



고1 수학 심화

총 40문제 · 문제와 정답·풀이 포함

Q1 다항식·항등식 추론

항등식 $(x + 1)(x - 2)(x + 3) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 가 모든 실수 x 에 대해 성립할 때, $a + b + c$ 의 값은?

- ① ① -10
- ② ② -9
- ③ ③ -8
- ④ ④ -7

정답: ② -9

1단계: 항등식은 x 에 어떤 값을 대입해도 성립하므로, 적절한 값을 대입해 계산 부담을 줄인다. $x = 1$ 을 대입하면 좌변 $= (2)(-1)(4) = -8$ 이고 우변 $= 1 + a + b + c$ 가 된다. 2단계: 두 값이 같으므로 $1 + a + b + c = -8$, 즉 $a + b + c = -9$. 3단계: 검산을 위해 좌변을 전개하면 $(x + 1)(x - 2) = x^2 - x - 2$, 이를 $(x + 3)$ 과 곱하면 $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ 이므로 $a = 2, b = -5, c = -6$ 이고 합은 -9 로 일치한다.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 '항등식은 모든 x 에서 성립한다'는 성질을 이용해 계수 비교 대신 수치 대입으로 시간을 절약하는 것. $a + b + c$ 형태는 $x = 1$ 대입과 직결된다는 점을 간파해야 한다.

💡 다항식 $f(x) = x^n + \dots$ 에 $x = 1$ 을 대입하면 모든 계수의 합이 나온다. 반대로 $x = -1$ 을 대입하면 짝수 차수 계수의 합에서 홀수 차수 계수의 합을 뺀 값이 나온다.

Q2 다항식·항등식 추론

다항식 $f(x)$ 를 $x - 1$ 로 나눈 나머지가 2, $x - 2$ 로 나눈 나머지가 5, $x - 3$ 으로 나눈 나머지가 10일 때, $f(x)$ 를 $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$ 으로 나눈 나머지는?

- ① ① $x^2 - 1$
- ② ② $x^2 + 1$
- ③ ③ $x^2 + x - 1$
- ④ ④ $x^2 + 2x - 2$

정답: ② $x^2 + 1$

1단계: $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$ 은 3차식이므로 나머지를 $R(x) = ax^2 + bx + c$ 로 설정한다. 그러면 $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)Q(x) + ax^2 + bx + c$. 2단계: 나머지정리에 의해 $f(1) = R(1) = a + b + c = 2$, $f(2) = R(2) = 4a + 2b + c = 5$, $f(3) = R(3) = 9a + 3b + c = 10$ 이다. 3단계: 두 번째 식에서 첫 번째 식을 빼면 $3a + b = 3$, 세 번째에서 두 번째를 빼면 $5a + b = 5$ 이다. 두 식을 빼면 $2a = 2$, 즉 $a = 1, b = 0, c = 1$. 따라서 나머지는 $x^2 + 1$ 이다.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 '나누는 식의 차수보다 나머지의 차수가 낮다'는 기본을 3차 나눴셈으로 확장한 것. 세 조건을 각각 $R(x)$ 에 그대로 이식한 연립방정식으로 바꾸는 것이 정석이다.

💡 이 과정은 본질적으로 '라그랑주 보간법'과 동일하다. 세 점 $(1, 2), (2, 5), (3, 10)$ 을 지나는 2차 함수를 찾는 문제로 볼 수 있다.

Q3 복소수 심화

i 가 허수단위일 때, $i + i^2 + i^3 + \dots + i^{100}$ 의 값은?

- ① ① -1
- ② ② 0
- ③ ③ 1
- ④ ④ i

정답: ② 0

1단계: i 의 거듭제곱은 $i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$ 로 주기가 4이다. 한 주기 합은 $i + (-1) + (-i) + 1 = 0$. 2단계: 지수 1부터 100까지는 정확히 $100/4 = 25$ 주기로 나누어진다. 3단계: 각 주기의 합이 0이므로 총합은 $25 \times 0 = 0$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 ' i 의 주기성'을 이용해 무한해 보이는 계산을 한 주기로 압축하는 것. 지수 구간의 길이가 주기의 배수인지 확인하는 것이 관건이다.

이 주기성은 복소평면에서 i 를 곱하는 것이 90° 회전과 같기 때문에 생긴다. 네 번 회전하면 원점으로 돌아오므로 $i^4 = 1$ 이다.

Q4 복소수 심화

ω 가 방정식 $x^2 + x + 1 = 0$ 의 한 허근일 때, $(1 + \omega)^{100} + (1 + \omega^2)^{100}$ 의 값은?

- ① ① -2
- ② ② -1
- ③ ③ 0
- ④ ④ 1

정답: ② -1

1단계: ω 는 $x^2 + x + 1 = 0$ 의 근이므로 $1 + \omega + \omega^2 = 0$ 이 성립한다. 따라서 $1 + \omega = -\omega^2, 1 + \omega^2 = -\omega$ 로 치환할 수 있다. 2단계: 또한 $\omega^3 = 1$ 임을 이용한다. $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$ 에서 ω 가 $x^2 + x + 1 = 0$ 의 근이므로 $\omega^3 - 1 = 0$ 이다. 3단계: $(1 + \omega)^{100} = (-\omega^2)^{100} = \omega^{200} = \omega^{3 \cdot 66 + 2} = \omega^2. (1 + \omega^2)^{100} = (-\omega)^{100} = \omega^{100} = \omega^{3 \cdot 33 + 1} = \omega. 합은 \omega^2 + \omega = -1 (\because 1 + \omega + \omega^2 = 0).$

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 ω 의 두 가지 정체성인 ' $\omega^3 = 1$ (주기성)'과 ' $1 + \omega + \omega^2 = 0$ (대칭식)'을 동시에 활용하는 것. 지수가 클 수록 이 두 성질 조합이 위력을 발휘한다.

ω 는 복소평면에서 단위원 위의 세 점 $1, \omega, \omega^2$ 중 하나로, 정삼각형을 이룬다. 이 때문에 세 수의 합이 0이 된다.

Q5 복소수 심화

복소수 z 가 $z + \bar{z} = 4, z\bar{z} = 5$ 를 만족할 때, $z^2 + \bar{z}^2$ 의 값은? (단, \bar{z} 는 z 의 켈레복소수)

- ① ① 4
- ② ② 6
- ③ ③ 10
- ④ ④ 16

정답: ② 6

1단계: 대칭식의 기본 공식 $(z + \bar{z})^2 = z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2$ 를 떠올린다. 즉 $z^2 + \bar{z}^2 = (z + \bar{z})^2 - 2z\bar{z}$ 이다. 2단계: 주어진 조건에서 $z + \bar{z} = 4$ 이므로 $(z + \bar{z})^2 = 16$. 또한 $z\bar{z} = 5$ 이므로 $2z\bar{z} = 10$. 3단계: 따라서 $z^2 + \bar{z}^2 = 16 - 10 = 6$. 참고로 $z = a + bi$ 로 놓으면 $z + \bar{z} = 2a = 4$ 이므로 $a = 2, z\bar{z} = a^2 + b^2 = 5$ 이므로 $b^2 = 1, b = \pm 1$. 확인: $z = 2 \pm i$ 에서 $z^2 + \bar{z}^2 = 2(a^2 - b^2) = 2(4 - 1) = 6. \checkmark$

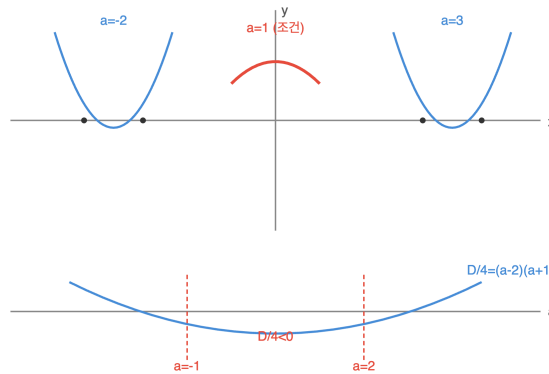
풀이 전략: 이 문제의 핵심은 z 와 \bar{z} 를 이차방정식의 두 근으로 보고 근과 계수의 관계를 이용하는 것. $(z + \bar{z})^2$ 와 $z\bar{z}$ 는 각각 합과 곱이므로 z, \bar{z} 는 $t^2 - 4t + 5 = 0$ 의 두 근이다.

복소수 z 와 그 켈레 \bar{z} 는 복소평면에서 실수축에 대해 대칭이다. 그러므로 $z\bar{z} = |z|^2$ 이고, $z + \bar{z}$ 는 실수부의 두 배가 된다.

Q6 이차함수·부등식 통합

이차함수 $y = x^2 - 2ax + a + 2$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않도록 하는 실수 a 의 값의 범위는?

이차함수 $y=x^2-2ax+a+2$ 의 a 값 변화



- ① ① $-1 < a < 2$
- ② ② $-2 < a < 1$
- ③ ③ $a < -1$ 또는 $a > 2$
- ④ ④ $a \leq -1$ 또는 $a \geq 2$

정답: ① $-1 < a < 2$

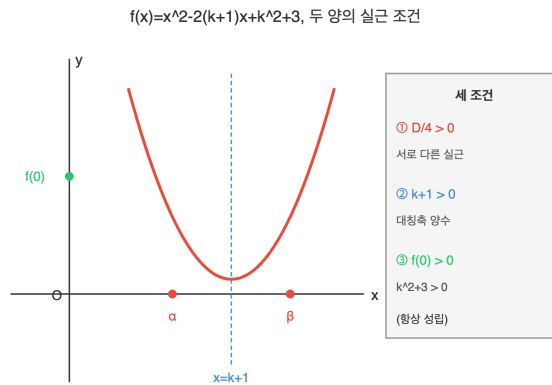
1단계: 이차방정식 $x^2 - 2ax + a + 2 = 0$ 이 실근을 갖지 않아야 포물선이 x 축과 만나지 않는다. 최고차항 계수가 양수이므로 아래로 볼록이고, 판별식 $D < 0$ 조건이다. 2단계: $D/4 = (-a)^2 - 1 \cdot (a + 2) = a^2 - a - 2 = (a - 2)(a + 1) < 0$. 3단계: 이차부등식 $(a - 2)(a + 1) < 0$ 의 해는 두 근 $-1, 2$ 사이이므로 $-1 < a < 2$ 이다. 함정: 경계에서 $D = 0$ 이면 x 축에 접하므로 '만남'으로 간주해 제외 (④는 오답).

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 '그래프가 x 축과 만나지 않음'을 '이차방정식의 실근 없음'으로 번역하고, 이를 판별식 부등식으로 옮기는 다단계 번역이다. 판별식 자체가 a 에 대한 이차식이 되어 '이차부등식 속의 이차부등식' 구조임을 간파해야 한다.

판별식 D 는 원래 이차방정식의 '구별자'(discriminant)라는 뜻이다. 근의 종류를 실근/허근, 중근/서로 다른 근으로 구별해 주는 역할을 한다.

Q7 이차함수·부등식 통합

이차방정식 $x^2 - 2(k+1)x + k^2 + 3 = 0$ 이 서로 다른 두 양의 실근을 갖도록 하는 실수 k 의 값의 범위는?



- ① ① $k > -1$
- ② ② $k > 0$
- ③ ③ $k > 1$
- ④ ④ $k > 2$

☞ 정답: ③ $k > 1$

📖 1단계: 이차방정식이 '서로 다른 두 양의 실근'을 가질 조건은 세 가지를 모두 만족해야 한다. 포물선 관점에서 (1) $D > 0$ (서로 다른 두 실근), (2) 두 근의 합 > 0 , (3) 두 근의 곱 > 0 . 2단계: 각 조건 대입. (1) $D/4 = (k+1)^2 - (k^2 + 3) = 2k - 2 > 0$ 이므로 $k > 1$. (2) 두 근의 합 $2(k+1) > 0$ 이므로 $k > -1$. (3) 두 근의 곱 $k^2 + 3 > 0$ 은 모든 실수 k 에서 성립. 3단계: 세 조건의 공통 범위는 $k > 1$. 함정: 판별식 조건만 본 학생은 ①($k > -1$)로 갈 수 있으나, 그것은 두 근의 합 조건이다.

🧠 풀이 전략: 이 문제의 핵심은 '근의 부호 조건'을 그래프로 번역하는 것. 두 양근은 (판별식)(합)(곱) 세 조건으로 완전히 기술되며, 그래프로는 x축과 두 점에서 만남 + 대칭축 오른쪽 + y절편 양수로 시각화된다.

💡 판별식, 근의 합, 근의 곱만으로 근의 위치를 모두 결정할 수 있다는 사실은 근과 계수의 관계(비에타의 정리)의 강력한 응용이다.

Q8 고차·연립방정식

삼차방정식 $x^3 + ax^2 + bx + 6 = 0$ 의 세 근이 1, 2, c 일 때, $a + b + c$ 의 값은?

- ① ① -12
- ② ② -10
- ③ ③ -8
- ④ ④ -6

☞ 정답: ② -10

📖 1단계: 삼차방정식 $x^3 + ax^2 + bx + c_0 = 0$ 의 근과 계수의 관계에서 세 근 α, β, γ 에 대해 $\alpha + \beta + \gamma = -a$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = b$, $\alpha\beta\gamma = -c_0$ 이다. 여기서 $c_0 = 6$ 이므로 근의 곱 $1 \cdot 2 \cdot c = -6$, 따라서 $c = -3$. 2단계: 근의 합 $1 + 2 + (-3) = 0 = -a$ 이므로 $a = 0$. 근 둘씩 곱의 합 $1 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) + 2 \cdot (-3) = 2 - 3 - 6 = -7 = b$. 3단계: $a + b + c = 0 + (-7) + (-3) = -10$. 함정: 상수항의 부호 처리에서 $\alpha\beta\gamma = -c_0$ 을 $+c_0$ 으로 착각하면 $c = 3$ 이 되어 오답으로 이어진다.

🧠 풀이 전략: 이 문제의 핵심은 삼차방정식에서 근과 계수의 부호 규칙을 정확히 기억하는 것. '홀수 차수 구간은 부호 반전'이라고 묶어 외우면 $-a$ (1번), $+b$ (2번), $-c_0$ (3번)의 교대를 헷갈리지 않는다.

💡 이 부호 교대 패턴은 일반적인 n 차 다항식에도 적용된다. $(-1)^k$ 부호를 붙여가며 k 개씩 곱한 합이 계수와 연결된다.

Q9 고차·연립방정식

이차방정식 $x^2 - 2kx + k^2 - 4 = 0$ 의 두 근이 모두 -3 과 5 사이에 있도록 하는 정수 k 의 개수는?

- ① ① 2
- ② ② 3
- ③ ③ 4
- ④ ④ 5

정답: ② 3

1단계: 좌변을 인수분해한다. $x^2 - 2kx + k^2 - 4 = (x - k)^2 - 4 = (x - k - 2)(x - k + 2)$ 이므로 두 근은 $k - 2$ 와 $k + 2$ 이다. 2단계: '두 근이 모두 -3 과 5 사이'는 $-3 < k - 2$ 그리고 $k + 2 < 5$ 이다 (더 작은 근이 -3 보다 크고, 더 큰 근이 5 보다 작음). 각각 정리하면 $k > -1$ 과 $k < 3$. 3단계: 공통 범위 $-1 < k < 3$ 에서 정수 k 는 $0, 1, 2$ 로 총 3개. 함정: 부등호에 등호를 붙이면 경계 점 -3 이나 5 가 근이 될 수 있어 '사이'의 의미와 맞지 않으므로 주의해야 한다.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 '근이 어느 구간 안에 있다'는 조건을 그래프의 3조건(판별식, 축, 경계 함수값 부호)로 풀지 않고도, 인수분해로 근을 구체적으로 찾을 수 있는 특수 구조임을 눈치채는 것. 계수가 $k^2 - 4$ 처럼 완전제곱 차 꼴이면 근이 단순해진다.

이 방정식은 x 가 k 로부터 거리 2인 두 점을 근으로 갖는다. 즉 근의 중점(평균)이 항상 k 이고 간격이 4로 일정하다.

Q10 고차·연립방정식

방정식 $ax^2 - 2(a + 1)x + a - 1 = 0$ 이 실근을 갖도록 하는 실수 a 의 값의 범위는?

- ① ① $a \geq -\frac{1}{3}$
- ② ② $a > -\frac{1}{3}$
- ③ ③ $-\frac{1}{3} \leq a \leq \frac{1}{3}$
- ④ ④ $a \neq 0$ 이고 $a \geq -\frac{1}{3}$

정답: ① $a \geq -\frac{1}{3}$

1단계: 최고차항의 계수 a 가 문자이므로 '이차방정식'이 되는지 아닌지로 경우를 나눈다. 경우 1) $a = 0$: 방정식은 $-2x - 1 = 0$ 인 일차방정식으로 $x = -\frac{1}{2}$ 라는 실근을 가진다. 따라서 $a = 0$ 은 조건을 만족한다. 2단계: 경우 2) $a \neq 0$: 이차방정식이므로 실근 조건은 $D/4 \geq 0$. $D/4 = (a + 1)^2 - a(a - 1) = a^2 + 2a + 1 - a^2 + a = 3a + 1 \geq 0$ 이므로 $a \geq -\frac{1}{3}$ 이고 $a \neq 0$. 3단계: 두 경우를 합치면 $a \geq -\frac{1}{3}$ (단 $a = 0$ 포함). 함정: 경우 1을 빠뜨리면 ④($a \neq 0$ 이고 $a \geq -\frac{1}{3}$)로 오답하기 쉽다.

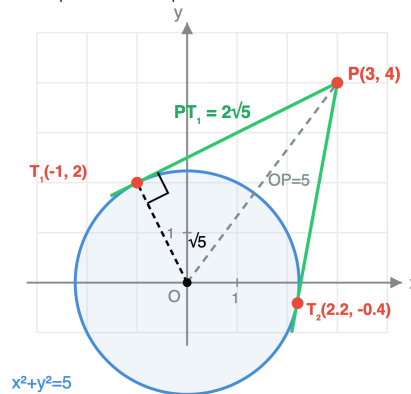
풀이 전략: 이 문제의 핵심은 '문자 계수'가 최고차항에 붙어 있을 때 반드시 '그 계수가 0인 경우'를 별도로 검토해야 한다는 규칙. 많은 학생이 자동으로 이차방정식으로 가정해 일차 경우를 놓친다.

이런 문자 계수 방정식을 변수의 '매개변수 집합'(parameter space) 분석이라고 부른다. 매개변수가 특이값(여기선 0)을 가질 때 방정식의 '차수'가 변해 해의 구조가 달라지는 현상은 고등수학 전반의 중요한 패턴이다.

Q11 도형의 방정식 심화

원 $x^2 + y^2 = 5$ 의 외부의 점 $P(3, 4)$ 에서 이 원에 그은 접선의 길이는?

접선 길이 $PT_1 = \sqrt{OP^2 - OT_1^2} = \sqrt{25 - 5} = 2\sqrt{5}$



- ① ① $\sqrt{5}$
- ② ② $\sqrt{15}$
- ③ ③ $2\sqrt{5}$
- ④ ④ 5

정답: ③ $2\sqrt{5}$

1단계: 원 밖의 점에서 원에 그은 접선의 접점을 T 라 하면, 반지름 OT 와 접선 PT 는 서로 수직이다 (접선과 반지름의 수직 성질). 따라서 $\triangle OTP$ 는 $\angle OTP = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다. **2단계:** 중심 $O(0, 0)$ 과 점 $P(3, 4)$ 사이의 거리는 $OP = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$. 원의 반지름은 $OT = \sqrt{5}$. **3단계:** 피타고라스 정리로 접선의 길이는 $PT = \sqrt{OP^2 - OT^2} = \sqrt{25 - 5} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. **함정:** 접선의 길이를 중심거리 $OP = 5$ (보기 ④)나 반지름 $\sqrt{5}$ (보기 ①)로 착각하기 쉽다. 반드시 '거리의 제곱에서 반지름의 제곱을 뺀 값'의 제곱근, 즉 $\sqrt{OP^2 - OT^2} = \sqrt{25 - 5} = 2\sqrt{5}$ 를 구해야 한다. 또한 반지름의 제곱 5 대신 반지름 $\sqrt{5}$ 를 빼는 실수($\sqrt{25 - \sqrt{5}} \approx 4.77$)도 흔히 주의한다.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 '접선과 반지름은 수직'이라는 원의 성질을 이용해 접선 길이 문제를 피타고라스 정리로 환원하는 것. 공식 $\ell^2 = d^2 - r^2$ (d 는 중심과 외부점 거리, r 은 반지름)을 유도할 수 있다.

점과 원의 '역'(power of a point) $d^2 - r^2$ 은 접선 길이의 제곱과 같다. 이 값이 양수이면 점이 원 밖, 0이면 원 위, 음수이면 원 안에 있음을 알려준다.

Q12 경시·통합 문제

이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 서로 다른 두 실근을 α, β 라 하자. $\alpha^2 + \beta^2 = 7, \alpha^3 + \beta^3 = 10$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

- ① ① -4
- ② ② -2
- ③ ③ 0
- ④ ④ 2

정답: ① -4

1단계: 근과 계수의 관계로 $\alpha + \beta = -a, \alpha\beta = b$ 라 하자. 대칭식 공식에 의해 $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = a^2 - 2b = 7 \dots$

(가). $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = -a^3 + 3ab = 10 \dots$ (나). 2단계: (가)에서 $b = \frac{a^2 - 7}{2}$ 를 (나)에 대입.

$-a^3 + 3a \cdot \frac{a^2 - 7}{2} = 10$, 양변에 2 곱: $-2a^3 + 3a^3 - 21a = 20, a^3 - 21a - 20 = 0$. 인수분해하면 $(a + 1)(a - 5)(a + 4) = 0$ 이므로 $a = -1, 5, -4$. 3단계: '서로 다른 두 실근' 조건에서 $D = a^2 - 4b > 0$ 을 각 경우에 점검한다. $a = -1: b = -3, D = 1 + 12 = 13 > 0 \checkmark$. $a = 5: b = 9, D = 25 - 36 = -11 < 0 \times$ (허근). $a = -4: b = 9/2, D = 16 - 18 = -2 < 0 \times$. 따라서 $(a, b) = (-1, -3)$, 즉 $a + b = -4$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 세 개념의 통합이다: (1) 근과 계수의 관계로 미지수 줄이기, (2) 대칭식 공식으로 $\alpha^2 + \beta^2$ 와 $\alpha^3 + \beta^3$ 을 a, b 로 표현, (3) 나온 해에 대해 '실근' 전제 조건을 판별식으로 검증. 특히 마지막 검증을 빼면 허근 경우를 걸러내지 못해 다중 답이 생긴다.

💡 $\alpha^n + \beta^n$ 꼴의 값은 뉴턴의 항등식(Newton's identities)으로 $p_n = (\alpha + \beta)p_{n-1} - \alpha\beta \cdot p_{n-2}$ 점화식으로 빠르게 계산할 수 있다.

Q13 집합·명제 논증

전체집합 $U = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ 의 두 부분집합 A, B 가 다음 두 조건을 모두 만족한다. (가) $A \cup B = U$ (나) $A \cap B = \{3, 7\}$ 이러한 순서쌍 (A, B) 의 개수는?

- ① ① 128
- ② ② 256
- ③ ③ 384
- ④ ④ 512

정답: ② 256

1단계: 조건 해석. $A \cup B = U$ 이므로 U 의 모든 원소는 A 또는 B 에 속한다. 또 $A \cap B = \{3, 7\}$ 이므로 원소 3과 7은 반드시 A, B 양쪽에 모두 속한다.

2단계: 나머지 원소 분류. U 의 원소 중 3, 7을 제외한 8개의 원소는 $A \cap B$ 에 속하지 않으므로, 각 원소는 'A에만 속함' 또는 'B에만 속함' 두 가지 상태 중 하나를 택한다.

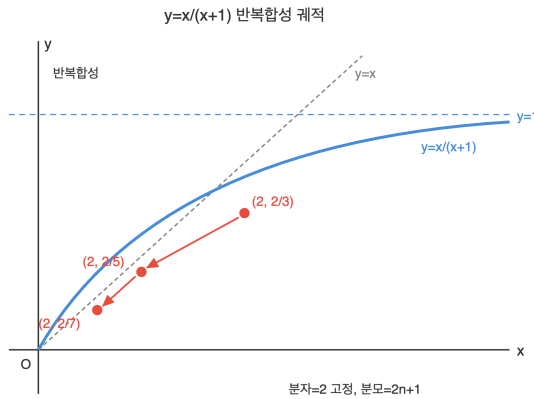
3단계: 경우의 수. 각 원소의 선택이 독립이므로 $2^8 = 256$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 각 원소를 $A \cap B, A \setminus B, B \setminus A, (A \cup B)^c$ 네 영역 중 어디에 배치할지의 관점으로 보는 것이다. 조건 (가)가 네 번째 영역을 비우고, 조건 (나)가 첫 번째 영역을 확정하므로 남은 원소들은 두 영역 중 하나를 독립적으로 고른다.

💡 이 기법은 벤 다이어그램의 각 영역에 원소를 분배하는 원소별 분배 원리의 전형적 응용이다.

Q14 함수 심화

함수 $f(x) = \frac{x}{x+1}$ ($x \geq 0$)에 대하여 $f^1(x) = f(x)$, $f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$ ($n \geq 1$)로 정의할 때, $f^{10}(2)$ 의 값은?



- ① ① $\frac{2}{19}$
- ② ② $\frac{2}{20}$
- ③ ③ $\frac{2}{21}$
- ④ ④ $\frac{2}{22}$

정답: ③ $\frac{2}{21}$

1단계: 작은 값 계산으로 규칙 탐색. $f^1(2) = \frac{2}{3}$, $f^2(2) = f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2/3}{5/3} = \frac{2}{5}$, $f^3(2) = f\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{2/5}{7/5} = \frac{2}{7}$.

2단계: 규칙 추정. 분자는 2로 고정이고 분모는 3, 5, 7, ... 로 공차 2인 등차수열이다. 따라서 $f^n(2) = \frac{2}{2n+1}$.

3단계: 수학적 귀납으로 확인. $f^n(2) = \frac{2}{2n+1}$ 이 성립하면 $f^{n+1}(2) = \frac{2/(2n+1)}{2/(2n+1)+1} = \frac{2}{2n+3}$ 이므로 귀납이 닫힌다.

4단계: $n = 10$ 대입하여 $f^{10}(2) = \frac{2}{21}$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 반복함성의 불변량을 찾는 것이다. 분수함수 $f(x) = x/(x+1)$ 은 분자와 분모의 관계식을 유지하므로, 몇 단계 계산으로 규칙을 추정하고 귀납으로 알아주면 된다.

💡 $f(x) = x/(x+1)$ 은 뫼비우스 변환의 한 예로, 반복함성 시 선형적 증가 패턴을 보이는 대표 함수이다.

Q15 경우의 수 심화

서로 다른 7개의 구슬을 원형으로 배열할 때, 특정한 두 구슬 A, B가 서로 이웃하지 않는 배열의 수는?

- ① ① 360
- ② ② 480
- ③ ③ 600
- ④ ④ 720

정답: ② 480

1단계: 전체 원순열. 서로 다른 7개를 원형으로 배열하는 방법의 수는 $(7-1)! = 720$.

2단계: A와 B가 이웃하는 경우(여사건)를 구한다. A, B를 하나의 묶음으로 보면 6개의 대상을 원형으로 배열하는 방법은 $(6-1)! = 120$ 이고, 묶음 내부에서 A, B의 자리 순서가 2가지이므로 총 $120 \times 2 = 240$.

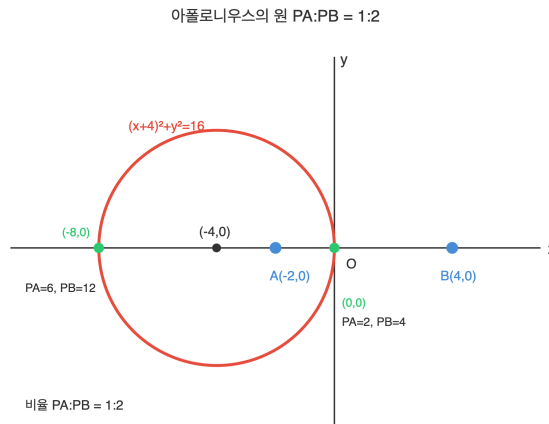
3단계: 여사건 제외. $720 - 240 = 480$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 원순열에서 '묶음법'과 '여사건'을 결합하는 것이다. 이웃하지 않는 조건을 직접 세면 복잡하므로, 이웃하는 배열을 묶음으로 계산한 뒤 전체에서 빼는 것이 경제적이다.

💡 원순열에서 회전은 같은 배열로 보지만 뒤집기는 구분한다. 뒤집기까지 동일시하면 염주순열이 되어 값이 절반이 된다.

Q16 도형의 방정식 심화

좌표평면 위의 두 점 $A(-2, 0)$, $B(4, 0)$ 에 대하여 $PA:PB = 1:2$ 를 만족하는 점 P 의 자취의 방정식은?



- ① ① $(x + 4)^2 + y^2 = 16$
- ② ② $(x - 4)^2 + y^2 = 16$
- ③ ③ $(x + 2)^2 + y^2 = 4$
- ④ ④ $x^2 + (y + 4)^2 = 16$

정답: ① $(x + 4)^2 + y^2 = 16$

1단계: 거리 비 조건 식화. $P(x, y)$ 로 놓으면 $PA:PB = 1:2$ 에서 $2PA = PB$ 이므로 $4PA^2 = PB^2$.

2단계: 좌표 대입. $4[(x + 2)^2 + y^2] = (x - 4)^2 + y^2$

$$4x^2 + 16x + 16 + 4y^2 = x^2 - 8x + 16 + y^2$$

$$3x^2 + 24x + 3y^2 = 0$$

$$x^2 + 8x + y^2 = 0.$$

3단계: 표준형 변환. $(x + 4)^2 + y^2 = 16$. 중심 $(-4, 0)$, 반지름 4인 원.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 '두 점에서 거리의 비가 일정한 자취는 원이 된다'는 아폴로니우스의 원을 유도하는 것이다. 비율을 제곱 관계로 바꾸어 좌표 조건으로 옮기면 x, y 에 관한 이차식이 되고, 표준형으로 정리하면 원의 방정식이 드러난다.

💡 아폴로니우스는 기원전 3세기에 이 자취를 연구했고, 현재도 광학과 기하 광학에서 초점-상 변환에 사용된다.

Q17 집합·명제 논증

두 양의 실수 a, b 가 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ 을 만족할 때, $a + b$ 의 최솟값은?

- ① ① 2
- ② ② 3
- ③ ③ 4
- ④ ④ 8

정답: ③ 4

1단계: 조건식을 통분. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab} = 1$ 이므로 $a + b = ab$. 따라서 $s = a + b, p = ab$ 라 하면 $s = p$.

2단계: 산술평균-기하평균 부등식 적용. 양수 a, b 에 대해 $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, 즉 $s \geq 2\sqrt{p} = 2\sqrt{s}$.

3단계: 부등식 정리. $s \geq 2\sqrt{s}$ 에서 양변이 양수이므로 제곱하면 $s^2 \geq 4s$, 즉 $s(s - 4) \geq 0$. $s > 0$ 이므로 $s \geq 4$.

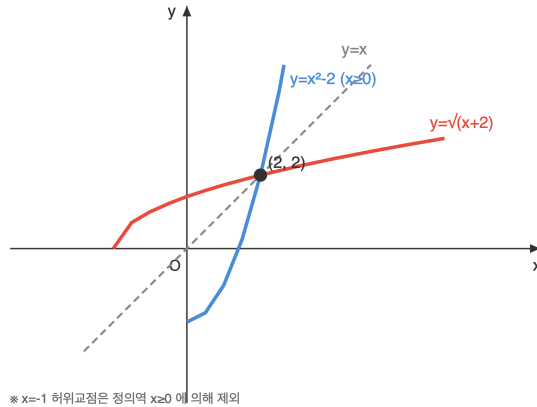
4단계: 등호 성립 조건. $a = b$ 일 때이고, 이때 $\frac{2}{a} = 1$ 에서 $a = b = 2, a + b = 4$. 따라서 최솟값은 4.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 조건을 이용해 합과 곱 사이에 관계를 세우고, 산술-기하 평균 부등식으로 미정의 두 변수에 대한 절대부 등식을 달는 것이다. '합 = 곱'이라는 특이한 관계가 핵심 아이디어를 제공한다.

💡 $1/a + 1/b = 1$ 은 고조파 관계식으로, 렌즈 방정식과 병렬 저항 합성에서 동일한 꼴로 등장한다.

Q18 함수 심화

함수 $f(x) = x^2 - 2$ ($x \geq 0$)의 역함수를 $g(x)$ 라 하자. 두 곡선 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 교점의 좌표는?



- ① ① (1, 1)
- ② ② (2, 2)
- ③ ③ (-1, -1)
- ④ ④ (0, -2)

정답: ② (2, 2)

1단계: 역함수의 성질. 함수 $y = f(x)$ 와 역함수 $y = g(x)$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대칭이다. f 가 증가함수이므로 두 곡선의 교점은 직선 $y = x$ 위에 놓인다.

2단계: 방정식 $f(x) = x$. $x^2 - 2 = x$, 즉 $x^2 - x - 2 = 0$. 인수분해하면 $(x - 2)(x + 1) = 0$ 이므로 $x = 2$ 또는 $x = -1$.

3단계: 정의역 제약 적용. f 의 정의역이 $x \geq 0$ 이므로 $x = -1$ 은 제외된다. 따라서 교점은 (2, 2).

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 역함수 그래프가 원래 그래프와 $y = x$ 에 대칭이라는 점을 활용해 교점 탐색을 $f(x) = x$ 로 축소하는 것이다. 연립 $f(x) = g(x)$ 를 직접 풀려는 유혹을 피하고 대칭성을 쓰는 것이 요령이다.

💡 $f(x) = x$ 의 해를 고정점이라 부르며, 동역학계 이론의 출발점이다.

Q19 경우의 수 심화

방정식 $x + y + z = 10$ 을 만족하는 양의 정수 순서쌍 (x, y, z) 의 개수는?

- ① ① 28
- ② ② 36
- ③ ③ 45
- ④ ④ 66

정답: ② 36

1단계: 변수 변환. x, y, z 가 양의 정수이므로 $x' = x - 1, y' = y - 1, z' = z - 1$ 로 놓으면 $x', y', z' \geq 0$ (음이 아닌 정수).

2단계: 변환된 방정식. 원 식에 대입하면 $x' + y' + z' + 3 = 10$, 즉 $x' + y' + z' = 7$.

3단계: 중복조합 적용. 서로 다른 3종류의 변수에 7을 음이 아닌 정수로 분배하는 방법의 수는

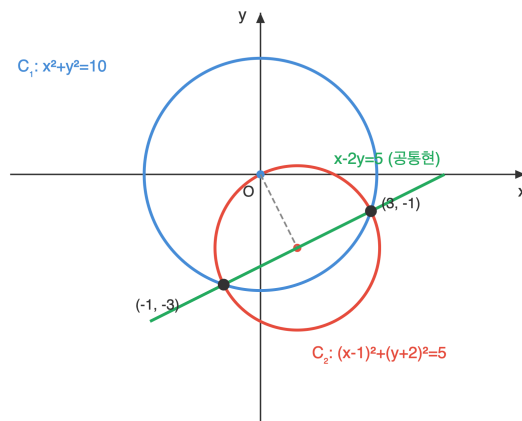
$${}_3H_7 = {}_{3+7-1}C_7 = {}_9C_7 = {}_9C_2 = \frac{9 \cdot 8}{2} = 36.$$

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 '양의 정수 해'를 '음이 아닌 정수 해'로 바꾸는 평행이동 변환이다. 이렇게 하면 중복조합 공식이 그대로 적용되어 공식적인 계산으로 해결된다.

💡 이 방식은 '별과 막대' 기법으로도 불리며, 7개의 별을 2개의 막대로 3구역으로 나누는 배치 수와 동일하다.

Q20 도형의 방정식 심화

두 원 $C_1: x^2 + y^2 = 10$ 과 $C_2: x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$ 이 서로 다른 두 점에서 만날 때, 이 두 교점을 지나는 직선의 방정식은?



- ① ① $x - 2y = 5$
- ② ② $x + 2y = 5$
- ③ ③ $2x - y = 10$
- ④ ④ $2x - 4y = 5$

정답: ① $x - 2y = 5$

1단계: 원의 방정식 차. 두 원의 방정식을 각각 $f_1(x, y) = x^2 + y^2 - 10 = 0$, $f_2(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$ 로 두고, 두 식을 빼면 x^2 과 y^2 항이 소거된다.

2단계: $f_1 - f_2 = -10 - (-2x + 4y) = 2x - 4y - 10 = 0$, 즉 $x - 2y - 5 = 0$.

3단계: 의미 확인. 이 일차식은 C_1 과 C_2 의 두 교점이 공통으로 만족하는 식이므로, 이 직선이 바로 공통현의 방정식이다. 따라서 $x - 2y = 5$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 두 원의 방정식에서 이차항이 동일할 때 두 식을 빼면 일차식이 남고, 그 일차식이 바로 두 교점을 지나는 직선(공통현)이 된다는 구조를 활용하는 것이다.

이 방법을 일반화하면 두 원의 방정식 $f_1 + kf_2 = 0$ 형태로 두 교점을 지나는 임의의 원 또는 직선을 얻을 수 있다 (원족 기법).

Q21 복소수 심화

복소수 $z = a + bi$ (a, b 는 실수)가 $z^2 = -5 + 12i$ 를 만족할 때, z 로 가능한 것은?

- ① ① $2 + 3i$ 또는 $-2 - 3i$
- ② ② $3 + 2i$ 또는 $-3 - 2i$
- ③ ③ $2 - 3i$ 또는 $-2 + 3i$
- ④ ④ $1 + 6i$ 또는 $-1 - 6i$

정답: ① $2 + 3i$ 또는 $-2 - 3i$

1단계: 좌변 전개. $z^2 = (a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$.

2단계: 실수부와 허수부 비교. $-5 + 12i$ 와 같으려면 $a^2 - b^2 = -5$ 이고 $2ab = 12$, 즉 $ab = 6$.

