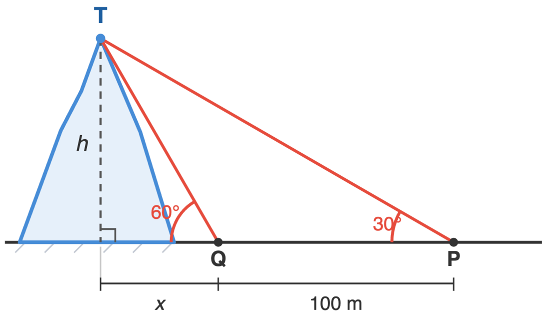
검산: $\log_4 64 = 3$ $(4^3 = 64)$. ✓

💡 $\log_4 x^2$은 $\log_2 |x|$와 같은 함수예요. 로그의 성질만 알면 같은 함수를 여러 가지 모양으로 자유롭게 변형할 수 있어요.

Q192 삼각함수 활용

산 정상 T를 지면 위 두 지점 P, Q에서 측량했더니 P에서의 올려본각은 $30°$, Q에서의 올려본각은 $60°$였다. P, Q가 산 아래의 한 직선 위에 있고 $\overline{PQ} = 100\,\mathrm{m}$이며 Q가 산에 더 가까울 때, 산의 높이는?

측량 단면도



①) ① $50\,\mathrm{m}$

②) ② $50\sqrt{2}\ \mathrm{m}$

③) ③ $50\sqrt{3}\ \mathrm{m}$

④) ④ $100\,\mathrm{m}$

🎯 **정답: ③**

📖 산 아래에서 Q까지의 수평거리를 x, 산의 높이를 h라 하자.

- Q에서: $\tan 60° = \dfrac{h}{x} = \sqrt{3} \ \to h = \sqrt{3}\ x$
- P에서: $\tan 30° = \dfrac{h}{x+100} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \to \sqrt{3}\ h = x + 100$
- 첫 식을 둘째 식에 대입: $\sqrt{3}\ \cdot \sqrt{3}\ x = x + 100 \to 3x = x + 100 \to x = 50$
- $h = \sqrt{3}\ \cdot 50 = 50\sqrt{3}\ \mathrm{m}$

💡 고대 그리스의 에라토스테네스도 같은 원리로 두 도시에서 태양 빛이 만드는 각도 차이를 측정해 지구 둘레를 구했어요. 측량은 매우 오래된 응용이랍니다.

Q193 수학적 귀납법과 점화식

수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 2$이고, 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1} = a_n + 3n$을 만족할 때, a_5의 값은?

①) ① 27

②) ② 30

③) ③ 32

④) ④ 35

🎯 **정답: ③**

📖 점화식을 차례로 적용한다.

- $a_1 = 2$
- $a_2 = a_1 + 3 \cdot 1 = 2 + 3 = 5$
- $a_3 = a_2 + 3 \cdot 2 = 5 + 6 = 11$
- $a_4 = a_3 + 3 \cdot 3 = 11 + 9 = 20$
- $a_5 = a_4 + 3 \cdot 4 = 20 + 12 = 32$

검산(계차합): $a_5 = a_1 + \sum_{k=1}^{4} 3k = 2 + 3 \cdot \dfrac{4 \cdot 5}{2} = 2 + 30 = 32.$ ✓

💡 점화식으로 정의된 수열 중 가장 유명한 것은 피보나치 수열($a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$)이에요. 자연 속 해바라기 씨앗 배열, 솔방울 나선 등에서 자주 발견되죠.

Q194 극한과 연속

함수 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3} & (x \neq 3) \\ a & (x = 3) \end{cases}$ 가 $x = 3$에서 연속일 때, 상수 a의 값은?

①) ① 3

②) ② 6

③) ③ 9

④) ④ 12

🎯 **정답: ②**

📖 $x = 3$에서 연속이려면 $\lim_{x \to 3} f(x) = f(3) = a$여야 한다.

- $\frac{0}{0}$ 꼴이므로 인수분해로 부정형을 푼다.
- $\frac{x^2-9}{x-3} = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x + 3$ (단, $x \neq 3$)
- $\lim_{x \to 3}(x+3) = 6$
- 따라서 $a = 6$

💡 연속성은 그래프를 펜을 떼지 않고 그릴 수 있는지로 직관적으로 이해할 수 있지만, 엄밀히 정의하려면 입실론-델타 논법이라는 정교한 도구가 필요해요.

Q195 미분

곡선 $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$ 위의 점 $(1, 1)$에서의 접선의 방정식이 $y = mx + n$일 때, $m + n$의 값은?

①) ① 0

②) ② 1

③) ③ 2

④) ④ 3

🎯 **정답: ②**

📖 접점에서의 미분계수가 접선의 기울기 m이다.

- $y' = 3x^2 - 4x + 1$
- $m = y'(1) = 3 - 4 + 1 = 0$

접선의 방정식은 점 $(1, 1)$을 지나고 기울기가 0이므로:

- $y - 1 = 0 \cdot (x - 1) \to y = 1$
- $m = 0,\ n = 1$이므로 $m + n = 1$

💡 접선의 기울기가 0인 점은 함수의 극값 후보예요. 곡선이 한 순간 수평이 되는 지점으로, 그래프 모양을 분석할 때 가장 먼저 찾는 곳이죠.

Q196 적분

두 곡선 $y = x^2 - 4$와 $y = -x^2 + 2x$로 둘러싸인 도형의 넓이는?

①) ① 6

②) ② 8

③) ③ 9

④) ④ 12

🎯 **정답: ③**

📖 두 곡선의 교점을 먼저 구한다.

- $x^2 - 4 = -x^2 + 2x \to 2x^2 - 2x - 4 = 0 \to (x-2)(x+1) = 0$
- 교점의 x좌표: $x = -1, 2$

구간 $[-1, 2]$에서 $-x^2 + 2x$가 위쪽임을 확인한다(예: $x = 0$에서 위 0, 아래 -4).

넓이 S는:

$$S = \int_{-1}^{2} \left[(-x^2 + 2x) - (x^2 - 4)\right] dx = \int_{-1}^{2} (-2x^2 + 2x + 4)\, dx$$

$$= \left[-\frac{2x^3}{3} + x^2 + 4x\right]_{-1}^{2}$$

$$= \left(-\frac{16}{3} + 4 + 8\right) - \left(\frac{2}{3} + 1 - 4\right) = \frac{20}{3} - \left(-\frac{7}{3}\right) = \frac{27}{3} = 9$$

💡 $\int$(위 함수 − 아래 함수)dx 공식은 가는 직사각형 띠를 무한히 잘게 쪼개 더하는 카발리에리의 원리와 통해요. 17세기 미적분 탄생의 핵심 아이디어죠.

Q197 삼각함수 활용

삼각형 ABC에서 $\cos A = \frac{1}{4}$, $b + c = 8$, $bc = 12$일 때, 변 a의 길이는?

①) ① $\sqrt{30}$

②) ② $\sqrt{34}$

③) ③ $\sqrt{38}$

④) ④ $\sqrt{42}$

🎯 **정답: ②**

📖 코사인법칙: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$.

- $b^2 + c^2$를 합과 곱으로 표현: $b^2 + c^2 = (b+c)^2 - 2bc = 8^2 - 2 \cdot 12 = 64 - 24 = 40$
- $2bc\cos A = 2 \cdot 12 \cdot \frac{1}{4} = 6$
- 대입: $a^2 = 40 - 6 = 34$
- $a > 0$이므로 $a = \sqrt{34}$

💡 코사인법칙은 피타고라스 정리의 일반화예요. $A = 90°$이면 $\cos A = 0$이라 $a^2 = b^2 + c^2$가 되죠. $\cos A = \frac{1}{4} > 0$이므로 각 A는 예각이에요.

Q198 적분

원점에서 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t ($t \geq 0$)에서의 속도가 $v(t) = 3t^2 - 6t$일 때, 시각 $t = 0$부터 $t = 4$까지 점 P가 실제로 움직인 거리는?

①) ① 16

②) ② 20

③) ③ 24

④) ④ 28

🎯 **정답: ③**

📖 실제로 움직인 거리는 $\int_0^4 |v(t)|\,dt$.

• $v(t) = 3t(t-2) = 0$의 해는 $t = 0, 2$

• $0 \leq t \leq 2$: $v(t) \leq 0$ (점 P가 음의 방향)

• $2 \leq t \leq 4$: $v(t) \geq 0$ (점 P가 양의 방향)

구간을 나누어 계산한다.