3단계: 연립 해결. $b = 6/a$ 를 첫 식에 대입하면 $a^2 - \frac{36}{a^2} = -5$. 양변에 a^2 를 곱하면 $a^4 + 5a^2 - 36 = 0$. $a^2 = t$ 로 치환:

$t^2 + 5t - 36 = (t - 4)(t + 9) = 0$. $t \geq 0$ 이므로 $t = 4$, $a = \pm 2$.

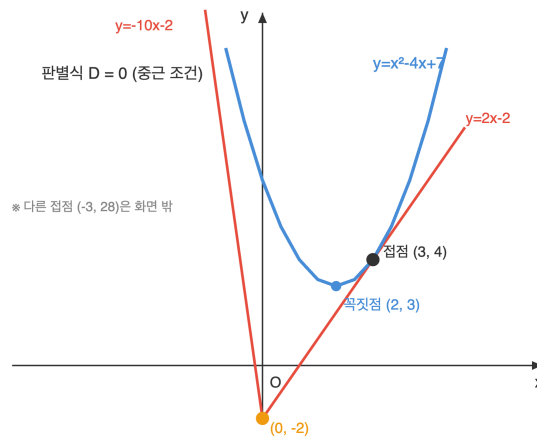
4단계: $a = 2$ 일 때 $b = 3$, $a = -2$ 일 때 $b = -3$ 이므로 $z = 2 + 3i$ 또는 $z = -2 - 3i$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 복소수 z 를 실수부와 허수부로 분리하여 연립방정식으로 바꾸는 것이다. 미지수는 실수 a, b 이고 두 실수 등식이 나오므로 대입법으로 푼다.

일반적으로 복소수는 두 제곱근을 가지며 이들은 서로 부호 반대 관계이다 (w 가 제곱근이면 $-w$ 도 제곱근).

Q22 이차함수·부등식 통합

점 $(0, -2)$ 에서 이차함수 $y = x^2 - 4x + 7$ 의 그래프에 그은 두 접선의 기울기의 합은?



- ① ① -12
- ② ② -10
- ③ ③ -8
- ④ ④ -6

정답: ③ -8

1단계: 접선의 일반형. 점 $(0, -2)$ 를 지나는 직선의 방정식을 $y = mx - 2$ 로 둔다.

2단계: 접합의 조건. 접선과 포물선의 연립 $x^2 - 4x + 7 = mx - 2$, 즉 $x^2 - (m + 4)x + 9 = 0$ 이 중근을 가져야 한다. 판별식 $D = (m + 4)^2 - 36 = 0$.

3단계: 접선 기울기 구하기. $(m + 4)^2 = 36$ 이므로 $m + 4 = \pm 6$, 즉 $m = 2$ 또는 $m = -10$. 따라서 두 접선의 기울기의 합은 $2 + (-10) = -8$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 '한 점에서 곡선에 접하는 직선'을 '연립 방정식이 중근을 갖는 조건'으로 바꾸는 것이다. 접선의 기울기 m 을 미지수로 두고 판별식 = 0이라는 이차 조건에서 두 값을 모두 얻는다.

외부점 하나에서 포물선에 그은 두 접선의 기울기 합은, 그 점과 꼭짓점의 위치에 따라 달라지는 기하적 불변량이다.

Q23 고차·연립방정식

부등식 $x^2 - 2|x| - 3 \leq 0$ 을 만족하는 실수 x 의 값의 범위는?

- ① ① $-3 \leq x \leq 3$
- ② ② $-1 \leq x \leq 3$
- ③ ③ $-3 \leq x \leq -1$ 또는 $1 \leq x \leq 3$
- ④ ④ $0 \leq x \leq 3$

정답: ① $-3 \leq x \leq 3$

1단계: 절댓값 관찰. 식 $x^2 - 2|x| - 3$ 에서 $x^2 = |x|^2$ 이므로 $t = |x|$ ($t \geq 0$)로 치환하면 $t^2 - 2t - 3 \leq 0$.

2단계: t 에 관한 이차부등식. $(t - 3)(t + 1) \leq 0$ 이므로 $-1 \leq t \leq 3$.

3단계: $t \geq 0$ 조건 교집합. $0 \leq t \leq 3$, 즉 $0 \leq |x| \leq 3$.

4단계: x 영역으로 환원. $|x| \leq 3$ 이므로 $-3 \leq x \leq 3$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 $x^2 = |x|^2$ 라는 관찰이다. 이 덕분에 절댓값을 벗기려고 $x \geq 0$, $x < 0$ 으로 나눌 필요 없이 $t = |x|$ 하나로 치환해 이차부등식으로 환원할 수 있다.

절댓값 포함 부등식 일반에서 $|x|$ 가 짝수 거듭제곱 형태로만 등장하면 치환을 통해 단일 변수 부등식으로 답을 수 있다.

Q24 경시·통합 문제

집합 $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ 의 부분집합 중 원소의 합이 짝수인 것의 개수는? (공집합은 합을 0으로 간주한다.)

- ① ① 256
- ② ② 384
- ③ ③ 512
- ④ ④ 1024

정답: ③ 512

1단계: 합의 홀짝 판단. 부분집합의 합의 홀짝은 그 집합에 포함된 홀수 원소의 개수의 홀짝에 의해서만 결정된다. 짝수 원소를 몇 개 넣든 합의 홀짝에는 영향이 없다.

2단계: 홀수 원소 선택. 집합에 있는 홀수 원소는 $\{1, 3, 5, 7, 9\}$, 총 5개. 합의 짝수가 되려면 홀수 원소의 개수가 짝수여야 하므로 선택 방법은 ${}_5C_0 + {}_5C_2 + {}_5C_4 = 1 + 10 + 5 = 16$.

3단계: 짝수 원소 선택. 짝수 원소 $\{2, 4, 6, 8, 10\}$ 은 각 원소에 대해 독립적으로 포함/불포함을 택할 수 있으므로 $2^5 = 32$.

4단계: 곱의 법칙. $16 \times 32 = 512$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 합의 '홀짝'이라는 이산적 성질을 '홀수 원소 개수의 홀짝'으로 환원하고, 홀수 원소와 짝수 원소를 독립적으로 선택하는 구조로 쪼개는 것이다. 대칭성에 의한 '절반 논증'으로 $2^{10}/2 = 512$ 라 답해도 되지만, 조합 계산이 구조를 더 분명히 드러낸다.

원소 1을 포함 여부로 뒤집는 대응 $S \leftrightarrow S \triangle \{1\}$ 은 짝수합과 홀수합 부분집합 사이에 일대일 대응을 주므로, 두 종류의 개수가 항상 같다.

Q25 다항식·항등식 추론

다항식 $x^4 + 4x^2 + 16$ 을 실수 범위에서 인수분해한 결과를 이용하여, 방정식 $x^4 + 4x^2 + 16 = 0$ 의 네 근의 곱의 값을 구하시오.

- ① ① 4
- ② ② 8
- ③ ③ 16
- ④ ④ 32

정답: ③ 16

1단계: $x^4 + 4x^2 + 16 = (x^2 + 4)^2 - (2x)^2 = (x^2 + 2x + 4)(x^2 - 2x + 4)$ 로 인수분해된다($(x^2 + 4)^2 = x^4 + 8x^2 + 16$ 에서 $4x^2 = (2x)^2$ 를 분리). 2단계: 각 이차식의 판별식을 확인: $x^2 + 2x + 4$ 는 $D_1 = 4 - 16 = -12 < 0$, $x^2 - 2x + 4$ 는 $D_2 = 4 - 16 = -12 < 0$ 이므로 두 이차식 모두 실근이 없고, 네 근은 모두 허수이다. 3단계: 근과 계수의 관계로 $x^2 + 2x + 4 = 0$ 의 두 근의 곱은 4, $x^2 - 2x + 4 = 0$ 의 두 근의 곱도 4. 따라서 전체 네 근의 곱은 $4 \times 4 = 16$ 이다.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 $x^4 + ax^2 + b^2$ 꼴을 $(x^2 + b)^2 - (kx)^2$ 의 차제곱 형태로 조작하는 '복이차식 치환 인수분해'이다. 바로 인수분해가 안 되는 다항식도 완전제곱을 먼저 만들면 차이의 제곱 공식을 적용할 수 있다.

이 형태의 인수분해는 프랑스 수학자 소피 제르맹(Sophie Germain) 항등식의 한 사례로, 정수론에서 합성수 판정에 자주 사용된다.

Q26 복소수 심화

복소수 $(1 + i)^{20}$ 의 실수부를 구하시오.

- ① ① -2048
- ② ② -1024
- ③ ③ 1024
- ④ ④ 2048

정답: ② -1024

1단계: $(1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$. 큰 지수를 작은 지수로 환원한다. **2단계:**

$(1 + i)^{20} = \{(1 + i)^2\}^{10} = (2i)^{10} = 2^{10} \cdot i^{10} = 1024 \cdot i^{10}$. **3단계:** $i^{10} = i^8 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$. 따라서

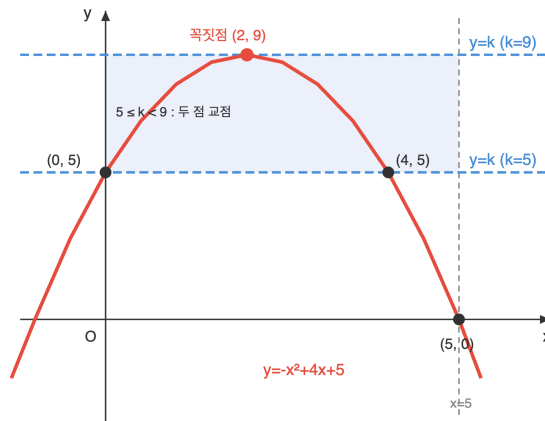
$(1 + i)^{20} = 1024 \cdot (-1) = -1024$ 이고, 이 값 자체가 실수이므로 실수부는 -1024이다.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 $(1 + i)^2 = 2i$ 라는 대표적 복소수 등식으로 20제곱을 10제곱으로 바꾸는 '지수 감축'이다. 이항정리로 직접 전개하려 하면 계산이 폭발하므로 치환이 필수다.

💡 $1 + i$ 는 절댓값 $\sqrt{2}$, 편각 45° 인 복소수라, $(1 + i)^{20}$ 은 크기가 2^{10} 이고 편각이 $45^\circ \times 20 = 900^\circ = 180^\circ$ 인 복소수이다.

Q27 이차함수 부등식 통합

이차함수 $y = -x^2 + 4x + 5$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 가 구간 $0 \leq x \leq 5$ 에서 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 k 의 값의 범위를 구하시오.



- ① ① $0 \leq k < 9$
- ② ② $5 \leq k < 9$
- ③ ③ $0 < k \leq 9$
- ④ ④ $5 < k \leq 9$

정답: ② $5 \leq k < 9$

1단계: $f(x) = -x^2 + 4x + 5 = -(x - 2)^2 + 9$. 구간 $[0, 5]$ 에서 꼭짓점 (2, 9)가 내부에 있고, $f(0) = 5$, $f(5) = 0$ 이다. 그래프는 (0, 5)에서 올라가 (2, 9)에서 최댓값을 찍고 (5, 0)까지 내려간다. **2단계:** 수평선 $y = k$ 와의 교점 수를 k 구간별로 분석. $k > 9$: 교점 없음. $k = 9$: 꼭짓점에서 1개(접점). $5 \leq k < 9$: 올라가는 구간과 내려가는 구간에서 각각 1개씩 총 2개. $0 \leq k < 5$: 내려가는 구간에서 만 1개. $k < 0$: 교점 없음. **3단계:** 서로 다른 두 점에서 만나는 조건은 $5 \leq k < 9$. 경계값 $k = 5$ 에서는 $x = 0$ 과 내려가는 구간의 점 두 곳에서 만나므로 포함된다.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 '꼭짓점이 구간 내부에 있고 양 끝값이 서로 다른 경우' 수평선과의 교점 수가 k 에 따라 $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 0$ 으로 비대칭으로 변환을 파악하는 것이다. 양 끝값 중 작은 쪽이 교점 수 임계점이다.

💡 이런 분석은 나중에 함수의 역함수 정의역 제한이나 매개변수 방정식의 해 개수 판정에 그대로 응용된다.

Q28 고차·연립방정식

방정식 $x^3 - 3x^2 + 3x - 2 = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라 할 때, $(\alpha - 1)^3 + (\beta - 1)^3 + (\gamma - 1)^3$ 의 값을 구하시오.

- ① ① 0
- ② ② 1
- ③ ③ 3
- ④ ④ 6

정답: ③ 3

1단계: $x = t + 1$ 로 치환하면 원방정식이 t 에 대한 방정식으로 바뀐다.

$$(t + 1)^3 - 3(t + 1)^2 + 3(t + 1) - 2 = (t^3 + 3t^2 + 3t + 1) - 3(t^2 + 2t + 1) + (3t + 3) - 2 = t^3 - 1.$$

2단계: 따라서 $\alpha - 1, \beta - 1, \gamma - 1$ 은 방정식 $t^3 = 1$ 의 세 근이다. 각각을 t_1, t_2, t_3 라 하면 세 근 모두 $t_i^3 = 1$ 을 만족한다. 3단계:

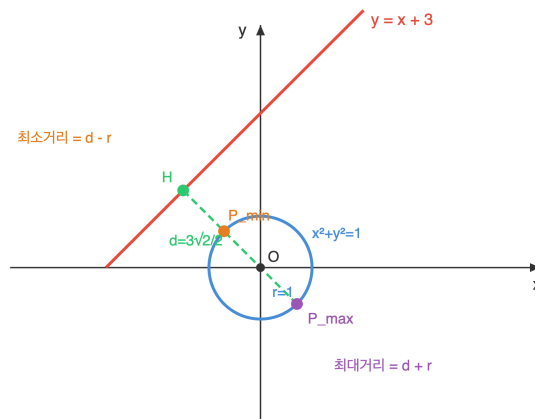
$$(\alpha - 1)^3 + (\beta - 1)^3 + (\gamma - 1)^3 = t_1^3 + t_2^3 + t_3^3 = 1 + 1 + 1 = 3 \text{이다.}$$

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 근을 직접 구하지 않고 '변수 치환으로 방정식 자체를 단순하게 바꾸는' 발상이다. $(x - 1)^3$ 합이 필요하다는 것은 $x - 1 = t$ 로 두라는 신호다. 삼차 전개식을 빠르게 정리하는 계산력도 중요하다.

주어진 방정식 $x^3 - 3x^2 + 3x - 2 = (x - 1)^3 - 1$ 로 직접 쓸 수 있고, 이는 $(x - 1)^3 = 1$ 과 동치다.

Q29 도형의 방정식 심화

원 $C: x^2 + y^2 = 1$ 위를 움직이는 점 P 와 직선 $\ell: y = x + 3$ 사이의 거리를 $d(P)$ 라 할 때, $d(P)$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오.



- ① ① $\sqrt{2}$
- ② ② $2\sqrt{2}$
- ③ ③ $3\sqrt{2}$
- ④ ④ $6\sqrt{2}$

정답: ③ $3\sqrt{2}$

1단계: 원 C 의 중심 $O(0, 0)$, 반지름 $r = 1$. 직선을 $x - y + 3 = 0$ 으로 고쳐 쓰면 O 에서 직선까지 거리는

$$d = \frac{|0 - 0 + 3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}. \text{ 2단계: } d = \frac{3\sqrt{2}}{2} \approx 2.12 > 1 = r \text{이므로 원과 직선은 만나지 않는다. 따라서 원 위 점 } P \text{에서 직선까지}$$

$$\text{거리의 최댓값은 } d + r = \frac{3\sqrt{2}}{2} + 1, \text{ 최솟값은 } d - r = \frac{3\sqrt{2}}{2} - 1 \text{이다. 3단계: 합} = (d + r) + (d - r) = 2d = 2 \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}.$$

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 '원 위의 임의의 점과 외부 직선 사이 거리의 극값'을 구할 때, 중심에서 직선까지의 수선을 기준으로 $d \pm r$ 이 각각 최대·최소가 된다는 기하적 사실이다. 최댓값과 최솟값을 따로 계산하는 대신 '합이 $2d$ '임을 알면 d 만 구하면 끝이다.

이 성질은 타원·포물선 같은 다른 원뿔곡선에는 그대로 성립하지 않고, 원의 '모든 점이 중심에서 등거리'라는 고유 성질에서 나온다.

Q30 집합·명제 논증

전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 의 두 부분집합 A, B 가 $n(A) = 3, n(B) = 4, n(A \cap B) = 2$ 를 모두 만족할 때, 순서쌍 (A, B) 의 개수를 구하시오.

- ① ① 840
- ② ② 1120
- ③ ③ 1680
- ④ ④ 3360

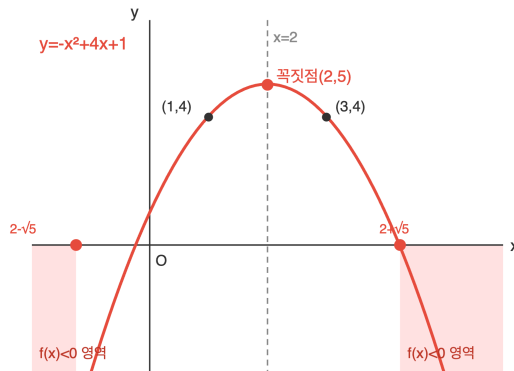
정답: ③ 1680

1단계: U 를 배타적인 네 영역 $A \cap B, A - B, B - A, U - (A \cup B)$ 로 나눈다. 각 영역의 원소 개수는 차례로 2, 1, 2, 3이다($n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 1, n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 2$, 나머지는 $8 - 2 - 1 - 2 = 3$). 2단계: 8개 원소를 이 네 영역에 배치하는 경우를 순차적으로 센다. $A \cap B$ 에 들어갈 2개 선택: $\binom{8}{2} = 28$. 3단계: 남은 6개에서 $A - B$ 에 들어갈 1개 선택: $\binom{6}{1} = 6$. 남은 5개에서 $B - A$ 에 들어갈 2개 선택: $\binom{5}{2} = 10$. 나머지 3개는 자동으로 $U - (A \cup B)$ 에 들어간다. 총 경우의 수: $28 \times 6 \times 10 = 1680$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 두 집합 A, B 를 '직접' 헤아리면 중복이 발생하지만, 벤다이어그램의 '서로 겹치지 않는 네 영역'으로 분해한 뒤 원소를 각 영역에 배정하면 한 번에 정확히 세어진다는 관찰이다. 이는 집합 문제를 경우의 수 문제로 번역하는 강력한 기법이다.
이 분할 사고법은 조건부 확률·포함배제 원리의 바탕이 되고, 원소별로 '어느 영역에 속할지' 독립적으로 결정되는 구조가 이항계수 곱으로 깔끔하게 정리되게 해준다.

Q31 함수 심화

이차함수 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 가 $f(1) = f(3) = 4, f(2) = 5$ 를 모두 만족한다. 이때 부등식 $f(x) < 0$ 의 해를 구하시오.



- ① ① $2 - \sqrt{5} < x < 2 + \sqrt{5}$
- ② ② $x < 2 - \sqrt{5}$ 또는 $x > 2 + \sqrt{5}$
- ③ ③ $1 < x < 3$
- ④ ④ 해가 없다

정답: ② $x < 2 - \sqrt{5}$ 또는 $x > 2 + \sqrt{5}$

1단계: $f(1) = f(3)$ 이므로 f 의 대칭축은 $x = \frac{1+3}{2} = 2$. 따라서 $f(x) = a(x-2)^2 + q$ 로 쓸 수 있고 꼭짓점의 y 좌표가 q 다. 꼭짓점은 $x = 2$ 에서 나오므로 $f(2) = q = 5$. 2단계: $f(1) = a(1-2)^2 + 5 = a + 5 = 4$ 에서 $a = -1$. 따라서 $f(x) = -(x-2)^2 + 5 = -x^2 + 4x + 1$ 이다. 3단계: $f(x) < 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4x + 1 < 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 1 > 0$. 이차방정식 $x^2 - 4x - 1 = 0$ 의 근은 $x = \frac{4 \pm \sqrt{16+4}}{2} = 2 \pm \sqrt{5}$. $x^2 - 4x - 1$ 은 아래로 볼록하므로 양수가 되는 구간은 두 근의 바깥쪽. 따라서 해는 $x < 2 - \sqrt{5}$ 또는 $x > 2 + \sqrt{5}$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 $f(1) = f(3)$ 이라는 조건에서 '대칭축이 $x = 2$ '임을 즉시 간파하는 것이다. 이 관찰로 3원 연립방정식 풀이를 피하고 표준형 $f(x) = a(x-2)^2 + q$ 로 바로 좌표만 대입해 계수를 결정할 수 있다.

두 값에서 같은 함수값을 갖는 이차함수의 대칭축은 두 x 값의 산술평균에 위치한다는 사실은 꼭짓점·대칭축 개념의 한 응용이다.

Q32 경우의 수 심화

서로 다른 색의 구슬 6개 중에서 4개를 택하여 실에 꿰어 염주(양쪽을 뒤집으면 같은 것으로 보는 원형 장식)를 만들려고 한다. 서로 다른 염주의 개수를 구하시오.

- ① ① 30
- ② ② 45
- ③ ③ 60
- ④ ④ 90

정답: ② 45

1 단계: 6개 구슬 중 염주에 사용할 4개를 선택. 이는 순서 없는 조합이므로 $\binom{6}{4} = 15$ 가지. 2단계: 선택된 서로 다른 4개 구슬로 만드는 염주의 수. 원순열의 수는 $(4 - 1)! = 3! = 6$ 이지만, 염주는 '뒤집어서 같으면 같은 것'으로 보므로 좌·우 반사되는 쌍을 하나로 묶어 $\frac{(4-1)!}{2} = \frac{6}{2} = 3$ 가지. 3단계: 곱의 법칙에 의해 전체 염주의 개수는 $15 \times 3 = 45$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 '선택'과 '배열'을 독립 단계로 분리하여 곱의 법칙을 쓰는 구조 파악이다. 원순열은 '회전 동치', 염주순열은 추가로 '뒤집기 동치'까지 고려하기 때문에 원순열 공식을 2로 한 번 더 나눈다.

💡 염주순열에서 2로 나누는 조작은 원소 수가 3 이상일 때만 유효하다. 원소가 2개 이하이면 뒤집어도 원래와 같은 배열이라 추가 나눴셈이 필요 없다.

Q33 경시·통합 문제

다항식 $(1 + x + x^2)^{10}$ 의 전개식에서 x^2 의 계수를 구하시오.

- ① ① 10
- ② ② 45
- ③ ③ 55
- ④ ④ 100

정답: ③ 55

1 단계: 다항정리에 의해 $(1 + x + x^2)^{10} = \sum_{a+b+c=10} \frac{10!}{a!b!c!} \cdot 1^a \cdot x^b \cdot (x^2)^c$. x 에 대한 지수는 $b + 2c$. 2단계: x^2 항을 얻으려면 $b + 2c = 2$ 이고 $a + b + c = 10$, $a, b, c \geq 0$ (정수)인 해를 모두 찾는다. 가능한 (b, c) 는 $(2, 0)$ 과 $(0, 1)$ 두 경우. 3단계: $(a, b, c) = (8, 2, 0)$ 일 때 계수 $\frac{10!}{8!2!0!} = \frac{90}{2} = 45$, $(a, b, c) = (9, 0, 1)$ 일 때 계수 $\frac{10!}{9!0!1!} = 10$. 합산 $45 + 10 = 55$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 3항 전개를 이항정리로 억지 계산하지 말고, 다항정리를 써서 '지수 조건 $b + 2c = 2$ 의 비음정수 해'를 먼저 찾는 분해적 접근이다. 항 개수가 폭발하는 상황에서 조건으로 경우를 좁히는 것이 핵심 전략이다.

💡 $1 + x + x^2 = \frac{1-x^3}{1-x}$ 로 쓰면 모션함수(generating function) 기법으로도 같은 계수를 유도할 수 있다. 경시에서 자주 쓰는 우회 경로다.

Q34 다항식·항등식 추론

다항식 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $f(x^2 + 1) = \{f(x)\}^2 + 1$ 을 만족하고 $f(0) = 0$ 이다. 이때 $f(10)$ 의 값을 구하시오.

- ① ① 8
- ② ② 10
- ③ ③ 100
- ④ ④ 101

정답: ② 10

1단계: 주어진 관계식에 구체적인 값을 연속 대입하여 f 의 값을 추적한다. $x = 0: f(1) = \{f(0)\}^2 + 1 = 0 + 1 = 1$. $x = 1: f(2) = \{f(1)\}^2 + 1 = 1 + 1 = 2$. $x = 2: f(5) = \{f(2)\}^2 + 1 = 4 + 1 = 5$. $x = 5: f(26) = \{f(5)\}^2 + 1 = 25 + 1 = 26$. 2단계: 특별한 값들 $0, 1, 2, 5, 26, \dots$ 에서 모두 $f(n) = n$ 이 성립. 이는 $f(x) = x$ 가 해일 가능성을 강하게 시사한다. 실제로 $f(x) = x$ 를 대입하면 좌변 $f(x^2 + 1) = x^2 + 1$, 우변 $\{f(x)\}^2 + 1 = x^2 + 1$ 로 항등식 성립. 3단계: 유일성 확인. f 가 다항식이고 무한히 많은 점($0, 1, 2, 5, 26, 677, \dots$)에서 항등함수 $y = x$ 와 값이 일치하므로, 다항식의 유일성 원리에 의해 $f(x) = x$ 가 유일한 다항식 해다. 따라서 $f(10) = 10$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 함수방정식에서 '특정 값 대입으로 수열 생성 \rightarrow f 의 형태 추측 \rightarrow 다항식 일치 원리로 유일성 확정'이라는 3단계 논리다. 서로 다른 $n + 1$ 개 점에서 같은 값을 갖는 n 차 이하 다항식은 유일하다는 원리가 결정타다.

💡 $x_{k+1} = x_k^2 + 1$ 이라는 점화식으로 생성되는 '0, 1, 2, 5, 26, 677, ...' 수열은 급속히 커져서 다항식 특징에 충분한 '점의 표본'을 즉시 제공한다.

Q35 집합·명제 논증

두 조건 $p: 0 < x < 3$, $q: -1 \leq x < a$ 에 대하여 p 가 q 이기 위한 충분조건이 되도록 하는 상수 a 의 최솟값을 구하시오.

- ① ① 0
- ② ② 1
- ③ ③ 2
- ④ ④ 3

정답: ④ 3

1단계: ' p 가 q 이기 위한 충분조건'이라는 것은 명제 $p \rightarrow q$ 가 참이라는 의미이며, 이는 진리집합 $P \subset Q$ 와 동치다. 2단계: $P = \{x \mid 0 < x < 3\} = (0, 3)$, $Q = \{x \mid -1 \leq x < a\} = [-1, a)$. $(0, 3) \subset [-1, a)$ 가 성립할 조건을 구한다. 왼쪽 경계는 $-1 \leq 0$ 으로 이미 성립. 오른쪽 경계는 $(0, 3)$ 의 모든 x 가 $[-1, a)$ 에 포함되어야 하므로 $3 \leq a$ 가 필요하다. 3단계: $a = 3$ 일 때 $Q = [-1, 3)$ 이고 $(0, 3) \subset [-1, 3)$ 가 성립. $a < 3$ 이면 a 와 3 사이의 수(예: $x = a$ 근방)가 P 에는 있으나 Q 에는 없어 포함이 깨진다. 따라서 a 의 최솟값은 3.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 '충분조건 = 집합의 부분관계'라는 번역과, 개구간 $(0, 3)$ 을 반개구간 $[-1, a)$ 가 포함할 때 '열린 오른쪽 끝' 3과 '열린 오른쪽 끝' a 의 경계값 처리다. 구간의 개폐에 따라 등호 포함 여부가 달라진다.

💡 '충분조건', '필요조건', '필요충분조건'은 모두 집합 포함관계로 번역 가능하고, 이 번역 덕분에 명제의 참·거짓 판정이 기계적인 집합 연산으로 귀착된다.

Q36 함수 심화

이차함수 $f(x) = x^2 - 4x + a$ 가 구간 $0 \leq x \leq 3$ 에서 최댓값 5를 가질 때, 이 구간에서 $f(x)$ 의 최솟값을 구하시오.

- ① ① 0
- ② ② 1
- ③ ③ 2
- ④ ④ 3

정답: ② 1

1단계: $f(x) = (x - 2)^2 + (a - 4)$ 로 표준형 변환. 대칭축 $x = 2$ 는 구간 $[0, 3]$ 내부에 있고, f 는 아래로 볼록이므로 꼭짓점 $x = 2$ 에서 최솟값, 구간의 양 끝 중 한 곳에서 최댓값을 갖는다. **2단계:** $f(0) = a$, $f(3) = 9 - 12 + a = a - 3$. $f(0) > f(3)$ 이므로 구간에서의 최댓값은 $f(0) = a$. 문제 조건에서 최댓값이 5이므로 $a = 5$. **3단계:** 이때 $f(x) = x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1$ 이고, 구간 내 최솟값은 꼭짓점 값 $f(2) = 1$ 이다.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 아래로 볼록 이차함수에서 '꼭짓점이 구간 내부에 있으면 꼭짓점에서 최솟값, 대칭축에서 더 먼 끝점에서 최댓값'이라는 일반 원리이다. 양 끝값 중 어느 쪽이 더 큰지는 대칭축과의 거리 비교로 즉시 판정된다.

대칭축 $x = 2$ 에서 $x = 0$ 은 거리 2, $x = 3$ 은 거리 1이므로 $x = 0$ 이 더 멀고, 이 점에서 값이 더 크다는 사실이 자동으로 따라온다.

Q37 다항식·항등식 추론

다항식 $x^{10} - 1$ 을 $x^2 - 1$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$ 라 할 때, $Q(1)$ 의 값을 구하시오.

- ① ① 3
- ② ② 4
- ③ ③ 5
- ④ ④ 6

정답: ③ 5

1단계: $a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$ 공식을 $a = x^2, b = 1$ 에 적용하면 $x^{10} - 1 = (x^2)^5 - 1^5 = (x^2 - 1)((x^2)^4 + (x^2)^3 + (x^2)^2 + x^2 + 1)$.

2단계: 따라서 $Q(x) = x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1$.

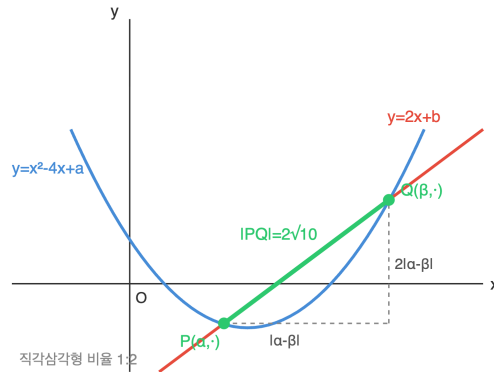
3단계: $x = 1$ 대입하면 $Q(1) = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 다항식 나눗셈을 직접 수행하지 않고, $a^n - b^n$ 인수분해 공식을 변수 치환($a = x^2, b = 1$) 형태로 꿰뚫어 보는 것. 몫 전체를 식으로 쓰고 $x = 1$ 을 넣으면 항이 전부 1이 되어 항의 수만 세면 된다.

$x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$ 공식은 기하급수 합과 동일한 구조를 가진다.

Q38 이차함수·부등식 통합

이차함수 $y = x^2 - 4x + a$ 의 그래프와 직선 $y = 2x + b$ 가 서로 다른 두 점 P, Q 에서 만나고 선분 PQ 의 길이가 $2\sqrt{10}$ 이다. 이때 두 교점의 x 좌표의 차의 절댓값은? (단, a, b 는 실수)



- ① ① $\sqrt{2}$
- ② ② 2
- ③ ③ $2\sqrt{2}$
- ④ ④ $2\sqrt{5}$

정답: ③ $2\sqrt{2}$

1단계: 교점의 x 좌표는 $x^2 - 4x + a = 2x + b$, 즉 $x^2 - 6x + (a - b) = 0$ 의 두 근 α, β .

2단계: 두 교점은 $P(\alpha, 2\alpha + b), Q(\beta, 2\beta + b)$. 두 점 사이의 거리의 제곱은 $(\alpha - \beta)^2 + (2\alpha - 2\beta)^2 = 5(\alpha - \beta)^2$.

3단계: $|PQ|^2 = 40$ 이므로 $5(\alpha - \beta)^2 = 40, |\alpha - \beta|^2 = 8$, 따라서 $|\alpha - \beta| = 2\sqrt{2}$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 직선의 기울기 m 이 주어진 경우 두 교점 사이 거리가 $\sqrt{1+m^2} \cdot |\alpha - \beta|$ 로 표현된다는 기하적 직관. a, b 의 구체적인 값을 구할 필요가 없다는 점을 간파하면 계산이 크게 줄어든다.

직선 $y = mx + c$ 위 두 점의 거리는 x 좌표 차이에 $\sqrt{1+m^2}$ 를 곱한 값이다.

Q39 경우의 수 심화

숫자 1, 2, 3, 4, 5를 일렬로 나열할 때, 1은 2보다 앞에 있고 동시에 3은 4보다 앞에 있도록 나열하는 경우의 수는?

- ① ① 12
- ② ② 24
- ③ ③ 30
- ④ ④ 60

정답: ③ 30

1단계: 제한 없이 1, 2, 3, 4, 5를 나열하는 경우의 수는 $5! = 120$.

2단계: 임의의 순열에서 1과 2의 상대적 위치는 '1이 앞', '2가 앞' 두 가지가 대칭이어서 각각 전체의 $\frac{1}{2}$. 3과 4에 대해서도 동일.

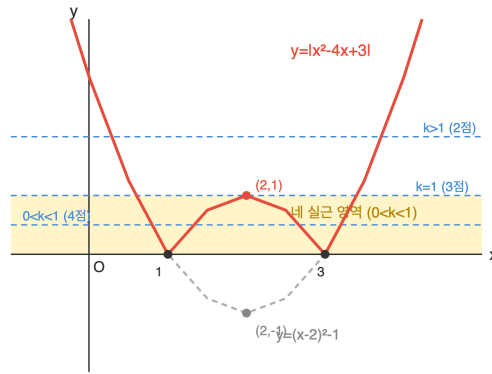
3단계: 1과 2의 위치 조건은 3과 4의 위치 조건과 독립이므로 동시 만족 확률은 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. 경우의 수 = $120 \times \frac{1}{4} = 30$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 '상대 순서 조건'을 직접 나열로 세지 않고 대칭성으로 분모만 나누는 기법. 독립된 두 쌍의 조건이 서로의 결과에 영향을 주지 않는다는 점(한쪽 쌍의 위치 선택은 다른 쌍의 상대순서를 바꾸지 않음)이 결정적이다.

n 개 원소 중 k 개의 상대 순서를 고정하면 경우의 수는 $\frac{n!}{k!}$ 로 계산할 수 있다.

Q40 경시·통합 문제

x 에 대한 방정식 $|x^2 - 4x + 3| = k$ 가 서로 다른 네 실근을 갖도록 하는 실수 k 의 값의 범위를 구하시오.



- ① ① $0 \leq k \leq 1$
- ② ② $0 < k < 1$
- ③ ③ $k > 1$
- ④ ④ $k \geq 0$

☞ 정답: ② $0 < k < 1$

📖 1단계: $g(x) = x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3) = (x - 2)^2 - 1$ 로 표준화. 두 실근 1, 3, 꼭짓점 (2, -1).

2단계: $y = |g(x)|$ 는 구간 [1, 3]에서 포물선이 x 축 아래로 내려간 부분을 위로 뒤집어 최고점 (2, 1)을 가지고, 외부에서는 원래 포물선과 같은 형태.

3단계: 수평선 $y = k$ 와 교점이 네 개가 되려면 뒤집힌 '산' 내부에서 두 점, 양쪽 외부 포물선에서 각각 한 점씩 만나야 하므로 $0 < k < 1$. $k = 1$ 이면 산 꼭짓점에서 접해 3점, $k = 0$ 이면 축 접촉 2점, $k > 1$ 이면 외부 2점만.

🧠 풀이 전략: 이 문제의 핵심은 $|f(x)| = k$ 를 $y = |f(x)|$ 그래프와 $y = k$ 의 교점 문제로 치환하는 것. 절댓값으로 인해 생기는 '뒤집힌 봉우리'의 높이가 원래 포물선 최솟값의 절댓값과 같다는 관찰이 범위 결정에 결정적이다.

💡 $y = |f(x)|$ 그래프는 $f(x) \geq 0$ 인 부분은 그대로, $f(x) < 0$ 인 부분은 x 축에 대칭이동시킨 형태로 그린다.



고1 수학 심화

총 40문제 · 문제와 정답·풀이 포함

Q41 복소수 심화

두 복소수 z_1, z_2 가 $z_1^2 = 3 + 4i, z_2^2 = 5 - 12i$ 를 만족할 때, $|z_1 z_2|$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

- ① ① $\sqrt{60}$
- ② ② $\sqrt{65}$
- ③ ③ $\sqrt{70}$
- ④ ④ 9

정답: ② $\sqrt{65}$

1단계: 복소수 절댓값의 기본 성질 $|w^2| = |w|^2$ 이용. $|z_1|^2 = |z_1^2| = |3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ 이므로 $|z_1| = \sqrt{5}$.

2단계: 마찬가지로 $|z_2|^2 = |z_2^2| = |5 - 12i| = \sqrt{25 + 144} = 13$ 이므로 $|z_2| = \sqrt{13}$.

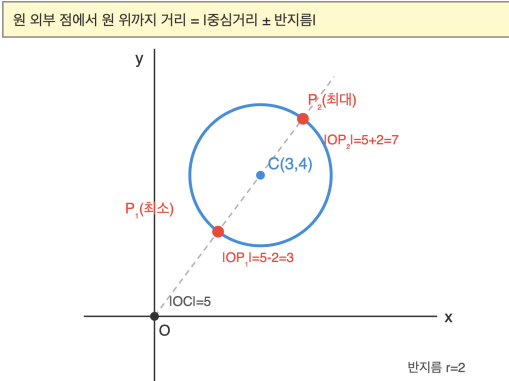
3단계: 절댓값의 곱셈성 $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2| = \sqrt{5} \cdot \sqrt{13} = \sqrt{65}$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 z_1, z_2 를 $a + bi$ 꼴로 풀어 제곱근을 직접 구하지 않고, 절댓값의 두 성질 $|w^2| = |w|^2$ 과 $|w_1 w_2| = |w_1| |w_2|$ 만으로 풀 수 있다는 통찰. $3 + 4i$ 와 $5 - 12i$ 가 둘 다 피타고라스 수 쌍이라 절댓값이 정수로 깔끔하게 떨어지는 것이 힌트.