[1] $\int_0^2 -(3t^2 - 6t)\,dt = \int_0^2 (6t - 3t^2)\,dt = [3t^2 - t^3]_0^2 = 12 - 8 = 4$

[2] $\int_2^4 (3t^2 - 6t)\,dt = [t^3 - 3t^2]_2^4 = (64 - 48) - (8 - 12) = 16 - (-4) = 20$

총 움직인 거리 = $4 + 20 = 24$

💡 속도를 그대로 적분하면 위치 변화량(변위)이지만, 속도의 절댓값을 적분하면 실제 움직인 거리가 돼요. 음의 방향으로 갔다가 되돌아오면 두 값이 달라지죠.

Q199 극한과 연속

함수 $f(x) = \begin{cases} x + a & (x \geq 1) \\ 2x & (x < 1) \end{cases}$ 가 $x = 1$에서 연속이 되도록 하는 상수 a의 값을 구하시오.

①) ① 0

②) ② 1

③) ③ 2

④) ④ 3

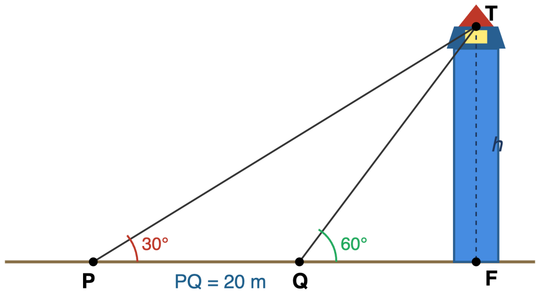
🎯 **정답: ②**

📖 $x = 1$에서 연속이려면 좌극한, 우극한, 함숫값이 모두 같아야 한다. 좌극한: $\lim_{x \to 1^-} 2x = 2$. 우극한 및 함숫값: $f(1) = 1 + a$. 따라서 $1 + a = 2$이므로 $a = 1$.

💡 불연속점이 단 한 점이라도 있으면 그 함수는 "연속함수"라 부르지 않는다.

Q200 삼각함수 활용

높이가 h인 등대를 지면 위 한 점 P에서 올려본 각의 크기가 30°이고, P에서 등대 발치 쪽으로 일직선상으로 20 m 더 다가간 점 Q에서 올려본 각의 크기가 60°이다. 등대의 높이 h(m)는?



①) ① 10

②) ② $10\sqrt{3}$

③) ③ $15\sqrt{3}$

④) ④ $20\sqrt{3}$

🎯 **정답: ②**

📖 등대 발치를 F, 꼭대기를 T라 하고 $PF = a$, $QF = b$라 하자. 직각삼각형에서 $\tan 30° = \frac{h}{a}$이므로 $a = h\sqrt{3}$. $\tan 60° = \frac{h}{b}$이므로 $b = \frac{h}{\sqrt{3}}$. 한편 $a - b = 20$이므로 $h\sqrt{3} - \frac{h}{\sqrt{3}} = \frac{3h - h}{\sqrt{3}} = \frac{2h}{\sqrt{3}} = 20$. 따라서 $h = 10\sqrt{3}$ (m).

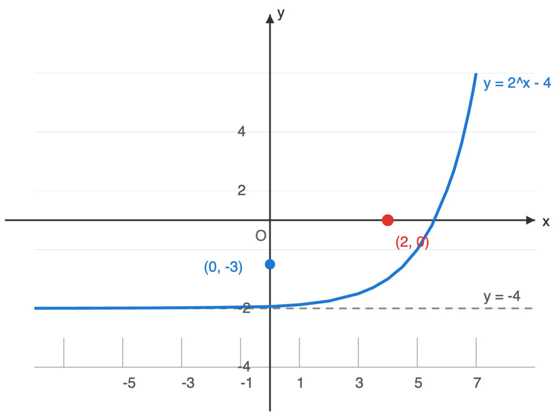
💡 이런 측정 방식은 천체 거리를 잴 때 쓰는 "시차(parallax) 측량"의 기본 원리와 같다.

📝 고2 수학 일반

총 40문제 · 문제와 정답·풀이 포함

Q201 지수·로그함수

함수 $y = 2^x - 4$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표를 구하시오.



①) ① 0

②) ② 1

③) ③ 2

④) ④ 4

🎯 **정답: ③**

📖 x축과의 교점에서는 $y = 0$이므로 $2^x - 4 = 0$, 즉 $2^x = 4 = 2^2$이다. 양변의 밑이 2로 같으므로 지수를 비교하면 $x = 2$.

💡 지수함수 $y = 2^x - 4$의 그래프는 $y = 2^x$를 y축 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이고, 점근선 또한 $y = -4$로 함께 이동한다.

Q202 수열

$\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k(k+1)}$의 값은?

①) ① $\frac{9}{10}$

②) ② $\frac{10}{11}$

③) ③ $\frac{11}{12}$

④) ④ 1

🎯 **정답: ②**

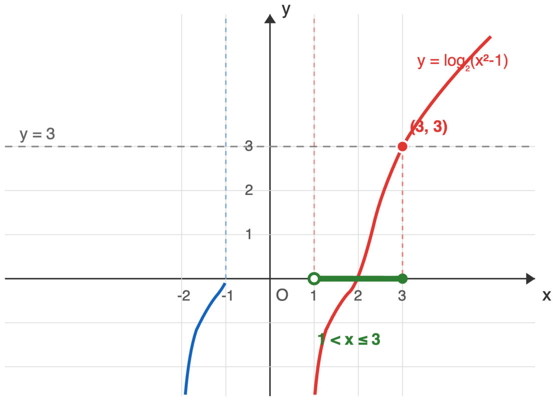
📖 부분분수로 분해하면 $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$이다. 따라서

$$\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{11}\right) = 1 - \frac{1}{11} = \frac{10}{11}.$$

💡 중간 항이 차례로 사라지는 합을 "망원합(telescoping sum)"이라 부르며, 망원경의 통이 접히듯 항들이 상쇄되는 모습에서 이름이 유래했다.

Q203 지수·로그함수

부등식 $\log_2(x-1)+\log_2(x+1)\le 3$의 해는?



①) ① $1 < x \le 2$

②) ② $1 < x \le 3$

③) ③ $-3 \le x \le 3$

④) ④ $-3 < x < 3$

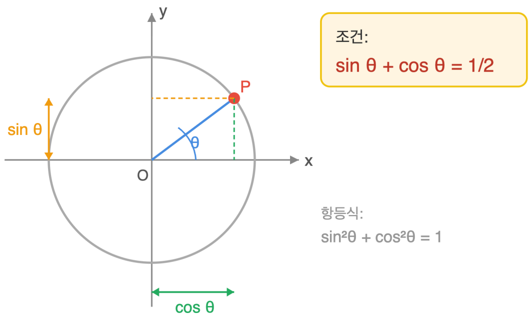
🎯 **정답: ②**

📖 진수 조건: $x-1>0$이고 $x+1>0$이어야 하므로 $x>1$. 좌변을 합치면 $\log_2\{(x-1)(x+1)\}\le 3$, 즉 $\log_2(x^2-1)\le 3=\log_2 8$. 밑 $2>1$이므로 $x^2-1\le 8$, $x^2\le 9$, $-3\le x\le 3$. 진수 조건과의 교집합은 $1<x\le 3$.

💡 로그 부등식을 풀 때 진수 조건을 빠뜨려 "가짜 해"를 답으로 적는 실수는 시험에서 가장 흔한 감점 요인 중 하나이다.

Q204 삼각함수

$\sin\theta + \cos\theta = \frac{1}{2}$일 때, $\sin\theta\cos\theta$의 값은?



①) ① $-\frac{3}{8}$
②) ② $-\frac{1}{4}$
③) ③ $\frac{1}{8}$
④) ④ $\frac{3}{8}$

🎯 **정답: ①**

📖 주어진 식의 양변을 제곱하면 $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = \sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \frac{1}{4}$. 항등식 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$을 대입하면 $1 + 2\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{4}$. 따라서 $2\sin\theta\cos\theta = -\frac{3}{4}$이므로 $\sin\theta\cos\theta = -\frac{3}{8}$.

💡 $\sin\theta\cos\theta < 0$이라는 사실은 θ의 종점이 제 2 또는 제 4 사분면에 있음을 뜻한다. 즉 sin과 cos의 부호가 서로 반대다.