(3, 4, 5)와 (5, 12, 13)은 대표적인 피타고라스 세 쌍으로, 복소수 $3 + 4i$ 의 절댓값 5와 $5 + 12i$ 의 절댓값 13을 준다.

Q42 도형의 방정식 심화

좌표평면에서 원 $C: (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 4$ 위의 점 P 와 원점 O 사이의 거리 $|OP|$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오.



- ① ① 6
- ② ② 8
- ③ ③ 10
- ④ ④ 12

정답: ③ 10

1단계: 원 C 의 중심은 $(3, 4)$, 반지름 $r = 2$. 원점과 중심 사이 거리는 $d = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

2단계: $d > r$ 이므로 원점은 원 밖에 있다. 삼각부등식에 의해 원 위 점 P 에 대해 $|d - r| \leq |OP| \leq d + r$.

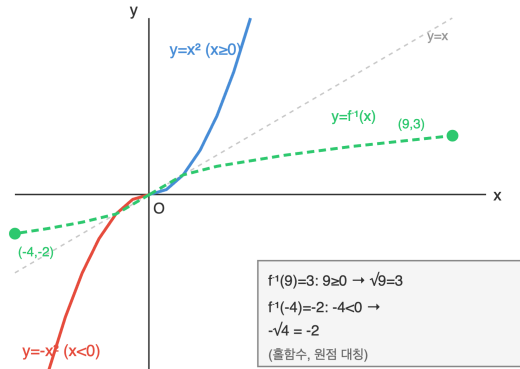
3단계: 최솟값 $= d - r = 3$, 최댓값 $= d + r = 7$. 합 $= 3 + 7 = 10 = 2d$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 '외부 정점에서 원 위까지 거리의 최대/최소는 중심과의 거리 ± 반지름'이라는 원리. 합이 $2d$ 가 되는 것은 두 극점이 중심에 대해 대칭이기 때문이며, 반지름은 상쇄된다.

원 위의 점에서 외부 정점까지의 거리의 최댓값과 최솟값을 더하면 항상 중심과의 거리의 2배가 된다 (반지름에 무관).

Q43 함수 심화

함수 $f(x) = \begin{cases} x^2 & (x \geq 0) \\ -x^2 & (x < 0) \end{cases}$ 의 역함수를 $f^{-1}(x)$ 라 할 때, $f^{-1}(-4) + f^{-1}(9)$ 의 값은?



- ① ① -5
- ② ② 1
- ③ ③ 5
- ④ ④ 7

☞ 정답: ② 1

▣ 1단계: $x \geq 0$ 에서 $y = x^2 \geq 0$ 이므로, $y \geq 0$ 에 대해 $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

2단계: $x < 0$ 에서 $y = -x^2 \leq 0$ 이므로, $y < 0$ 에 대해 $f^{-1}(y) = -\sqrt{-y}$ (원래 x 가 음수였음에 주의).

3단계: $f^{-1}(9) = \sqrt{9} = 3$ ($9 \geq 0$ 구간). $f^{-1}(-4) = -\sqrt{-(-4)} = -\sqrt{4} = -2$ ($-4 < 0$ 구간). 합 = $3 + (-2) = 1$.

🧠 풀이 전략: 이 문제의 핵심은 구간별로 정의된 함수의 역함수가 각 구간에서 따로 구해지고, 입력값의 부호에 따라 어느 분기를 쓸지 결정된다는 것. 특히 음수 분기에서 $\sqrt{\quad}$ 앞의 음수 부호를 놓치면 함정이다.

💡 $f(x) = x|x|$ 로도 표현할 수 있는 이 함수는 실수 전체에서 일대일 대응이면서 홀함수로, 그 역함수는 '부호가 보존된 제곱근' $\text{sgn}(x)\sqrt{|x|}$ 이다.

Q44 고차·연립방정식

연립방정식 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ xy = 3 \end{cases}$ 의 모든 실수해 (x, y) 에서 $x + y$ 가 가질 수 있는 서로 다른 값들의 합은?

- ① ① -4
- ② ② 0
- ③ ③ 4
- ④ ④ 8

☞ 정답: ② 0

▣ 1단계: $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 10 + 6 = 16$ 이므로 $x + y = \pm 4$.

2단계: $x + y = 4$, $xy = 3$ 인 경우 x, y 는 $t^2 - 4t + 3 = 0$ 의 두 근 $t = 1, 3$. 해 $(1, 3)$, $(3, 1)$ 로 실수해 존재.

3단계: $x + y = -4$, $xy = 3$ 인 경우 x, y 는 $t^2 + 4t + 3 = 0$ 의 두 근 $t = -1, -3$. 해 $(-1, -3)$, $(-3, -1)$ 로 실수해 존재. 따라서 $x + y$ 가 가질 수 있는 값은 4와 -4 두 가지, 합은 0.

🧠 풀이 전략: 이 문제의 핵심은 $x + y$ 와 xy 를 한 변수로 보고 대칭함수로 바꿔 푸는 것. x, y 자체를 구하지 않고 합 $s = x + y$ 의 가능한 값만 필요하다. 각 s 값이 실수해를 허용하는지는 새 이차방정식 $t^2 - st + 3 = 0$ 의 판별식이 0 이상인지로 확인($s = \pm 4$ 에서 $s^2 - 12 = 4 \geq 0$ 으로 모두 유효).

💡 두 수의 합 s 와 곱 p 가 주어지면 그 두 수는 $t^2 - st + p = 0$ 의 근 (근과 계수의 관계의 역방향 활용).

Q45 경우의 수 심화

5개의 숫자 1, 1, 2, 2, 3을 일렬로 나열할 때, 같은 숫자끼리는 이웃하지 않도록 나열하는 경우의 수는?


- ① ① 8
- ② ② 10
- ③ ③ 12
- ④ ④ 18


 **정답: ③ 12**

1단계: 전체 나열 수는 같은 숫자를 구별하지 않을 때 $\frac{5!}{2! \cdot 2!} = 30$. 금지 사건을 포함배제 원리로 처리.

2단계: $A =$ '두 개의 1이 이웃하는 사건', $B =$ '두 개의 2가 이웃하는 사건'이라 하자. $|A|$: 두 1을 묶어 '11' 한 덩어리로 보면 총 4개(11, 2, 2, 3) 배열, $\frac{4!}{2!} = 12$. 대칭으로 $|B| = 12$. $|A \cap B|$: '11', '22', '3' 세 덩어리 배열, $3! = 6$.

3단계: 포함배제로 $|A \cup B| = 12 + 12 - 6 = 18$. 조건을 만족하는 경우의 수 $= 30 - 18 = 12$.

 풀이 전략: 이 문제의 핵심은 '모든 같은 숫자 쌍 중 하나라도 이웃하면 안 되는' 상황에서 각 쌍에 대해 금지 사건을 정의한 뒤 포함배제로 처리하는 것. 숫자 3은 하나뿐이라 이웃 쌍을 만들 수 없다는 점이 사건을 A, B 두 개로 줄인다.

 일반적으로 같은 숫자들이 이웃하지 않게 나열하는 문제는 포함배제 또는 '자리에 먼저 다른 숫자 배치 후 같은 숫자 삽입' 전략으로 해결한다.

Q46 경사·통합 문제

집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 에서 X 로의 함수 f 중에서, 모든 $x \in X$ 에 대하여 $f(f(x)) = x$ 를 만족하는 함수의 개수는?

- ① ① 6
- ② ② 8
- ③ ③ 10
- ④ ④ 16


 **정답: ③ 10**


1단계: $f(f(x)) = x$ 이면 f 는 스스로가 자신의 역함수이므로 일대일 대응(전단사). 이유:

$f(a) = f(b) \Rightarrow a = f(f(a)) = f(f(b)) = b$ 로 단사, 유한집합에서 단사는 전사.

2단계: 이러한 순열은 '고정점'과 '서로 자리를 바꾸는 쌍(2-사이클)'으로만 구성된다. 3개 이상 원소를 순환시키는 사이클이 있으면 $f \circ f$ 가 항등이 될 수 없다.

3단계: 경우를 2-사이클 개수로 분류: (i) 2-사이클 0개 (모두 고정): 1개. (ii) 2-사이클 1개 (4개 중 2개 선택): $\binom{4}{2} = 6$ 개. (iii) 2-사이클 2개 (남은 2명도 자동으로 쌍): $\frac{1}{2} \binom{4}{2} = 3$ 개. 합계 $1 + 6 + 3 = 10$.

 풀이 전략: 이 문제의 핵심은 $f \circ f = \text{id}$ 라는 조건이 ' f 는 그 자체가 역함수'를 의미하며, 이러한 함수를 대합(involution)이라 부른다는 것. 구조적으로 고정점과 교환 쌍만 허용된다는 사실을 순열의 사이클 분해로 본 뒤, 쌍의 개수로 경우를 나누면 된다.

 n 원소 집합의 대합의 수 $a(n)$ 은 점화식 $a(n) = a(n-1) + (n-1)a(n-2)$ 를 따르며, 전화번호수(telephone numbers)로도 알려져 있다.

Q47 경시·통합 문제

양의 정수 n 에 대하여 $(1+x)^n$ 의 전개식에서 x^k 의 계수를 a_k ($k = 0, 1, 2, \dots, n$)라 하자. 이때 $a_0 + 2a_1 + 3a_2 + \dots + (n+1)a_n$ 을 n 에 대한 식으로 나타내면?

- ① ① $n \cdot 2^{n-1}$
- ② ② $(n+1) \cdot 2^{n-1}$
- ③ ③ $(n+2) \cdot 2^{n-1}$
- ④ ④ $(n+2) \cdot 2^n$

정답: ③ $(n+2) \cdot 2^{n-1}$

1단계: $a_k = \binom{n}{k}$ 이고, 구하는 합 $S = \sum_{k=0}^n (k+1)\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n k\binom{n}{k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ 로 분리.

2단계: $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ ($(1+1)^n$ 에서). 또 $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ 이라는 항등식으로

$$\sum_{k=1}^n k\binom{n}{k} = n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} = n \cdot 2^{n-1}.$$

$$3\text{단계: } S = n \cdot 2^{n-1} + 2^n = n \cdot 2^{n-1} + 2 \cdot 2^{n-1} = (n+2) \cdot 2^{n-1}.$$

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 '가중합'을 '가중치 없는 합'과 'k만 있는 가중합'으로 분리하는 것. 두 번째 합은 조합 함수 공식 $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ 으로 차수를 하나 낮춰 다시 이항계수 전체 합으로 환원하는 것이 핵심 테크닉. $n=1$ 로 계산($a_0 + 2a_1 = 1 + 2 = 3 = 3 \cdot 2^0$ ✓).

항등식 $\sum_{k=0}^n (k+1)\binom{n}{k} = (n+2)2^{n-1}$ 은 미분법 $(x(1+x)^n)'$ 을 $x=1$ 에서 평가하는 방식으로도 유도된다.

Q48 다항식·항등식 추론

다항식 $f(x)$ 를 $(x-1)^2$ 으로 나눈 나머지가 $3x+2$ 이고, $(x+2)$ 로 나눈 나머지가 -4 일 때, $f(x)$ 를 $(x-1)^2(x+2)$ 로 나눈 나머지 $R(x)$ 에 대하여 $R(3)$ 의 값은?

- ① ① 11
- ② ② 52
- ③ ③ 55
- ④ ④ 58

정답: ①

1단계: $f(x)$ 를 3차식 $(x-1)^2(x+2)$ 로 나눈 나머지 $R(x)$ 는 2차 이하이다. $f(x) = (x-1)^2(x+2)Q(x) + R(x)$ 에서 $(x-1)^2(x+2)Q(x)$ 는 $(x-1)^2$ 의 배수이므로, $f(x)$ 를 $(x-1)^2$ 으로 나눈 나머지와 $R(x)$ 를 $(x-1)^2$ 으로 나눈 나머지는 서로 같다. 따라서 $R(x)$ 를 $(x-1)^2$ 으로 나눈 나머지도 $3x+2$ 이고, $R(x) = a(x-1)^2 + (3x+2)$ (a 는 상수)로 둘 수 있다.

2단계: $f(x)$ 를 $(x+2)$ 로 나눈 나머지가 -4 이므로 나머지정리에 의해 $f(-2) = -4$ 이다. 또 $f(x) = (x-1)^2(x+2)Q(x) + R(x)$ 에 $x = -2$ 를 대입하면 $f(-2) = R(-2)$ 이므로 $R(-2) = -4$ 이다.

3단계: $R(-2) = a(-2-1)^2 + (3 \cdot (-2) + 2) = 9a - 4 = -4$ 에서 $9a = 0$, 즉 $a = 0$ 이다. 따라서 $R(x) = 3x+2$ 이다.

4단계: $R(3) = 3 \cdot 3 + 2 = 11$ 이다.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 '3차식으로 나눈 나머지는 2차 이하'와 '부분 나머지 정리'의 결합이다. $(x-1)^2$ 로 나눈 나머지는 $R(x)$ 를 $(x-1)^2$ 로 나눈 나머지와 같음을 활용하여 $R(x) = k(x-1)^2 + 3x+2$ 로 두는 것이 핵심 포인트이다.

다항식의 나머지 정리는 중국인의 나머지 정리(CRT)의 다항식 판이다.

Q49 복소수 심화

복소수 $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ 에 대하여 $z^{2026} + z^{-2026}$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

- ① ① $-\sqrt{2}$
- ② ② 0
- ③ ③ $\sqrt{2}$
- ④ ④ -2

정답: ②

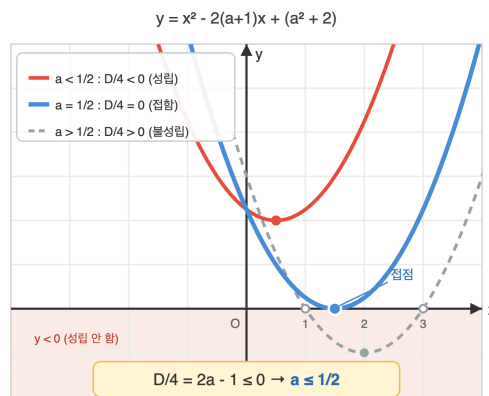
1단계: $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ 를 극형식으로 나타내면 $|z| = 1$, 편각 $\frac{\pi}{4}$. 즉 $z = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$. **2단계:** 드무아브르 정리에 의해 $z^n = \cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}$. $z^8 = 1$ 이므로 주기 8. **3단계:** $2026 = 8 \cdot 253 + 2$ 이므로 $z^{2026} = z^2 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$. 마찬가지로 $z^{-2026} = z^{-2} = -i$. 따라서 $z^{2026} + z^{-2026} = i + (-i) = 0$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 '단위원 위의 복소수는 주기성을 갖는다'이다. $|z| = 1$ 임을 먼저 확인하고 주기 8을 찾아 $2026 \bmod 8 = 2$ 로 환원하는 것이 전략이다.

💡 $z = e^{i\pi/4}$ 는 정팔각형의 한 꼭짓점이며, $z^8 = 1$ 인 8제곱근이다.

Q50 이차함수·부등식 통합

모든 실수 x 에 대하여 부등식 $x^2 - 2ax + a^2 - 1 \geq 2x - 3$ 이 성립할 때, 실수 a 의 값의 범위는?



- ① ① $a \leq -\frac{1}{2}$
- ② ② $a \leq \frac{1}{2}$
- ③ ③ $a \geq \frac{1}{2}$
- ④ ④ $-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}$

정답: ②

1단계: 주어진 부등식을 정리하면 $x^2 - 2(a+1)x + (a^2 + 2) \geq 0$. **2단계:** 모든 실수 x 에 대해 성립하려면 이차식(이차항 계수 $1 > 0$)의 판별식이 0 이하. $D/4 = (a+1)^2 - (a^2 + 2) = a^2 + 2a + 1 - a^2 - 2 = 2a - 1 \leq 0$. **3단계:** $2a \leq 1 \Rightarrow a \leq \frac{1}{2}$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 '모든 실수에 대해 성립' 조건을 '판별식 ≤ 0 '으로 변환하는 것이다. 부등식을 한쪽으로 이항하여 이차항 계수 부호를 먼저 확인한 후 판별식 조건을 적용해야 한다.

💡 판별식 조건은 이차함수가 x 축과 만나지 않거나 접하는 기하학적 상황을 대수적으로 표현한 것이다.

Q51 고차·연립방정식

삼차방정식 $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라 할 때, $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}$ 의 값은?

- ① ① $\frac{49}{36}$
- ② ② $\frac{85}{36}$
- ③ ③ $\frac{18}{49}$
- ④ ④ $\frac{121}{36}$

정답: ①

1단계: 근과 계수의 관계에 의해 $\alpha + \beta + \gamma = 6$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 11$, $\alpha\beta\gamma = 6$. 2단계:

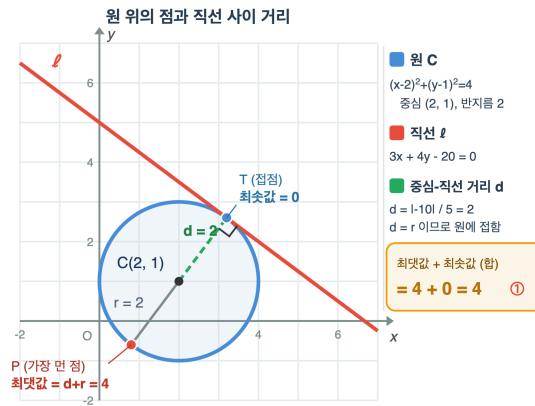
$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} = \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\gamma\alpha}\right)$. 3단계: $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} = \frac{11}{6}$. $\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\gamma\alpha} = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\alpha\beta\gamma} = \frac{6}{6} = 1$. 따라서 $\left(\frac{11}{6}\right)^2 - 2(1) = \frac{121}{36} - \frac{72}{36} = \frac{49}{36}$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 '역수 근의 대칭식을 원래 근의 대칭식으로 변환'이다. $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ 의 기본대칭식을 α, β, γ 의 것으로 표현한 후 제곱합 공식 (합)² - 2(곱합)을 쓴다.

💡 역수 근을 갖는 다항식은 원래 다항식의 계수를 뒤집은 것과 같다. 이를 'reciprocal polynomial'이라 한다.

Q52 도형의 방정식 심화

원 C: $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$ 위의 점과 직선 ℓ : $3x + 4y - 20 = 0$ 사이의 거리의 최댓값과 최솟값의 합은?



- ① ① 4
- ② ② 5.2
- ③ ③ 5.6
- ④ ④ 6

정답: ① 4

1단계: 원 방정식을 표준형으로 고치면 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$. 중심 (2, 1), 반지름 $r = 2$. 2단계: 중심에서 직선 $3x + 4y - 20 = 0$ 까지의 거리는 $d = \frac{|3(2) + 4(1) - 20|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|-10|}{5} = 2$. 3단계: $d = 2 = r$ 이므로 직선은 원에 접한다. 따라서 원 위의 점과 직선 사이 거리의 최솟값은 $d - r = 2 - 2 = 0$, 최댓값은 $d + r = 2 + 2 = 4$ 이다. 4단계: 최댓값과 최솟값의 합은 $0 + 4 = 4$ 이므로 답은 ①이다.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 '원 위 점과 외부 직선 사이 거리 = 중심과 직선 거리 \pm 반지름'이라는 기하적 성질이다. 원의 중심-직선 거리 d 와 반지름 r 을 비교하여 $d < r$ (만남), $d = r$ (접), $d > r$ (분리) 판별이 선행되어야 한다.

💡 이 원리는 점-원의 최단거리 문제로 일반화되어, 최적화 문제에서 '라그랑주 승수법'의 기하적 직관을 제공한다.

Q53 집합·명제 논증

양의 실수 a, b, c 에 대하여 항상 성립하는 부등식만을 아래에서 고른 것은?

(㉠) $(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca)$

(㉡) $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3$

(㉢) $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$

- ① ①, ㉡
- ② ②, ㉢
- ③ ③, ㉣
- ④ ④, ㉡, ㉢

정답: ④

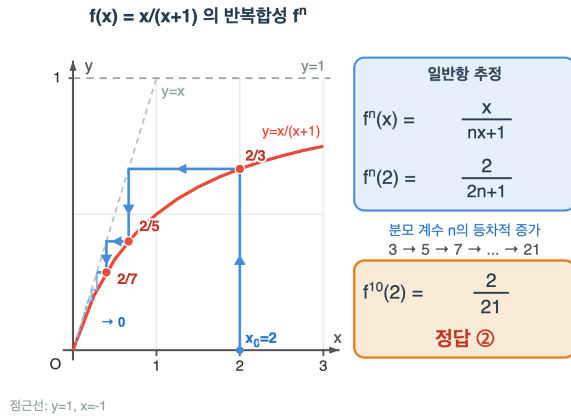
1단계: (㉠) $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$. 이를 $3(ab + bc + ca)$ 와 비교하면 $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ 증명하면 됨. $2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ca) = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$ ✓. 2단계: (㉡) 산술-기하 평균 부등식에 의해 $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a}} = 3\sqrt{1} = 3$ ✓ (등호는 $a = b = c$ 일 때). 3단계: (㉢) 항등식 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = \frac{1}{2}(a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2] \geq 0$ ✓ (양수 조건). 따라서 모두 성립.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 '3변수 절대부등식의 기본 도구'를 숙지하는 것이다. (㉠)과 (㉢)은 제곱합 분해, (㉡)은 산술-기하 평균의 전형적 응용이다. 세 부등식 모두 $a = b = c$ 에서 등호 성립이라는 공통점을 관찰하면 직관을 얻는다.

(㉢)의 항등식 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ 의 인수분해는 슈어(Schur) 부등식과 대칭식 이론의 출발점이다.

Q54 함수 심화

함수 $f(x) = \frac{x}{x+1}$ 에 대하여 $f^1 = f, f^{n+1} = f \circ f^n (n \geq 1)$ 로 정의할 때, $f^{10}(2)$ 의 값은?



- ① ① $\frac{1}{11}$
- ② ② $\frac{2}{21}$
- ③ ③ $\frac{1}{21}$
- ④ ④ $\frac{2}{11}$

정답: ㉒

1단계: 몇 번 반복 계산. $f^1(x) = \frac{x}{x+1}, f^2(x) = f\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1}+1} = \frac{x}{2x+1}, f^3(x) = f\left(\frac{x}{2x+1}\right) = \frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{x}{2x+1}+1} = \frac{x}{3x+1}$. 2단계: 일

반항 추정: $f^n(x) = \frac{x}{nx+1}$. 수학적 귀납법으로 확인: $f^{n+1}(x) = f\left(\frac{x}{nx+1}\right) = \frac{\frac{x}{nx+1}}{\frac{x}{nx+1}+1} = \frac{x}{x+(nx+1)} = \frac{x}{(n+1)x+1}$ ✓. 3단계:

$$f^{10}(2) = \frac{2}{10(2)+1} = \frac{2}{21}$$

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 '반복 함수의 패턴 찾기 후 귀납적 증명'이다. f^1, f^2, f^3 을 계산하여 분모 계수가 1, 2, 3, ...으로 증가하는 패턴을 발견하고 일반항을 세운다. 무작정 10번 함수하는 대신 패턴 발견이 관건이다.

💡 $f(x) = \frac{x}{x+1}$ 의 반복 함수는 뫼비우스 변환의 특수한 예이며, 2×2 행렬의 거듭제곱과 대응된다.

Q55 경우의 수 심화

7명의 학생을 원형 탁자에 앉히는데, 특정 2명 A, B는 서로 이웃하게 앉혀야 한다. 가능한 배열의 수는?

- ① ① 120
- ② ② 240
- ③ ③ 720
- ④ ④ 1440

정답: ㉒

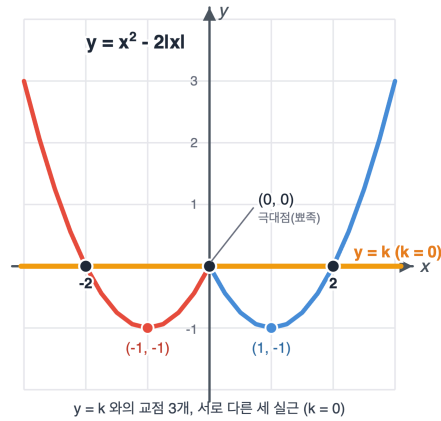
1단계: A, B를 묶어서 하나의 '덩어리'로 취급. 그러면 6개(덩어리 1개 + 나머지 5명)를 원형으로 배열. 2단계: 원순열의 수 = $(6-1)! = 5! = 120$. 3단계: 덩어리 내부 A, B 순서는 $2! = 2$ 가지 (AB 또는 BA). 따라서 총 $120 \times 2 = 240$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 '이웃 조건=덩어리화'와 '원순열 공식 $(n-1)!$ '의 결합이다. 이웃하는 대상을 묶어 하나로 보는 것이 기본 전략이며, 마지막에 내부 순서를 곱하는 것을 잊지 않아야 한다.

💡 원순열에서 $(n-1)!$ 이 되는 이유는 n개의 회전 동치류 각각이 정확히 n개의 직선 배열에 대응하기 때문이다.

Q56 경시·통합 문제

x 에 대한 방정식 $x^2 - 2|x| - k = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 가질 때, 실수 k 의 값은?



- ① ① $k = -3$
- ② ② $k = 0$
- ③ ③ $k = 1$
- ④ ④ $k = 2$

정답: ② $k = 0$

1단계: 방정식을 $x^2 - 2|x| = k$ 로 변형하고, $y = x^2 - 2|x|$ 의 그래프와 수평선 $y = k$ 의 교점이 3개가 되는 k 를 찾는다. **2단계:** 절댓값을 구간별로 푼다. $x \geq 0$ 일 때 $y = x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1$ (꼭짓점 $(1, -1)$), $x < 0$ 일 때 $y = x^2 + 2x = (x + 1)^2 - 1$ (꼭짓점 $(-1, -1)$). 두 식은 $x = 0$ 에서 $y = 0$ 으로 연결되고, $x = 0$ 이 뾰족한 극대점 $(0, 0)$ 이 된다. **3단계:** 그래프는 두 골 $(\pm 1, -1)$ 과 가운데 봉우리 $(0, 0)$ 를 가지는 W자 모양이다. $y = k$ 와의 교점 개수는 $k < -1$ 이면 0개, $k = -1$ 이면 2개, $-1 < k < 0$ 이면 4개, $k = 0$ 이면 3개, $k > 0$ 이면 2개이다. **4단계:** 따라서 교점이 정확히 3개인 경우는 $k = 0$ 이고, 이때 실근은 $x^2 - 2|x| = 0 \Rightarrow |x|(|x| - 2) = 0$ 에서 $x = -2, 0, 2$ 의 세 개이다. 답은 ②.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 '절댓값 포함 방정식=함수 그래프와 수평선 교점 개수 문제'로 변환하는 것이다. 절댓값을 구간별로 풀어 그래프 개형을 정확히 그린 후, 꼭짓점과 연결점의 y 값을 파악하여 임계 k 값을 결정한다.

절댓값이 포함된 함수는 종종 '꺾임점'을 만드는데, 이 꺾임점은 미분 불가능한 특이점이며 극값 탐색의 핵심이다.

Q57 복소수 심화

복소수 z 가 $|z - 2i| = |z + 2i|$ 를 만족하고 $|z| = \sqrt{2}$ 일 때, z 의 실수부와 허수부의 합은? (단, $z = a + bi$, a, b 는 실수)

- ① ① -2
- ② ② 0
- ③ ③ 1
- ④ ④ 2

정답: ②

1단계: $z = a + bi$ 로 놓으면 $|z - 2i| = \sqrt{(a - 2)^2 + b^2}$, $|z + 2i| = \sqrt{a^2 + (b + 2)^2}$. 등식 양변 제곱:

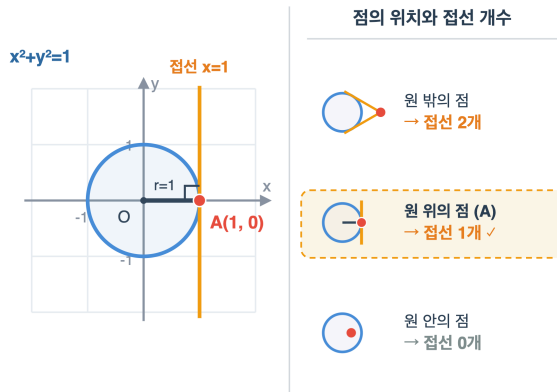
$(a - 2)^2 + b^2 = a^2 + (b + 2)^2$. 전개하면 $a^2 - 4a + 4 + b^2 = a^2 + b^2 + 4b + 4 \Rightarrow -4a = 4b \Rightarrow a + b = 0$. **2단계:** $|z| = \sqrt{2}$ 에서 $a^2 + b^2 = 2$. $b = -a$ 대입: $2a^2 = 2 \Rightarrow a = \pm 1$. **3단계:** $(a, b) = (1, -1)$ 또는 $(-1, 1)$. 어느 쪽이든 $a + b = 0$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 ' $|z - \alpha| = |z - \beta|$ 은 두 점 α, β 의 수직이등분선'이라는 기하적 해석이다. 단순히 대수적으로 제공하여도 풀리지만, 문제는 교점의 $a + b$ 값만 묻고 있어 연립 과정에서 $a + b = 0$ 이 곧장 나온다.

$|z - \alpha| = |z - \beta|$ 는 복소평면에서 선분 $\alpha\beta$ 의 수직이등분선을 의미하며, 이는 고등학교의 '아폴로니우스의 원'(거리비 일정)의 특수한 경우이다.

Q58 도형의 방정식 심화

점 $A(1, 0)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 1$ 에 그은 접선은 몇 개인가? (단, 접선이 존재하지 않으면 0개로 계산한다.)



- ① ① 0개
- ② ② 1개
- ③ ③ 2개
- ④ ④ 무한히 많다

정답: ②

1단계: 점 $A(1, 0)$ 와 원 $x^2 + y^2 = 1$ 의 위치 관계 판별. 중심 $(0, 0)$ 에서 A 까지 거리 $\sqrt{1+0} = 1 = \text{반지름}$. 즉 A 는 원 위의 점. **2단계:** 외부점에서는 접선 2개, 원 위 점에서는 1개(그 점에서의 접선), 내부점에서는 0개. **3단계:** $A(1, 0)$ 은 원 위의 점이므로 접선은 1개. 구체적으로 반지름 OA 에 수직인 직선 $x = 1$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 '점과 원의 위치관계에 따른 접선 개수' 분류이다. 함정은 점 $A(1, 0)$ 을 외부점으로 착각하여 2개라고 답하는 것이다. 점과 중심 사이 거리를 반지름과 비교하는 습관이 중요하다.

💡 원 위 점에서의 접선은 '극선(polar line)'의 특수한 경우이며, 사영기하학의 출발점이다.

Q59 경사-통합 문제

집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 의 부분집합 A, B 가 다음 조건을 모두 만족한다.

- (가) $A \cup B = U$
- (나) $A \cap B = \{3, 5\}$
- (다) $|A| = 5$

순서쌍 (A, B) 의 개수는?

- ① ① 15
- ② ② 20
- ③ ③ 35
- ④ ④ 56

정답: ②

1단계: $A \cap B = \{3, 5\}$ 이므로 3, 5는 반드시 A 와 B 모두에 속함. 나머지 원소 $\{1, 2, 4, 6, 7, 8\}$ 6개는 A 에만 또는 B 에만 속해야 함 ($A \cup B = U$ 이므로 $A \cap B$ 의 여집합 원소는 A 또는 B 정확히 하나). **2단계:** $|A| = 5$ 이고 A 는 $\{3, 5\}$ 와 ' A 에만 속하는 원소들'의 합집합. 따라서 ' A 에만 속하는 원소' 개수 $= 5 - 2 = 3$ 개. **3단계:** 6개 원소 중 3개를 A 전용으로 선택하는 방법: $\binom{6}{3} = 20$ 가지. 선택되지 않은 3개는 자동으로 B 전용.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 '합집합=전체, 교집합=고정' 조건에서 나머지 원소가 배타적으로 $A \setminus B$ 또는 $B \setminus A$ 중 하나에 속한다는 관찰이다. 벤다이어그램 4영역 중 $A^c \cap B^c$ 와 $A \cap B$ 는 이미 결정되고, 남은 두 영역에 6개 원소를 분할하는 조합 문제로 귀결된다.

💡 이런 조건부 집합 배정 문제는 '지수적 생성 함수(EGF)'의 기초를 이루며, 조합론의 핵심 기법이다.

Q60 다항식·항등식 추론

다항식 $P(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $P(x + 1) - P(x) = 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$ 을 만족하고, $P(0) = 0$ 이다. $P(10)$ 의 값은?

- ① ① 1000
- ② ② 10000
- ③ ③ 11110
- ④ ④ 100000

정답: ②

1단계: 이항정리를 이용하면 $(x + 1)^4 - x^4 = 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$ 이다. 따라서 주어진 차분방정식은 $P(x + 1) - P(x) = (x + 1)^4 - x^4$ 로 쓸 수 있다.

2단계: $x = 0, 1, 2, \dots, 9$ 를 차례로 대입하여 양변을 더하면 왼쪽은 $P(10) - P(0)$ (텔레스코핑)로 정리되고, 오른쪽은

$$\sum_{k=0}^9 \{(k + 1)^4 - k^4\} = 10^4 - 0^4 = 10000.$$

3단계: $P(0) = 0$ 이므로 $P(10) = 10000$. 참고로 이 조건만으로는 $P(x)$ 가 유일하게 결정되지는 않으나 (일반해는 $P(x) = x^4 + c$), $P(0) = 0$ 조건에서 $P(x) = x^4$ 로 확정된다.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 우변 $4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$ 이 $(x + 1)^4$ 의 이항전개와 x^4 의 차라는 것을 알아채는 것이다. 차분의 텔레스코핑 구조를 이용하면 반복 덧셈 없이 $P(10)$ 을 한 번에 계산할 수 있다.

이처럼 다항식의 차분을 관찰하는 기법은 17세기 뉴턴이 유한차분법을 정립하면서 수열의 일반항을 구하는 표준 도구가 되었다.

Q61 복소수 심화

서로 켄레인 두 복소수 z, \bar{z} 가 $z + \bar{z} = 4, z\bar{z} = 13$ 을 만족할 때, $z^3 + \bar{z}^3$ 의 값은?

- ① ① -156
- ② ② -92
- ③ ③ 64
- ④ ④ 256

정답: ②

1단계: 두 복소수의 기본대칭식 $s = z + \bar{z} = 4, p = z\bar{z} = 13$ 으로 두면, z 와 \bar{z} 는 이차방정식 $t^2 - 4t + 13 = 0$ 의 두 근이다. 판별식이 $16 - 52 = -36 < 0$ 이므로 z 는 비실수 복소수로 잘 정의된다.

2단계: 세제곱합 전개식 $z^3 + \bar{z}^3 = (z + \bar{z})^3 - 3z\bar{z}(z + \bar{z}) = s^3 - 3ps$ 를 사용한다.

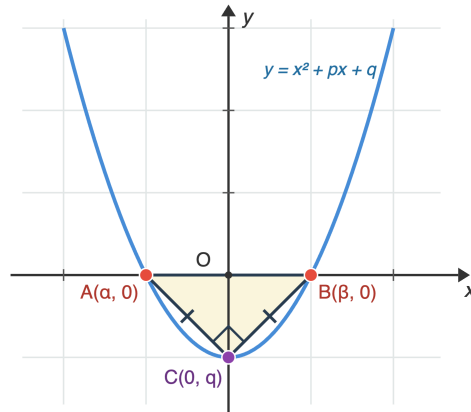
3단계: 대입하면 $z^3 + \bar{z}^3 = 4^3 - 3 \cdot 13 \cdot 4 = 64 - 156 = -92$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 복소수라고 해서 특별한 계산을 할 필요 없이, 켄레 쌍을 '두 실수 근'처럼 다룰 수 있다는 점이다. 두 복소수의 합과 곱이 실수로 주어지면 실근과 똑같이 대칭식 공식을 쓸 수 있다.

z 를 극형식으로 쓰면 $z = \sqrt{13} (\cos\theta + i\sin\theta)$, $\cos\theta = 2/\sqrt{13}$. 드무아브르 정리로 $z^3 + \bar{z}^3 = 2 \cdot 13\sqrt{13} \cos(3\theta) = -92$ 도 같은 답이다.

Q62 이차함수·부등식 통합

이차함수 $f(x) = x^2 + px + q$ 의 그래프가 x 축과 서로 다른 두 점 A, B 에서 만나고 y 축과 점 C 에서 만난다. $\triangle ABC$ 가 $\angle C = 90^\circ$ 이고 $\overline{CA} = \overline{CB}$ 인 직각이등변삼각형일 때, $p^2 - 2q$ 의 값은?



- ① ① -2
- ② ② 0
- ③ ③ 2
- ④ ④ 4

정답: ③

1단계: $A(\alpha, 0), B(\beta, 0), C(0, q)$ 로 두면, 근과 계수의 관계로 $\alpha + \beta = -p, \alpha\beta = q$ 이다.

2단계: $\angle C = 90^\circ$ 조건은 $\vec{CA} \cdot \vec{CB} = 0$. 즉 $(\alpha, -q) \cdot (\beta, -q) = \alpha\beta + q^2 = q + q^2 = q(q + 1) = 0$. 두 교점이 존재하려면 $q \neq 0$ (아니면 $C = O$ 이고 A 또는 B 가 원점과 겹침)이므로 $q = -1$.

3단계: $\overline{CA} = \overline{CB}$ 에서 $\alpha^2 + q^2 = \beta^2 + q^2, \alpha^2 = \beta^2$. $\alpha \neq \beta$ 이므로 $\alpha = -\beta$, 즉 $p = -(\alpha + \beta) = 0$. 따라서 $p^2 - 2q = 0 - 2(-1) = 2$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 기하 조건(직각, 이등변)을 근 α, β 의 대수 조건으로 번역하는 것이다. 직각은 '벡터 내적 = 0', 이등변은 '거리 제곱이 같음'으로 옮기면 근과 계수의 관계로 바로 연결된다.

💡 이 이차함수 $y = x^2 - 1$ 는 단위원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 흥미로운 관계를 가지며, 직각이등변삼각형의 꼭짓점들이 반지름 $\sqrt{2}$ 인 원 위에 놓인다.

Q63 고차·연립방정식

실수 x, y 가 $x^3 + y^3 = 9$ 와 $xy = 2$ 를 동시에 만족할 때, $x + y$ 의 값은?

- ① ① 1
- ② ② 2
- ③ ③ 3
- ④ ④ 4

정답: ③

1단계: $s = x + y$ 라 두면 항등식 $x^3 + y^3 = s^3 - 3xy \cdot s$ 로 변형된다. 조건을 대입하면 $9 = s^3 - 3 \cdot 2 \cdot s$, 즉 $s^3 - 6s - 9 = 0$.

2단계: $s = 3$ 을 대입하면 $27 - 18 - 9 = 0$ 이므로 참. 인수정리로 $s^3 - 6s - 9 = (s - 3)(s^2 + 3s + 3)$.

3단계: 이차인수 $s^2 + 3s + 3$ 의 판별식은 $9 - 12 = -3 < 0$ 이므로 실근이 없다. 따라서 실수 s 는 $s = 3$ 뿐이다. 추가로 x, y 가 실수가 되는지 확인: x, y 는 $t^2 - 3t + 2 = 0$ 의 근 $t = 1, 2$ 로 실수. 답은 3.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 대칭식 $x^3 + y^3$ 을 기본대칭식 $s = x + y$ 와 $p = xy$ 로 환원해 삼차방정식을 만드는 것이다. 삼차방정식의 해를 구한 뒤 실수 조건으로 걸러내는 단계가 놓치기 쉬운 함정이다.

💡 대칭식을 기본대칭식으로 환원하는 기법은 17세기 비에트가 체계화했으며, 훗날 갈루아 이론의 출발점이 되었다.

Q64 집합·명제 논증

전체집합 $U = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$ 의 부분집합 A, B 에 대하여 $n(A) = 10, n(B) = 12, n(A \cup B) = 15$ 이다. $n(A^c \cap B^c)$ 의 값은?

- ① ① 3
- ② ② 5
- ③ ③ 7
- ④ ④ 8

정답: ②

1단계: 드모르간 법칙에 의해 $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$ 이다.

2단계: 여집합 원소 수 공식 $n((A \cup B)^c) = n(U) - n(A \cup B)$.

3단계: 대입하면 $20 - 15 = 5$. (참고: $n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B) = 10 + 12 - 15 = 7$ 은 여기서는 필요없지만 검산용이다.)

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 '어느 쪽에도 속하지 않는 원소'를 바로 보는 것이다. $A^c \cap B^c$ 를 그대로 계산하려고 포함배제부터 손대면 길어지는데, 드모르간 법칙으로 $A \cup B$ 의 여집합이라고 알아채면 한 줄로 끝난다.

드모르간 법칙은 19세기 논리학자 드모르간의 이름에서 왔지만, 실제로는 14세기 오컴의 윌리엄이 먼저 비슷한 형태로 기술했다.

Q65 함수 심화

함수 $f(x) = \sqrt{x+3}$ ($x \geq -3$)의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $g(5) + f(g(7)) + g(f(22))$ 의 값은?

- ① ① 36
- ② ② 44
- ③ ③ 51
- ④ ④ 58

정답: ③

1단계: 역함수 구하기. $y = \sqrt{x+3}$ 에서 $y \geq 0$ 이고 $x+3 = y^2$ 이므로 $g(y) = y^2 - 3$ (단, $y \geq 0$).

2단계: $g(5) = 5^2 - 3 = 22$. 다르게 보면 $f(x) = 5$ 인 x 를 찾는 것: $x+3 = 25, x = 22$. 일치.

3단계: 역함수 항등식 $f(g(y)) = y$ (정의역 안에서)에 의해 $f(g(7)) = 7$. 마찬가지로 $g(f(x)) = x$ 에 의해 $g(f(22)) = 22$. 따라서 합은 $22 + 7 + 22 = 51$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 f 와 g 가 역함수 관계일 때 $f \circ g$ 와 $g \circ f$ 가 정의역 안에서 항등함수라는 성질을 바로 사용하는 것이다. g 의 식을 매번 계산하지 않아도 $f(g(7)) = 7$ 처럼 순간적으로 답이 나온다.

함수와 역함수의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대해 서로 대칭이다. $y = \sqrt{x+3}$ 과 $y = x^2 - 3$ ($y \geq -3$)의 그래프도 정확히 이 대칭 관계를 보인다.

Q66 경우의 수 심화

8명의 학생을 크기가 각각 2명, 3명, 3명인 세 조로 나누는 방법의 수는?

- ① ① 140
- ② ② 280
- ③ ③ 560
- ④ ④ 1680

정답: ②

1단계: 먼저 세 조를 '구별한다'고 가정하고 순서대로 뽑는다. 2명 조: $\binom{8}{2} = 28$ 가지. 남은 6명에서 3명 조: $\binom{6}{3} = 20$ 가지. 나머지 3명은 자동으로 마지막 조: $\binom{3}{3} = 1$ 가지. 곱하면 $28 \cdot 20 \cdot 1 = 560$.

2단계: 크기가 같은 조 두 개(3명, 3명)는 서로 구별되지 않는다. 어느 조가 먼저인지 순서를 바꿔 세었으므로 2!로 나눠야 한다.

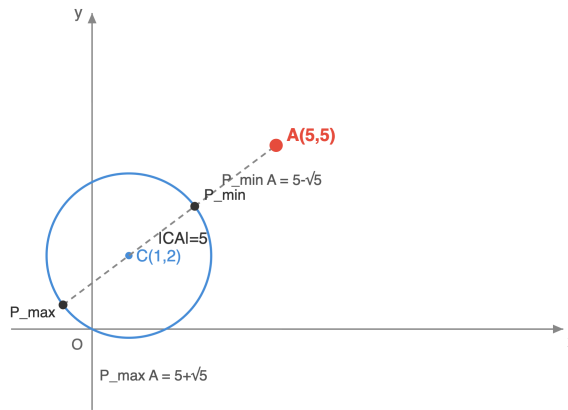
3단계: $560 \div 2! = 280$. 따라서 답은 280.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 같은 크기의 조가 중복 계산되는 부분을 빼는 것이다. 크기가 다른 조끼리는 자연스럽게 구분되지만, 같은 크기의 조는 이름표를 바꿔도 같은 분할이므로 조의 개수에 해당하는 계승으로 나눠야 한다.

💡 n 명을 크기 k_1, k_2, \dots, k_r 로 나누는 일반 공식은 다항계수 $\frac{n!}{k_1!k_2! \dots k_r!}$ 를 같은 크기 조 개수의 계승으로 나눈 값이다.

Q67 도형의 방정식 심화

원 $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$ 위를 움직이는 점 P 와 점 $A(5, 5)$ 사이의 거리 \overline{PA} 의 최댓값과 최솟값의 합은?



- ① ① 5
- ② ② $2\sqrt{5}$
- ③ ③ 10
- ④ ④ $10 + 2\sqrt{5}$

정답: ③

1단계: 원의 중심 $C(1, 2)$, 반지름 $r = \sqrt{5}$. 점 A 와 중심 사이의 거리 $d = \overline{CA} = \sqrt{(5-1)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{16+9} = 5$.

2단계: $d = 5 > \sqrt{5} = r$ 이므로 A 는 원 바깥에 있다. 원 위의 점 P 에 대해 삼각부등식으로 $d - r \leq \overline{PA} \leq d + r$. 등호는 P 가 선분 CA (또는 그 연장) 위에 있을 때 성립.

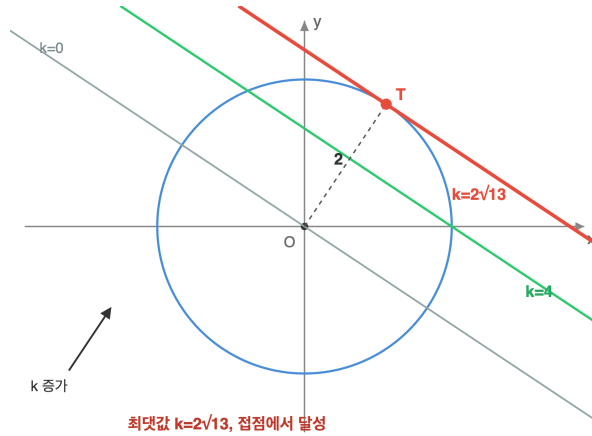
3단계: 최댓값 $= d + r = 5 + \sqrt{5}$, 최솟값 $= d - r = 5 - \sqrt{5}$. 합 $= 10$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 원 위의 점과 외부 점 사이의 거리 극값이 항상 '중심까지 거리 \pm 반지름'이라는 사실이다. 최대와 최소를 더하면 반지름 항이 상쇄되고 중심까지 거리의 두 배만 남는다.

💡 원 밖의 점에서 원 위 모든 점까지의 거리의 합은 일정하지 않지만, 최대와 최소의 평균은 항상 '중심까지 거리'가 된다.

Q68 도형의 방정식 심화

원 $x^2 + y^2 = 4$ 위를 움직이는 점 $P(a, b)$ 에 대하여 $2a + 3b$ 의 최댓값은?



- ① ① $2\sqrt{5}$
- ② ② $\sqrt{26}$
- ③ ③ $2\sqrt{13}$
- ④ ④ 13

정답: ③

1단계: $2a + 3b = k$ 는 기울기 $-2/3$ 인 평행직선 계열이다. 원 위의 점 (a, b) 가 이 직선 위에 있으려면, 원과 직선이 공유점을 가져야 하므로 원점에서 직선까지의 거리가 반지름 2 이하이어야 한다.

2단계: 점과 직선의 거리 공식: $\frac{|k|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{13}} \leq 2$. 따라서 $|k| \leq 2\sqrt{13}$.

3단계: k 의 최댓값은 $2\sqrt{13}$ 이며, 이때 직선은 원에 접하고 접점 P 는 원점에서 법선 방향 $(2, 3)/\sqrt{13}$ 에 반지름 2 만큼 간 위치

$$P = \left(\frac{4}{\sqrt{13}}, \frac{6}{\sqrt{13}} \right). \text{ 검산: } 2 \cdot \frac{4}{\sqrt{13}} + 3 \cdot \frac{6}{\sqrt{13}} = \frac{26}{\sqrt{13}} = 2\sqrt{13} . \checkmark$$

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 '선형식의 극값 = 평행직선이 원에 접할 때'라는 도형적 해석이다. 매개변수로 푸는 방식보다 점과 직선의 거리 공식으로 훨씬 빠르게 풀린다. 코시-슈바르츠 부등식으로도 같은 결과를 얻을 수 있다.

일반적으로 반지름 r 인 원 $x^2 + y^2 = r^2$ 위에서 $ax + by$ 의 최댓값은 $r\sqrt{a^2 + b^2}$ 이다. 이는 코시-슈바르츠 부등식의 가장 기하적인 적용 사례로 꼽힌다.

Q69 경시·통합 문제

세 실수 a, b, c 가 $a + b + c = 6$, $a^2 + b^2 + c^2 = 14$, $abc = 6$ 을 만족할 때, $a^3 + b^3 + c^3$ 의 값은?

- ① ① 24
- ② ② 30
- ③ ③ 36
- ④ ④ 42

정답: ③

1단계: $ab + bc + ca$ 를 먼저 구한다. 항등식 $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$ 에서 $36 = 14 + 2(ab + bc + ca)$, 따라서 $ab + bc + ca = 11$.

2단계: 세제곱합 공식 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)\{a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca)\}$ 를 쓴다. 오른쪽에 대입하면 $6 \cdot (14 - 11) = 18$.

3단계: 따라서 $a^3 + b^3 + c^3 = 18 + 3abc = 18 + 18 = 36$.

(검산: a, b, c 는 $t^3 - 6t^2 + 11t - 6 = 0$ 의 근이고 인수분해하면 $(t - 1)(t - 2)(t - 3) = 0$. 즉 $\{a, b, c\} = \{1, 2, 3\}$. $1^3 + 2^3 + 3^3 = 36$. ✓)

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 주어진 세 가지 대칭량 $e_1 = a + b + c$, $p_2 = a^2 + b^2 + c^2$, $e_3 = abc$ 에서 빠진 $e_2 = ab + bc + ca$ 를 먼저 끌어내는 것이다. 그 다음은 '세제곱합 - $3abc$ ' 공식에 바로 대입만 하면 끝이다.

💡 이처럼 $p_k = a^k + b^k + c^k$ 를 기본대칭식 e_1, e_2, e_3 로 표현하는 점화식을 뉴턴 항등식이라 하며, 현대 대수학에서 대칭함수 이론의 기초가 된다.

Q70 집합·명제 논증

자연수 n 에 대한 명제 ' n^2 이 3의 배수이면 n 은 3의 배수이다'를 대우를 이용하여 증명하려고 한다. 이때 증명에서 출발점으로 삼아야 할 가정과 도달해야 할 결론의 쌍으로 옳은 것은?

- ① ① 가정: n 은 3의 배수이다 / 결론: n^2 은 3의 배수이다
- ② ② 가정: n 은 3의 배수가 아니다 / 결론: n^2 은 3의 배수가 아니다
- ③ ③ 가정: n^2 은 3의 배수가 아니다 / 결론: n 은 3의 배수가 아니다
- ④ ④ 가정: n^2 은 3의 배수이다 / 결론: n 은 3의 배수가 아니다

정답: ②

1단계: 원명제 ' $p \rightarrow q$ '의 대우는 ' $\sim q \rightarrow \sim p$ '이다. 여기서 p : ' n^2 은 3의 배수이다', q : ' n 은 3의 배수이다'.

2단계: $\sim q$ 는 ' n 은 3의 배수가 아니다', $\sim p$ 는 ' n^2 은 3의 배수가 아니다'. 따라서 대우는 ' n 이 3의 배수가 아니면 n^2 은 3의 배수가 아니다'.

3단계: 대우 증명의 구조는 '가정 $\sim q$ 에서 출발하여 결론 $\sim p$ 를 끌어낸다'. 즉 가정은 n 이 3의 배수가 아니다, 결론은 n^2 이 3의 배수가 아니다. 실제 증명은 $n = 3k \pm 1$ 로 쓰고 $n^2 = 9k^2 \pm 6k + 1 = 3(3k^2 \pm 2k) + 1$ 이므로 n^2 을 3으로 나눈 나머지가 1이 되어 3의 배수가 아니므로 마무리한다. ①은 가정·결론이 $q \rightarrow p$ 꼴이므로 원명제의 역명제이고, ③은 $\sim p \rightarrow \sim q$ 꼴이므로 원명제의 이명제이며 이는 원명제(순명제) $p \rightarrow q$ 자체가 아니다. ④는 원명제의 가정 p 에서 결론의 부정 $\sim q$ 로 가는, 논리적으로 성립하지 않는 잘못된 쌍이다.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 '대우'와 '역'을 혼동하지 않는 것이다. 대우는 부정의 순서를 뒤집는 것이므로 '아니면 아니다' 형태로 전환된다. ①은 역에 해당하고, ③은 원명제를 그대로 진술한 것이라 착각을 유도하는 함정이다.

💡 이 명제와 그 대우는 유클리드가 $\sqrt{2}$ 가 무리수임을 증명할 때 사용한 핵심 보조정리 ' n^2 이 2의 배수이면 n 도 2의 배수이다'의 일반화이다.

Q71 경시·통합 문제

$f(x) = x^2 + 2x - 3$ 일 때, 방정식 $f(f(f(x))) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수는?

- ① ① 4
- ② ② 6
- ③ ③ 8
- ④ ④ 9

☞ 정답: ③

☞ 1단계 (f 한 번): $f(x) = (x + 3)(x - 1) = 0$ 의 해는 $x = -3$ 또는 $x = 1$. 따라서 $f(f(f(x))) = 0$ 은 $f(f(x)) = -3$ 또는 $f(f(x)) = 1$ 로 환원된다.

2단계 (f 두 번): $f(y) = -3$ 은 $y^2 + 2y = 0$, 즉 $y(y + 2) = 0$ 이므로 $y = 0, -2$. $f(y) = 1$ 은 $y^2 + 2y - 4 = 0$ 이므로 $y = -1 \pm \sqrt{5}$. 즉 $f(x) \in \{0, -2, -1 + \sqrt{5}, -1 - \sqrt{5}\}$ 네 값.

3단계 (f 세 번): 각 v 에 대해 $f(x) = v$, 즉 $x^2 + 2x - (3 + v) = 0$ 의 판별식은 $D = 4 + 4(3 + v) = 16 + 4v$. 네 값 v 에 대해 D 는 각각 $16, 8, 12 + 4\sqrt{5}, 12 - 4\sqrt{5}$. 마지막 값이 양수인지 확인: $12 - 4\sqrt{5} \approx 12 - 8.94 > 0$. 모두 양수이므로 각 v 마다 서로 다른 두 실근이 나오고 총 $4 \times 2 = 8$ 개. 또한 네 개의 v 값이 모두 다르고, f 가 꼭짓점 $x = -1$ 에서 최소값 -4 를 가지므로 $v > -4$ 인 이상 서로 다른 v 의 해는 서로 겹치지 않아 중복 제거도 불필요하다.

🧠 풀이 전략: 이 문제의 핵심은 '안쪽부터 바깥쪽으로' 풀지 않고 '바깥쪽부터 안쪽으로' 역방향 전개하는 것이다. 합성의 각 단계에서 해 집합이 이차방정식의 판별식 부호에 따라 결정되므로, 모든 중간 값에서 판별식이 양수이지만 확인하면 된다. 판별식 중 하나라도 0 이하였다면 개수가 줄어들 수 있다는 점이 함정이다.

💡 이 유형의 문제는 줄리아 집합 연구의 초등 버전으로, 복소평면에서 $z^2 + c$ 형태의 합성을 반복할 때 나타나는 프랙탈 패턴의 실수 단면을 이룬다.

Q72 다항식·항등식 추론

다항식 $P(x)$ 를 $x - 1$ 로 나눈 나머지는 2, $x - 2$ 로 나눈 나머지는 5, $x - 3$ 으로 나눈 나머지는 10이다. $P(x)$ 를 $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$ 으로 나눈 나머지를 $R(x)$ 라 할 때, $R(4)$ 의 값은?

- ① ① 13
- ② ② 15
- ③ ③ 17
- ④ ④ 19

☞ 정답: ③ 17

☞ 1단계: $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$ 은 3차식이므로 나머지 $R(x) = ax^2 + bx + c$ 로 놓는다.

2단계: $P(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)Q(x) + R(x)$ 이므로 $R(1) = P(1) = 2, R(2) = P(2) = 5, R(3) = P(3) = 10$.

3단계: 세 식을 연립하면 $a + b + c = 2, 4a + 2b + c = 5, 9a + 3b + c = 10$. 차례로 빼면 $3a + b = 3, 5a + b = 5$ 이고 $a = 1, b = 0, c = 1$.

4단계: $R(x) = x^2 + 1$ 이므로 $R(4) = 16 + 1 = 17$.

🧠 풀이 전략: 이 문제의 핵심은 3차식으로 나눈 나머지가 '2차 이하' 다항식이라는 점이다. 세 개의 일차 나머지 정보를 세 개의 점에서의 함숫값으로 바꿔 나머지를 결정하는 것이 관건이다.

💡 이 기법은 세 점이 주어졌을 때 이차 곡선을 유일하게 결정하는 원리와 같다.

Q73 복소수 심화

방정식 $x^2 + x + 1 = 0$ 의 한 허근을 ω 라 할 때, $\omega^{99} + \omega^{100} + \omega^{101}$ 의 값은?

- ① ① -1
- ② ② 0
- ③ ③ 1
- ④ ④ ω

정답: ② 0

1단계: $x^2 + x + 1$ 은 $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$ 의 인수이므로 $\omega^3 = 1$ 이고 $1 + \omega + \omega^2 = 0$ 이다.

2단계: $99 = 3 \cdot 33$, $100 = 3 \cdot 33 + 1$, $101 = 3 \cdot 33 + 2$ 이므로 $\omega^{99} = 1$, $\omega^{100} = \omega$, $\omega^{101} = \omega^2$.

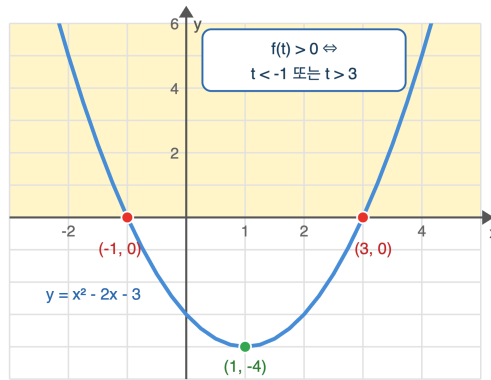
3단계: 따라서 $\omega^{99} + \omega^{100} + \omega^{101} = 1 + \omega + \omega^2 = 0$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 고차 지수를 3으로 나눈 나머지로 환원하는 것이다. $\omega^3 = 1$ 관계와 근의 성질 $1 + \omega + \omega^2 = 0$ 을 동시에 쓰는 전형적 경시형이다.

💡 ω 는 단위원 위의 1의 원시 3제곱근으로, 정삼각형의 회전 대칭과 대응한다.

Q74 이차함수 부등식 통합

이차함수 $f(x) = x^2 - 2x - 3$ 의 그래프가 오른쪽과 같을 때, 부등식 $f(x^2 - 1) > 0$ 을 만족하는 실수 x 의 범위는?



- ① ① $x < -2$ 또는 $x > 2$
- ② ② $-2 < x < 2$
- ③ ③ $x < -1$ 또는 $x > 3$
- ④ ④ $0 < x < 3$

정답: ① $x < -2$ 또는 $x > 2$

1단계: 그래프에서 $f(t) > 0$ 인 구간은 $t < -1$ 또는 $t > 3$ 이다.

2단계: $t = x^2 - 1$ 로 치환하면 $x^2 - 1 < -1$ 또는 $x^2 - 1 > 3$ 을 만족해야 한다.

3단계: $x^2 - 1 < -1 \Rightarrow x^2 < 0$ 은 해가 없고, $x^2 - 1 > 3 \Rightarrow x^2 > 4 \Rightarrow x < -2$ 또는 $x > 2$.

4단계: 따라서 답은 $x < -2$ 또는 $x > 2$. 보기 ③은 $f(x) > 0$ 의 해(함정)이므로 주의.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 합성된 입력 $x^2 - 1$ 을 하나의 덩어리 t 로 보고, 그래프에서 읽은 부호 정보를 t 에 대한 부등식으로 옮기는 것이다. 바로 x 에 대한 부등식으로 바꾸면 함정 보기 ③에 걸린다.

💡 외부 함수의 부호만 쓰면 내부 함수의 모양을 몰라도 해결되는 점이 합성부등식의 미덕이다.

Q75 고차·연립방정식

삼차방정식 $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ 의 모든 실근의 제곱의 합은?

- ① ① 12
- ② ② 13
- ③ ③ 14
- ④ ④ 15

정답: ③ 14

1단계: 세 근을 α, β, γ 라 하면 근과 계수의 관계에서 $\alpha + \beta + \gamma = 6$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 11$, $\alpha\beta\gamma = 6$.

2단계: $(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$ 를 이용.

3단계: $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 6^2 - 2 \cdot 11 = 36 - 22 = 14$.

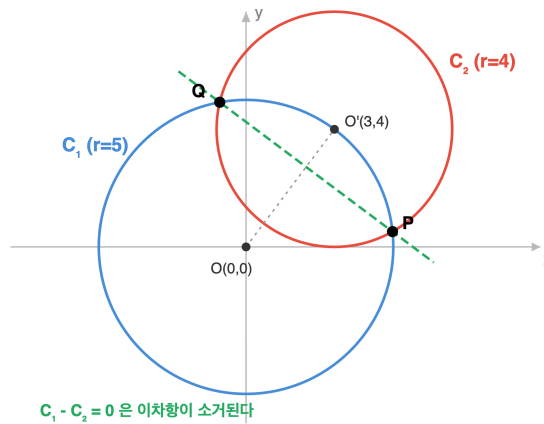
검증: 인수분해하면 $(x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0$ 이므로 근은 1, 2, 3이고 $1 + 4 + 9 = 14$. 일치.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 근을 직접 구하지 않고 대칭식을 기본대칭식으로 표현하는 것이다. 인수분해가 된다면 검증용으로만 쓴다.

근들의 모든 대칭다항식은 기본대칭식의 다항식으로 표현된다는 것이 '대칭식의 기본정리'다.

Q76 도형의 방정식 심화

두 원 $C_1: x^2 + y^2 = 25$ 와 $C_2: (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 16$ 이 서로 다른 두 점에서 만날 때, 두 교점을 지나는 직선의 방정식은?



- ① ① $3x + 4y = 17$
- ② ② $3x + 4y = 8$
- ③ ③ $6x + 8y = 25$
- ④ ④ $3x - 4y = 17$

정답: ① $3x + 4y = 17$

1단계: C_2 를 전개하면 $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 9 = 0$.

2단계: 두 원의 방정식을 빼면 이차항이 사라진다. $(x^2 + y^2 - 25) - (x^2 + y^2 - 6x - 8y + 9) = 0$.

3단계: 정리하면 $6x + 8y - 34 = 0$, 즉 $3x + 4y = 17$. 이 일차식은 두 교점 P, Q를 모두 만족하므로 P, Q를 지나는 유일한 직선이다.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 두 이차식의 차가 일차식이 된다는 점이다. 교점 좌표를 구하지 않고 '빼기'만으로 공통현 방정식을 뽑는 기법은 경시 단골이다.

이 기법은 '근축(radical axis)'이라는 이름으로 알려져 있고, 접하지 않는 두 원에 대해서도 정의된다.

Q77 집합·명제 논증

양의 실수 a, b 가 $a + b = 1$ 을 만족할 때, $\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right)$ 의 최솟값은?

- ① ① 6
- ② ② 8
- ③ ③ 9
- ④ ④ 12

정답: ③ 9

1단계: 식을 정리하면 $\frac{(a+1)(b+1)}{ab} = \frac{ab+a+b+1}{ab} = \frac{ab+2}{ab} = 1 + \frac{2}{ab}$ (여기서 $a+b=1$ 사용).

2단계: $a > 0, b > 0$ 이므로 산술·기하 평균 부등식 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 에서 $\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}$, 즉 $ab \leq \frac{1}{4}$.

3단계: 따라서 $\frac{2}{ab} \geq 8$ 이고 $1 + \frac{2}{ab} \geq 9$. 등호는 $a = b = \frac{1}{2}$ 에서 성립.

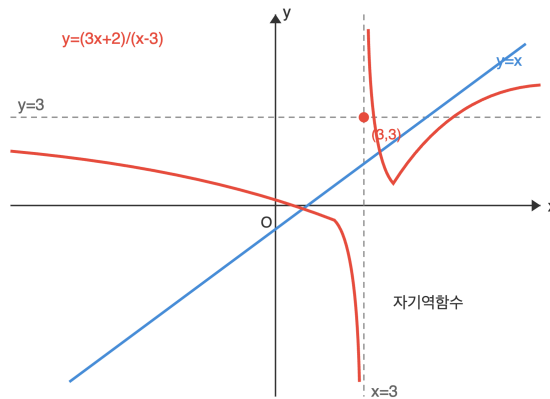
4단계: 보기 ②는 등호 조건을 잊고 $\frac{2}{ab} \geq 8$ 자체를 답으로 오인하는 함정.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 복잡한 곱을 'ab의 함수'로 단순화한 뒤 ab의 최댓값을 평균 부등식으로 잡는 것이다. 등호 조건 $a = b$ 를 확인해야 답의 정당성이 완성된다.

💡 $a + b$ 가 고정일 때 ab 는 $a = b$ 에서 최대, $|a - b|$ 가 최대일 때 최소가 된다.

Q78 함수 심화

함수 $f(x) = \frac{ax+2}{x-3}$ ($x \neq 3$)가 모든 정의역의 x 에 대해 $f(f(x)) = x$ 를 만족할 때, 상수 a 의 값은?



- ① ① -3
- ② ② 0
- ③ ③ 3
- ④ ④ 6

정답: ③ 3

1단계: $f(f(x)) = x$ 는 f 가 자기 자신의 역함수라는 뜻이다. 유리함수 $\frac{ax+b}{cx+d}$ 의 역함수는 $\frac{dx-b}{-cx+a}$ 이므로 같으려면 $a = d$ 의 부호를 맞추어 $a + d = 0$ 이 되어야 한다.

2단계: 여기서 $d = -3$ 이므로 $a - 3 = 0$, 즉 $a = 3$.

3단계: 검증. $f(x) = \frac{3x+2}{x-3}$ 이면 $f(f(x)) = \frac{3 \cdot \frac{3x+2}{x-3} + 2}{\frac{3x+2}{x-3} - 3} = \frac{3(3x+2) + 2(x-3)}{(3x+2) - 3(x-3)} = \frac{11x}{11} = x$. 성립.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 '자기역함수' 조건을 유리함수 계수에 대한 단순 관계 $a + d = 0$ 으로 변환하는 것이다. 이 관계는 분수 그래프의 대칭축이 $y = x$ 임과 동치이다.

💡 계수가 $ad - bc \neq 0$ 인 메비우스 변환 중 $a + d = 0$ 인 것은 정확히 위수 2의 변환들이다.

Q79 경우의 수 심화

6명의 학생 A, B, C, D, E, F를 원탁에 둘러앉히려 한다. C와 D는 반드시 이웃하고, A와 B는 이웃하지 않도록 앉히는 경우의 수는?

- ① ① 20
- ② ② 24
- ③ ③ 36
- ④ ④ 48

정답: ② 24

1단계: C와 D를 하나의 묶음 [CD]로 본다. 묶음 내부 배열은 CD, DC 두 가지. 이 묶음을 포함한 5개 대상을 원탁에 앉히는 방법은 $(5 - 1)! = 24$. 따라서 'CD 이웃' 경우는 $24 \times 2 = 48$.

2단계: 이 48가지 중에서 'A와 B도 이웃'인 경우를 빼야 한다. [CD]와 [AB] 두 묶음과 E, F까지 4개 대상을 원탁에 앉히는 방법은 $(4 - 1)! = 6$ 이고, 묶음 내부가 각각 2가지이므로 $6 \times 2 \times 2 = 24$.

3단계: 따라서 C,D 이웃이면서 A,B 이웃하지 않는 경우의 수는 $48 - 24 = 24$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 '반드시 이웃'은 묶음 기법으로, '이웃하지 않음'은 여사건으로 처리하는 두 전략을 한 문제에서 동시에 쓰는 것이다. 원순열의 기준(한 명 고정)을 묶음에도 일관되게 적용해야 중복 계산을 피한다.

💡 원순열에서 한 사람을 고정하는 발상은 '회전 대칭을 하나의 동치류로 본다'는 군론의 첫걸음이다.

Q80 경시·통합 문제

포물선 $y = x^2$ 과 원 $x^2 + (y - a)^2 = 1$ 이 서로 다른 네 점에서 만나도록 하는 실수 a 의 값의 범위는?

- ① ① $1 < a < \frac{5}{4}$
- ② ② $\frac{1}{2} < a < \frac{5}{4}$
- ③ ③ $-1 < a < 1$ 또는 $a > 1$
- ④ ④ $a > \frac{5}{4}$

정답: ① $1 < a < \frac{5}{4}$

1단계: 포물선에서 $x^2 = y$ 이므로 원의 식에 대입하면 $y + (y - a)^2 = 1$. 전개하여 $y^2 - (2a - 1)y + (a^2 - 1) = 0$ 을 얻는다.

2단계: 각 $y > 0$ 에 대해 $x = \pm \sqrt{y}$ 로 두 교점이 생기므로, 교점이 4개하려면 이 이차방정식이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다.

3단계: 세 조건을 모두 만족해야 한다. (가) 실근 조건 $(2a - 1)^2 - 4(a^2 - 1) > 0 \Rightarrow -4a + 5 > 0 \Rightarrow a < \frac{5}{4}$. (나) 두 근의 합 > 0 :

$2a - 1 > 0 \Rightarrow a > \frac{1}{2}$. (다) 두 근의 곱 > 0 : $a^2 - 1 > 0 \Rightarrow a < -1$ 또는 $a > 1$.

4단계: 교집합을 취하면 $1 < a < \frac{5}{4}$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 '4개 교점'을 'y에 대한 이차식의 두 양의 실근'으로 정확하게 번역하는 것이다. 부호 조건을 빠뜨리면 ②나 ③의 오답 경로에 끌려간다.

💡 $a = \frac{5}{4}$ 일 때 원은 포물선에 네 점에서 만나다가 두 쌍이 두 접점으로 합쳐진다.



고1 수학 심화

총 40문제 · 문제와 정답·풀이 포함

Q81 다항식·항등식 추론

사차다항식 $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ 가 $(x - 1)^2$ 으로 나누어떨어지고, $P(2) = 0$ 이며 $P(-1) = 16$ 을 만족할 때, $a + b + c + d$ 의 값은?

- ① ① -3
- ② ② -1
- ③ ③ 0
- ④ ④ 3

정답: ② -1

1단계: $(x - 1)^2$ 으로 나누어떨어지고 $P(2) = 0$ 이므로 $P(x) = (x - 1)^2(x - 2)(x - k)$ 로 쓸 수 있다 (최고차항 1 일치).

2단계: $P(-1) = (-2)^2 \cdot (-3) \cdot (-1 - k) = 12(1 + k) = 16$ 에서 $k = \frac{1}{3}$.

3단계: $(x - 1)^2$ 인수에서 $P(1) = 0$ 이 이미 보장된다. 한편 $P(1) = 1 + a + b + c + d$ 이므로 $1 + a + b + c + d = 0$, 즉 $a + b + c + d = -1$.

4단계: 실제로 k 를 구하지 않아도 $(x - 1)^2$ 이 인수라는 사실만으로 $a + b + c + d$ 를 결정할 수 있다는 점이 이 문제의 묘미이다.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 ' $(x - 1)^2$ 이 인수'라는 정보가 $P(1) = 0$ 을 함의한다는 것과, 묻고 있는 양 $a + b + c + d$ 가 정확히 $P(1) - 1$ 이라는 우연의 일치를 읽어내는 것이다. 나머지 조건 $P(2) = 0$ 과 $P(-1) = 16$ 은 문제의 정합성 보장용이다.

💡 질문이 요구하는 양을 다항식의 특정 값으로 재해석하면, 계수를 다 구하지 않고도 답이 나오는 경우가 많다.

Q82 함수 심화

함수 $y = \sqrt{4 - x^2} + x$ ($-2 \leq x \leq 2$)의 치역을 구하면?

- ① ① $[-2, 2]$
- ② ② $[0, 2\sqrt{2}]$
- ③ ③ $[-2, 2\sqrt{2}]$
- ④ ④ $[-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$

정답: ③ $[-2, 2\sqrt{2}]$

1단계: $x = 2\cos\theta$ ($0 \leq \theta \leq \pi$)로 치환하면 $\sqrt{4 - x^2} = 2\sin\theta$ 이므로 $y = 2\sin\theta + 2\cos\theta = 2\sqrt{2} \sin(\theta + \frac{\pi}{4})$.

2단계: $\theta \in [0, \pi]$ 이면 $\theta + \frac{\pi}{4} \in [\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$ 이고 이 구간에서 \sin 의 값의 범위는 $[-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$.

3단계: 따라서 y 의 범위는 $[2\sqrt{2} \cdot (-\frac{\sqrt{2}}{2}), 2\sqrt{2} \cdot 1] = [-2, 2\sqrt{2}]$.

검산: 끝점 $x = -2$ 에서 $y = -2$, $x = 2$ 에서 $y = 2$, 내부 최댓값은 $x = \sqrt{2}$ 에서 $y = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$. 최솟값 -2 , 최댓값 $2\sqrt{2}$ 확인.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 $\sqrt{4 - x^2}$ 를 보고 단위원의 파라미터화를 떠올리는 것이다. 제공된 함수의 제약을 각도 변수로 바꾸면 사인 합성 공식 한 번으로 치역이 뚜렷해진다.

💡 $a\sin\theta + b\cos\theta$ 의 최댓값이 항상 $\sqrt{a^2 + b^2}$ 라는 사실은 내적의 코시-슈바르츠 부등식의 특수한 경우이다.

Q83 다항식·항등식 추론

다항식 $f(x)$ 를 $x - 2$ 로 나눈 나머지는 5이고, $x + 1$ 로 나눈 나머지는 -4 이다. 이때 $f(x)$ 를 $(x - 2)(x + 1)$ 로 나눈 나머지를 구하시오.

- ① ① $3x - 1$
- ② ② $3x + 1$
- ③ ③ $-3x + 1$
- ④ ④ $x + 3$

정답: ① $3x - 1$

1단계: $f(x)$ 를 이차식 $(x - 2)(x + 1)$ 로 나눈 나머지는 일차 이하이므로 $R(x) = ax + b$ 로 놓는다. 즉 $f(x) = (x - 2)(x + 1)Q(x) + ax + b$. **2단계:** 나머지정리에 의해 $f(2) = 2a + b = 5$, $f(-1) = -a + b = -4$. **3단계:** 두 식을 연립하면 $3a = 9$ 에서 $a = 3$, $b = -1$. 따라서 나머지는 $3x - 1$ 이다.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 이차식으로 나눈 나머지가 일차 이하임을 이용해 $ax + b$ 로 놓고, 두 대입값 조건에서 연립방정식을 세우는 것이다.

이러한 '연립 나머지' 문제는 수학에서 중국인의 나머지 정리(CRT)의 고교 버전이라 할 수 있다.