Q205 삼각함수

호도법으로 $\frac{5\pi}{6}$ 라디안을 육십분법으로 나타내시오.

①) ① $120°$
②) ② $135°$
③) ③ $150°$
④) ④ $165°$

🎯 **정답: ③**

📖 π 라디안 $= 180°$이므로
$\frac{5\pi}{6} = \frac{5}{6} \times 180° = 150°$

💡 호도법은 호의 길이와 반지름의 비율로 각을 측정해 미적분에서 자연스러워요.

Q206 수열

등차수열 $\{a_n\}$에서 $a_1 = 3$, 공차가 4일 때, a_{10}의 값은?

①) ① 35

②) ② 37

③) ③ 39

④) ④ 41

🎯 **정답: ③**

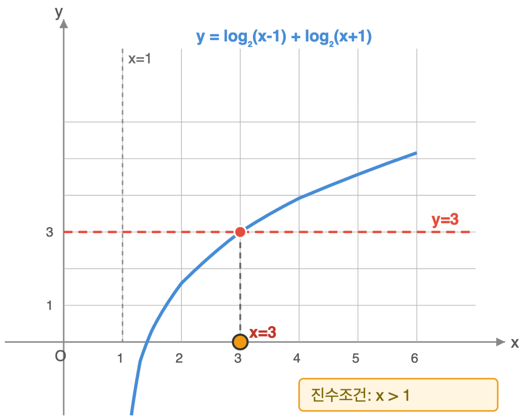
📖 등차수열의 일반항: $a_n = a_1 + (n-1)d$

$a_{10} = 3 + (10-1) \times 4 = 3 + 36 = 39$

💡 등차수열의 합 공식은 가우스가 어린 시절 1부터 100까지의 합을 빨리 구해 발견한 일화로 유명해요.

Q207 지수·로그함수

방정식 $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) = 3$의 해를 구하시오.



①) ① $x = 2$

②) ② $x = 3$

③) ③ $x = \sqrt{8}$

④) ④ $x = 3\sqrt{2}$

🎯 **정답: ②**

📖 진수조건: $x - 1 > 0,\ x + 1 > 0 \Rightarrow x > 1$

로그합 공식: $\log_2[(x-1)(x+1)] = 3$

$(x-1)(x+1) = 2^3 = 8$

$x^2 - 1 = 8 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$

진수조건에 의해 $x = 3$

💡 진수조건을 빠뜨리면 가짜 해가 따라와요. 항상 처음에 정의역부터 확인!

Q208 수학적 귀납법과 점화식

수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 2,\ a_{n+1} = 3a_n - 2$를 만족할 때, a_4의 값은?

①) ① 20

②) ② 28

③) ③ 54

④) ④ 56

정답: ② 28

📖 점화식에 차례로 대입한다. $a_1 = 2,\ a_2 = 3 \times 2 - 2 = 4,\ a_3 = 3 \times 4 - 2 = 10,\ a_4 = 3 \times 10 - 2 = 28$이다. 일반항으로 검증하면 $a_{n+1} - 1 = 3(a_n - 1)$이므로 $a_n - 1 = (a_1 - 1) \cdot 3^{n-1} = 3^{n-1}$, 즉 $a_n = 3^{n-1} + 1$이다. 따라서 $a_4 = 3^3 + 1 = 27 + 1 = 28$이다. 정답은 ② 28이다.

💡 $a_{n+1} = ra_n + c$ 꼴은 $a_n - \alpha = r(a_{n-1} - \alpha)$로 변형해 등비수열로 풀 수 있어요.

Q209 미분

함수 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$의 극댓값을 구하시오.

①) ① 1

②) ② 3

③) ③ 5

④) ④ 7

정답: ③

📖 $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1, 3$

증감표: $x < 1$에서 $f' > 0$ 증가, $1 < x < 3$에서 $f' < 0$ 감소, $x > 3$에서 $f' > 0$ 증가

따라서 $x = 1$에서 극대, $x = 3$에서 극소.

극댓값: $f(1) = 1 - 6 + 9 + 1 = 5$

💡 3차함수의 극값은 도함수가 0이 되는 두 점에서 발생하며, 두 극값의 합이 1차 근사식의 평균과 관련이 있어요.

Q210 지수와 로그

$\log_{10}2 = a,\ \log_{10}3 = b$일 때, $\log_{10}72$를 a, b로 나타내면?

①) ① $3a + 2b$

②) ② $2a + 3b$

③) ③ $a + 2b$

④) ④ $3a + b$

정답: ①

📖 $72 = 2^3 \times 3^2 = 8 \times 9$

$\log_{10}72 = \log_{10}(2^3 \times 3^2)$

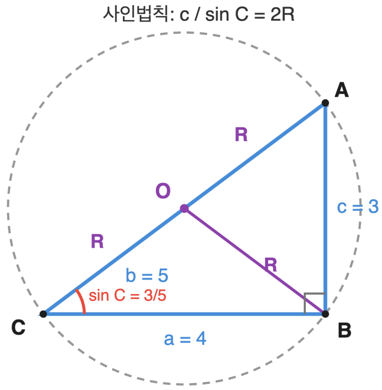
$= 3\log_{10}2 + 2\log_{10}3$

$= 3a + 2b$

💡 $\log_{10}2 \approx 0.301,\ \log_{10}3 \approx 0.477$만 외워도 많은 상용로그를 계산할 수 있어요.

Q211 삼각함수 활용

삼각형 ABC에서 $a = 4$, $b = 5$, $\sin C = \frac{3}{5}$일 때, 삼각형 ABC의 외접원의 반지름 R의 값은? (단, C는 예각)



①) ① $\frac{15}{8}$
②) ② $\frac{5}{2}$
③) ③ 3
④) ④ 5

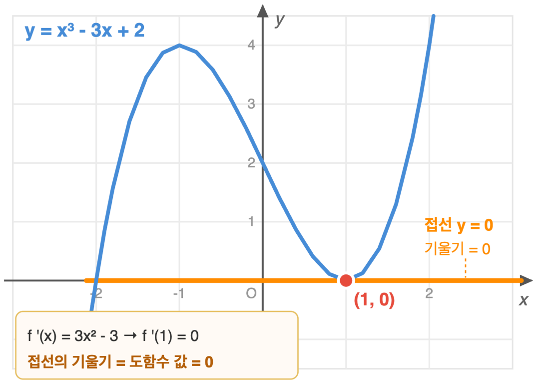
🎯 **정답:** ② $\frac{5}{2}$

📖 C는 예각이고 $\sin C = \frac{3}{5}$이므로 $\cos C = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$이다. 코사인법칙으로 c를 구하면 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = 16 + 25 - 2 \times 4 \times 5 \times \frac{4}{5} = 41 - 32 = 9$이므로 $c = 3$이다. 사인법칙 $\frac{c}{\sin C} = 2R$에서 $2R = \frac{3}{3/5} = 5$, 따라서 $R = \frac{5}{2}$이다.

💡 사인법칙 $2R = \frac{a}{\sin A}$는 외접원 반지름과 변, 대각의 사인 사이의 우아한 관계예요.

Q212 미분

곡선 $y = x^3 - 3x + 2$ 위의 점 $(1, 0)$에서의 접선의 방정식을 구하시오.



①) ① $y = 0$

②) ② $y = x - 1$

③) ③ $y = -x + 1$

④) ④ $y = 2x - 2$

🎯 **정답: ①**

📖 $f(x) = x^3 - 3x + 2$

$f'(x) = 3x^2 - 3$

점 $(1, 0)$에서의 접선의 기울기: $f'(1) = 3 - 3 = 0$

접선의 방정식: $y - 0 = 0 \times (x - 1)$

$\therefore y = 0$

점 $(1, 0)$이 곡선 위에 있는지 확인: $f(1) = 1 - 3 + 2 = 0$ ✓

💡 $y = x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2(x + 2)$로 인수분해되므로 $x = 1$은 중근이고, 그래서 접선이 x축이에요.

Q213 지수와 로그

$4^{\frac{1}{2}} + 8^{\frac{1}{3}} + 27^{\frac{1}{3}}$의 값을 구하시오.

①) ① 5

②) ② 6

③) ③ 7

④) ④ 8

🎯 **정답: ③ 7**

📖 1단계: 각 거듭제곱근을 정수로 변환한다.

$4^{1/2} = \sqrt{4} = 2$

$8^{1/3} = \sqrt[3]{8} = 2$

$27^{1/3} = \sqrt[3]{27} = 3$

2단계: 세 값을 더한다.

$2 + 2 + 3 = 7$

💡 유리수 지수는 거듭제곱근의 일반화로, $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$ 으로 정의된다. 이 정의가 자연수 지수의 모든 법칙과 일관되게 작동한다.

Q214 수열

첫째항이 3, 공비가 2인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제5항까지의 합을 구하시오.

①) ① 81

②) ② 87

③) ③ 93

④) ④ 99

🎯 **정답: ③ 93**

📖 1단계: 등비수열의 합 공식을 적용한다.

$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}\ (r \neq 1)$

2단계: $a = 3$, $r = 2$, $n = 5$를 대입한다.

$S_5 = \frac{3(2^5 - 1)}{2 - 1} = \frac{3 \cdot 31}{1} = 93$

💡 등비수열의 합은 'r배 한 후 빼서 망원합(telescoping)을 만드는' 방식으로 유도된다.

Q215 미분

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4$일 때, $f'(1)$의 값을 구하시오.

①) ① -1

②) ② 0

③) ③ 1

④) ④ 2

🎯 **정답: ② 0**

📖 1단계: 도함수를 구한다.

$f'(x) = 6x^2 - 6x$

2단계: $x = 1$을 대입한다.

$f'(1) = 6 \cdot 1 - 6 \cdot 1 = 0$

💡 $f'(1) = 0$이므로 $x = 1$은 임계점(critical point)이다. 이 함수에서 $x = 1$은 극솟점이다.

Q216 적분

$\int_1^3 (2x + 1)dx$의 값을 구하시오.

①) ① 8

②) ② 10

③) ③ 12

④) ④ 14

🎯 **정답: ② 10**

📖 1단계: 부정적분을 구한다.

$\int (2x + 1)dx = x^2 + x + C$

2단계: 정적분 값을 계산한다.

$[x^2 + x]_1^3 = (9 + 3) - (1 + 1) = 12 - 2 = 10$

💡 $y = 2x + 1$은 직선이므로 적분값은 사다리꼴 넓이와 같다. 윗변 3, 아랫변 7, 높이 2인 사다리꼴 넓이 $\frac{(3+7) \cdot 2}{2} = 10.$

Q217 극한과 연속

$\lim_{x \to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$의 값을 구하시오.

①) ① 2

②) ② 3

③) ③ 4

④) ④ 5

🎯 **정답: ③ 4**

📖 1단계: $\frac{0}{0}$ 부정형이므로 분자를 인수분해한다.

$x^2-4=(x-2)(x+2)$

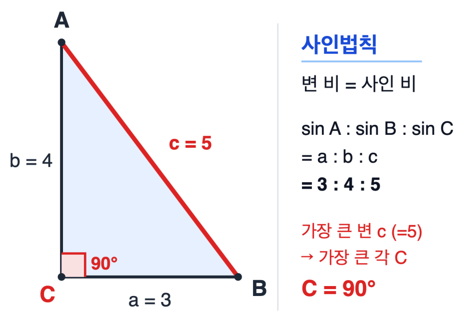
2단계: 약분 후 극한값을 구한다.

$\lim_{x \to 2}\dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x \to 2}(x+2)=4$

💡 $x \to 2$이지만 $x=2$가 아니므로 $x-2 \neq 0$, 따라서 약분이 정당화된다.

Q218 삼각함수 활용

삼각형 ABC에서 $\sin A : \sin B : \sin C = 3:4:5$일 때, 이 삼각형의 가장 큰 각의 크기를 구하시오.



①) ① 60°

②) ② 75°

③) ③ 90°

④) ④ 105°

🎯 **정답: ③ 90°**

📖 1단계: 사인법칙에 의해 변의 비와 마주보는 각의 사인 비가 같다.

$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=3:4:5$

2단계: $a=3k,\ b=4k,\ c=5k$로 두고 가장 큰 각 C에 대해 코사인법칙을 적용한다.

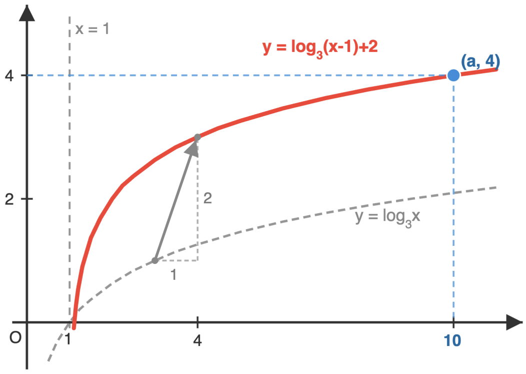
$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{9k^2+16k^2-25k^2}{24k^2}=0$

3단계: $\cos C=0$이므로 $C=90°$.

💡 $3:4:5$는 가장 작은 정수 피타고라스 삼중수다. 사인 비가 $3:4:5$인 삼각형은 변의 비도 $3:4:5$인 직각삼각형이다.

Q219 지수·로그함수

함수 $y = \log_3(x-1)+2$의 그래프가 점 $(a, 4)$를 지날 때, a의 값을 구하시오.



①) ① 8

②) ② 9

③) ③ 10

④) ④ 11

🎯 **정답: ③ 10**

📖 1단계: 점 $(a, 4)$를 식에 대입한다.

$4 = \log_3(a-1)+2$

2단계: 양변에서 2를 빼고 로그의 정의를 사용한다.

$\log_3(a-1) = 2$

$a-1 = 3^2 = 9$

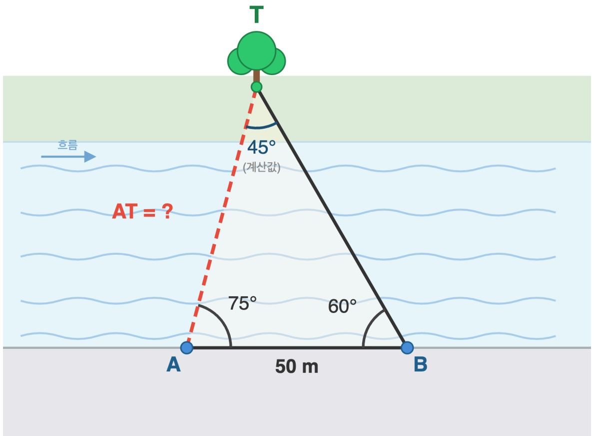
3단계: a의 값을 구한다.

$a = 10$

💡 $y = \log_3(x-1)+2$의 그래프는 $y = \log_3 x$를 x축으로 1, y축으로 2만큼 평행이동한 것이다. 점근선도 $x = 0$에서 $x = 1$로 이동한다.

Q220 삼각함수 활용

강 건너편의 나무 T를 측량하기 위해 같은 쪽 강기슭의 두 지점 A, B를 잡았다. $\overline{AB} = 50$ m이고, 점 A에서 나무를 본 각 $\angle TAB = 75°$, 점 B에서 본 각 $\angle TBA = 60°$일 때, A에서 나무까지의 거리 $\overline{AT}$를 구하시오.



①) ① $25\sqrt{2}$ m
②) ② $25\sqrt{3}$ m
③) ③ $25\sqrt{6}$ m
④) ④ $50\sqrt{2}$ m

🎯 **정답: ③ $25\sqrt{6}$ m**

📖 1단계: 삼각형 ATB의 세 각을 구한다.

$\angle ATB = 180° - 75° - 60° = 45°$

2단계: 사인법칙을 적용한다.

$$\frac{\overline{AB}}{\sin(\angle ATB)} = \frac{\overline{AT}}{\sin(\angle TBA)}$$

$$\frac{50}{\sin 45°} = \frac{\overline{AT}}{\sin 60°}$$

3단계: $\overline{AT}$를 계산한다.

$$\overline{AT} = \frac{50\sin 60°}{\sin 45°} = \frac{50 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{50\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{50\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{2} = 25\sqrt{6} \text{ m}$$

💡 이런 측량법을 '삼각측량'이라 하며, 직접 잴 수 없는 거리를 두 각도와 한 변의 길이로 알아낸다. GPS가 등장하기 전 지도 제작의 핵심 기법이었다.

Q221 수학적 귀납법과 점화식

수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + 1$을 만족할 때, 일반항 a_n을 구하시오.

①) ① 2^n

②) ② $2^n - 1$

③) ③ 2^{n-1}

④) ④ $2n - 1$

🎯 **정답: ② $2^n - 1$**

📖 1단계: 점화식 $a_{n+1} = 2a_n + 1$의 양변에 1을 더한다.