Q84 복소수 심화

$z = \frac{1+i}{1-i}$ 일 때, z^{2026} 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

- ① ① 1
- ② ② -1
- ③ ③ i
- ④ ④ $-i$

정답: ② -1

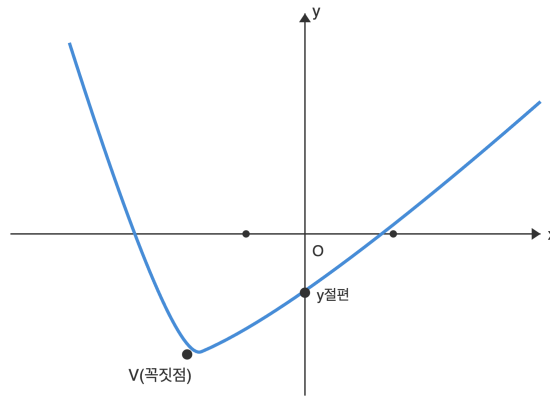
1단계: 분모를 실수화한다. $z = \frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2} = i$. **2단계:** 허수단위 i 의 거듭제곱은 $i, -1, -i, 1$ 의 4개가 반복된다. 즉 $i^{4k} = 1$. **3단계:** $2026 = 4 \cdot 506 + 2$ 이므로 $z^{2026} = i^{2026} = i^2 = -1$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 복잡한 분수형 복소수를 먼저 한 개의 허수단위로 축약한 뒤, 지수를 4로 나눈 나머지로 환산해 값을 결정하는 것이다.

가우스 평면에서 i 를 곱하는 것은 원점 중심 90° 회전과 같다.

Q85 이차함수·부등식 통합

이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 그림과 같을 때, 보기 중 항상 옳은 것은?



- ① ① $abc > 0$
- ② ② $abc < 0$
- ③ ③ $a + b + c < 0$
- ④ ④ $b^2 - 4ac < 0$

☞ 정답: ② $abc < 0$

📖 1단계: 그래프가 아래로 볼록하므로 이차항 계수 $a > 0$. 2단계: 꼭짓점의 x 좌표 $-\frac{b}{2a}$ 가 음수이고 $a > 0$ 이므로 $-b < 0$, 즉 $b > 0$. 3단계: y 절편 $f(0) = c$ 가 음수이므로 $c < 0$. 따라서 $abc = (+)(+)(-) < 0$. 참고로 그래프가 x 축과 두 점에서 만나므로 $b^2 - 4ac > 0$ (④ 거짓).

🧠 풀이 전략: 이 문제의 핵심은 이차함수 그래프의 볼록 방향, 꼭짓점의 위치, y 절편의 부호라는 세 가지 기하적 정보에서 계수 a, b, c 의 부호를 각각 읽어내는 것이다.

Q86 고차·연립방정식

연립부등식 $\begin{cases} x^2 - 5x + 4 \leq 0 \\ x^2 - 3x - 4 \geq 0 \end{cases}$ 의 해는?

- ① ① $x = 1$
- ② ② $x = 4$
- ③ ③ $1 \leq x \leq 4$
- ④ ④ 해 없음

☞ 정답: ② $x = 4$

📖 1단계: $x^2 - 5x + 4 \leq 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 4) \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 4$. 2단계: $x^2 - 3x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 4)(x + 1) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -1$ 또는 $x \geq 4$. 3단계: 두 해집합의 교집합을 구하면 $[1, 4] \cap ((-\infty, -1] \cup [4, \infty)) = \{4\}$. 따라서 해는 $x = 4$.

🧠 풀이 전략: 이 문제의 핵심은 두 부등식의 해를 각각 구한 뒤 경계값 $x = 4$ 에서 등호 조건이 동시에 성립하는 단일해가 됨을 놓치지 않는 것이다.

Q87 집합·명제 논증

두 조건 $p: x^2 - 3x + 2 \leq 0$, $q: |x - a| \leq 1$ 에 대하여 p 가 q 이기 위한 충분조건이 되도록 하는 실수 a 의 값의 범위는?

- ① ① $a = 1$
- ② ② $a \geq 1$
- ③ ③ $1 \leq a \leq 2$
- ④ ④ $0 \leq a \leq 3$

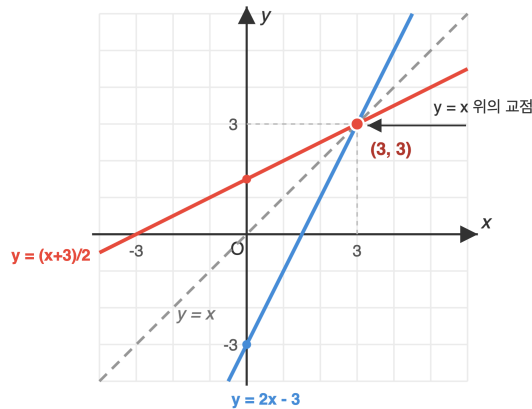
정답: ③ $1 \leq a \leq 2$

1단계: 조건 p 의 진리집합은 $(x - 1)(x - 2) \leq 0$ 이므로 $P = [1, 2]$. 2단계: 조건 q 의 진리집합은 $-1 \leq x - a \leq 1$ 이므로 $Q = [a - 1, a + 1]$. 3단계: ' p 이면 q '(즉 $p \Rightarrow q$)가 참이 될 필요충분조건은 $P \subset Q$. 따라서 $a - 1 \leq 1$ 이고 $a + 1 \geq 2$ 이므로 $a \geq 1$. 정리하면 $1 \leq a \leq 2$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 두 조건을 각각 진리집합으로 바꾸고, '충분조건'을 집합의 포함관계 $P \subset Q$ 로 환원해 경계에서의 부등호를 정확히 처리하는 것이다.

Q88 함수 심화

일차함수 $f(x) = 2x - 3$ 의 그래프와 그 역함수 $f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점의 좌표는?



- ① ① $(1, -1)$
- ② ② $(2, 1)$
- ③ ③ $(3, 3)$
- ④ ④ $(-3, -3)$

정답: ③ $(3, 3)$

1단계: $f(x) = 2x - 3$ 은 기울기가 2로 1이 아니므로 일대일대응이고 역함수가 존재한다. 2단계: 일차함수와 그 역함수의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대해 대칭이며, 기울기가 1이 아닌 경우 두 그래프의 교점은 반드시 직선 $y = x$ 위에 있다. 3단계: $f(x) = x$ 로 놓으면 $2x - 3 = x \Rightarrow x = 3$. 따라서 교점은 $(3, 3)$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 함수와 그 역함수가 $y = x$ 에 대해 대칭이라는 성질을 이용해 교점을 찾는 $f(x) = x$ 조건으로 바꾸는 것이다.

Q89 경우의 수 심화

서로 다른 8명이 원형의 탁자에 둘러앉을 때, 특정한 두 사람 A, B가 서로 이웃하지 않도록 앉는 경우의 수는?

- ① ① 3600
- ② ② 2400
- ③ ③ 1440
- ④ ④ 5040

정답: ① 3600

1단계: 8명이 원탁에 앉는 전체 원순열의 수는 $(8 - 1)! = 7! = 5040$. **2단계:** A, B가 이웃하는 경우의 수는 두 사람을 한 덩어리로 묶어 7개를 원형으로 배열하므로 $(7 - 1)! = 6! = 720$, 덩어리 내부에서 A, B의 자리를 바꾸는 경우 2를 곱해 $720 \times 2 = 1440$. **3단계:** 여사건 원리로 이웃하지 않는 경우의 수는 $5040 - 1440 = 3600$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 원순열의 총수에서 두 사람이 이웃하는 여사건을 빼는 전략이며, 원순열 개수 $(n - 1)!$ 과 덩어리 내부 자리교환을 정확히 적용하는 것이다.

국제 외교 의전에서 '서로 이웃하면 안 되는' 제약이 있는 좌석 배치는 실제로 이런 원순열 문제와 같은 논리로 계산된다.

Q90 경사·통합 문제

자연수 k 에 대하여 $\lfloor \sqrt{k} \rfloor$ 는 \sqrt{k} 를 넘지 않는 최대의 정수를 나타낸다. 이때 $\sum_{k=1}^{15} \lfloor \sqrt{k} \rfloor$ 의 값은?

- ① ① 32
- ② ② 34
- ③ ③ 36
- ④ ④ 45

정답: ② 34

1단계: $m^2 \leq k < (m + 1)^2$ 인 자연수 k 에서 $\lfloor \sqrt{k} \rfloor = m$ 이다. **2단계:** 해당 범위의 k 개수는 $(m + 1)^2 - m^2 = 2m + 1$. $k = 1, 2, 3$ 일 때 값 1 (3개), $k = 4, \dots, 8$ 일 때 값 2 (5개), $k = 9, \dots, 15$ 일 때 값 3 (7개). **3단계:** 합은 $3 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 7 \cdot 3 = 3 + 10 + 21 = 34$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 $\lfloor \sqrt{k} \rfloor$ 값이 같아지는 구간이 연속된 제곱수 사이임을 알아보고, 구간별로 상수값을 뽑아 곱의 합으로 정리하는 것이다.

Q91 다항식·항등식 추론

$(x + 1)^{2026} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2026}x^{2026}$ 일 때, $a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{2026}$ 의 값은?

- ① ① 2^{2024}
- ② ② 2^{2025}
- ③ ③ 2^{2026}
- ④ ④ $2^{2026} - 1$

정답: ② 2^{2025}

1단계: 주어진 항등식에 $x = 1$ 을 대입하면 좌변은 2^{2026} , 우변은 모든 계수의 합이므로 $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{2026} = 2^{2026}$. **2단계:** $x = -1$ 을 대입하면 좌변은 $0^{2026} = 0$, 우변은 부호가 교대하여 $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + a_{2026} = 0$. **3단계:** 두 식을 번끼리 더하면 홀수 차수 항이 모두 소거되어 $2(a_0 + a_2 + \dots + a_{2026}) = 2^{2026}$. 따라서 구하는 값은 $\frac{2^{2026}}{2} = 2^{2025}$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 항등식에 $x = 1$ 과 $x = -1$ 을 대입해 얻은 두 값의 합(홀수항 소거)을 이용해 짝수 차수 항만을 분리해 내는 것이다.

Q92 복소수 심화

0이 아닌 복소수 z 가 $z + \frac{1}{z} = \sqrt{3}$ 을 만족할 때, $z^{12} + \frac{1}{z^{12}}$ 의 값은?

- ① ① -2
- ② ② -1
- ③ ③ 1
- ④ ④ 2

정답: ④ 2

1단계: $\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 = z^2 + 2 + \frac{1}{z^2}$ 이므로 $z^2 + \frac{1}{z^2} = (\sqrt{3})^2 - 2 = 1$. 2단계: $\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right)^2 = z^4 + 2 + \frac{1}{z^4}$ 이므로 $z^4 + \frac{1}{z^4} = 1^2 - 2 = -1$. 3단계: 항등식 $\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right)\left(z^4 + \frac{1}{z^4}\right) = z^6 + \frac{1}{z^6} + z^2 + \frac{1}{z^2}$ 에서 $1 \cdot (-1) = \left(z^6 + \frac{1}{z^6}\right) + 1$, 즉 $z^6 + \frac{1}{z^6} = -2$. 4단계: $\left(z^6 + \frac{1}{z^6}\right)^2 = z^{12} + 2 + \frac{1}{z^{12}}$ 이므로 $z^{12} + \frac{1}{z^{12}} = (-2)^2 - 2 = 2$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 $z^n + \frac{1}{z^n}$ 형태의 점화 관계를 세워 제곱 조작을 반복 적용함으로써 지수를 단계적으로 키우는 것이다.

이러한 재귀는 '체비셰프 다항식' 구조와 밀접하며 대학 수학·신호처리에서 자주 등장한다.

Q93 경우의 수 심화

방정식 $x + y + z = 10$ 을 만족하는 정수해 (x, y, z) 중 $x \geq 2, y \geq 1, z \geq 0$ 을 모두 만족하는 순서쌍의 개수는?

- ① ① 28
- ② ② 36
- ③ ③ 45
- ④ ④ 55

정답: ② 36

1단계: 제한 조건을 없애기 위해 $x' = x - 2 \geq 0, y' = y - 1 \geq 0, z' = z \geq 0$ 으로 치환한다. 2단계: 원래 방정식 $x + y + z = 10$ 은 $(x' + 2) + (y' + 1) + z' = 10$, 즉 $x' + y' + z' = 7$ (세 변수 모두 음이 아닌 정수)로 바뀐다. 3단계: 서로 다른 3개 변수에 합이 7이 되도록 음이 아닌 정수값을 분배하는 경우의 수는 중복조합으로 ${}_3H_7 = {}_{7+3-1}C_{3-1} = {}_9C_2 = \frac{9 \cdot 8}{2} = 36$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 변수에 걸린 하한 조건을 치환으로 0 이상의 조건으로 평행이동시킨 뒤, 중복조합 공식을 적용할 수 있는 표준 형태로 바꾸는 것이다.

Q94 다항식·항등식 추론

다항식 $f(x) = x^{2026}$ 을 $x^2 - x + 1$ 로 나눈 나머지를 구하시오.

- ① ① $-x$
- ② ② $x - 1$
- ③ ③ $-x + 1$
- ④ ④ x

정답: ①

1단계: 나누는 식 $x^2 - x + 1 = 0$ 의 근 α 는 $\alpha^2 = \alpha - 1$ 을 만족한다. 2단계:

$\alpha^3 = \alpha \cdot \alpha^2 = \alpha(\alpha - 1) = \alpha^2 - \alpha = (\alpha - 1) - \alpha = -1$. 따라서 $\alpha^6 = 1$ 로 주기 6이 성립한다. 3단계: $2026 = 6 \cdot 337 + 4$ 이므로 $\alpha^{2026} = (\alpha^6)^{337} \cdot \alpha^4 = \alpha^4 = \alpha \cdot \alpha^3 = \alpha \cdot (-1) = -\alpha$. 따라서 $f(x)$ 를 $x^2 - x + 1$ 로 나눈 나머지는 $-x$ 이다.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 나누는 식이 0이 되는 근에서 $\alpha^3 = -1$ 이라는 관계식을 유도하여, 거대한 지수 2026을 주기 6으로 축소하는 것이다. 직접 나눗셈은 불가능하지만 근의 관계식만 알면 거듭제곱을 지수 4까지 줄일 수 있다.

$x^2 - x + 1 = 0$ 의 근은 6차 단위근 중 두 개로, 복소평면에서 정육각형의 꼭짓점에 위치한다.

Q95 복소수 심화

복소수 z 가 $z + \frac{1}{z} = 1$ 을 만족할 때, $z^{100} + \frac{1}{z^{100}}$ 의 값을 구하시오.

- ① ① -2
- ② ② -1
- ③ ③ 0
- ④ ④ 1

정답: ②

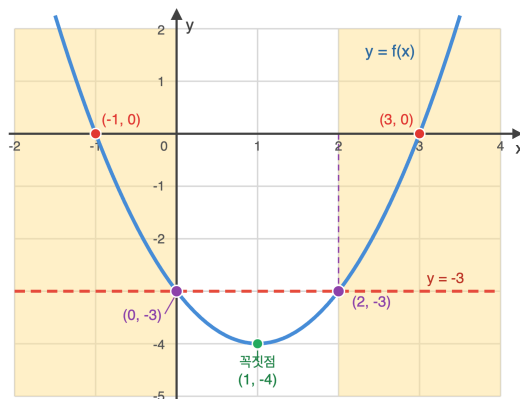
1단계: $|z| = 1$ 로 두고 $z = \cos\theta + i\sin\theta$ 로 놓으면 $z + \frac{1}{z} = 2\cos\theta = 1$, 즉 $\cos\theta = \frac{1}{2}$ 이므로 $\theta = \pm \frac{\pi}{3}$. **2단계:** 일반적으로 $z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos(n\theta)$ 가 성립한다. **3단계:** $z^{100} + \frac{1}{z^{100}} = 2\cos(100\theta) = 2\cos\left(\frac{100\pi}{3}\right)$. $\frac{100\pi}{3} = 33\pi + \frac{\pi}{3} = 16 \cdot 2\pi + \pi + \frac{\pi}{3}$ 이므로 $\cos\left(\frac{100\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$. 따라서 값은 $2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 $z + 1/z$ 형태의 식에서 $|z| = 1$ 임을 이용해 각도로 치환하고, $z^n + 1/z^n$ 이 $2\cos(n\theta)$ 로 표현된다는 일반화 공식을 활용하는 것이다. 각도가 $\pi/3$ 이므로 주기 6에 맞춰 큰 지수를 환원한다.

💡 $z^n + 1/z^n$ 은 제1종 체비셰프 다항식으로 표현되는 재귀 수열과 밀접하게 관련되어 있다.

Q96 이차함수·부등식 통합

이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 아래 그림과 같이 x 축과 두 점 $(-1, 0), (3, 0)$ 에서 만나고, 꼭짓점의 y 좌표가 -4 이다. 부등식 $f(x) \geq -3$ 의 해를 구하시오.



- ① ① $x \leq -1$ 또는 $x \geq 3$
- ② ② $x \leq 0$ 또는 $x \geq 2$
- ③ ③ $0 \leq x \leq 2$
- ④ ④ $-1 \leq x \leq 3$

정답: ②

1단계: x 축 교점이 $-1, 3$ 이므로 $f(x) = a(x+1)(x-3)$ 로 놓을 수 있다. 꼭짓점 x 좌표는 $x = 1$ 이고, $f(1) = a(2)(-2) = -4a$ 가 -4 이므로 $a = 1$. 따라서 $f(x) = (x+1)(x-3) = x^2 - 2x - 3$. **2단계:** 부등식 $f(x) \geq -3$ 은 $x^2 - 2x - 3 \geq -3$, 즉 $x^2 - 2x \geq 0$ 으로 정리된다. **3단계:** $x(x-2) \geq 0$ 을 풀면 $x \leq 0$ 또는 $x \geq 2$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 그래프의 기하학적 정보(두 근과 꼭짓점 y 좌표)만으로 이차식을 완전히 복원하고, 상수항 이동으로 부등식을 인수분해 가능한 형태로 변형하는 것이다. 오답 ④는 $f(x) \leq 0$ 의 해여서 방향 혼동을 유도한다.

💡 이차함수의 두 근과 꼭짓점 높이만 알면 함수식이 유일하게 결정된다. 이는 세 개의 독립 조건이 이차함수의 세 계수 a, b, c 를 결정하기 때문이다.

Q97 고차·연립방정식

실수 x, y, z 가 $x + y + z = 6$, $x^2 + y^2 + z^2 = 14$, $xyz = 6$ 을 모두 만족할 때, $x^3 + y^3 + z^3$ 의 값을 구하시오.

- ① 18
- ② 24
- ③ 30
- ④ 36

정답: ④

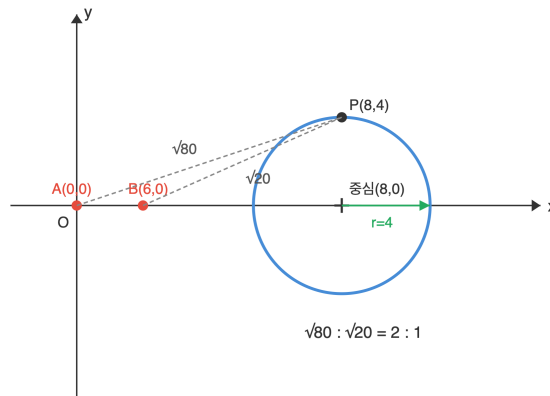
1단계: 기본 대칭식 $xy + yz + zx$ 를 구한다. $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$ 에서 $36 = 14 + 2(xy + yz + zx)$, 즉 $xy + yz + zx = 11$. **2단계:** 뉴턴 항등식 $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2) - (xy + yz + zx)$ 를 이용. 우변 $= 6 \cdot (14 - 11) = 18$. **3단계:** $x^3 + y^3 + z^3 = 18 + 3xyz = 18 + 18 = 36$. (검증: x, y, z 는 $t^3 - 6t^2 + 11t - 6 = (t - 1)(t - 2)(t - 3) = 0$ 의 근 1, 2, 3이고 $1 + 8 + 27 = 36$.)

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 세 실수를 직접 구하지 않고도, 기본 대칭식 간 항등식을 이용해 세제곱의 합을 구할 수 있다는 것이다. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ 항등식은 대칭식 계산의 핵심 도구이다.

💡 뉴턴 항등식은 거듭제곱의 합 $p_k = x^k + y^k + z^k$ 와 기본 대칭식을 연결하며, 모든 차수로 일반화된다.

Q98 도형의 방정식 심화

두 점 $A(0, 0)$, $B(6, 0)$ 에 대해 $PA:PB = 2:1$ 을 만족하는 점 P 의 자취가 나타내는 도형의 넓이를 구하시오.



- ① 8π
- ② 12π
- ③ 16π
- ④ 20π

정답: ③

1단계: $P(x, y)$ 로 놓으면 $PA^2 = x^2 + y^2$, $PB^2 = (x - 6)^2 + y^2$. 거리 비 2:1이므로 제곱비는 4:1, 즉 $PA^2 = 4PB^2$. **2단계:** $x^2 + y^2 = 4\{(x - 6)^2 + y^2\} = 4x^2 - 48x + 144 + 4y^2$. 정리하면 $3x^2 - 48x + 144 + 3y^2 = 0$, 양변을 3으로 나누면 $x^2 - 16x + 48 + y^2 = 0$. **3단계:** 완전제곱으로 $(x - 8)^2 + y^2 = 64 - 48 = 16$. 중심 (8, 0), 반지름 4인 원이므로 넓이는 $\pi \cdot 4^2 = 16\pi$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 두 정점에 대한 거리의 비가 일정한 점들의 자취는 원(아폴로니우스 원)임을 대수적으로 유도하는 것이다. 거리 조건을 제곱해 근호를 없앤 뒤 완전제곱으로 중심과 반지름을 찾는다.

💡 거리 비가 1:1이면 자취는 수직이등분선(직선)이고, 그 외의 모든 비율에서는 원이 된다. 이는 원이 직선의 일반화라는 아이디어의 한 예이다.

Q99 집합·명제 논증

자연수 전체 집합에서 두 조건 $p: n$ 은 12의 배수, $q: n$ 은 a 의 배수 (a 는 자연수)에 대해 p 가 q 이기 위한 충분조건이 되도록 하는 a 의 모든 값의 합을 구하시오.

- ① ① 24
- ② ② 28
- ③ ③ 36
- ④ ④ 42

정답: ②

1단계: $p \rightarrow q$ 가 참이라면 p 의 진리집합 P 가 q 의 진리집합 Q 의 부분집합이어야 한다. 즉 $P \subseteq Q$. 2단계: $P = \{12, 24, 36, \dots\}$ (12의 배수 전체), $Q = \{a, 2a, 3a, \dots\}$. $12 \in Q$ 이라면 a 가 12의 약수여야 한다. 또한 a 가 12의 약수이면 12의 모든 배수가 a 의 배수가 되므로 $P \subseteq Q$ 가 성립한다. 3단계: 12의 양의 약수는 1, 2, 3, 4, 6, 12이고 이들의 합은 $1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 배수 집합 사이의 포함 관계를 약수 관계로 번역하는 것이다. $\{a$ 의 배수 $\} \supseteq \{b$ 의 배수 $\}$ 는 a 가 b 의 약수임과 동치이다. 이 관계를 모르면 무한 집합을 직접 다뤄야 해서 어려워진다.

💡 n 의 양의 약수의 합을 $\sigma(n)$ 으로 쓰면, 12의 경우 $\sigma(12) = 28$ 이다. 28은 완전수 (자신을 제외한 약수의 합이 자기 자신)인 것으로 유명하다.

Q100 함수 심화

함수 $f(x) = \frac{x}{1+x}$ ($x \neq -1$)에 대해 $f_1 = f, f_{n+1} = f \circ f_n$ 으로 정의할 때, $f_{10}(2)$ 의 값을 구하시오.

- ① ① $\frac{1}{20}$
- ② ② $\frac{2}{21}$
- ③ ③ $\frac{1}{21}$
- ④ ④ $\frac{2}{19}$

정답: ②

1단계: $f_2(x) = f(f(x)) = \frac{\frac{x}{1+x}}{1+\frac{x}{1+x}} = \frac{\frac{x}{1+x}}{\frac{1+x+x}{1+x}} = \frac{x}{1+2x}$. 2단계: 같은 방법으로 $f_3(x) = f(f_2(x)) = \frac{\frac{x}{1+2x}}{1+\frac{x}{1+2x}} = \frac{x}{1+3x}$. 귀납

적으로 $f_n(x) = \frac{x}{1+nx}$ 임을 확인. (수학적 귀납법: $f_{n+1}(x) = f(f_n(x)) = \frac{\frac{x}{1+nx}}{1+\frac{x}{1+nx}} = \frac{x}{1+(n+1)x}$ 성립.) 3단계:

$$f_{10}(2) = \frac{2}{1+10 \cdot 2} = \frac{2}{21}$$

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 처음 두세 번 합성한 결과에서 규칙을 발견하고 일반항을 추측한 뒤, 이를 귀납적으로 검증하는 것이다. 분모에 반복 횟수가 계수로 나타나는 패턴이 포인트.

💡 $f(x) = x/(1+x)$ 는 선형 분수 변환 (뫼비우스 변환)의 특수한 경우로, 합성 시 행렬 곱으로 간단히 표현할 수 있다.

Q101 경우의 수 심화

1부터 10까지의 자연수 중 서로 다른 세 수를 뽑을 때, 뽑힌 세 수의 합이 홀수가 되는 경우의 수를 구하시오.

- ① ① 50
- ② ② 55
- ③ ③ 60
- ④ ④ 75

정답: ③

1단계: 1부터 10까지 중 홀수는 {1, 3, 5, 7, 9} (5개), 짝수는 {2, 4, 6, 8, 10} (5개). 2단계: 세 수의 합이 홀수가 되는 조합은 '홀수 3개' 또는 '홀수 1개와 짝수 2개'의 두 가지 경우이다 (나머지 '홀2짝1', '홀0짝3'은 합이 짝수). 3단계: 홀수 3개: ${}_5C_3 = 10$. 홀수 1개와 짝수 2개: ${}_5C_1 \times {}_5C_2 = 5 \times 10 = 50$. 총 $10 + 50 = 60$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 합의 짝홀 성질이 홀수 개수의 짝홀에만 의존한다는 것이다. 모든 경우 (${}_{10}C_3 = 120$)를 나열하지 않고 패리티만으로 경우를 분류한다.

💡 홀수 5개와 짝수 5개가 균형 잡혀 있을 때, 세 수의 합이 홀수일 확률과 짝수일 확률은 정확히 절반씩 나뉜다 ($60 + 60 = 120$).

Q102 경사·통합 문제

실수 x, y 가 $x^2 + y^2 = 1$ 을 만족할 때, $2x + 3y$ 의 최댓값과 최솟값의 곱을 구하시오.

- ① ① -13
- ② ② $-\sqrt{13}$
- ③ ③ 0
- ④ ④ 13

정답: ①

1단계: 코시-슈바르츠 부등식에 의해 $(2x + 3y)^2 \leq (2^2 + 3^2)(x^2 + y^2) = 13 \cdot 1 = 13$. 2단계: 따라서 $-\sqrt{13} \leq 2x + 3y \leq \sqrt{13}$. 등호는 $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$ 일 때 성립하며 실제로 $x^2 + y^2 = 1$ 위의 점 $\left(\pm \frac{2}{\sqrt{13}}, \pm \frac{3}{\sqrt{13}} \right)$ 에서 최댓값과 최솟값을 얻는다. 3단계: 최댓값은 $\sqrt{13}$, 최솟값은 $-\sqrt{13}$ 이므로 곱은 $\sqrt{13} \cdot (-\sqrt{13}) = -13$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 제약조건 $x^2 + y^2 = 1$ 위에서 일차식의 최댓/최솟값을 코시 부등식으로 한 번에 구하는 것이다. 기하학적으로는 원과 직선의 거리 해석으로도 접근할 수 있지만 코시 부등식이 가장 간결하다.

💡 일반적으로 $x^2 + y^2 = r^2$ 위에서 $ax + by$ 의 최댓값은 $r\sqrt{a^2 + b^2}$ 이며, 이는 벡터 내적의 기하적 해석과 일치한다.

Q103 이차함수·부등식 통합

이차방정식 $x^2 + 2ax + 3a = 0$ 의 서로 다른 두 실근이 모두 -1보다 크도록 하는 실수 a 의 범위를 구하시오.

- ① ① $-1 < a < 0$
- ② ② $-1 < a < 3$
- ③ ③ $a > -1$
- ④ ④ $0 < a < 3$

정답: ①

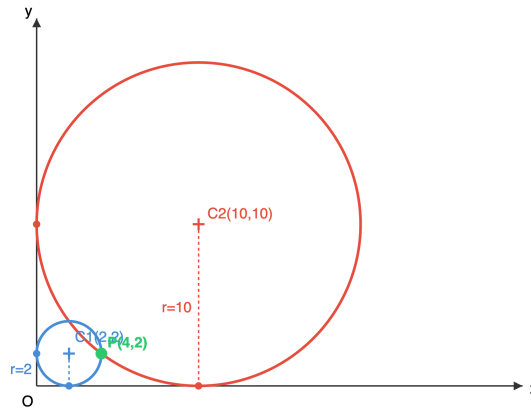
$f(x) = x^2 + 2ax + 3a$ 로 놓자. 두 서로 다른 실근이 모두 -1보다 크다는 조건은 세 가지로 정리된다. 1단계 (실근 존재): 판정식 $D/4 = a^2 - 3a > 0$, 즉 $a(a - 3) > 0$ 이므로 $a < 0$ 또는 $a > 3$. 2단계 (경계값 조건): 아래로 볼록하므로 $f(-1) > 0$ 이어야 함. $f(-1) = 1 - 2a + 3a = 1 + a > 0$, 즉 $a > -1$. 3단계 (축 조건): 대칭축 $x = -a$ 가 -1보다 커야 하므로 $-a > -1$, 즉 $a < 1$. 세 조건 $\{a < 0 \text{ 또는 } a > 3\} \cap \{a > -1\} \cap \{a < 1\}$ 의 교집합은 $-1 < a < 0$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 이차방정식의 두 근이 주어진 값보다 크다는 조건을 $f(-1)$ 의 부호, 축의 위치, 실근 존재성의 세 조건으로 번역하는 것이다. 세 조건 중 하나라도 놓치면 오답 영역이 섞여 들어온다.

💡 근의 위치 문제는 함수값 부호, 축의 위치, 판정식의 삼각 관계로 완전히 결정되며, 이는 연속함수의 중간값 정리를 이차함수에 특화된 결과이다.

Q104 도형의 방정식 심화

제1사분면에 있는 원이 x축과 y축에 모두 접하고 점 (4, 2)를 지날 때, 조건을 만족하는 두 원의 반지름의 곱을 구하시오.



- ① ① 10
- ② ② 12
- ③ ③ 18
- ④ ④ 20

정답: ④

1단계: 제1사분면에서 x축과 y축에 접하는 원의 중심은 (r, r) 형태이며 반지름은 r 이다. 원의 방정식은 $(x - r)^2 + (y - r)^2 = r^2$.
2단계: 점 $(4, 2)$ 가 원 위에 있으므로 $(4 - r)^2 + (2 - r)^2 = r^2$. 전개하면 $16 - 8r + r^2 + 4 - 4r + r^2 = r^2$, 즉 $r^2 - 12r + 20 = 0$.
3단계: 인수분해하면 $(r - 2)(r - 10) = 0$ 이므로 $r = 2$ 또는 $r = 10$. 두 반지름의 곱은 $2 \times 10 = 20$. (근과 계수의 관계로도 바로 곱이 20임을 알 수 있다.)

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 x축, y축에 동시에 접한다는 조건이 중심 좌표를 (r, r) 로 제한한다는 점이다. 이를 통해 미지수가 하나인 이차방정식으로 축소되며, 두 해의 곱은 근과 계수의 관계로 바로 얻을 수 있다.

💡 축에 접하는 원 두 개가 한 점을 공유하는 구성은 기하 문제에서 내심·외심 구조의 변형으로 자주 나타난다.

Q105 집합·명제 논증

전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대해 $A \cup B = U$ 이고 $A \cap B = \{1, 2\}$ 를 만족하는 순서쌍 (A, B) 의 개수를 구하시오.

- ① ① 8
- ② ② 12
- ③ ③ 16
- ④ ④ 32

정답: ③

1단계: $A \cap B = \{1, 2\}$ 이므로 원소 1, 2는 A, B 둘 다에 반드시 포함된다 (각 1가지로 고정).
2단계: 나머지 원소 3, 4, 5, 6 각각에 대해, $A \cup B = U$ 이므로 적어도 한쪽에는 속해야 하고, 동시에 $A \cap B$ 에는 들어가면 안 되므로 양쪽 모두에 속할 수 없다. 따라서 각 원소는 'A에만 속함' 또는 'B에만 속함' 중 정확히 한 가지를 선택 (2가지).
3단계: 원소 4개가 각각 독립적으로 2가지 선택을 하므로 순서쌍 (A, B) 의 개수는 $2^4 = 16$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 각 원소를 U 에서 'A에만, B에만, $A \cap B$, 어디에도 없음'의 네 영역 중 하나로 배정하는 관점에서, 주어진 조건이 각 원소의 선택지를 제한한다는 것을 파악하는 것이다. 1, 2는 위치 고정, 3-6은 각각 2가지.

💡 n 개 원소를 갖는 전체집합에서 $A \cup B = U$ 를 만족하는 순서쌍 (A, B) 의 개수는 3^n 이다. 교집합 크기까지 추가로 제약하면 이항계수 $\binom{n}{k} \cdot 2^{n-k}$ 로 정제된다.

Q106 다항식·항등식 추론

다항식 $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ 가 $x^2 - 1$ 로 나누어떨어지고 $x^2 - 4$ 로 나눈 나머지가 $6x$ 일 때, $a + b + c + d$ 의 값은?

- ① ① -3
- ② ② -2
- ③ ③ -1
- ④ ④ 0

정답: ③ -1

1단계: $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ 로 나누어떨어지므로 $P(1) = 0, P(-1) = 0$. **2단계:** $P(1) = 1 + a + b + c + d = 0$ 이므로 곧바로 $a + b + c + d = -1$ 을 얻는다. **3단계:** (검산) $P(-1) = 0$ 에서 $1 - a + b - c + d = 0$ 이고, $P(2) = 12$ 에서 $16 + 8a + 4b + 2c + d = 12, P(-2) = -12$ 에서 $16 - 8a + 4b - 2c + d = -12$. 이 네 식을 연립하면 $a = 2, b = -5, c = -2, d = 4$ 로 $a + b + c + d = -1$ 이 맞는다.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 ' $x^2 - 1$ 로 나누어떨어진다는' 함숫값 조건 $P(1) = P(-1) = 0$ 으로 옮기는 것. $P(1)$ 은 정확히 계수의 총합이므로 네 식을 모두 풀지 않고도 목표가 바로 나온다. 두 번째 조건은 검산용이다.

💡 다항식의 '계수의 합'은 언제나 $P(1)$ 과 같다. 항등식 문제에서 특수값 대입이 강력한 이유이다.

Q107 복소수 심화

$S = 1 + i + i^2 + i^3 + \dots + i^{2025}$ 일 때, $S \cdot \bar{S}$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$ 이고 \bar{S} 는 S 의 켈레복소수)

- ① ① 1
- ② ② 2
- ③ ③ $\sqrt{2}$
- ④ ④ 4

정답: ② 2

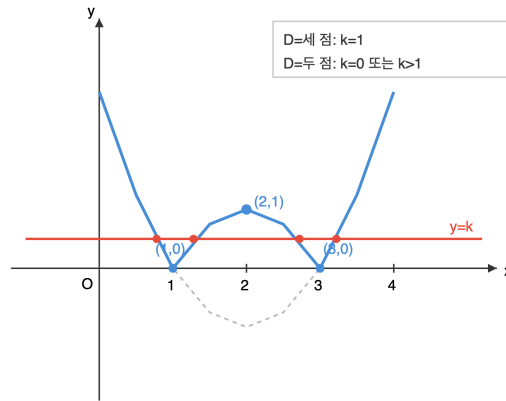
1단계: i 의 거듭제곱은 $1, i, -1, -i$ 가 주기 4로 반복되고 한 주기의 합은 $1 + i - 1 - i = 0$. **2단계:** 항의 개수는 i^0 부터 i^{2025} 까지 총 2026개. $2024 = 506 \times 4$ 이므로 $i^0 + i^1 + \dots + i^{2023}$ 의 합은 0. 남은 항은 $i^{2024} + i^{2025} = 1 + i$ 이다. **3단계:** $S = 1 + i$ 이므로 $\bar{S} = 1 - i$, 따라서 $S \cdot \bar{S} = (1 + i)(1 - i) = 1 - i^2 = 2$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 방대해 보이는 합을 주기성으로 '접는' 것. 지수를 4로 나눈 나머지에만 주목하면 합은 마지막 두 항으로 축약된다. $S\bar{S} = |S|^2$ 임을 이용하면 실수부·허수부 분리 없이 바로 끝낼 수 있다.

💡 $S\bar{S}$ 는 항상 실수이다. S 가 '거의 상쇄된 기하급수'여도 크기의 제곱은 간결한 정수로 떨어진다.

Q108 이차함수·부등식 통합

함수 $y = |x^2 - 4x + 3|$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 가 서로 다른 네 점에서 만나도록 하는 실수 k 의 값의 범위는?



- ① ① $0 < k < 1$
- ② ② $0 < k \leq 1$
- ③ ③ $k > 1$
- ④ ④ $k \geq 1$

정답: ① $0 < k < 1$

1단계: $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$ 이므로 $y = x^2 - 4x + 3$ 은 $x = 1, 3$ 에서 x 축과 만나고 꼭짓점은 $(2, -1)$. 절댓값을 씌우면 $1 \leq x \leq 3$ 구간이 x 축 대칭으로 뒤집혀 꼭짓점 $(2, 1)$ 인 '봉우리'가 생긴다. 2단계: 수평선 $y = k$ 와의 교점 개수를 따진다. $k < 0$ 이면 0개, $k = 0$ 이면 2개($x = 1, 3$), $0 < k < 1$ 이면 바깥 포물선에서 2개 + 봉우리에서 2개 = 4개, $k = 1$ 이면 바깥 2개 + 봉우리 꼭짓점 1개 = 3개, $k > 1$ 이면 바깥 포물선에서만 2개. 3단계: 네 점에서 만나는 것은 $0 < k < 1$ 일 때뿐이며, 경계값 $k = 0$ 과 $k = 1$ 은 반드시 제외된다.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 절댓값 그래프를 '뒤집힌 봉우리'로 상상하고 수평선을 위아래로 훑으며 교점 개수를 세는 것. 경계 $k = 0$, $k = 1$ 에서 교점 수가 급변하므로 엄격부등호가 필수임을 반드시 확인해야 한다.