$a_{n+1} + 1 = 2a_n + 2 = 2(a_n + 1)$

2단계: $b_n = a_n + 1$로 놓으면 $b_{n+1} = 2b_n$이므로 $\{b_n\}$은 등비수열.

첫째항: $b_1 = a_1 + 1 = 2$, 공비: $r = 2$.

3단계: b_n의 일반항을 구한다.

$b_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$

4단계: $a_n = b_n - 1 = 2^n - 1$.

검증: $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 7, a_4 = 15 \rightarrow$ 점화식 $a_{n+1} = 2a_n + 1$ 만족.

💡 $2^n - 1$ 형태의 수를 메르센 수라고 하며, n이 소수일 때 소수가 될 수 있다. 가장 큰 알려진 소수들은 모두 메르센 수다.

Q222 미분

한 변의 길이가 12인 정사각형 모양의 종이가 있다. 네 모퉁이에서 한 변의 길이가 x인 정사각형을 잘라내고 점선을 따라 접어 뚜껑이 없는 직육면체 상자를 만들 때, 상자의 부피의 최댓값을 구하시오. (단, $0 < x < 6$)

①) ① 96

②) ② 108

③) ③ 128

④) ④ 144

🎯 **정답: ③ 128**

📖 1단계: 상자의 가로, 세로는 $12 - 2x$, 높이는 x이므로 부피는

$V(x) = x(12 - 2x)^2$

2단계: 도함수를 구한다.

$V'(x) = (12 - 2x)^2 + x \cdot 2(12 - 2x)(-2)$

$= (12 - 2x)[(12 - 2x) - 4x]$

$= (12 - 2x)(12 - 6x)$

3단계: $V'(x) = 0$의 해를 구한다.

$x = 6$ (정의역 밖) 또는 $x = 2$.

4단계: $0 < x < 6$에서 $x = 2$일 때 극대.

$V(2) = 2 \cdot (12 - 4)^2 = 2 \cdot 64 = 128$

따라서 부피의 최댓값은 128.

💡 이 문제는 미적분의 가장 고전적인 최적화 문제로, 1684년경 라이프니츠와 베르누이가 다룬 변형 형태가 발표되었다.

Q223 미분

함수 $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 1$에서 $f'(2)$의 값은?

①) ① 9

②) ② 11

③) ③ 13

④) ④ 15

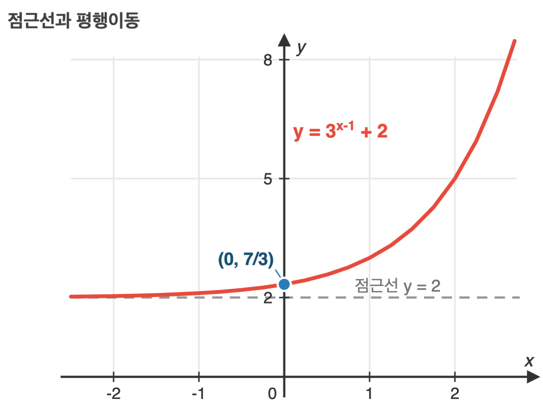
🎯 **정답:** ① 9

📖 $f'(x) = 3x^2 - 4x + 5$이다. 따라서 $f'(2) = 3 \times 2^2 - 4 \times 2 + 5 = 12 - 8 + 5 = 9$이다. 정답은 ① 9이다.

💡 미분계수는 곡선의 순간 기울기를 알려주는 값이다.

Q224 지수·로그함수

함수 $y = 3^{x-1} + 2$의 점근선의 방정식과 y절편을 차례로 구한 것은?



①) ① $y = 2, \frac{7}{3}$

②) ② $y = 2, \frac{1}{3}$

③) ③ $y = 1, \frac{7}{3}$

④) ④ $y = -2, 3$

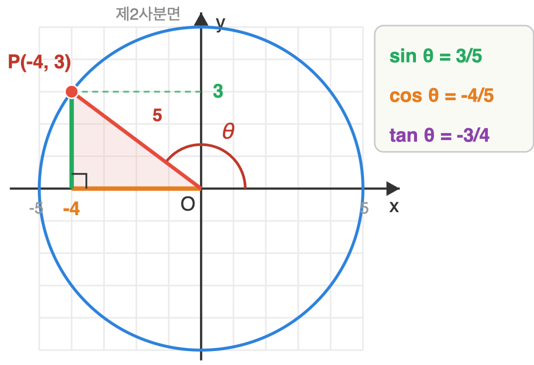
🎯 **정답:** ①

📖 $y = 3^{x-1} + 2$는 $y = 3^x$를 x축 방향으로 1, y축 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다. 점근선은 $y = 2$. y절편은 $x = 0$ 대입: $y = 3^{-1} + 2 = \frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3}$.

💡 지수함수의 점근선은 평행이동에 따라 함께 이동하지만 기울기는 변하지 않는다.

Q225 삼각함수

θ가 제2사분면의 각이고 $\sin\theta = \frac{3}{5}$일 때, $\cos\theta + \tan\theta$의 값은?



①) ① $-\frac{31}{20}$
②) ② $-\frac{19}{20}$
③) ③ $\frac{19}{20}$
④) ④ $\frac{31}{20}$

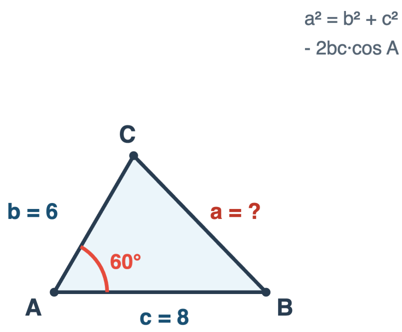
🎯 **정답: ①**

📖 제2사분면에서 $\cos\theta < 0$. $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$이므로 $\cos\theta = -\frac{4}{5}$. $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{3/5}{-4/5} = -\frac{3}{4}$. 따라서 $\cos\theta + \tan\theta = -\frac{4}{5} - \frac{3}{4} = -\frac{16}{20} - \frac{15}{20} = -\frac{31}{20}$.

💡 삼각함수의 부호는 사분면에 따라 달라진다. 'All Students Take Calculus' 라는 영어 암기법이 있다.

Q226 삼각함수 활용

삼각형 ABC에서 $b = 6$, $c = 8$, $A = 60°$일 때, 변 a의 길이는?



①) ① $\sqrt{148}$
②) ② $\sqrt{48}$
③) ③ $2\sqrt{13}$
④) ④ $\sqrt{61}$

🎯 **정답: ③ $2\sqrt{13}$**

📖 코사인법칙에 의해 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = 36 + 64 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cos 60° = 100 - 96 \cdot \frac{1}{2} = 100 - 48 = 52$. 따라서 $a = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$.

💡 코사인법칙은 피타고라스 정리의 일반화로, $A = 90°$일 때 피타고라스 정리가 된다.

Q227 수열

$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)$임을 이용하여 $\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k(k+2)}$의 값은?

①) ① $\frac{175}{264}$
②) ② $\frac{180}{264}$
③) ③ $\frac{185}{264}$
④) ④ $\frac{190}{264}$

🎯 **정답: ①**

📖 부분분수 분해: $\frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)$. 따라서 $\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)$. 망원합으로 정리하면 $\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{11} - \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{132+66-12-11}{132} = \frac{1}{2} \cdot \frac{175}{132} = \frac{175}{264}$.

💡 부분분수 분해는 망원합(telescoping sum)을 가능하게 하는 강력한 기법이다.

Q228 지수와 로그

$2^x = 3^y = 6^z$이고 $xyz \neq 0$일 때, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z}$의 값은?

①) ① -1
②) ② 0
③) ③ 1
④) ④ 2

🎯 **정답: ②**

📖 $2^x = 3^y = 6^z = k$로 놓으면 $x = \log_2 k, y = \log_3 k, z = \log_6 k$. 따라서 $\frac{1}{x} = \log_k 2, \frac{1}{y} = \log_k 3, \frac{1}{z} = \log_k 6$.
$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = \log_k 2 + \log_k 3 - \log_k 6 = \log_k \frac{2 \cdot 3}{6} = \log_k 1 = 0$.

💡 $a^x = k$의 역수 관계 $\frac{1}{x} = \log_k a$는 지수와 로그를 잇는 강력한 도구다.

Q229 미분

함수 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$이 $x = -1$에서 극댓값 4를 가질 때, $a+b$의 값은?