절댓값이 포함된 함수는 미분 불가능한 '뾰족점'이 생기기 쉽다. 이 봉우리의 꼭짓점도 좌우 기울기가 달라 뾰족점이다.

Q109 고차·연립방정식

방정식 $x^3 - 3x^2 + k = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 실수 k 의 값의 범위는?

- ① ① $k < 0$
- ② ② $0 < k < 4$
- ③ ③ $k > 4$
- ④ ④ $-4 < k < 0$

정답: ② $0 < k < 4$

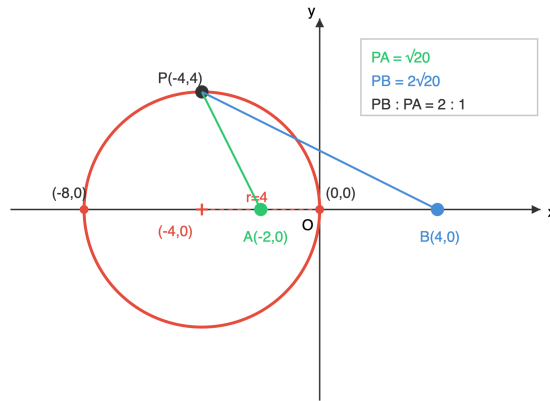
1단계: $f(x) = x^3 - 3x^2 + k$ 로 놓고 $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$ 에서 극점은 $x = 0$ (극대)과 $x = 2$ (극소). 2단계: 극값은 $f(0) = k$ (극댓값), $f(2) = 8 - 12 + k = k - 4$ (극솟값). 삼차함수가 x 축과 서로 다른 세 점에서 만나려면 극댓값과 극솟값이 반대 부호여야 하므로 $f(0) \cdot f(2) < 0$, 즉 $k(k - 4) < 0$. 3단계: $0 < k < 4$. 경계값 $k = 0$ 이면 $x = 0$ 에서 접하므로 중근이 생겨 서로 다른 세 실근이 아니고, $k = 4$ 이면 $x = 2$ 에서 접한다.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 '삼차방정식의 서로 다른 세 실근 \Leftrightarrow 극대·극소 값의 부호가 반대'라는 그래프적 번역. 극점의 위치와 극값만 계산하면 계수 조건이 하나의 부등식으로 깔끔히 정리된다.

삼차함수는 극댓값과 극솟값의 곱의 부호만 보면 실근의 개수를 완전히 판정할 수 있다. 양수면 실근 1개, 0이면 중근 포함 실근 2개, 음수면 3개.

Q110 도형의 방정식 심화

두 점 $A(-2, 0)$, $B(4, 0)$ 에 대하여 $\overline{PA}:\overline{PB} = 1:2$ 를 만족하는 점 P 의 자취의 방정식은?



- ① ① $(x + 4)^2 + y^2 = 16$
- ② ② $(x - 4)^2 + y^2 = 16$
- ③ ③ $x^2 + y^2 = 16$
- ④ ④ $(x + 2)^2 + y^2 = 4$

☞ 정답: ① $(x + 4)^2 + y^2 = 16$

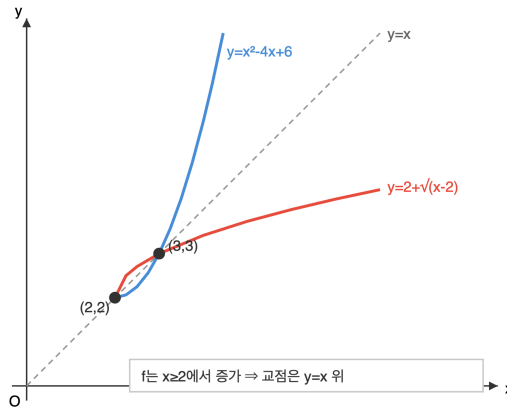
📖 1단계: $P(x, y)$ 라 하고 $\overline{PA}:\overline{PB} = 1:2$ 를 $2\overline{PA} = \overline{PB}$, 곧 $4\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$ 로 제곱하여 풀다. 2단계: $4\{(x + 2)^2 + y^2\} = (x - 4)^2 + y^2$. 전개하면 $4x^2 + 16x + 16 + 4y^2 = x^2 - 8x + 16 + y^2$, 정리하여 $3x^2 + 24x + 3y^2 = 0$. 3단계: 양변을 3으로 나누고 완전제곱하면 $x^2 + 8x + y^2 = 0$, $(x + 4)^2 + y^2 = 16$. 중심 $(-4, 0)$, 반지름 4인 원이다.

🧠 풀이 전략: 이 문제의 핵심은 거리비 조건을 거리의 제곱으로 바꿔 좌표 방정식으로 푸는 것. '두 정점에서 거리비가 일정한 점의 자취'는 두 점 중 어느 쪽에도 속하지 않는 새로운 원이 되며, 이 원을 아폴로니우스의 원이라 부른다.

💡 아폴로니우스의 원은 두 정점을 지름으로 하지 않는다. 이 문제에서도 원의 중심 $(-4, 0)$ 은 A, B 어느 쪽에도 일치하지 않는다.

Q111 함수 심화

함수 $f(x) = x^2 - 4x + 6$ ($x \geq 2$)와 그 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프의 모든 교점의 x 좌표의 합은?



- ① ① 3
- ② ② 4
- ③ ③ 5
- ④ ④ 6

정답: ③ 5

1단계: f 는 $x \geq 2$ 에서 단조증가이므로 f 와 f^{-1} 의 그래프의 교점은 모두 직선 $y = x$ 위에 있다(증가함수의 고정점 원리). **2단계:** 따라서 $f(x) = x$ 를 푼다. $x^2 - 4x + 6 = x$, $x^2 - 5x + 6 = 0$, $(x - 2)(x - 3) = 0$. **3단계:** 정의역 $x \geq 2$ 를 만족하는 해는 $x = 2$, $x = 3$ 두 개. 교점은 $(2, 2)$, $(3, 3)$ 이며 x 좌표의 합은 $2 + 3 = 5$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 '증가함수와 그 역함수의 교점은 모두 $y = x$ 위에 있다'는 성질을 쓰는 것. 이것 모르면 $f(f^{-1}(x)) = x$ 로 돌아가 복잡한 계산을 하게 되지만, 알면 이차방정식 하나로 끝난다. 단, 감소함수에서는 $y = x$ 위에 없는 교점이 추가로 생길 수 있으니 단조성 확인이 필수이다.

💡 역함수와의 교점을 찾을 때 $f(x) = x$ 를 쓰는 것은 증가함수에만 적용된다. 감소함수인 $f(x) = -x + c$ 같은 경우에는 모든 점이 '자기 자신의 역'일 수도 있다.

Q112 경우의 수 심화

집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 에서 X 로의 함수 f 중 모든 $x \in X$ 에 대해 $f(f(x)) = x$ 를 만족하는 함수의 개수는?

- ① ① 6
- ② ② 8
- ③ ③ 10
- ④ ④ 12

정답: ③ 10

1단계: $f(f(x)) = x$ 는 f 가 자기 자신의 역함수(인볼루션)임을 뜻한다. 이는 X 의 원소들을 고정점이거나 서로 맞바꾸는 짝(2-사이클)으로만 분할할 수 있다는 뜻이다. **2단계:** $|X| = 4$ 일 때 가능한 분할은 (i) 고정점 4개, (ii) 2-사이클 1개 + 고정점 2개, (iii) 2-사이클 2개. **3단계:** 경우별 개수는 (i) 1가지, (ii) 2-사이클이 될 짝을 $\binom{4}{2} = 6$ 가지로 고르면 나머지는 자동 고정, (iii) 4원소를 순서 없는 두 쌍으로 나누는 수 $\frac{1}{2} \binom{4}{2} = 3$ 가지. 총 $1 + 6 + 3 = 10$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 '함수'를 나열하지 않고 '원소들의 짝짓기'로 추상화하는 것. $f(f(x)) = x$ 에서 f 는 전단사가 되며 치환이 된다. 모든 치환을 분해하면 사이클인데, 조건 $f(f(x)) = x$ 는 사이클 길이가 1이나 2뿐임을 강제한다. 그래서 '원소 분할' 개수 문제로 축약된다.

💡 n -원소 집합의 인볼루션 개수는 $T(n)$ 이라 하며 점화식 $T(n) = T(n - 1) + (n - 1)T(n - 2)$ 를 만족한다.
 $T(4) = T(3) + 3T(2) = 4 + 3 \cdot 2 = 10$.

Q113 경시·통합 문제

다항식 $f(x) = x^{10} - 10x + 9$ 를 $(x - 1)^2$ 로 나눈 나머지는?

- ① ① 0
- ② ② 1
- ③ ③ $x - 1$
- ④ ④ $x + 1$

정답: ① 0

📖 1단계: 나누는 식이 이차이므로 나머지는 $ax + b$ 꼴로 두고 $f(x) = (x - 1)^2 Q(x) + ax + b$. 2단계: $x = 1$ 을 대입하면 $f(1) = 1 - 10 + 9 = 0 = a + b$. 양변을 미분하고 다시 $x = 1$ 을 대입하면 $f'(x) = 10x^9 - 10$ 에서 $f'(1) = 10 - 10 = 0 = a$. 따라서 $a = 0$ 이고 이어서 $b = -a = 0$. 3단계: 나머지는 $0 \cdot x + 0 = 0$. 즉 $f(x)$ 는 $(x - 1)^2$ 로 나누어떨어진다.

🧠 풀이 전략: 이 문제의 핵심은 '이중근 판정을 위해 함숫값뿐 아니라 도함숫값도 0이어야 한다'는 원리. 단순히 $f(1) = 0$ 이라고 해서 $(x - 1)^2$ 로 나누어떨어지는 것은 아니지만, $f(1) = 0$ 이고 $f'(1) = 0$ 이면 충분하다. 미분을 이용한 이 테크닉은 고차식의 나머지 문제를 한 줄로 끝내는 비법이다.

💡 $x = a$ 가 다항식 f 의 k 중근일 필요충분조건은 $f(a) = f'(a) = \dots = f^{(k-1)}(a) = 0$ 이고 $f^{(k)}(a) \neq 0$ 인 것이다.

Q114 고차·연립방정식

연립방정식 $\begin{cases} x + y = k \\ x^2 + y^2 = 4k \end{cases}$ 가 실수해 (x, y) 를 갖도록 하는 실수 k 의 값의 범위는?

- ① ① $0 \leq k \leq 8$
- ② ② $k \geq 0$
- ③ ③ $k \leq 8$
- ④ ④ $-8 \leq k \leq 0$

정답: ① $0 \leq k \leq 8$

📖 1단계: 첫 식에서 $y = k - x$ 를 두 번째 식에 대입: $x^2 + (k - x)^2 = 4k$. 전개 후 정리하면 $2x^2 - 2kx + k^2 - 4k = 0$, 곧 $x^2 - kx + \frac{k^2 - 4k}{2} = 0$. 2단계: x 에 대한 이차방정식이 실근을 가지려면 판별식 ≥ 0 .

$D = k^2 - 4 \cdot \frac{k^2 - 4k}{2} = k^2 - 2(k^2 - 4k) = -k^2 + 8k$. 3단계: $-k^2 + 8k \geq 0$, 곧 $k(k - 8) \leq 0$ 이므로 $0 \leq k \leq 8$.

🧠 풀이 전략: 이 문제의 핵심은 연립을 소거법으로 단일 변수 이차방정식으로 바꾸고 판별식을 쓰는 표준 절차. $x + y$ 와 $x^2 + y^2$ 가 모두 주어져 있으니 $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ 를 써서 xy 를 직접 구해 해석 기하학적으로도 해결 가능하다.

💡 $x + y = k$ 와 $x^2 + y^2 = 4k$ 를 동시에 만족하는 (x, y) 는 직선과 원의 교점이다. k 가 극단으로 가면 원이 사라지거나 직선과 떨어져 교점이 없어진다.

Q115 복소수 심화

방정식 $z^3 = 1$ 의 한 허근을 ω 라 할 때, $(\omega^2 - \omega)^2$ 의 값은?

- ① ① -3
- ② ② -1
- ③ ③ 1
- ④ ④ 3

정답: ① -3

1단계: $z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1) = 0$ 에서 허근 ω 는 $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ 을 만족한다. 따라서 $\omega^2 = -1 - \omega$. 2단계: $\omega^2 - \omega = (-1 - \omega) - \omega = -1 - 2\omega$. 3단계:

$$(\omega^2 - \omega)^2 = (-1 - 2\omega)^2 = 1 + 4\omega + 4\omega^2 = 1 + 4\omega + 4(-1 - \omega) = 1 + 4\omega - 4 - 4\omega = -3.$$

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 $\omega^3 = 1$ 을 직접 쓰는 대신 '최소다항식' $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ 을 써서 ω^2 를 ω 의 일차식으로 환원하는 것. 이 방법은 ω 에 대한 어떤 다항식도 $a + b\omega$ 꼴로 줄여준다. 드무아브르 정리 없이도 끝난다.

💡 1의 세제곱근 $1, \omega, \omega^2$ 는 복소평면에서 정삼각형을 이루고 합이 0이다. $\omega^2 - \omega$ 는 이 정삼각형의 한 변을 나타내는 벡터이고 그 길이의 제곱은 $|-1 - 2\omega|^2 = 3$ 이므로 제곱 값이 -3인 것과 크기가 일치한다.

Q116 집합·명제 논증

집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 의 부분집합 중 원소의 합이 짝수인 것(공집합 포함)의 개수는?

- ① ① 64
- ② ② 120
- ③ ③ 128
- ④ ④ 256

정답: ③ 128

1단계: A 를 홀수 원소 $\{1, 3, 5, 7\}$ 과 짝수 원소 $\{2, 4, 6, 8\}$ 로 분리(각 4개). 짝수 원소는 어떻게 뽑아도 합의 홀짝에 영향을 주지 않고, 합의 홀짝은 오로지 '홀수 원소를 몇 개 뽑았느냐'로 결정된다. 2단계: 원소 합이 짝수 \Leftrightarrow 홀수 원소를 짝수 개 선택. 홀수 원소 4개에서 짝수 개(0, 2, 4개)를 고르는 방법: $\binom{4}{0} + \binom{4}{2} + \binom{4}{4} = 1 + 6 + 1 = 8$. 3단계: 짝수 원소 4개는 각각 포함 여부를 자유롭게 정할 수 있으므로 $2^4 = 16$ 가지. 곱의 법칙으로 $8 \times 16 = 128$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 '홀짝'의 기여를 분리하는 것. 짝수 원소는 합의 홀짝에 무관하므로 자유도가 완전하고, 홀수 원소만이 홀짝을 결정한다. $2^8 = 256$ 개 부분집합 중 정확히 절반이 짝수 합이라는 대칭성(128)도 독립적으로 확인된다(짝수 원소가 하나 이상 있으면 홀짝이 반반 나뉨).

💡 집합의 모든 부분집합의 '원소 합의 홀짝'을 세면, 적어도 하나의 홀수 원소가 있는 한 정확히 반반으로 갈린다. 원소 1을 포함 여부로 뒤집으면 짝과 홀이 일대일 대응되기 때문이다.

Q117 다항식·항등식 추론

다항식 $P(x) = x^3 + ax^2 + bx - 6$ 이 $(x - 1)(x + 2)$ 로 나누어떨어질 때, $P(x)$ 를 일차식의 곱으로 완전히 인수분해했을 때 나타나는 또 다른 일차 인수는? (단, a, b 는 실수)

- ① ① $x - 3$
- ② ② $x + 3$
- ③ ③ $x - 6$
- ④ ④ $x + 6$

정답: ② $x + 3$

1단계: 인수정리에 의해 $(x - 1)$ 이 인수이므로 $P(1) = 0$, 즉 $1 + a + b - 6 = 0$ 에서 $a + b = 5$.

2단계: $(x + 2)$ 도 인수이므로 $P(-2) = 0$, 즉 $-8 + 4a - 2b - 6 = 0$ 에서 $2a - b = 7$.

3단계: 두 식을 연립하면 $3a = 12$ 이므로 $a = 4, b = 1$. 따라서 $P(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$.

4단계: $P(x)$ 를 $x^2 + x - 2$ 로 나누면 몫이 $x + 3$ 이므로 $P(x) = (x - 1)(x + 2)(x + 3)$. 나머지 일차 인수는 $x + 3$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 '나누어떨어진다'는 조건을 인수정리 $P(\alpha) = 0$ 로 변환해 두 개의 연립방정식을 세우고, 다항식 나눗셈으로 남은 인수를 얻는 것이다. 상수항 -6 의 약수 중 근을 찾아 계산할 수도 있다.

인수정리는 데카르트가 1637년 '기하학'에서 처음 암시한 이후 대수학의 기본 도구가 되었다.

Q118 집합·명제 논증

전체집합 $U = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ 의 두 부분집합 A, B 가 $A \cap B = \{3, 6\}, A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, A - B = \{1, 4, 7\}$ 을 만족할 때, 집합 B 의 원소의 개수는?

- ① ① 3
- ② ② 4
- ③ ③ 5
- ④ ④ 6

정답: ② 4

1단계: 집합의 분해 $A = (A \cap B) \cup (A - B)$ 로부터 $A = \{3, 6\} \cup \{1, 4, 7\} = \{1, 3, 4, 6, 7\}$.

2단계: $B = (A \cup B) - (A - B)$ 로부터 $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} - \{1, 4, 7\} = \{2, 3, 5, 6\}$.

3단계: 검증: $A \cap B = \{3, 6\}$ 일치, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 일치, $A - B = \{1, 4, 7\}$ 일치.

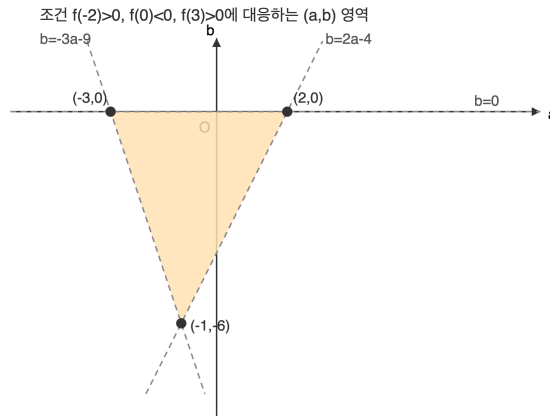
4단계: 따라서 $n(B) = 4$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 $A \cup B$ 와 $A - B$ 의 차가 정확히 B 가 된다는 벤다이어그램 영역 관계를 이용하는 것이다. $A \cup B$ 안에서 '오직 A 에만 있는 부분'을 빼면 B 만 남는다.

$A - B, A \cap B, B - A$ 는 $A \cup B$ 를 서로소인 세 조각으로 분해하는 기본 도구다.

Q119 이차함수·부등식 통합

이차함수 $f(x) = x^2 + ax + b$ 의 그래프가 x 축과 서로 다른 두 점 $(\alpha, 0), (\beta, 0)$ 에서 만나고 $-2 < \alpha < 0 < \beta < 3$ 이 성립한다. 이때 좌표평면 위 점 (a, b) 가 이루는 영역의 넓이를 구하시오.



- ① ① 10
- ② ② 12
- ③ ③ 15
- ④ ④ 18

정답: ③ 15

1단계: 조건 ' $\alpha < 0 < \beta$ '는 $f(0) < 0$ 과 동치이므로 $b < 0$.

2단계: 조건 ' $-2 < \alpha$ '는 $f(-2) > 0$ 과 동치이므로 $4 - 2a + b > 0$, 즉 $b > 2a - 4$.

3단계: 조건 ' $\beta < 3$ '은 $f(3) > 0$ 과 동치이므로 $9 + 3a + b > 0$, 즉 $b > -3a - 9$.

4단계: 세 부등식의 경계 직선 교점은 $(2, 0), (-3, 0), (-1, -6)$. 삼각형 넓이는 $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 + (-3) \cdot (-6) + (-1) \cdot 0 = \frac{1}{2} \cdot 30 = 15$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 이차함수의 두 근이 특정 구간에 놓이는 조건을 '경계점에서의 함수값 부호'로 완전히 동치변환하는 것이다. 세 부호 조건이 (a, b) -평면에서 각각 하나의 반평면을 나타내므로, 그 교집합은 삼각형이 된다.

💡 이차함수의 근분포 조건을 함수값·판별식·축으로 번역하는 방법은 수능 미적분·기하 선행 학습의 관문이다.

Q120 복소수 심화

복소수 z 가 방정식 $z^2 - 2z + 4 = 0$ 의 한 허근일 때, $\left(\frac{z}{2}\right)^{2025}$ 의 값은?

- ① ① -1
- ② ② 1
- ③ ③ $-i$
- ④ ④ i

정답: ① -1

1단계: $z^2 = 2z - 4$ 이므로 $z^3 = z \cdot z^2 = z(2z - 4) = 2z^2 - 4z = 2(2z - 4) - 4z = -8$.

2단계: 따라서 $\left(\frac{z}{2}\right)^3 = \frac{z^3}{8} = -1$ 이고, 이로부터 $\left(\frac{z}{2}\right)^6 = 1$. 즉 $\frac{z}{2}$ 는 6제곱해서 1이 되는 단위근이다.

3단계: $2025 = 6 \times 337 + 3$ 이므로 $\left(\frac{z}{2}\right)^{2025} = \left(\frac{z}{2}\right)^3 = -1$.

4단계: 검산: $z = 1 + \sqrt{3}i$ 일 때 $|z| = 2$, 편각 $\frac{\pi}{3}$. 따라서 $\frac{z}{2}$ 의 편각은 $\frac{\pi}{3}$ 이고 $6 \cdot \frac{\pi}{3} = 2\pi$ 로 주기 6 확인.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 방정식을 직접 풀어 z 를 구하지 않고, 주어진 식으로부터 z^3 의 간단한 값을 이끌어 $z/2$ 가 6제곱근임을 알아채는 것이다. 지수 2025를 6으로 나눈 나머지가 답을 결정한다.

💡 $\frac{z}{2}$ 는 복소평면에서 정육각형의 한 꼭짓점에 해당하는 특별한 단위근이다.



고1 수학 심화

총 40문제 · 문제와 정답·풀이 포함

Q121 고차·연립방정식

사차방정식 $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 서로 다른 실근의 합은?

- ① ① 0
- ② ② 1
- ③ ③ 2
- ④ ④ 3

정답: ② 1

1단계: 계수가 1, -3, 4, -3, 1로 대칭(x와 1/x 교환 불변)이므로 양변을 x^2 으로 나누면 $x^2 + \frac{1}{x^2} - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4 = 0$.

2단계: $t = x + \frac{1}{x}$ 로 치환하면 $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$. 식은 $t^2 - 3t + 2 = 0$, 즉 $(t-1)(t-2) = 0$.

3단계: $t = 1$ 일 때 $x^2 - x + 1 = 0$ 의 판별식은 $1 - 4 < 0$ 이므로 실근 없음.

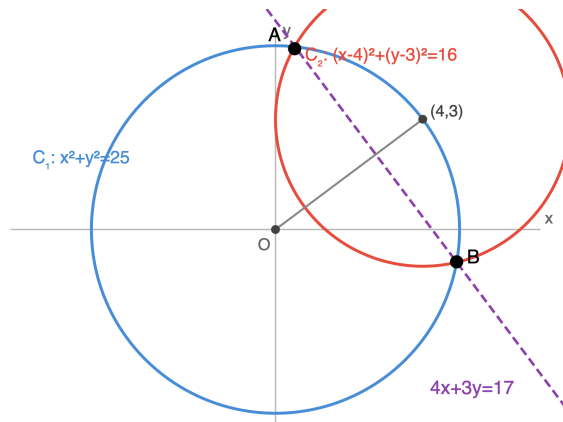
4단계: $t = 2$ 일 때 $x^2 - 2x + 1 = 0$, $(x-1)^2 = 0$ 이므로 $x = 1$ (중근). 서로 다른 실근은 1뿐이므로 합은 1.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 계수 대칭(상반방정식)을 간파하여 $t = x + 1/x$ 로 치환해 차수를 반으로 낮추는 것이다. 각 t 값에 대응하는 원래 방정식이 실근을 갖는지 판별식으로 확인해야 한다.

상반방정식(palindromic polynomial)은 원 위의 점들을 근으로 가지는 특수 구조를 자주 내포한다.

Q122 도형의 방정식 심화

두 원 $C_1: x^2 + y^2 = 25$, $C_2: (x-4)^2 + (y-3)^2 = 16$ 이 서로 다른 두 점에서 만날 때, 이 두 교점을 지나는 직선의 방정식은?



- ① ① $4x + 3y = 17$
- ② ② $3x + 4y = 17$
- ③ ③ $4x + 3y = 25$
- ④ ④ $x + y = 17$

정답: ① $4x + 3y = 17$

1단계: 두 원 $C_1: x^2 + y^2 - 25 = 0$, $C_2: (x-4)^2 + (y-3)^2 - 16 = 0$ 을 전개하면 $C_2: x^2 + y^2 - 8x - 6y + 9 = 0$.

2단계: 교점은 두 방정식을 동시에 만족하므로 두 식의 차 $C_1 - C_2$ 도 교점에서 0이다.

3단계: $(x^2 + y^2 - 25) - (x^2 + y^2 - 8x - 6y + 9) = 0$, 정리하면 $8x + 6y - 34 = 0$.

4단계: 양변을 2로 나누면 $4x + 3y = 17$. 두 중심 (0, 0)과 (4, 3)을 잇는 직선의 기울기 3/4과 수직(기울기 곱 -1)임을 확인할 수 있다.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 두 이차곡선의 교점을 지나는 도형은 두 방정식의 일차결합으로 표현된다는 원리(가감법)를 이용해 이차항을 소거하는 것이다. 이차항이 같은 두 원의 방정식은 그 차이가 자동으로 일차식이 된다.

두 원의 공통현(radical axis)은 항상 중심선에 수직이며, 이는 기하와 대수를 잇는 고전적 결과다.

Q123 집합·명제 논증

전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $n(A) = 15, n(B) = 10, n(A \cup B) = 20$ 일 때, 집합 $(A - B) \cup (B - A)$ 의 원소의 개수는?

- ① ① 10
- ② ② 12
- ③ ③ 15
- ④ ④ 20

정답: ③ 15

1단계: 합집합 공식 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ 에서 $20 = 15 + 10 - n(A \cap B)$ 이므로 $n(A \cap B) = 5$.

2단계: $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 15 - 5 = 10$.

3단계: $n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 10 - 5 = 5$.

4단계: $(A - B)$ 와 $(B - A)$ 는 서로소(공통원소 없음)이므로 $n((A - B) \cup (B - A)) = 10 + 5 = 15$. 참고: 이는 $n(A \cup B) - n(A \cap B) = 20 - 5 = 15$ 과 일치하며, 대칭차의 또 다른 공식이다.

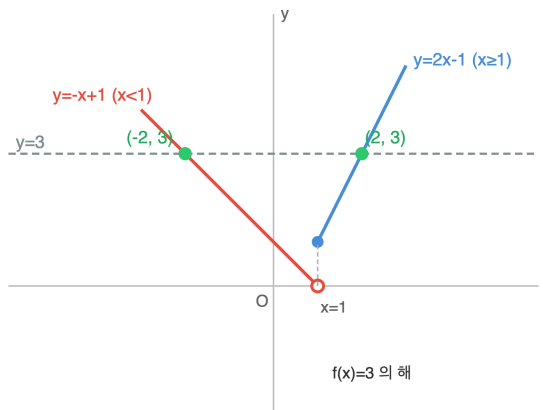
풀이 전략: 이 문제의 핵심은 주어진 세 값으로부터 $n(A \cap B)$ 를 먼저 구한 뒤, 대칭차

$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$ 임을 이용하는 것이다. 두 가지 계산 경로가 일치하는지 상호 검증하면 안전하다.

대칭차 $A \triangle B$ 는 '정확히 한 집합에만 속하는 원소'의 집합이며, 이 연산은 덧셈처럼 결합법칙과 교환법칙을 만족한다.

Q124 함수 심화

함수 $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & (x \geq 1) \\ -x + 1 & (x < 1) \end{cases}$ 에 대하여 방정식 $f(f(x)) = 3$ 을 만족하는 모든 실수 x 의 값의 곱은?



- ① ① -3
- ② ② $-\frac{3}{2}$
- ③ ③ $\frac{3}{2}$
- ④ ④ 3

정답: ② $-\frac{3}{2}$

1단계: $y = f(x)$ 라 놓으면 $f(y) = 3$ 을 먼저 푼다. $y \geq 1$ 이면 $2y - 1 = 3 \Rightarrow y = 2$ (조건 만족). $y < 1$ 이면 $-y + 1 = 3 \Rightarrow y = -2$ (조건 만족). 따라서 $f(x) = 2$ 또는 $f(x) = -2$.

2단계: $f(x) = 2$ 해결. $x \geq 1$: $2x - 1 = 2 \Rightarrow x = 3/2$ (만족). $x < 1$: $-x + 1 = 2 \Rightarrow x = -1$ (만족).

3단계: $f(x) = -2$ 해결. $x \geq 1$: $2x - 1 = -2 \Rightarrow x = -1/2$ (불일치). $x < 1$: $-x + 1 = -2 \Rightarrow x = 3$ (불일치). 해 없음.

4단계: 모든 해는 $x = 3/2, -1$. 곱은 $\frac{3}{2} \cdot (-1) = -\frac{3}{2}$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 합성함수 방정식 $f(f(x)) = 3$ 을 '겉수준($f(y) = 3$)과 속수준($f(x) = y$)'로 단계 분해하고, 구간별 정의를 만족하는지 매번 '영역 검증'을 하는 것이다. 조건을 어긴 해는 외해(extraneous)로 버려야 한다.

합성함수 방정식에서 해가 구간 경계를 넘나들 수 있으므로, 풀이 후 반드시 대입 검증이 필요하다.

Q125 경우의 수 심화

1부터 9까지의 서로 다른 자연수 중에서 3개를 뽑을 때, 뽑힌 세 수의 합이 짝수가 되는 경우의 수는?

- ① ① 40
- ② ② 42
- ③ ③ 44
- ④ ④ 48

정답: ③ 44

1단계: 1~9 중 홀수는 {1, 3, 5, 7, 9}로 5개, 짝수는 {2, 4, 6, 8}로 4개.

2단계: 세 수의 합이 짝수가 되려면 (홀수 개수, 짝수 개수) 조합이 (0,3) 또는 (2,1)이어야 한다. 홀수 1개·짝수 2개는 합이 '홀+짝+짝=홀'이 되어 제외. 홀수 3개는 '홀+홀+홀=홀'이므로 제외.

3단계: (홀수 0, 짝수 3): $\binom{5}{0} \binom{4}{3} = 1 \cdot 4 = 4$.

4단계: (홀수 2, 짝수 1): $\binom{5}{2} \binom{4}{1} = 10 \cdot 4 = 40$.

5단계: 총합 $4 + 40 = 44$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 '합의 홀짝'이 홀수의 개수의 홀짝과 같다는 성질(홀수×홀수개=홀수)을 이용해 홀수 선택 개수를 짝수로 제한하는 것이다. 그 뒤 각 경우를 조합으로 세면 된다.

이런 홀짝 불변 원리는 체스판 퍼즐, 그래프 색칠, 정수론의 합동식까지 두루 쓰이는 강력한 도구다.

Q126 경우의 수 심화

서로 다른 소설책 5권과 서로 다른 시집 4권이 있다. 이 중 소설책 3권과 시집 2권을 골라 책꽂이에 일렬로 꽂을 때, 같은 종류의 책 끼리 이웃하지 않도록 꽂는 방법의 수는?

- ① ① 360
- ② ② 480
- ③ ③ 720
- ④ ④ 1440

정답: ③ 720

1단계: 책 선택. 소설 5권 중 3권 $\binom{5}{3} = 10$ 가지, 시집 4권 중 2권 $\binom{4}{2} = 6$ 가지. 총 $10 \cdot 6 = 60$ 가지.

2단계: 5자리에 소설(N) 3권·시집(P) 2권을 같은 종류가 이웃하지 않게 배치하는 패턴 찾기. 소설이 3권이므로 소설끼리 떨어져 있으려면 자리 1, 3, 5에 소설을 배치할 수밖에 없다. 그 사이 자리 2, 4에 시집.

3단계: 즉 유일한 패턴은 N-P-N-P-N. 이때 시집끼리도 자동으로 이웃하지 않음.

4단계: 패턴에 대해 선택된 소설 3권의 순서 $3! = 6$, 시집 2권의 순서 $2! = 2$. 한 조합당 $6 \cdot 2 = 12$ 가지. 총 $60 \cdot 12 = 720$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 두 종류 물건을 '교대'로 놓는 제약에서, 개수가 다를 때 어느 종류가 어디에 반드시 놓여야 하는지를 먼저 결정하는 것이다. N이 3, P가 2이면 N이 양 끝을 차지하는 유일한 패턴만 가능하다.

개수가 같지 않은 두 종류의 완전 교대 배열은 많은 것이 양 끝에 놓인 단 하나의 패턴만 허용한다.

Q127 경시·통합 문제

실수 a 에 대하여 집합 $A = \{x \mid x^2 - 2ax + a^2 - 1 \leq 0\}$, $B = \{x \mid x^2 - x - 2 > 0\}$ 이다. $A \cap B = \emptyset$ 이 되도록 하는 실수 a 의 값의 범위는?

- ① ① $-1 \leq a \leq 1$
- ② ② $0 \leq a \leq 1$
- ③ ③ $0 < a < 1$
- ④ ④ $-1 \leq a \leq 2$

☞ 정답: ② $0 \leq a \leq 1$

📖 1단계: A 해석. $x^2 - 2ax + a^2 - 1 \leq 0 \Leftrightarrow (x - a)^2 \leq 1 \Leftrightarrow a - 1 \leq x \leq a + 1$. 즉 $A = [a - 1, a + 1]$.

2단계: B 해석. $x^2 - x - 2 > 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 1) > 0 \Leftrightarrow x < -1$ 또는 $x > 2$. 즉 $B^c = [-1, 2]$.

3단계: $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset B^c = [-1, 2]$. 따라서 $-1 \leq a - 1$ 그리고 $a + 1 \leq 2$.

4단계: $a \geq 0$ 그리고 $a \leq 1$, 즉 $0 \leq a \leq 1$. 경계 확인: $a = 0$ 이면 $A = [-1, 1] \subset [-1, 2]$, $a = 1$ 이면 $A = [0, 2] \subset [-1, 2]$ 로 양 쪽 모두 만족.

🧠 풀이 전략: 이 문제의 핵심은 집합 교집합 조건 $A \cap B = \emptyset$ 을 포함 조건 $A \subset B^c$ 로 바꾸고, 구간 $[a - 1, a + 1]$ 이 구간 $[-1, 2]$ 안에 들어갈 조건을 양 끝점으로 쓰는 것이다. 경계값 포함 여부(부등호와 등호)에 주의해야 한다.

💡 '교집합이 공집합'의 쌍대 표현은 '한쪽이 다른 쪽 여집합의 부분집합'이며, 집합 이론의 기본 대응이다.

Q128 경시·통합 문제

집합 $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 S 로의 함수 f 중에서 $f(f(1)) = 1$ 을 만족하는 함수의 개수는?

- ① ① 625
- ② ② 1000
- ③ ③ 1125
- ④ ④ 3125

☞ 정답: ③ 1125

📖 1단계: $f(1) = a$ 라 두면 조건 $f(f(1)) = 1$ 은 $f(a) = 1$ 과 동치이다. $a \in S$ 에 따라 경우를 나눈다.

2단계: 경우 A: $a = 1$. 즉 $f(1) = 1$. 조건 $f(a) = f(1) = 1$ 은 자동 성립. $f(2), f(3), f(4), f(5)$ 는 각각 S 의 5개 값 중 자유. $5^4 = 625$.

3단계: 경우 B: $a \neq 1$. $a \in \{2, 3, 4, 5\}$ 로 4가지. $f(1) = a, f(a) = 1$ 두 값이 정해짐. 나머지 3개의 함수값은 자유로 각각 $5^3 = 125$. 따라서 $4 \cdot 125 = 500$.

4단계: 총 $625 + 500 = 1125$.

🧠 풀이 전략: 이 문제의 핵심은 $f(1)$ 이 무엇인지에 따라 '두 값이 지정되는 것'과 '한 값만 지정되는 것'이 달라진다는 것이다. $f(1) = 1$ 이면 $f(a) = 1$ 조건이 동일한 값을 가리키므로 자유도가 한 단계 늘어난다.

💡 $f(f(1)) = 1$ 풀이 조건은 부분 고정점·2-주기 원소를 분리해 세는 순열론의 축소판 문제다.

Q129 다항식·항등식 추론

다항식 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 가 $x^2 + x + 1$ 로 나누어떨어지고 $f(1) = 6$ 일 때, $a + b + c$ 의 값은?

- ① ① 3
- ② ② 4
- ③ ③ 5
- ④ ④ 6

정답: ③

1단계) 삼차식이 이차식 $x^2 + x + 1$ 로 나누어떨어지므로 몫은 일차식이다. 따라서 $f(x) = (x^2 + x + 1)(x + k)$ 로 놓을 수 있다.

2단계) 전개하면 $f(x) = x^3 + (k + 1)x^2 + (k + 1)x + k$ 이므로 $a = k + 1$, $b = k + 1$, $c = k$ 이다.

3단계) $f(1) = 1 + (k + 1) + (k + 1) + k = 3k + 3 = 6$ 에서 $k = 1$. 따라서 $a = 2$, $b = 2$, $c = 1$ 이고 $a + b + c = 5$ 이다.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 '삼차식이 이차식으로 나누어떨어진다는 조건에서 몫의 차수를 먼저 결정하는 것이다. 몫을 $(x + k)$ 로 잡고 계수를 비교하면 미정계수 3개가 아닌 1개로 축소되어 깔끔하게 풀린다.

$x^2 + x + 1$ 은 $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$ 의 인수이므로 이 식의 근은 1이 아닌 1의 세제곱근들이다.

Q130 복소수 심화

복소수 $z = 3 + 4i$ 에 대하여 $\frac{z}{z} + \frac{z}{z}$ 의 값은?