①) ① -6
②) ② -2
③) ③ 0
④) ④ 3

🎯 **정답: ① -6**

📖 $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$이다. $x = -1$에서 극값을 가지므로 $f'(-1) = 3 - 2a + b = 0$, 즉 $b = 2a - 3$이다. 또한 극댓값이 4이므로 $f(-1) = -1 + a - b + 1 = a - b = 4$이다. 두 식을 연립하면 $a - (2a-3) = 4$에서 $-a + 3 = 4$, 즉 $a = -1$이고 $b = 2(-1) - 3 = -5$이다. $f''(x) = 6x + 2a = 6x - 2$이고 $f''(-1) = -8 < 0$이므로 $x = -1$은 극대점이다. 따라서 $a + b = -1 + (-5) = -6$이다. 정답은 ① -6이다.

💡 극값을 가지려면 도함수가 0이고 부호가 바뀌어야 한다.

Q230 지수와 로그

$8^{\frac{2}{3}} \times 4^{-\frac{1}{2}}$의 값은?

①) ① 1

②) ② 2

③) ③ 4

④) ④ $\frac{1}{2}$

🎯 **정답: ②**

📖 $8 = 2^3, 4 = 2^2$로 바꾼다. $8^{\frac{2}{3}} = (2^3)^{\frac{2}{3}} = 2^2 = 4$, $4^{-\frac{1}{2}} = (2^2)^{-\frac{1}{2}} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$. 따라서 $4 \times \frac{1}{2} = 2$.

💡 유리지수는 17세기 뉴턴이 정립했어요. $a^{m/n}$은 $\sqrt[n]{a^m}$ 과 같아요.

Q231 미분

함수 $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 1$의 도함수 $f'(x)$를 $x = 1$에서 평가한 값은?

①) ① 0

②) ② 1

③) ③ 2

④) ④ 3

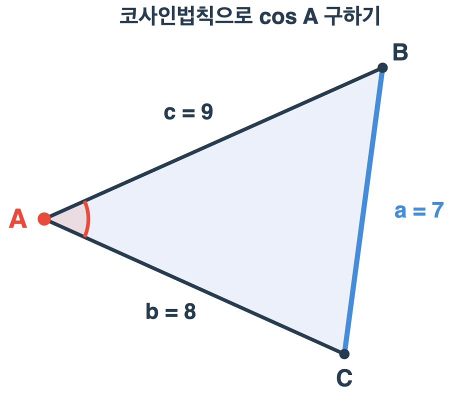
🎯 **정답: ③**

📖 각 항을 미분하면 $f'(x) = 3x^2 + 4x - 5$. $x = 1$ 대입: $f'(1) = 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 - 5 = 3 + 4 - 5 = 2$.

💡 라이프니츠는 1684년에 미분의 곱·합 규칙을 발표했고, 거듭제곱 미분 공식 $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$도 그 시기에 정립됐습니다.

Q232 삼각함수 활용

삼각형 ABC에서 $a = 7$, $b = 8$, $c = 9$일 때, $\cos A$의 값은?



①) ① $\frac{1}{2}$

②) ② $\frac{2}{3}$

③) ③ $\frac{11}{16}$

④) ④ $\frac{3}{4}$

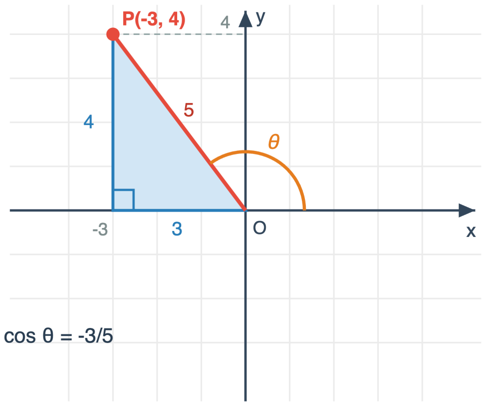
🎯 **정답: ②**

📖 코사인법칙 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$를 변형하면 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$. 대입하면 $\cos A = \frac{64 + 81 - 49}{2 \cdot 8 \cdot 9} = \frac{96}{144} = \frac{2}{3}$.

💡 코사인법칙은 유클리드의 '원론'(BC 300년경)에 기하학적 형태로 이미 등장했지만, 현대적 공식은 15세기 알카시(Al-Kashi)가 정립했어요.

Q233 삼각함수

$\cos\theta = -\frac{3}{5}$이고 θ가 제2사분면의 각일 때, $\sin\theta + \tan\theta$의 값은?



①) ① $-\frac{8}{15}$
②) ② $-\frac{4}{15}$
③) ③ $\frac{4}{15}$
④) ④ $\frac{8}{15}$

🎯 **정답: ① $-\frac{8}{15}$**

📖 제2사분면에서 $\sin\theta > 0$이다. $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$이므로 $\sin\theta = \frac{4}{5}$이다. $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{4/5}{-3/5} = -\frac{4}{3}$이다. 따라서 $\sin\theta + \tan\theta = \frac{4}{5} + \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{12-20}{15} = -\frac{8}{15}$이다.

💡 제2사분면은 sin만 양수, cos·tan는 음수예요. 사분면별 부호는 'All Students Take Calculus'(1·2·3·4사분면 차례)로 외우기도 합니다.

Q234 적분

$\int_0^2 (3x^2 - 2x + 1)\,dx$의 값은?

①) ① 4
②) ② 6
③) ③ 8
④) ④ 10

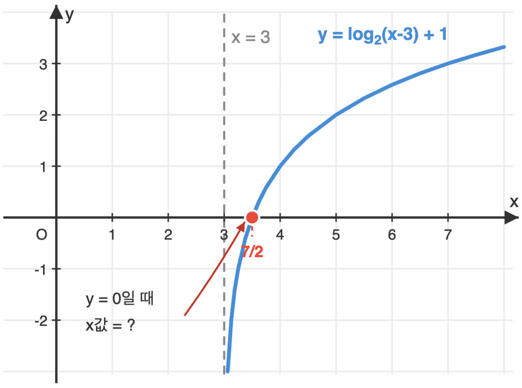
🎯 **정답: ②**

📖 부정적분: $\int (3x^2 - 2x + 1)dx = x^3 - x^2 + x + C$. 정적분 계산: $[x^3 - x^2 + x]_0^2 = (8 - 4 + 2) - 0 = 6$.

💡 정적분의 기본 정리는 뉴턴과 라이프니츠가 17세기에 독립적으로 발견했고, 미분과 적분이 서로 역연산임을 보여줬어요.

Q235 지수·로그함수

함수 $y = \log_2(x-3) + 1$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표는?



①) ① $\frac{5}{2}$
②) ② 3
③) ③ $\frac{7}{2}$
④) ④ 4

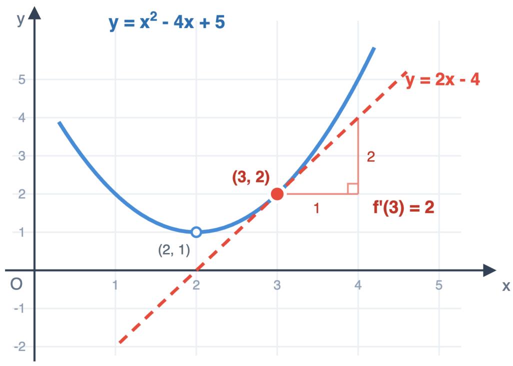
정답: ③

x축과의 교점은 $y=0$일 때다. $\log_2(x-3)+1=0 \Rightarrow \log_2(x-3)=-1 \Rightarrow x-3=2^{-1}=\frac{1}{2}$. 따라서 $x=3+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$.

log 함수의 평행이동 $y=\log_a(x-p)+q$는 점근선이 $x=p$로 이동해요. 정의역도 $x>p$로 바뀝니다.

Q236 미분

곡선 $y = x^2 - 4x + 5$ 위의 점 $(3, 2)$에서의 접선의 방정식은?



①) ① $y = 2x - 4$
②) ② $y = 2x + 2$
③) ③ $y = -2x + 8$
④) ④ $y = x - 1$

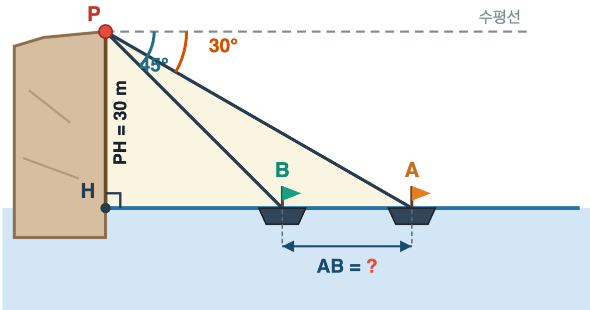
정답: ①

$f(x) = x^2 - 4x + 5$의 도함수는 $f'(x) = 2x - 4$. 점 $(3,2)$에서의 접선 기울기는 $f'(3) = 6 - 4 = 2$. 접선의 방정식:
$y - 2 = 2(x-3) \Rightarrow y = 2x - 4$.