- ① ① $-\frac{14}{25}$
- ② ② $-\frac{7}{25}$
- ③ ③ $\frac{7}{25}$
- ④ ④ $\frac{14}{25}$

정답: ①

1단계) 통분하면 $\frac{z}{z} + \frac{z}{z} = \frac{z^2 + z^2}{zz}$. 분모 $zz = |z|^2 = 3^2 + 4^2 = 25$.

2단계) $z^2 = (3 + 4i)^2 = 9 + 24i - 16 = -7 + 24i$, $z^2 = -7 - 24i$.

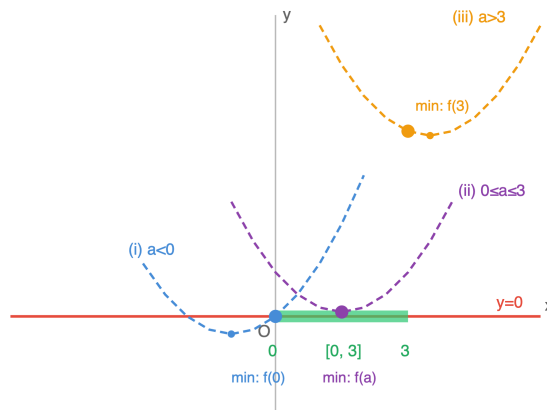
3단계) 분자 $z^2 + z^2 = -14$. 따라서 구하는 값은 $\frac{-14}{25} = -\frac{14}{25}$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 $z^2 + z^2$ 이 항상 실수이고 $zz = |z|^2$ 라는 켈레의 기본 성질을 활용해 분수식을 한꺼번에 실수화하는 것이다. $z + z = 2\text{Re}(z)$, $zz = |z|^2$ 를 반사적으로 쓸 수 있어야 한다.

$\frac{z}{z}$ 의 절댓값은 항상 1이다. 그래서 그 합은 편각 θ 에 대해 $2\cos 2\theta$ 꼴로 나온다.

Q131 이차함수·부등식 통합

이차함수 $f(x) = x^2 - 2ax + 2a^2 - 2$ 에 대하여 구간 $0 \leq x \leq 3$ 에서 항상 $f(x) \geq 0$ 이 성립하도록 하는 실수 a 의 값의 범위는?



- ① ① $-1 \leq a \leq \sqrt{2}$
- ② ② $a \leq -\sqrt{2}$ 또는 $a \geq \sqrt{2}$
- ③ ③ $a \leq -1$ 또는 $a \geq \sqrt{2}$
- ④ ④ $a \leq -1$ 또는 $a \geq 1$

정답: ③

1단계 $f(x) = (x - a)^2 + a^2 - 2$ 의 꼭짓점은 $x = a$. 구간 $[0, 3]$ 에서의 최솟값이 꼭짓점의 위치에 따라 세 경우로 나뉘므로 각각 분석한다.

2단계 (i) $a \leq 0$ 일 때 최솟값은 $f(0) = 2a^2 - 2 \geq 0$ 에서 $a^2 \geq 1$, 즉 $a \leq -1$. (ii) $0 < a < 3$ 일 때 최솟값은 $f(a) = a^2 - 2 \geq 0$ 에서 $a \geq \sqrt{2}$ (양의 범위이므로). 따라서 $\sqrt{2} \leq a < 3$.

3단계 (iii) $a \geq 3$ 일 때 최솟값은 $f(3) = 2a^2 - 6a + 7$. 판별식 $36 - 56 < 0$ 이므로 모든 실수에서 양수, 즉 $a \geq 3$ 전체 성립. 세 경우를 합치면 $a \leq -1$ 또는 $a \geq \sqrt{2}$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 '닫힌구간에서의 이차함수의 최솟값'을 구할 때 꼭짓점이 구간의 왼쪽, 안쪽, 오른쪽 중 어디에 있는지를 기준으로 경우를 나누어야 한다는 것. 특히 판별식만으로 풀리지 않는 제한된 구간 문제의 전형이다.

💡 구간 제한 최댓값·최솟값 문제는 수능에서 단골로 출제되는 유형이며, 꼭짓점의 위치에 따른 3분할은 수학의 '사례 분석(case analysis)'의 좋은 예이다.

Q132 고차·연립방정식

실수 x, y 에 대한 연립방정식 $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 19 \\ x^2 - xy + y^2 = 7 \end{cases}$ 의 모든 실수해 (x, y) 에서 나타나는 $x + y$ 의 값들의 총합은?

- ① ① 0
- ② ② 5
- ③ ③ 10
- ④ ④ 25

정답: ①

1단계 두 식을 더하면 $2(x^2 + y^2) = 26$ 에서 $x^2 + y^2 = 13$, 빼면 $2xy = 12$ 에서 $xy = 6$.

2단계 $(x + y)^2 = (x^2 + y^2) + 2xy = 13 + 12 = 25$ 이므로 $x + y = 5$ 또는 $x + y = -5$.

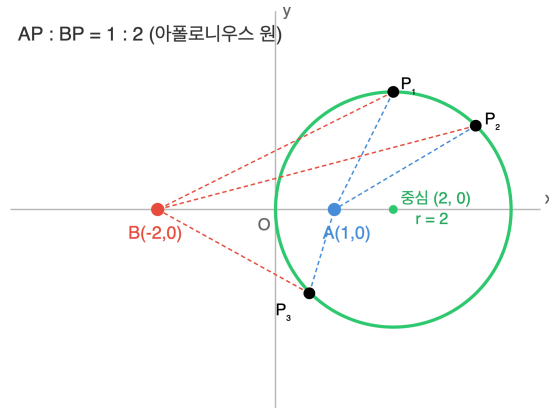
3단계 $x + y = 5, xy = 6$ 이면 x, y 는 $t^2 - 5t + 6 = 0$ 의 두 실근 2, 3으로 실수해 존재. $x + y = -5, xy = 6$ 이면 $t^2 + 5t + 6 = 0$ 의 두 실근 $-2, -3$ 으로 역시 실수해 존재. 따라서 $x + y$ 의 값은 $\{5, -5\}$ 이고 총합은 0.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 대칭식의 결합으로 기본대칭식 $x + y, xy$ 를 동시에 뽑아내는 것이다. 답이 두 개 이상 나올 수 있으므로 모든 해를 검증해 실수 조건을 반드시 확인해야 한다.

💡 $x^2 + xy + y^2$ 과 $x^2 - xy + y^2$ 은 각각 $(x^3 - y^3)/(x - y), (x^3 + y^3)/(x + y)$ 와 관련된 고전적 대칭식이다.

Q133 도형의 방정식 심화

두 점 $A(1, 0)$, $B(-2, 0)$ 에 대하여 $\overline{AP} : \overline{BP} = 1 : 2$ 를 만족시키는 점 P 의 자취로 둘러싸인 영역의 넓이는?



- ① ① 2π
- ② ② 3π
- ③ ③ 4π
- ④ ④ 6π

정답: ③

1단계) $P(x, y)$ 로 놓으면 $2AP = BP$ 에서 $4AP^2 = BP^2$. 즉 $4\{(x-1)^2 + y^2\} = (x+2)^2 + y^2$.

2단계) 전개하면 $4x^2 - 8x + 4 + 4y^2 = x^2 + 4x + 4 + y^2$, 정리하면 $3x^2 - 12x + 3y^2 = 0$, 즉 $x^2 - 4x + y^2 = 0$.

3단계) 완전제곱으로 $(x-2)^2 + y^2 = 4$. 이는 중심 $(2, 0)$, 반지름 2인 원이므로 둘러싸인 영역의 넓이는 $\pi \cdot 2^2 = 4\pi$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 두 정점에서의 거리의 비가 일정한 점의 자취가 '아폴로니우스의 원'이 된다는 고전 결과를 직접 유도하는 것이다. 거리 비를 제공해서 분수를 없애면 자연스럽게 원의 방정식이 드러난다.

아폴로니우스(기원전 2세기)는 이 원을 연구하며 원뿔곡선론의 기초를 세웠다. 비율이 1:1이면 자취는 원이 아니라 수직이등분선(직선)이 된다.

Q134 집합·명제 논증

x 에 대한 두 조건 $p: -1 \leq x \leq 3$, $q: x^2 - 2ax + a^2 - 4 \leq 0$ 에 대하여, p 가 q 이기 위한 충분조건이 되도록 하는 실수 a 의 값은?

- ① ① $a = -1$
- ② ② $a = 0$
- ③ ③ $a = 1$
- ④ ④ $-1 \leq a \leq 1$

정답: ③

1단계) 조건 p 의 진리집합은 $P = [-1, 3]$. 조건 q 는 $(x-a)^2 \leq 4$ 와 동치이므로 진리집합은 $Q = [a-2, a+2]$.

2단계) ' p 가 q 이기 위한 충분조건'이란 $p \Rightarrow q$ 가 참이라는 뜻이므로 $P \subseteq Q$.

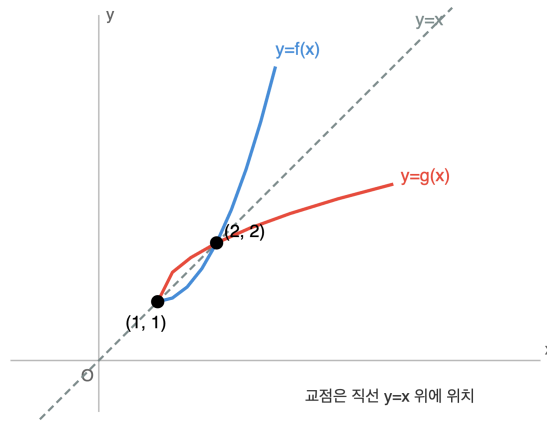
3단계) $[-1, 3] \subseteq [a-2, a+2]$ 이라면 $a-2 \leq -1$ 이고 $a+2 \geq 3$. 즉 $a \leq 1$ 이고 $a \geq 1$. 두 부등식이 동시에 성립하려면 $a = 1$ 뿐이다.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 '충분조건=포함관계' 라는 논리-집합 대응을 정확히 읽는 것. 그리고 두 방향의 부등식이 동시에 등호가 되어야 해가 존재하는 '경계 일치' 상황을 놓치지 않는 것이다. '충분'과 '필요'를 혼동하면 답이 뒤집힌다.

' p 는 q 의 충분조건' \Leftrightarrow ' q 는 p 의 필요조건' $\Leftrightarrow P \subseteq Q$. 방향을 외우지 말고 $p \Rightarrow q$ 의 함의로 판단하는 습관이 안전하다.

Q135 함수 심화

함수 $f(x) = x^2 - 2x + 2$ ($x \geq 1$)의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, 방정식 $f(x) = g(x)$ 의 모든 실근의 합은?



- ① ① 1
- ② ② 2
- ③ ③ 3
- ④ ④ 5

정답: ③

1단계 f 는 $x \geq 1$ 에서 꼭짓점 $(1, 1)$ 을 갖는 증가함수이므로 역함수 g 가 존재하고, f, g 는 모두 강증가함수이다.
2단계 일반적으로 강증가함수 f 와 그 역함수 g 의 교점은 직선 $y = x$ 위에 있다. (만약 $f(x) > x$ 라면 g 를 취해 $x > g(x)$, 즉 $f(x) > x > g(x)$ 가 되어 $f(x) = g(x)$ 와 모순.) 따라서 $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) = x$.
3단계 $x^2 - 2x + 2 = x$ 에서 $x^2 - 3x + 2 = 0$, $x = 1$ 또는 $x = 2$. 두 해 모두 정의역 $x \geq 1$ 을 만족. 따라서 실근의 합은 $1 + 2 = 3$.
풀이 전략: 이 문제의 핵심은 '강단조함수의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점은 $y = x$ 위에 있다'는 성질을 간파해 $f(x) = g(x)$ 를 $f(x) = x$ 로 환원하는 것이다. 이 트릭을 모르면 $g(x)$ 를 직접 구해야 하는데, 계산이 훨씬 복잡해진다.
💡 이 성질은 f 가 강감소이면 깨진다. 예를 들어 $f(x) = 1 - x$ 는 $f = f^{-1}$ 이지만 모든 점에서 $f(x) = g(x)$ 가 성립한다. 단조성의 방향이 관건이다.

Q136 경우의 수 심화

7개의 문자 a, a, b, b, c, c, d 를 일렬로 나열할 때, 같은 문자끼리는 이웃하지 않도록 배열하는 경우의 수는?

- ① ① 180
- ② ② 210
- ③ ③ 246
- ④ ④ 294

정답: ③

1단계 전체 경우의 수는 $\frac{7!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{5040}{8} = 630$. 사건 A_a, A_b, A_c 를 각각 '같은 문자 두 개가 이웃한다'로 놓고 포함배제를 적용한다.
2단계 $|A_a|$: aa 를 하나로 묶으면 6개 단위 (b 2개, c 2개 중복) $\rightarrow \frac{6!}{2! \cdot 2!} = 180$. 대칭으로 $|A_b| = |A_c| = 180$. $|A_a \cap A_b|$: aa, bb 를 묶으면 5단위 (c 2개 중복) $\rightarrow \frac{5!}{2!} = 60$. 대칭으로 세 교집합 모두 60.
3단계 $|A_a \cap A_b \cap A_c|$: 세 묶음과 d 까지 4단위 $\rightarrow 4! = 24$. 포함배제에 의해 이웃하지 않는 경우 $= 630 - 3 \cdot 180 + 3 \cdot 60 - 24 = 630 - 540 + 180 - 24 = 246$.
풀이 전략: 이 문제의 핵심은 '이웃하지 않는' 조건을 그대로 세기가 어려우므로, 반대로 '이웃하는' 사건들의 합집합을 포함배제로 계산한 뒤 전체에서 빼는 것이다. 세 개의 중복 쌍이 모두 있을 때 대칭성이 강력히 작용한다.
💡 포함배제 원리는 '집합의 크기'와 '경우의 수' 사이를 자유롭게 오가는 가장 강력한 도구 중 하나로, 오일러의 φ 함수 공식과도 연결된다.

Q137 경시·통합 문제

양수 x, y 가 $x + y = 4$ 를 만족시킬 때, $\frac{1}{x} + \frac{9}{y}$ 의 최솟값은?

- ① ① 2
- ② ② 3
- ③ ③ 4
- ④ ④ 5

정답: ③

1단계) $(x + y) = 4$ 와의 곱을 이용한다. $\left(\frac{1}{x} + \frac{9}{y}\right)(x + y) = 1 + \frac{y}{x} + \frac{9x}{y} + 9 = 10 + \frac{y}{x} + \frac{9x}{y}$.

2단계) 산술기하평균 부등식에 의해 $\frac{y}{x} + \frac{9x}{y} \geq 2\sqrt{\frac{y}{x} \cdot \frac{9x}{y}} = 2\sqrt{9} = 6$. 등호는 $\frac{y}{x} = \frac{9x}{y}$, 즉 $y = 3x$ 일 때 성립.

3단계) 따라서 $\left(\frac{1}{x} + \frac{9}{y}\right) \cdot 4 \geq 16$ 에서 $\frac{1}{x} + \frac{9}{y} \geq 4$. 등호는 $y = 3x$ 와 $x + y = 4$ 에서 $x = 1, y = 3$ 일 때이므로 성립 가능. 최솟값은 4.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 구하고자 하는 식에 제약식 $x + y = 4$ 를 곱해 '교차항의 합'을 만든 뒤 산술기하평균을 적용하는 기법이다. 이는 코시-슈바르츠 부등식 $\left(\sum \frac{a_i^2}{b_i}\right) \left(\sum b_i\right) \geq \left(\sum a_i\right)^2$ 의 특수한 경우이기도 하다.

이 유형은 코시-슈바르츠의 엔겔 형식(Titu의 보조정리)을 쓰면 $\frac{1^2}{x} + \frac{3^2}{y} \geq \frac{(1+3)^2}{x+y} = 4$ 로 한 줄에 풀린다.

Q138 함수 심화

두 함수 $f(x) = 2x + 1, g(x) = ax + b$ 에 대하여 모든 실수 x 에서 $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ 가 성립할 때, 상수 a, b 사이의 관계 식은?

- ① ① $a = b$
- ② ② $a = b + 1$
- ③ ③ $a = 2b$
- ④ ④ $a = 2b + 1$

정답: ②

1단계) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2(ax + b) + 1 = 2ax + 2b + 1$.

2단계) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = a(2x + 1) + b = 2ax + a + b$.

3단계) 두 식이 항상 같으려면 일차항 계수는 이미 같으므로 상수항만 비교: $2b + 1 = a + b$, 즉 $a = b + 1$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 '항등식 \Leftrightarrow 계수 비교' 원칙이다. 합성함수는 일반적으로 교환법칙이 성립하지 않으므로, 두 합성의 결과식이 같으려면 상수항까지 정확히 일치해야 한다.

일차함수들끼리의 합성의 교환법칙은 두 함수가 같은 고정점(fixed point)을 공유할 때 정확히 성립한다. 이 문제도

$f(x) = x \Rightarrow x = -1, g(x) = x \Rightarrow x = \frac{b}{1-a}$ 에서 $-1 = \frac{b}{1-a}$, 즉 $a = b + 1$ 로 이어진다.

Q139 경시·통합 문제

양의 실수 a, b, c 에 대하여 $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$ 의 최솟값은?

- ① ① 1
- ② ② $\frac{4}{3}$
- ③ ③ $\frac{3}{2}$
- ④ ④ 2

🎯 정답: ③

📖 1단계) 각 항에 1씩 더해 공통분자 $a+b+c$ 를 만든다. $\frac{a}{b+c} + 1 = \frac{a+b+c}{b+c}$. 세 항 모두 같은 방식으로 처리하면 구하는 식 S 에 대해 $S+3 = (a+b+c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right)$.

2단계) 코시-슈바르츠 부등식에 의해 $\{(b+c) + (c+a) + (a+b)\}\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) \geq (1+1+1)^2 = 9$. 좌변 첫 괄호는 $2(a+b+c)$ 이므로 $\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \geq \frac{9}{2(a+b+c)}$.

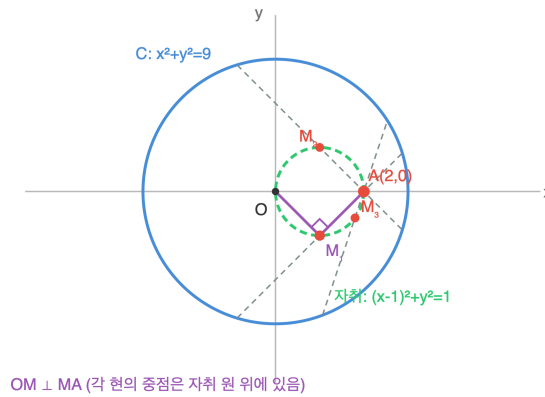
3단계) 따라서 $S+3 \geq (a+b+c) \cdot \frac{9}{2(a+b+c)} = \frac{9}{2}$, 즉 $S \geq \frac{3}{2}$. 등호는 $b+c = c+a = a+b$, 즉 $a=b=c$ 일 때 성립하므로 최솟값은 $\frac{3}{2}$.

🧠 풀이 전략: 이 문제의 핵심은 비대칭으로 보이는 분수식을 각 항에 1을 더해 '공통분자 $a+b+c$ '로 통일하는 아이디어이다. 그러면 코시-슈바르츠로 역수합의 하한이 바로 얻어진다. 이는 네스빗(Nesbitt) 부등식의 전형적 증명이다.

💡 이 부등식은 A.M. Nesbitt(1903)이 처음 제시했으며, 이후 수많은 증명법(Chebyshev 재배열, 접선선법 등)이 알려져 있다. 경시대 회의 고전 중의 고전이다.

Q140 도형의 방정식 심화

원 $C: x^2 + y^2 = 9$ 의 내부에 있는 점 $A(2, 0)$ 을 지나는 원 C 의 모든 현의 중점의 자취의 방정식은?



- ① ① $(x - 1)^2 + y^2 = 1$
- ② ② $(x - 2)^2 + y^2 = 4$
- ③ ③ $x^2 + y^2 = 4$
- ④ ④ $(x - 1)^2 + y^2 = 4$

정답: ①

1단계) 원 C 의 중심 $O(0,0)$ 에서 현에 내린 수선은 그 현의 수직이등분선이므로 중점 M 을 지난다. 즉 $OM \perp$ (현), 그런데 현은 A 를 지나므로 $OM \perp MA$.

2단계) $M(x, y)$ 로 놓으면 $\vec{OM} \cdot \vec{AM} = 0$, 즉 $(x, y) \cdot (x - 2, y) = 0$. 전개하면 $x(x - 2) + y \cdot y = 0$, $x^2 - 2x + y^2 = 0$.

3단계) 완전제곱으로 $(x - 1)^2 + y^2 = 1$. 이는 선분 OA 를 지름으로 하는 원이다. A 자신도 $x = y = 0$ 대입... 아니, $A = (2, 0)$ 대입하면 $(2 - 1)^2 + 0 = 1$ 로 만족하며, 이는 'A를 지나는 수직 현'의 중점이 A 자신인 경우에 해당한다. 따라서 자취는 원 $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ 전체이다.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 '원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현의 중점을 지난다'는 원의 기본 성질을 이용해, 중점 M 이 만족하는 기하 조건 $OM \perp MA$ 를 벡터 내적 = 0으로 바꾸는 것이다. 그러면 자취가 OA 를 지름으로 하는 원임이 자연스럽게 나온다.

'원의 지름에 대한 원주각은 직각(탈레스의 정리)'의 역을 이용한 전형적 자취 문제다. 즉 M 이 지름 OA 를 보는 각이 90° 인 점들의 집합이므로 OA 를 지름으로 하는 원 위에 놓인다.

Q141 다항식·항등식 추론

다항식 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $f(x + 1) - f(x) = 2x + 1$ 을 만족하고 $f(0) = 3$ 이다. $f(5)$ 의 값은?

- ① ① 23
- ② ② 25
- ③ ③ 28
- ④ ④ 30

정답: ③ 28

1단계: $f(x + 1) - f(x)$ 의 결과가 x 의 1차식이므로 $f(x)$ 는 2차식으로 놓을 수 있다. $f(x) = ax^2 + bx + c$ 라 하자.

2단계: $f(x + 1) - f(x) = a(x + 1)^2 + b(x + 1) + c - (ax^2 + bx + c) = 2ax + a + b$. 이를 $2x + 1$ 과 항등적으로 같게 두면 $2a = 2$, $a + b = 1$ 이므로 $a = 1$, $b = 0$.

3단계: 초기조건 $f(0) = c = 3$ 이므로 $f(x) = x^2 + 3$. 따라서 $f(5) = 25 + 3 = 28$ 이다.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 차분 $\Delta f(x) = f(x + 1) - f(x)$ 가 1차식이면 원래 $f(x)$ 는 2차식이라는 성질이다. 직접 점화 전개 대신 다항식 꼴을 가정하고 계수를 비교하면 순식간에 결정된다.

연속된 자연수 제곱의 차 $(n + 1)^2 - n^2 = 2n + 1$ 은 홀수 나열의 또 다른 표현이며, 이 문제의 차분 식과 정확히 일치한다.

Q142 복소수 심화

복소수 $z = a + bi$ (a, b 는 실수)가 $z^2 = 3 - 4i$ 를 만족할 때, $|z|$ 의 값은?

- ① ① 1
- ② ② $\sqrt{5}$
- ③ ③ 5
- ④ ④ $\sqrt{7}$

정답: ② $\sqrt{5}$

1단계: 복소수의 곱셈에 대한 절댓값 성질 $|zw| = |z||w|$ 로부터 $|z^2| = |z|^2$ 이다.

2단계: 우변의 절댓값은 $|3 - 4i| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$.

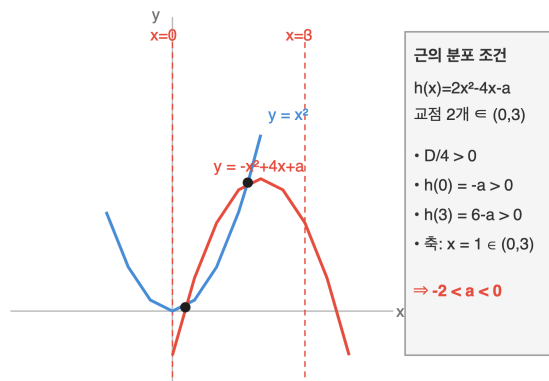
3단계: 따라서 $|z|^2 = 5$ 이고, $|z| \geq 0$ 이므로 $|z| = \sqrt{5}$ 이다.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 a, b 를 직접 구하려 하면 $a^2 - b^2 = 3, 2ab = -4$ 라는 비선형 연립이 되어 번거롭지만, 절댓값 관계식 $|z|^2 = |z^2|$ 을 쓰면 단 두 줄로 끝난다는 점이다.

💡 복소수 평면에서 z 에 z 를 곱하는 변환은 '크기를 제공하고 각도를 두 배로' 하는 회전·확대 변환이다. 이 기하적 해석 덕분에 $|z^2| = |z|^2$ 이 자연스럽게 성립한다.

Q143 이차함수·부등식 통합

두 이차함수 $f(x) = x^2$ 과 $g(x) = -x^2 + 4x + a$ 의 그래프가 $0 < x < 3$ 인 구간에서 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 a 의 값의 범위는?



- ① ① $-2 < a < 0$
- ② ② $-2 \leq a \leq 0$
- ③ ③ $0 < a < 6$
- ④ ④ $a < -2$ 또는 $a > 0$

정답: ① $-2 < a < 0$

1단계: 교점의 x 좌표는 $x^2 = -x^2 + 4x + a$, 즉 $h(x) = 2x^2 - 4x - a = 0$ 의 근이다. 두 근이 모두 열린구간 $(0, 3)$ 에 놓이는 조건을 구한다.

2단계: 이차항 계수가 양수이므로 근의 분포 조건은 네 가지: (i) 서로 다른 두 실근이어야 하므로 $D/4 = 4 + 2a > 0, a > -2$. (ii) 축 $x = 1$ 이 $0 < 1 < 3$ 안에 있음 (항상 성립). (iii) $h(0) > 0: -a > 0, a < 0$. (iv) $h(3) > 0: 18 - 12 - a > 0, a < 6$.

3단계: 네 조건의 교집합은 $-2 < a < 0$ 이다. ②는 경계 포함이라 근이 경계에 놓여 '열린구간 안'에서 만난다는 조건을 깨므로 함정이다.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 두 그래프의 교점 조건을 이차방정식의 '근의 분포 문제'로 치환하는 것이다. 열린 구간이라는 표현은 판별식 부등호와 경계값 부호 부등호를 모두 강부등식으로 써야 함을 암시한다.

Q144 고차·연립방정식

방정식 $(x^2 - x - 1)(x^2 - x - 3) = 3$ 의 모든 실근의 합을 구하여라.

- ①) ① 1
- ②) ② 2
- ③) ③ 3
- ④) ④ 4

정답: ② 2

1단계: 공통으로 등장하는 $x^2 - x$ 를 새로운 문자로 치환한다. $t = x^2 - x$ 라 두면 방정식은 $(t - 1)(t - 3) = 3$, 전개하면 $t^2 - 4t + 3 = 3$, $t^2 - 4t = 0$, $t(t - 4) = 0$. 따라서 $t = 0$ 또는 $t = 4$.

2단계: $t = 0$ 일 때 $x^2 - x = 0$, $x(x - 1) = 0$ 이므로 $x = 0, 1$. 두 값 모두 실근이며 합은 1.

3단계: $t = 4$ 일 때 $x^2 - x - 4 = 0$. 판별식 $D = 1 + 16 = 17 > 0$ 이므로 서로 다른 두 실근을 가지고, 근과 계수의 관계에 의해 근의 합은 1.

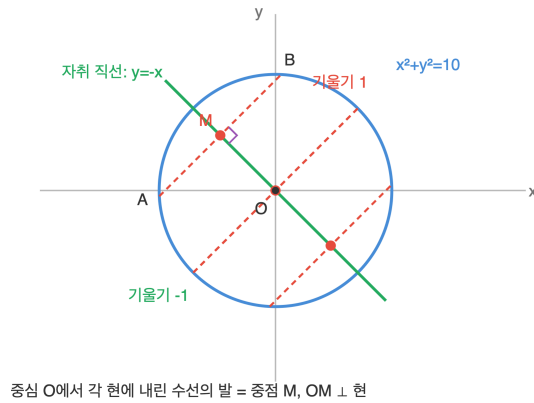
4단계: 네 실근의 총합은 $1 + 1 = 2$ 이다.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 사차방정식을 전개하면 복잡해지지만, 공통 이차식 $x^2 - x$ 를 변수로 묶으면 이차방정식 두 번으로 완전히 쪼개진다는 구조 발견이다. 각 t 값이 두 실근을 주는지 판별식으로 반드시 확인해야 한다.

치환한 변수로 본래 식의 차수를 절반으로 줄이는 기법은 '쌍곡 치환' 혹은 '공통부분 치환'이라 불리며, 대칭성이 있는 고차식 문제의 정형 해법이다.

Q145 도형의 방정식 심화

원 $x^2 + y^2 = 10$ 위의 서로 다른 두 점 A, B 를 지나는 직선의 기울기가 항상 1일 때, 선분 AB 의 중점 $M(x_0, y_0)$ 이 만족하는 관계식은?



- ① ① $y_0 = x_0$
- ② ② $y_0 = -x_0$
- ③ ③ $x_0^2 + y_0^2 = 5$
- ④ ④ $y_0 = x_0 + 1$

정답: ② $y_0 = -x_0$

1단계: 기울기가 1인 직선을 $y = x + k$ (k 는 매개변수)로 나타낸다. 이 직선이 원 $x^2 + y^2 = 10$ 과 서로 다른 두 점 A, B 에서 만나고 하자.

2단계: 원의 중심 $O(0, 0)$ 에서 현 AB 에 내린 수선의 발은 현의 중점 M 이 된다 (원의 중심에서 현에 내린 수선은 현을 이등분한다).

3단계: OM 이 현 AB 에 수직이고 현의 기울기가 1이므로 OM 의 기울기는 -1 이다. O 를 지나고 기울기 -1 인 직선은 $y = -x$. 따라서 $M(x_0, y_0)$ 은 이 직선 위의 점이므로 $y_0 = -x_0$ 이다 (단, M 은 원 내부의 점이어야 하므로 $|x_0| < \sqrt{5}$).

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 '원의 현의 중점은 중심에서 현에 내린 수선의 발'이라는 고전 정리이다. 이것을 알면 기울기 곱이 -1 이라는 수직 조건 한 줄로 자취의 방정식이 결정된다.

💡 원의 중심에서 현에 내린 수선이 현을 이등분한다는 사실은 유클리드 기하 제3권 명제 3의 직접적 응용이며, 해석기하에서는 '원의 방정식을 직선의 매개변수에 관해 미분'해도 동일한 결과가 나온다.

Q146 집합·명제 논증

실수 전체의 집합에서 두 조건 p, q 가 $p: x^2 - 5x + 4 \leq 0, q: |x - a| \leq 2$ 일 때, p 가 q 이기 위한 충분조건이 되도록 하는 실수 a 의 값의 범위는?

- ① ① $a \leq 2$
- ② ② $2 \leq a \leq 3$
- ③ ③ $a \geq 3$
- ④ ④ $1 \leq a \leq 4$

정답: ② $2 \leq a \leq 3$

1단계: 조건 p 의 진리집합을 구한다. $x^2 - 5x + 4 \leq 0, (x - 1)(x - 4) \leq 0$ 이므로 $P = [1, 4]$.

2단계: 조건 q 의 진리집합은 $|x - a| \leq 2$, 즉 $a - 2 \leq x \leq a + 2$ 이므로 $Q = [a - 2, a + 2]$.

3단계: 명제 $p \rightarrow q$ 가 참이라는 것은 $P \subset Q$ 와 동치다. 즉 $[1, 4] \subset [a - 2, a + 2]$ 이려면 $a - 2 \leq 1$ 그리고 $a + 2 \geq 4$.

4단계: 두 부등식을 풀면 $a \leq 3, a \geq 2$. 따라서 $2 \leq a \leq 3$ 이다. (경계 포함: $a = 2$ 이면 $Q = [0, 4] \supset [1, 4], a = 3$ 이면 $Q = [1, 5] \supset [1, 4]$ 로 모두 성립한다.)

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 '명제 $p \rightarrow q$ 가 참'이라는 논리적 조건을 '진리집합의 포함 관계 $P \subset Q$ '로 옮기는 표현 전환이다. 구간 포함 조건은 왼쪽 끝점·오른쪽 끝점 비교 두 줄로 해결된다.

Q147 함수 심화

두 일차함수 $f(x) = ax + b$ ($a \neq 0$)와 $g(x) = 2x + 3$ 에 대하여 모든 실수 x 에서 $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ 가 성립하고 $f(1) = 5$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

- ① ① 3
- ② ② 4
- ③ ③ 5
- ④ ④ 6

정답: ③ 5

1단계: 두 합성함수를 각각 전개한다. $(f \circ g)(x) = f(2x + 3) = a(2x + 3) + b = 2ax + 3a + b$.

$(g \circ f)(x) = g(ax + b) = 2(ax + b) + 3 = 2ax + 2b + 3$.

2단계: 두 식이 모든 x 에서 항등적으로 같으려면 x 의 계수와 상수항이 모두 같아야 한다. x 의 계수는 양쪽 다 $2a$ 로 자동 성립. 상수항 비교 $3a + b = 2b + 3$ 에서 $b = 3a - 3$.

3단계: 조건 $f(1) = a + b = 5$ 에 $b = 3a - 3$ 을 대입하면 $a + 3a - 3 = 5$, $4a = 8$, $a = 2$. 따라서 $b = 3$.

4단계: $a + b = 2 + 3 = 5$ 이다.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 '합성함수가 서로 교환된다'는 함수 방정식을 '두 일차식의 계수가 항등적으로 일치'하는 대수 조건으로 바꾸는 것이다. 일차함수끼리는 합성이 일차이므로 계수 두 개만 보면 끝난다.

일반적으로 두 일차함수 $f(x) = ax + b$, $g(x) = cx + d$ 가 교환될 조건은 $b(c - 1) = d(a - 1)$ 이다. 이 식은 두 함수의 '고정점이 같다'는 기하적 조건과 동치이다.

Q148 경우의 수 심화

숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 중에서 서로 다른 세 수를 뽑아 일렬로 배열하여 세 자리 자연수를 만들 때, 각 자리 숫자의 합이 짝수인 것의 개수는?

- ① ① 102
- ② ② 108
- ③ ③ 114
- ④ ④ 120

정답: ③ 114

1단계: 세 수의 합이 짝수가 되는 조합은 (짝짝짝) 또는 (짝홀홀) 두 경우뿐이다. 1부터 7까지에서 짝수는 {2, 4, 6} (3개), 홀수는 {1, 3, 5, 7} (4개)이다.

2단계: (짝수 3개 선택): 짝수가 정확히 3개뿐이므로 $\binom{3}{3} = 1$ 가지. 세 숫자를 일렬로 배열: $3! = 6$. 경우의 수 $1 \times 6 = 6$.

3단계: (짝수 1개 + 홀수 2개 선택): $\binom{3}{1} \times \binom{4}{2} = 3 \times 6 = 18$ 가지. 배열: $3! = 6$. 경우의 수 $18 \times 6 = 108$.

4단계: 모든 경우의 합은 $6 + 108 = 114$ 이다. (참고: 1~7 세 수로 만드는 세 자리 수는 총 $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ 개이므로, 짝수 합 114 + 홀수 합 96 = 210으로 검산 가능.)

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 '세 수의 합의 홀짝'이 오직 '고른 홀수의 개수의 홀짝'에만 좌우된다는 성질이다. 홀수를 0개 또는 2개 뽑은 경우를 분리해 각각 선택과 배열 두 단계로 세면 된다.

Q149 경시·통합 문제

다항식 $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ 가 $P(1) = P(-1) = P(2) = 0$ 이고 $P(0) = -6$ 일 때, $a + b + c + d$ 의 값은?

- ① ① -3
- ② ② -1
- ③ ③ 1
- ④ ④ 3

🎯 정답: ② -1

📖 1단계: 인수정리에 의해 $x - 1, x + 1, x - 2$ 는 모두 $P(x)$ 의 인수다. $P(x)$ 는 최고차항 계수가 1인 사차식이므로 네 번째 인수를 $x - r$ 로 두면 $P(x) = (x - 1)(x + 1)(x - 2)(x - r)$ 꼴로 유일하게 결정된다.

2단계: $P(0) = (-1)(1)(-2)(-r) = -2r = -6$ 에서 $r = 3$. 따라서 $P(x) = (x - 1)(x + 1)(x - 2)(x - 3)$.

3단계: 계수의 합을 구하는 지름길은 $P(1) = 1 + a + b + c + d$ 라는 관찰이다. $P(1) = 0$ 이므로 $1 + a + b + c + d = 0$, 즉 $a + b + c + d = -1$ 이다.

4단계: 검산으로 $r = 3$ 과 $x = 1$ 대입 결과가 일치함을 확인한다.

🧠 풀이 전략: 이 문제의 핵심은 '계수 네 개를 각각 구하는 대신, $P(1)$ 을 통해 계수의 합을 한 번에 얻는' 대입 트릭이다. 인수정리로 사차식을 세우고 $P(0)$ 로 네 번째 근을 고정한 뒤, 필요한 양 자체가 $P(1) - 1$ 임을 알아보는 데서 풀이가 단순해진다.

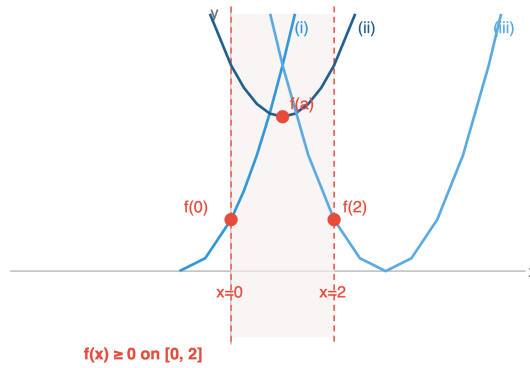
💡 어떤 다항식이든 계수의 합은 항상 $x = 1$ 대입값과 같다. 이는 계수 분석의 가장 기본이 되는 대입 기법이며, 뉴턴의 이항정리에서도 이 성질이 자주 활용된다.

Q150 이차함수·부등식 통합

이차함수 $f(x) = x^2 - 2ax + 2a + 3$ 이 구간 $[0, 2]$ 에서 항상 $f(x) \geq 0$ 이 되도록 하는 실수 a 의 값의 범위는?