접선이라는 개념은 17세기 페르마(Fermat)가 도함수 개념 없이도 기하학적으로 정의했고, 이후 미적분학의 기초가 되었습니다.

Q237 삼각함수 활용

높이 30m의 절벽 위에서 바다 위 두 배 A, B의 내려본각이 각각 $30°$, $45°$이다. (단, 두 배 A, B와 절벽 아래 지점은 일직선상에 있고, A가 절벽에서 더 멀다.) 두 배 사이의 거리는?



①) ① $30(\sqrt{3}\ -1)$ m
②) ② $30(\sqrt{3}\ +1)$ m
③) ③ $30\sqrt{2}$ m
④) ④ $30(2-\sqrt{3}\ )$ m

🎯 **정답: ①**

📖 P에서 절벽 아래 H까지 수직거리 30m. 내려본각이 $45°$인 배 B는 $\tan 45° = \frac{30}{HB} = 1$이므로 $HB = 30$. 내려본각이 $30°$인 배 A는 $\tan 30° = \frac{30}{HA} = \frac{1}{\sqrt{3}}$이므로 $HA = 30\sqrt{3}$. 두 배 사이 거리: $AB = HA - HB = 30\sqrt{3}\ - 30 = 30(\sqrt{3}\ - 1)$ m.

💡 내려본각(부각)을 이용한 거리 측정은 등대 관리, 항해, 측량에서 오랫동안 사용된 실용적 기법이에요.

Q238 수학적 귀납법과 점화식

수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 2n\ (n \geq 1)$으로 정의될 때, a_{10}의 값은?

①) ① 81
②) ② 89
③) ③ 91
④) ④ 100

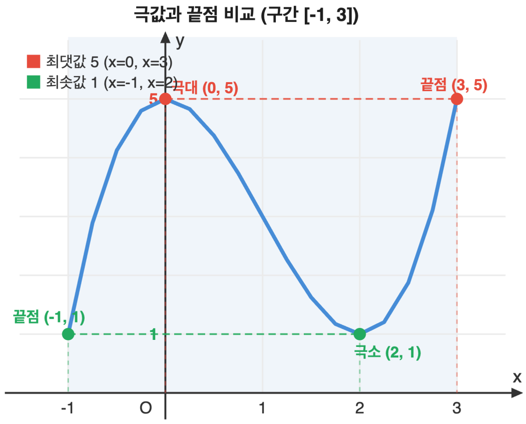
🎯 **정답: ③**

📖 점화식 $a_{n+1} - a_n = 2n$의 양변을 $n = 1$부터 $n = 9$까지 합한다. $\sum_{k=1}^{9}(a_{k+1} - a_k) = a_{10} - a_1 = \sum_{k=1}^{9} 2k = 2 \cdot \frac{9 \cdot 10}{2} = 90$. 따라서 $a_{10} = 1 + 90 = 91$.

💡 $a_{n+1} - a_n = f(n)$ 꼴의 점화식은 계차수열이라 부르며, 양변을 합하는 방법으로 일반항 $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$를 구할 수 있어요.

Q239 미분

함수 $f(x) = x^3 - 3x^2 + a$가 닫힌구간 $[-1, 3]$에서 최댓값 5, 최솟값 m을 가진다. $a + m$의 값은?



①) ① 1

②) ② 2

③) ③ 3

④) ④ 6

🎯 **정답: ④ 6**

📖 $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$이므로 임계점은 $x = 0, 2$이다. 구간 $[-1, 3]$에서 후보 함숫값을 계산하면 $f(-1) = -1 - 3 + a = a - 4$, $f(0) = a$, $f(2) = 8 - 12 + a = a - 4$, $f(3) = 27 - 27 + a = a$이다. 따라서 최댓값은 $f(0) = f(3) = a$, 최솟값은 $f(-1) = f(2) = a - 4$이다. 최댓값이 5이므로 $a = 5$이고, 최솟값 $m = a - 4 = 1$이다. 그러므로 $a + m = 5 + 1 = 6$이다.

💡 닫힌구간에서 다항함수의 최대·최소는 극값과 양 끝값을 모두 비교해야 합니다. 극값만 보면 끝점에서 더 큰 값을 놓칠 수 있어요.

Q240 지수와 로그

$\sqrt[3]{16} \times 2^{\frac{2}{3}}$의 값은?

①) ① 2

②) ② 4

③) ③ 8

④) ④ 16

🎯 **정답: ②**

📖 1단계: $\sqrt[3]{16} = 16^{\frac{1}{3}} = (2^4)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{4}{3}}$로 변환한다.

2단계: $2^{\frac{4}{3}} \times 2^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{4}{3}+\frac{2}{3}} = 2^{\frac{6}{3}} = 2^2$이다.

3단계: 따라서 답은 $2^2 = 4$이다.

💡 유리수 지수는 거듭제곱근을 거듭제곱 형태로 통일하여 계산을 쉽게 만들어 줍니다.

📝 고2 수학 일반

총 10문제 · 문제와 정답·풀이 포함

Q241 수열

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 3, 공비가 2일 때, a_5의 값은?

①) ① 24

②) ② 36

③) ③ 48

④) ④ 96

🎯 **정답: ③**

📖 1단계: 등비수열의 일반항은 $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$이다.
2단계: $a_1 = 3$, $r = 2$이므로 $a_5 = 3 \cdot 2^{5-1} = 3 \cdot 2^4$이다.
3단계: $3 \cdot 16 = 48$이므로 $a_5 = 48$이다.

💡 등비수열은 세포 분열, 복리 이자, 방사성 붕괴 등 자연 현상을 모델링하는 데 자주 쓰입니다.

Q242 극한과 연속

$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$의 값은?

①) ① 0

②) ② 1

③) ③ 2

④) ④ 4

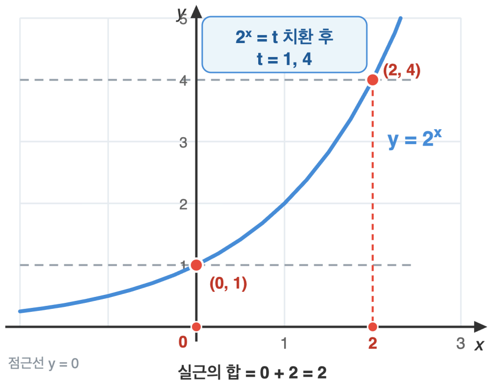
🎯 **정답: ③**

📖 1단계: $x \to 1$일 때 분자와 분모가 모두 0이 되어 $\frac{0}{0}$ 부정형이다.
2단계: 분자를 인수분해한다. $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$이다.
3단계: 약분하면 $\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x + 1$이다 (단, $x \neq 1$).
4단계: 따라서 $\lim_{x \to 1}(x+1) = 1 + 1 = 2$이다.

💡 $\frac{0}{0}$ 형태의 부정형은 그 자체로는 값이 정해지지 않지만, 식을 변형하면 명확한 극한값을 얻을 수 있습니다.

Q243 지수·로그함수

방정식 $2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$의 모든 실근의 합은?



①) ① 1
②) ② 2
③) ③ 3
④) ④ 4

🎯 **정답: ②**

📖 1단계: $2^x = t\ (t > 0)$로 치환하면 $2^{2x} = (2^x)^2 = t^2$이다.
2단계: 방정식이 $t^2 - 5t + 4 = 0$으로 바뀐다. 인수분해하면 $(t-1)(t-4) = 0$이다.
3단계: $t = 1$ 또는 $t = 4$이다 (둘 다 양수이므로 조건 충족).
4단계: $2^x = 1 \Rightarrow x = 0,\ 2^x = 4 = 2^2 \Rightarrow x = 2.$
5단계: 두 실근의 합은 $0 + 2 = 2$이다.
💡 지수방정식에서 $a^x = t$ 치환은 $t > 0$ 조건을 항상 동반하므로 음수 해는 무조건 버려야 합니다.

Q244 적분

원점에서 출발한 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t) = 3t^2 - 6t$일 때, $t = 3$에서 점 P의 위치는?

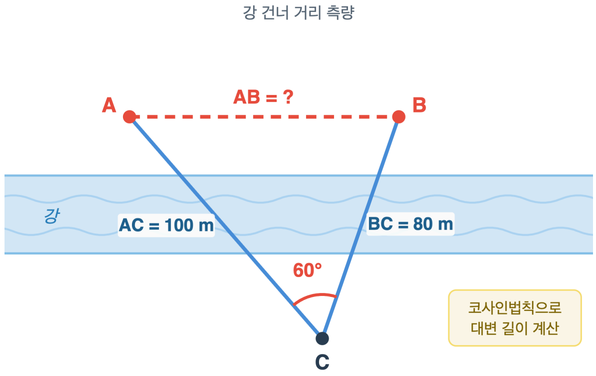
①) ① -2
②) ② 0
③) ③ 3
④) ④ 6

🎯 **정답: ②**

📖 1단계: 위치 $x(t)$는 속도 $v(t)$의 시간에 대한 정적분이다. $x(t) - x(0) = \int_0^t v(s)\,ds.$
2단계: $x(0) = 0$이므로 $x(3) = \int_0^3 (3t^2 - 6t)\,dt$이다.
3단계: 부정적분을 구하면 $\int (3t^2 - 6t)\,dt = t^3 - 3t^2 + C$이다.
4단계: $x(3) = [t^3 - 3t^2]_0^3 = (27 - 27) - 0 = 0$이다.
5단계: 따라서 $t = 3$일 때 점 P는 다시 원점에 와 있다.
💡 속도가 음수가 되는 구간에서는 점이 반대 방향으로 이동하므로, 위치(변위)와 이동거리는 다릅니다.

Q245 삼각함수 활용

강 건너편의 두 지점 A, B 사이의 거리를 측정하기 위해 강 이쪽 점 C에서 측량하였더니 $\overline{AC} = 100$ m, $\overline{BC} = 80$ m, $\angle ACB = 60°$였다. $\overline{AB}$의 길이는?



①) ① $10\sqrt{21}$ m
②) ② $20\sqrt{21}$ m
③) ③ $30\sqrt{21}$ m
④) ④ $20\sqrt{42}$ m

정답: ②

1단계: 두 변과 그 끼인각이 주어졌으므로 코사인법칙을 적용한다.
2단계: $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BC} \cdot \cos(\angle ACB)$.
3단계: $\overline{AB}^2 = 100^2 + 80^2 - 2 \cdot 100 \cdot 80 \cdot \cos 60° = 10000 + 6400 - 16000 \cdot \frac{1}{2} = 16400 - 8000 = 8400$.
4단계: $\overline{AB} = \sqrt{8400} = \sqrt{400 \cdot 21} = 20\sqrt{21}$ m이다.
코사인법칙은 직각삼각형이 아닌 일반 삼각형에서도 변의 길이를 정확히 구할 수 있게 해 주어 측량과 항해에 필수적입니다.

Q246 극한과 연속

$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 + ax + b} = 4$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a + b$의 값은?

①) ① -3
②) ② -1
③) ③ 1
④) ④ 3

정답: ①

1단계: $x \to 2$일 때 분자 $x^3 - 8 \to 0$이고 극한값이 4로 수렴하므로, 분모도 0으로 수렴해야 한다.
2단계: $4 + 2a + b = 0$ ... (㉠)이므로 $x = 2$가 분모의 근이다. 분모는 $(x-2)(x-r)$ 꼴로 인수분해된다.
3단계: 분자는 $x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$이므로,
$$\lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x-r)} = \frac{4+4+4}{2-r} = \frac{12}{2-r} = 4.$$
4단계: $12 = 4(2-r) = 8 - 4r$이므로 $r = -1$이다.
5단계: $x^2 + ax + b = (x-2)(x+1) = x^2 - x - 2$이므로 $a = -1$, $b = -2$이다.
6단계: $a + b = -1 + (-2) = -3$이다.
부정형 극한이 0이 아닌 유한값으로 수렴하려면, 분자와 분모의 영점 차수가 일치해야 합니다.

Q247 미분

점 $(0, -2)$에서 곡선 $y = x^2$에 그은 두 접선의 기울기의 곱은?

①) ① -8

②) ② -4

③) ③ 4

④) ④ 8

🎯 **정답: ①**

📖 1단계: 곡선 위의 접점을 (t, t^2)이라 하자. $y' = 2x$이므로 접선의 기울기는 $2t$이다.

2단계: 접선의 방정식은 $y - t^2 = 2t(x - t)$, 즉 $y = 2tx - t^2$이다.

3단계: 이 접선이 점 $(0, -2)$를 지나므로 $-2 = 2t \cdot 0 - t^2 = -t^2$, 즉 $t^2 = 2$이다.

4단계: $t = \sqrt{2}$ 또는 $t = -\sqrt{2}$ 이므로 두 접선의 기울기는 $2\sqrt{2}$ 와 $-2\sqrt{2}$ 이다.

5단계: 기울기의 곱은 $2\sqrt{2} \times (-2\sqrt{2}) = -4 \cdot 2 = -8$이다.

💡 포물선의 외부 한 점에서 그은 두 접선은 항상 존재하며, 점이 초점-준선 위치에 있으면 두 접선이 직각으로 만납니다.

Q248 적분

곡선 $y = x^3 - 3x$와 직선 $y = x$로 둘러싸인 도형의 넓이는?

①) ① 4

②) ② 6

③) ③ 8

④) ④ 12

🎯 **정답: ③**

📖 1단계: 교점을 구한다. $x^3 - 3x = x \Rightarrow x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x(x-2)(x+2) = 0$이므로 $x = -2, 0, 2$이다.

2단계: 두 그래프 모두 원점 대칭(기함수)이므로 둘러싸인 영역도 원점에 대해 대칭이다.

3단계: 구간 $[-2, 0]$에서 $x^3 - 3x \geq x$ ($x = -1$일 때 $2 > -1$), 구간 $[0, 2]$에서는 $x \geq x^3 - 3x$ ($x = 1$일 때 $1 > -2$)이다.

4단계: 대칭성에 의해 넓이는 $2\int_0^2 \left(x - (x^3 - 3x)\right) dx = 2\int_0^2 (4x - x^3)\, dx$이다.

5단계: $\int_0^2 (4x - x^3)\, dx = \left[2x^2 - \frac{x^4}{4}\right]_0^2 = 8 - 4 = 4$.

6단계: 따라서 넓이는 $2 \times 4 = 8$이다.

💡 두 함수가 모두 기함수일 때 둘러싸인 영역은 원점 대칭이므로, 한쪽만 적분해서 두 배 하면 계산이 간단해집니다.

Q249 수열

$\sum_{k=1}^{20} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$의 값은?

①) ① $\frac{19}{40}$
②) ② $\frac{19}{41}$
③) ③ $\frac{1}{2}$
④) ④ $\frac{20}{41}$

🎯 **정답: ④**

📖 1단계: 부분분수 분해를 적용한다. $\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)$.

2단계: 합을 전개하면 $\sum_{k=1}^{20} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{20}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)$이다.

3단계: 망원합(telescoping)이 되어 중간 항들이 모두 약분된다. $\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{39}-\frac{1}{41}\right)\right]$.

4단계: 결과는 $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{41}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{40}{41} = \frac{20}{41}$이다.

💡 부분분수 분해는 두 수의 곱이 분모인 분수를 두 분수의 차로 변형하여, 망원급수처럼 중간 항이 차례로 약분되도록 만드는 강력한 기술입니다.

Q250 극한과 연속

$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x^2-4}$의 값은?

①) ① $\frac{1}{4}$
②) ② $\frac{1}{2}$
③) ③ $\frac{3}{4}$
④) ④ 1

🎯 **정답: ③ $\frac{3}{4}$**

📖 $x \to 2$일 때 분자·분모 모두 0으로 수렴하는 $\frac{0}{0}$ 부정형이므로 인수분해 후 약분한다.

분자: $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$
분모: $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$

따라서
$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2}\frac{x+1}{x+2} = \frac{2+1}{2+2} = \frac{3}{4}$

💡 $\frac{0}{0}$ 부정형은 분모와 분자가 모두 0으로 가지만 비율은 일정한 값에 수렴할 수 있다. 인수분해, 유리화, 로피탈 정리 등이 해결 도구이다.