$y = x^2 - 2ax + 2a + 3$, 구간 $[0, 2]$ 에서 최솟값 ($f \geq 0$ 조건)

(i) $a < 0$: 최솟값 $f(0)$ (ii) $0 \leq a \leq 2$: 최솟값 $f(a)$ (iii) $a > 2$: 최솟값 $f(2)$



- ① ① $-\frac{3}{2} \leq a \leq \frac{7}{2}$
- ② ② $-1 \leq a \leq 3$
- ③ ③ $-\frac{3}{2} \leq a \leq 3$
- ④ ④ $-1 \leq a \leq \frac{7}{2}$

☞ 정답: ① $-\frac{3}{2} \leq a \leq \frac{7}{2}$

▣ 1단계: $f(x) = (x - a)^2 - a^2 + 2a + 3$. 축은 $x = a$ 이고 아래로 볼록. 구간 $[0, 2]$ 에서 최솟값은 축의 위치에 따라 세 경우로 나뉜다. 최솟값이 0 이상이면 구간 전체에서 $f \geq 0$ 이 성립한다.

2단계 (i) $a < 0$: 축이 구간 왼쪽. 최솟값은 $f(0) = 2a + 3 \geq 0$, $a \geq -\frac{3}{2}$. 교집합 $-\frac{3}{2} \leq a < 0$.

3단계 (ii) $0 \leq a \leq 2$: 최솟값은 꼭짓점에서 $f(a) = -a^2 + 2a + 3 \geq 0$. 부호 바꾸면 $a^2 - 2a - 3 \leq 0$, $(a - 3)(a + 1) \leq 0$, $-1 \leq a \leq 3$. 교집합 $0 \leq a \leq 2$.

4단계 (iii) $a > 2$: 최솟값은 $f(2) = 4 - 4a + 2a + 3 = 7 - 2a \geq 0$, $a \leq \frac{7}{2}$. 교집합 $2 < a \leq \frac{7}{2}$.

5단계: 세 구간을 합치면 $-\frac{3}{2} \leq a \leq \frac{7}{2}$ 이다. 함정 ②는 꼭짓점 조건만 쓴 경우로 축이 구간 밖으로 나가는 상황을 놓친 오답이다.

🧠 풀이 전략: 이 문제의 핵심은 '구간에서 이차함수가 항상 비음'이라는 조건을 '구간에서의 최솟값 ≥ 0 '으로 바꾸고, 다시 축의 위치별로 세 경우로 분기하는 것이다. 축이 구간 바깥일 때는 구간의 끝점에서, 안일 때는 꼭짓점에서 최솟값이 된다는 점을 정확히 쓰는 것이 관건이다.

Q151 고차·연립방정식

방정식 $|x^2 - 4| = x + 2$ 의 모든 실근의 합은?

- ① ① 0
- ② ② 1
- ③ ③ 2
- ④ ④ 3

☞ 정답: ③ 2

▣ 1단계: 좌변은 절댓값이므로 항상 0 이상. 따라서 우변 $x + 2 \geq 0$ 이 필요 조건이며, $x \geq -2$ 여야 한다.

2단계 (i) $x^2 - 4 \geq 0$ ($x \leq -2$ 또는 $x \geq 2$)일 때: 식은 $x^2 - 4 = x + 2$, $x^2 - x - 6 = 0$, $(x - 3)(x + 2) = 0$, $x = 3$ 또는 $x = -2$. 두 값 모두 해당 조건을 만족하므로 유효.

3단계 (ii) $x^2 - 4 < 0$ ($-2 < x < 2$)일 때: 식은 $-(x^2 - 4) = x + 2$, $x^2 + x - 2 = 0$, $(x + 2)(x - 1) = 0$. $x = -2$ 는 구간 경계라 (i)에서 이미 셈, 여기서는 제외. $x = 1$ 만 유효.

4단계: 실근은 $\{-2, 1, 3\}$. 합은 $-2 + 1 + 3 = 2$ 이다.

🧠 풀이 전략: 이 문제의 핵심은 절댓값 방정식을 경우 분할하되, 각 경우에서 얻은 해가 원래의 구간 조건을 충족하는지 반드시 검사하는 것이다. 또한 우변 $x + 2$ 가 음이 될 수 없다는 암묵 조건이 전체 해집합을 $x \geq -2$ 로 제한함을 놓치지 말아야 한다.

Q152 집합·명제 논증

세 조건 p, q, r 에 대하여 명제 $p \rightarrow q$ 와 $q \rightarrow r$ 가 모두 참일 때, 다음 중 항상 참인 명제는?

- ① ① $q \rightarrow p$
- ② ② $\sim p \rightarrow \sim q$
- ③ ③ $r \rightarrow q$
- ④ ④ $\sim r \rightarrow \sim p$

정답: ④ $\sim r \rightarrow \sim p$

1단계: 주어진 두 참 명제를 연결하면, 삼단논법(가언삼단법)에 의해 $p \rightarrow r$ 도 참이다.

2단계: 한 명제와 그 대우는 진리값이 같다. $p \rightarrow r$ 의 대우는 $\sim r \rightarrow \sim p$ 이므로 ④ 역시 항상 참이다.

3단계: 나머지 선지 분석: ①은 $p \rightarrow q$ 의 '역', ②는 $p \rightarrow q$ 의 '이', ③은 $q \rightarrow r$ 의 '역'. 역과 이는 일반적으로 원명제와 진리값이 일치하지 않으므로 '항상 참'이라 단정할 수 없다. 따라서 답은 ④ 하나뿐.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 두 가지 논리 규칙을 결합하는 것이다. 즉 '삼단논법으로 새 함의 $p \rightarrow r$ 를 만든 뒤, 대우 법칙으로 $\sim r \rightarrow \sim p$ 형태로 뒤집는' 단계다. 역과 이는 일반적으로 동치가 아님을 분명히 기억해야 함정 선지를 피할 수 있다.

💡 '원명제 \equiv 대우' 라는 논리적 동치 관계는 수학에서 직접 증명이 어려운 명제를 다룰 때 자주 이용된다. 대표적 예가 ' n^2 이 짝수이면 n 은 짝수'를 대우 ' n 이 홀수이면 n^2 도 홀수'로 바꿔 증명하는 방법이다.

Q153 다항식·항등식 추론

항등식 $(2x - 1)^7 = a_0 + a_1(x - 1) + a_2(x - 1)^2 + \dots + a_7(x - 1)^7$ 이 성립할 때, a_3 의 값을 구하시오.

- ① ① 35
- ② ② 140
- ③ ③ 280
- ④ ④ 560

정답: ③ 280

1단계 (변수 평행이동): $2x - 1 = 2(x - 1) + 1$ 로 변형한다. 따라서 $(2x - 1)^7 = (2(x - 1) + 1)^7$. 2단계 (이항정리 적용): $(2(x - 1) + 1)^7 = \sum_{k=0}^7 \binom{7}{k} (2(x - 1))^k \cdot 1^{7-k} = \sum_{k=0}^7 \binom{7}{k} 2^k (x - 1)^k$. 따라서 $a_k = \binom{7}{k} \cdot 2^k$. 3단계 (특정 계수 계산): $a_3 = \binom{7}{3} \cdot 2^3 = 35 \times 8 = 280$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 변수 x 의 식을 $(x - 1)$ 의 식으로 평행이동시켜 이항정리를 직접 적용하는 것이다.

$2x - 1 = 2(x - 1) + 1$ 로 분해하면 기준점을 1로 옮긴 후 표준 이항전개로 환원된다. 단순 전개·다항식 나눗셈은 매우 번거로워 함정이 된다.

💡 이 변환은 테일러 전개의 본질이다. 점 a 에서 다항식의 k 차 계수는 $\frac{f^{(k)}(a)}{k!}$ 로 표현된다.

Q154 복소수 심화

삼차방정식 $x^3 = 1$ 의 한 허근을 ω 라 할 때, $(1 - \omega + \omega^2)(1 + \omega - \omega^2)(1 - \omega - \omega^2)$ 의 값을 구하시오.

- ① ① 4
- ② ② 4ω
- ③ ③ 8
- ④ ④ -8

정답: ③ 8

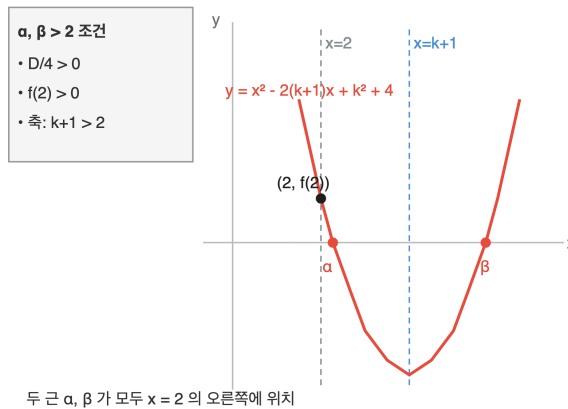
1단계 (기본 관계식): $\omega^3 = 1$ 이고 $\omega \neq 1$ 이므로 $1 + \omega + \omega^2 = 0$. 따라서 $1 + \omega^2 = -\omega$, $1 + \omega = -\omega^2$, $\omega + \omega^2 = -1$. 2단계 (각 인수 단순화): $1 - \omega + \omega^2 = (1 + \omega^2) - \omega = -\omega - \omega = -2\omega$. $1 + \omega - \omega^2 = (1 + \omega) - \omega^2 = -\omega^2 - \omega^2 = -2\omega^2$. $1 - \omega - \omega^2 = 1 - (\omega + \omega^2) = 1 - (-1) = 2$. 3단계 (곱): $(-2\omega)(-2\omega^2)(2) = 8\omega^3 = 8 \cdot 1 = 8$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 $1 + \omega + \omega^2 = 0$ 이라는 단 하나의 관계식만으로 세 인수 모두를 ω , ω^2 , 또는 상수로 압축하는 것이다. 끝에서 $\omega^3 = 1$ 을 사용하여 실수 값으로 마무리한다. 직접 전개는 매우 번거롭다.

💡 ω 는 복소평면 단위원 위 120° 위치의 점이다. 이런 식의 변형은 결국 단위원 위 회전군의 원소 사이 관계식으로 해석할 수 있다.

Q155 이차함수·부등식 통합

이차함수 $f(x) = x^2 - 2(k+1)x + k^2 + 4$ 의 그래프가 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나고, 두 교점의 x 좌표가 모두 2보다 클 때, 실수 k 의 값의 범위를 구하시오.



- ① ① $k > 1$
- ② ② $k > \frac{3}{2}$ 그리고 $k \neq 2$
- ③ ③ $k \geq 2$
- ④ ④ $\frac{3}{2} < k < 2$

정답: ② $k > \frac{3}{2}$ 그리고 $k \neq 2$

1단계 (판별식): 서로 다른 두 실근이 존재하려면 $\frac{D}{4} = (k+1)^2 - (k^2 + 4) = 2k - 3 > 0$, 즉 $k > \frac{3}{2}$. 2단계 (경계값): 두 근이 모두 2보다 크려면 $f(2) > 0$. $f(2) = 4 - 4(k+1) + k^2 + 4 = k^2 - 4k + 4 = (k-2)^2 > 0$ 이므로 $k \neq 2$. 3단계 (축의 위치): 축 $x = k+1$ 이 2의 오른쪽에 있어야 하므로 $k+1 > 2 \Rightarrow k > 1$. 세 조건 교집합: $k > \frac{3}{2}$ 그리고 $k \neq 2$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 '근의 위치 분석'에서 빠뜨리기 쉬운 세 조건(판별식, 경계값의 함수값 부호, 축의 위치)을 동시에 점검하는 것이다. 특히 $f(2) = (k-2)^2$ 에서 등호가 성립하면 한 근이 정확히 2가 되어 '둘 다 2보다 크다'를 만족하지 못하므로 $k \neq 2$ 를 반드시 제외해야 한다.

💡 이차함수 근의 위치 분석은 슈투름 정리(Sturm's theorem)의 가장 단순한 사례다. 고차다항식에서는 일반적인 부호변화 수열로 일반화된다.

Q156 고차·연립방정식

사차방정식 $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + k = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 실수 k 의 값의 범위를 구하시오.

- ① ① $k < 0$
- ② ② $k < 1$
- ③ ③ $0 < k < 1$
- ④ ④ $k > 1$

정답: ② $k < 1$

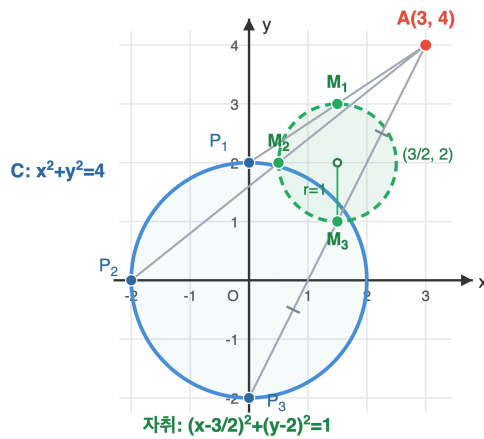
1단계 (구조 인식): 계수 1, -4, 6, -4, 1은 $\binom{4}{0}, -\binom{4}{1}, \binom{4}{2}, -\binom{4}{3}, \binom{4}{4}$ 이므로 $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = (x-1)^4$. 따라서 주어진 식은 $(x-1)^4 + (k-1) = 0$, 즉 $(x-1)^4 = 1-k$. **2단계 (실근 개수 분석):** $t = x-1$ 로 치환. $t^4 = 1-k$. $1-k < 0$ 이면 실근 없음. $1-k = 0$ 이면 $t = 0$ 4중근(실근 1개). $1-k > 0$ 이면 $t = \pm(1-k)^{1/4}$ 로 서로 다른 두 실근. **3단계 (조건):** '서로 다른 두 실근'은 $1-k > 0$, 즉 $k < 1$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 1, -4, 6, -4, 1이라는 이항계수 패턴을 즉시 알아채고 사차식을 $(x-1)^4$ 로 압축하는 것이다. 한 번 평행이동 변환을 거치면 단순한 4제곱 방정식 $t^4 = c$ 의 실근 개수 분류로 환원된다. 무리하게 인수분해를 시도하는 것은 함정이다.

💡 $(1-1)^4$ 의 이항전개 계수는 정확히 1, -4, 6, -4, 1이다. '은폐된 완전 거듭제곱' 패턴은 경시 문제의 단골 출제 소재로, $(x+a)^n$ 형 패턴을 한눈에 알아보는 훈련이 필요하다.

Q157 도형의 방정식 심화

점 $A(3, 4)$ 와 원 $C: x^2 + y^2 = 4$ 위를 움직이는 점 P 에 대해, 선분 AP 의 중점 M 이 그리는 자취의 방정식을 구하시오.



- ① ① $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 1$
- ② ② $(x-\frac{3}{2})^2 + (y-2)^2 = 1$
- ③ ③ $x^2 + y^2 = 1$
- ④ ④ $(x-\frac{3}{2})^2 + (y-2)^2 = 4$

정답: ② $(x-\frac{3}{2})^2 + (y-2)^2 = 1$

1단계 (매개점 설정): 원 위의 점을 $P(a, b)$ 라 하면 $a^2 + b^2 = 4$. **2단계 (중점 좌표):** 중점 $M(x, y)$ 에 대해 $x = \frac{3+a}{2}, y = \frac{4+b}{2}$ 이므로 $a = 2x-3, b = 2y-4$. **3단계 (매개변수 소거):** 조건식에 대입. $(2x-3)^2 + (2y-4)^2 = 4$. 양변을 4로 나누면

$(x-\frac{3}{2})^2 + (y-2)^2 = 1$. 따라서 자취는 중심 $(\frac{3}{2}, 2)$, 반지름 1인 원.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 '원 위 점을 매개변수로 두고 자취점의 좌표를 그것의 함수로 표현한 뒤, 매개변수를 소거하는' 표준 자취 절차다. 결과적으로 자취는 원반 원을 절반 크기(반지름 1)로 축소하고 OA 의 중점만큼 평행이동한 작은 원이다.

💡 점 A 와 원 위 점 P 의 중점 자취는 항상 '원의 절반 크기의 원'이며 그 중심은 A 와 원래 원 중심의 중점이다. 더 일반화하면 어떤 비율의 내분점 자취도 모두 원이며, 이는 닮음변환이 원을 원으로 보낸다는 사실로 이해된다.

Q158 집합·명제 논증

양의 실수 a, b, c 에 대해 부등식 $a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$ 가 항상 성립함을 증명하는 과정에서, 핵심적으로 사용되는 부등식과 등호 성립 조건을 옳게 짝지은 것은?

- ① ① 코시-슈바르츠 부등식, $abc = 1$ 일 때
- ② ② 산술-기하 평균 부등식을 두 항씩 쌍으로 적용, $a = b = c$ 일 때
- ③ ③ 절댓값 삼각부등식, $a + b + c = 3$ 일 때
- ④ ④ 멱평균 부등식, $a + b = c$ 일 때

정답: ② 산술-기하 평균 부등식을 두 항씩 쌍으로 적용, $a = b = c$ 일 때

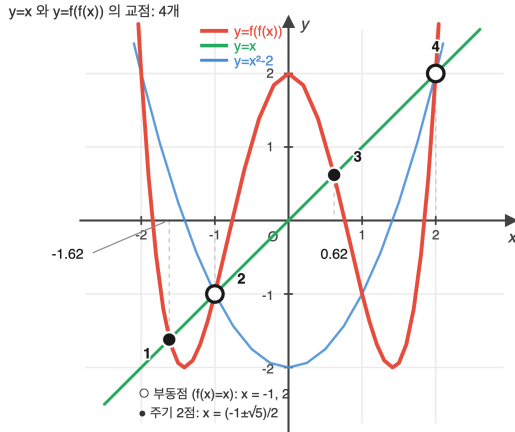
1단계 (쌍별 부등식): 두 양수에 대한 산술-기하 평균 부등식 $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ (등호 $x = y$)을 세 가지 쌍에 적용한다. $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (등호 $a = b$), $\frac{b+c}{2} \geq \sqrt{bc}$ (등호 $b = c$), $\frac{c+a}{2} \geq \sqrt{ca}$ (등호 $c = a$). **2단계 (합산):** 세 부등식을 더하면 $\frac{2(a+b+c)}{2} = a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$. **3단계 (등호 조건 통합):** 세 등호가 모두 성립하려면 $a = b, b = c, c = a$ 가 동시에 성립해야 하므로 $a = b = c$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 '다변수 부등식을 두 항씩 쌍으로 산술-기하 평균에 환원'하는 표준 기법이다. 또한 등호 조건은 사용된 모든 부등식의 등호가 동시에 성립할 때에만 전체 등호가 성립한다는 점을 정확히 다뤄야 한다. 단순히 한 번의 산술-기하 적용으로는 좌·우 변 모양이 맞지 않는다.

이 부등식은 변수 치환 $\sqrt{a} = u, \sqrt{b} = v, \sqrt{c} = w$ 를 적용하면 $u^2 + v^2 + w^2 \geq uv + vw + wu$ 로 변형되며, 이는 $\frac{1}{2}((u-v)^2 + (v-w)^2 + (w-u)^2) \geq 0$ 의 다른 표현이다.

Q159 함수 심화

함수 $f(x) = x^2 - 2$ 에 대해 방정식 $f(f(x)) = x$ 의 서로 다른 실근의 개수를 구하시오.



- ① ① 2
- ② ② 3
- ③ ③ 4
- ④ ④ 무한히 많다

정답: ③ 4

1단계 (전개): $f(f(x)) = (x^2 - 2)^2 - 2 = x^4 - 4x^2 + 2$. 따라서 방정식은 $x^4 - 4x^2 - x + 2 = 0$. 2단계 (인수분해): $f(x) = x$ 의 해, 즉 $x^2 - x - 2 = 0$ 의 해 $x = -1, 2$ 는 자동으로 $f(f(x)) = x$ 의 해이다. 따라서 $x^2 - x - 2$ 가 인수. 다항식 나눗셈으로 $x^4 - 4x^2 - x + 2 = (x^2 - x - 2)(x^2 + x - 1)$. 검증:

$(x^2 - x - 2)(x^2 + x - 1) = x^4 + x^3 - x^2 - x^3 - x^2 + x - 2x^2 - 2x + 2 = x^4 - 4x^2 - x + 2$ ✓. 3단계 (실근 개수):

$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = -1, 2$. $x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ (둘 다 실수). 서로 다른 실근 4개.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 ' $f(x) = x$ 의 부동점이 항상 $f(f(x)) = x$ 의 해'라는 사실로 사차식의 차수를 낮추는 것이다. 이를 통해 사차방정식이 두 이차방정식의 곱으로 분해되어, 각 이차의 실근을 따로 분석하면 끝난다. 단순 전개로 사차식의 실근을 세려는 것은 거의 불가능하다.

부동점은 항상 주기 2점의 부분집합이라는 사실은 동역학(dynamical systems)의 일반 원리다. 추가로 나타나는 두 근 $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ 는 서로 짝(pair)이 되는 진짜 주기 2점이다.

Q160 경우의 수 심화

1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개 숫자 중 서로 다른 4개를 뽑아 만든 네 자리 정수 중 4의 배수의 개수를 구하시오.

- ① ① 72
- ② ② 84
- ③ ③ 96
- ④ ④ 108

정답: ③ 96

1단계 (4의 배수 판정법): 어떤 정수가 4의 배수일 필요충분조건은 끝 두 자리가 4의 배수이다(100 = 4 × 25이므로). 2단계 (끝 두 자리 후보 나열): 1~6에서 서로 다른 두 숫자로 만든 두 자리 수 중 4의 배수: 12, 16, 24, 32, 36, 52, 56, 64. 총 8가지. 3단계 (앞 두 자리 배치): 끝 두 자리에 사용된 숫자 2개를 제외한 4개 숫자 중 2개를 골라 천의 자리, 백의 자리에 순서대로 배치하는 방법은 $4 \times 3 = 12$ 가지. 따라서 총 경우의 수는 $8 \times 12 = 96$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 '4의 배수 판정법에 의해 끝 두 자리만 결정하면 충분'이라는 관찰이다. 끝 두 자리 후보를 빠짐없이 나열한 뒤(이때 12·24·52처럼 첫 자리가 작은 수, 큰 수인 경우 모두 챙겨야 함), 남은 자리는 단순한 순열의 곱셈 원리로 해결된다.

2^k의 배수 판정법은 끝 k자리만 보면 충분하다. 같은 원리로 8의 배수는 끝 세 자리, 16의 배수는 끝 네 자리만 보면 된다.

고1 수학 심화

총 40문제 · 문제와 정답·풀이 포함

Q161 경시·통합 문제

양의 실수 x, y 가 $x + y = 1$ 을 만족할 때, $\frac{1}{x} + \frac{4}{y}$ 의 최솟값을 구하시오.

- ① ① 6
- ② ② 7
- ③ ③ 8
- ④ ④ 9

정답: ④ 9

1단계 (1을 곱하기): $x + y = 1$ 이므로 $\frac{1}{x} + \frac{4}{y} = (x + y)\left(\frac{1}{x} + \frac{4}{y}\right) = 1 + \frac{4x}{y} + \frac{y}{x} + 4 = 5 + \frac{4x}{y} + \frac{y}{x}$. **2단계 (산술-기하):**

$\frac{4x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2\sqrt{\frac{4x}{y} \cdot \frac{y}{x}} = 2\sqrt{4} = 4$. 등호는 $\frac{4x}{y} = \frac{y}{x}$, 즉 $y = 2x$ 일 때. **3단계 (등호 검증과 결론):** $y = 2x, x + y = 1$ 이면 $x = \frac{1}{3}, y = \frac{2}{3}$

이며 양수 조건 만족. 이때 $\frac{1}{x} + \frac{4}{y} = 3 + 6 = 9$. 따라서 최솟값은 9.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 조건 $x + y = 1$ 을 그냥 두지 않고 '1을 곱하는 트릭'으로 활용해 분수합의 하한을 정확히 산출하는 것이다. 단순히 한 변수를 소거하여 미분으로 푸는 풀이도 가능하지만, 위 트릭이 가장 빠르고 일반화 가능하다.

이 부등식은 코시-슈바르츠 부등식을 직접 적용해도 즉시 증명된다: $(x + y)\left(\frac{1}{x} + \frac{4}{y}\right) \geq (\sqrt{1} + \sqrt{4})^2 = 9$. 일반화하면

$$(x_1 + \dots + x_n)\left(\frac{a_1^2}{x_1} + \dots + \frac{a_n^2}{x_n}\right) \geq (a_1 + \dots + a_n)^2.$$

Q162 함수 심화

유리함수 $f(x) = \frac{ax+b}{x-1}$ ($x \neq 1, b \neq 0, b \neq -1$)에 대해 모든 x 에서 $f(f(x)) = x$ 가 성립할 때, 상수 a 의 값을 구하시오.

- ① ① -2
- ② ② -1
- ③ ③ 0
- ④ ④ 1

정답: ④ 1

1단계 (합성함수 계산): $f(f(x)) = \frac{a \cdot \frac{ax+b}{x-1} + b}{\frac{ax+b}{x-1} - 1} = \frac{a(ax+b) + b(x-1)}{(ax+b) - (x-1)} = \frac{(a^2+b)x + b(a-1)}{(a-1)x + (b+1)}$. **2단계 (항등식 변형):** $f(f(x)) = x$ 이라면

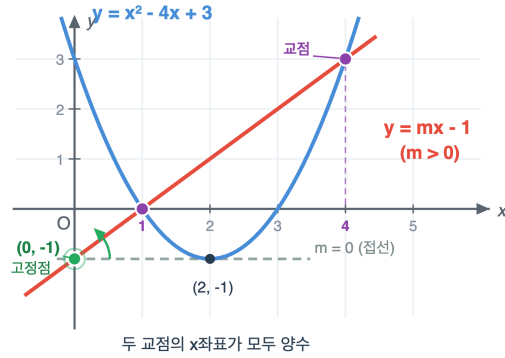
$(a^2 + b)x + b(a - 1) = x \cdot [(a - 1)x + (b + 1)] = (a - 1)x^2 + (b + 1)x$. 양변의 x^2 항 계수 비교: $0 = a - 1 \Rightarrow a = 1$. **3단계 (검증):** $a = 1$ 이면 좌변 $= (1 + b)x + 0 = (b + 1)x$, 우변 $= 0 \cdot x^2 + (b + 1)x = (b + 1)x$. $b \neq -1$ 이므로 두 식이 일치. 따라서 $a = 1$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 '유리함수가 자기 자신의 역함수가 되는 조건'을 합성함수 직접 계산으로 추출하는 것이다. $f(f(x)) = x$ 에서 합성식의 분자·분모 다항식을 등식의 양변에서 비교하면 x^2 항 계수가 결정해 $a = 1$ 을 얻는다.

유리함수 $\frac{ax+b}{cx+d}$ 가 자기 역함수(대합)이 될 필요충분조건은 $a + d = 0$ 이다. $f(x) = \frac{x+b}{x-1}$ 의 경우 $a + d = 1 + (-1) = 0$ 이 자동 성립한다.

Q163 이차함수·부등식 통합

이차함수 $y = x^2 - 4x + 3$ 의 그래프와 직선 $y = mx - 1$ 이 서로 다른 두 점에서 만나고, 두 교점의 x 좌표가 모두 양수일 때, 실수 m 의 값의 범위를 구하시오.



- ① ① $m > 0$
- ② ② $m < -8$ 또는 $m > 0$
- ③ ③ $0 < m < 8$
- ④ ④ $-4 < m < 0$

정답: ① $m > 0$

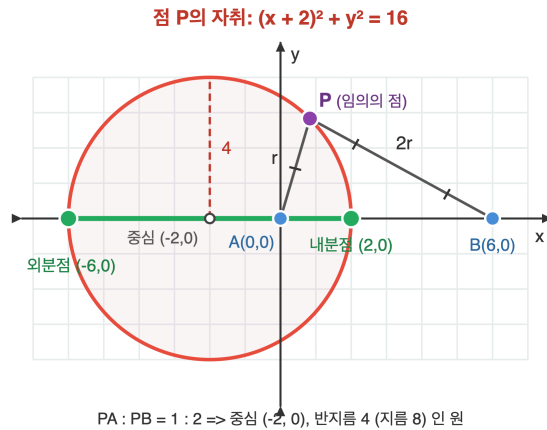
1단계 (교점 방정식): $x^2 - 4x + 3 = mx - 1 \Rightarrow x^2 - (4 + m)x + 4 = 0$. 두 근을 α, β 라 하자. 2단계 (두 양근 조건 세 개): (i) 서로 다른 두 실근(판별식): $D = (4 + m)^2 - 16 > 0 \Rightarrow (m + 4)^2 > 16 \Rightarrow m > 0$ 또는 $m < -8$. (ii) 두 근의 합 양수: $\alpha + \beta = 4 + m > 0 \Rightarrow m > -4$. (iii) 두 근의 곱 양수: $\alpha\beta = 4 > 0$ (자동 성립). 3단계 (교집합): ($m > 0$ 또는 $m < -8$) 그리고 $m > -4$. $m < -8$ 은 $m > -4$ 와 모순. 결과: $m > 0$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 두 교점의 x 좌표를 '이차방정식의 두 양근'으로 환원하고, 두 양근 조건(판별식, 근의 합 양수, 근의 곱 양수)을 비에타 관계식으로 정확히 적용하는 것이다. 함정은 (i)에서 $m < -8$ 의 가능성이 있지만 (ii)와의 교집합에서 사라진다는 점이다.

💡 직선 $y = mx - 1$ 은 m 이 변해도 항상 점 $(0, -1)$ 을 지난다. 즉 정점에서 꼭선의 양수 영역을 두 점에서 자르는 기울기를 묻는 기하적 문제로 재해석할 수 있다.

Q164 도형의 방정식 심화

좌표평면 위의 두 점 $A(0,0)$, $B(6,0)$ 에 대해 $\overline{PA}:\overline{PB} = 1:2$ 를 만족하는 점 P 의 자취의 방정식을 구하시오.



- ① ① $(x+2)^2 + y^2 = 16$
- ② ② $(x-2)^2 + y^2 = 16$
- ③ ③ $(x+2)^2 + y^2 = 4$
- ④ ④ $x^2 + y^2 = 4$

정답: ① $(x+2)^2 + y^2 = 16$

1단계 (조건 좌표화): $P(x, y)$ 로 두면 $PA^2 = x^2 + y^2$, $PB^2 = (x-6)^2 + y^2$. 거리 비 1:2이므로 $PB^2 = 4PA^2$. 2단계 (전개): $(x-6)^2 + y^2 = 4(x^2 + y^2)$. $x^2 - 12x + 36 + y^2 = 4x^2 + 4y^2$. 3단계 (정리): $3x^2 + 3y^2 + 12x - 36 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 4x - 12 = 0 \Rightarrow (x+2)^2 + y^2 = 16$. 자취는 중심 $(-2, 0)$, 반지름 4인 원.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 '두 정점에서의 거리 비가 일정한 점의 자취는 원(아폴로니우스의 원)'이라는 사실을 좌표 계산으로 직접 유도하는 것이다. 거리 자체가 아닌 거리의 제곱비로 식을 세우면 제곱근 처리 없이 깔끔하게 정리된다. 검산으로 \overline{AB} 를 1:2로 내분·외분한 두 점이 자취 원의 지름 양 끝점임을 확인할 수 있다.

💡 이 원을 아폴로니우스의 원이라 부른다. 거리 비가 1:1이면 자취는 수직이등분선(직선)이지만, 비가 1:1이 아닌 경우엔 항상 원이다. 비가 1에 가까워질수록 원의 반지름은 무한대로 발산하여 직선에 수렴한다.

Q165 다항식·항등식 추론

다항식 $f(x)$ 에 대해 항등식 $f(x^2 + 1) = x^4 + 3x^2 + 5$ 가 성립할 때, $f(3)$ 의 값을 구하시오.

- ① ① 11
- ② ② 13
- ③ ③ 15
- ④ ④ 17

정답: ③ 15

1) $t = x^2 + 1$ 로 치환하면 $x^2 = t - 1$. (2) 우변을 t 에 대해 정리:

$$x^4 + 3x^2 + 5 = (x^2)^2 + 3(x^2) + 5 = (t-1)^2 + 3(t-1) + 5 = t^2 - 2t + 1 + 3t - 3 + 5 = t^2 + t + 3. \text{ 따라서 } f(t) = t^2 + t + 3.$$

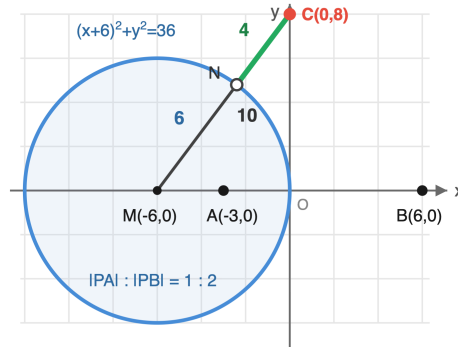
3) $f(3) = 9 + 3 + 3 = 15$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 $x^2 + 1$ 을 하나의 문자 t 로 치환하여 원 함수 $f(t)$ 의 식을 역으로 복원하는 것이다. x 에 관한 식을 t 에 관한 식으로 완전히 옮기는 과정이 중요하다.

💡 이런 '함성관계로부터 원함수 복원' 기법은 대수학의 함수방정식으로 자연스럽게 확장된다.

Q166 도형의 방정식 심화

좌표평면 위의 두 점 $A(-3, 0)$, $B(6, 0)$ 으로부터의 거리의 비가 $PA:PB = 1:2$ 인 점 P 의 자취가 나타내는 도형의 방정식을 구하고, 이 자취 위의 점과 점 $C(0, 8)$ 사이 거리의 최솟값을 구하시오.



- ① ① 2
- ② ② 4
- ③ ③ 6
- ④ ④ 8

정답: ② 4

☞ (1) 점 $P(x, y)$ 로 놓고 $2PA = PB$, 양변 제곱: $4\{(x+3)^2 + y^2\} = (x-6)^2 + y^2$. (2) 전개 후 정리:

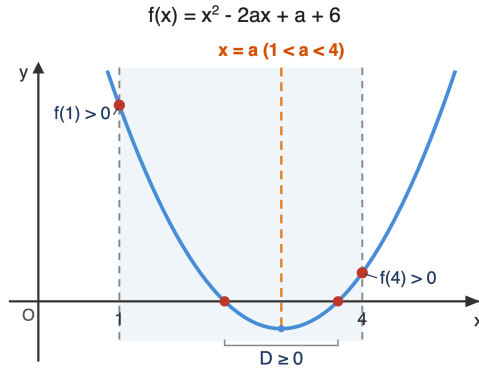
$3x^2 + 3y^2 + 36x = 0 \Rightarrow (x+6)^2 + y^2 = 36$. 즉 중심 $(-6, 0)$, 반지름 6인 원(아폴로니우스 원). (3) 점 $C(0, 8)$ 에서 중심 $(-6, 0)$ 까지 거리는 $\sqrt{36+64} = 10$. C 는 원 밖의 점이므로 원까지 최소거리 = $10 - 6 = 4$.

🧠 풀이 전략: 이 문제의 핵심은 두 정점으로부터 거리의 비가 일정한 점의 자취가 원(아폴로니우스 원)이 된다는 사실과, 원 밖 한 점에서 원 위 점까지의 최소거리는 '중심까지 거리 - 반지름'임을 결합하는 것이다.

💡 아폴로니우스 원은 고대 그리스 수학자 페르가의 아폴로니우스가 연구한 도형으로, 비가 1:1이 아닐 때 자취가 원이 된다.

Q167 이차함수·부등식 통합

이차방정식 $x^2 - 2ax + a + 6 = 0$ 의 두 실근이 모두 열린 구간 $(1, 4)$ 에 속하도록 하는 실수 a 의 값의 범위를 구하시오.



- ① $3 \leq a < \frac{22}{7}$
- ② $3 < a < 4$
- ③ $-2 < a < 3$
- ④ $a \leq -2$ 또는 $a \geq 3$

정답: ① $3 \leq a < \frac{22}{7}$

☞ (1) $f(x) = x^2 - 2ax + a + 6$ 의 두 근이 모두 $(1, 4)$ 에 있으려면 네 조건이 동시에 성립: (i) $D/4 = a^2 - (a + 6) \geq 0 \Rightarrow (a - 3)(a + 2) \geq 0 \Rightarrow a \leq -2$ 또는 $a \geq 3$. (ii) $f(1) = 7 - a > 0 \Rightarrow a < 7$. (iii) $f(4) = 22 - 7a > 0 \Rightarrow a < \frac{22}{7}$. (iv) $1 < a < 4$. (2) (i)와 (iv)의 교집합: $3 \leq a < 4$. (3) 여기에 (iii)을 합치면 $3 \leq a < \frac{22}{7}$. (ii)는 자동 만족. 따라서 구하는 범위는 $3 \leq a < \frac{22}{7}$.

💡 풀이 전략: 이 문제의 핵심은 '두 근이 특정 개구간 안에 있을 조건'을 이차함수 그래프로 환원하여 네 가지 조건(판별식 ≥ 0 , 경계에서의 함숫값 부호, 대칭축 위치)을 동시에 만족시키는 것이다.

💡 경계에서 $f > 0$ ($>$)을 쓰는지 $f \geq 0$ 을 쓰는지는 근이 경계에 놓일 수 있는가에 따라 엄격히 구분된다.

Q168 복소수 심화

복소수 ω 가 $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ 을 만족할 때, $\frac{1}{1-\omega} + \frac{1}{1-\omega^2}$ 의 값을 구하시오.

- ① 0
- ② 1
- ③ -1
- ④ 3

정답: ② 1

☞ (1) $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ 에서 $\omega + \omega^2 = -1$. 또 $(\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = \omega^3 - 1 = 0$ 이므로 $\omega^3 = 1$. (2) 통분:

$$\frac{1}{1-\omega} + \frac{1}{1-\omega^2} = \frac{(1-\omega^2) + (1-\omega)}{(1-\omega)(1-\omega^2)} = \frac{2-\omega-\omega^2}{(1-\omega)(1-\omega^2)}$$

(3) 분자 = $2 - (-1) = 3$. 분모 = $1 - \omega - \omega^2 + \omega^3 = 1 - (-1) + 1 = 3$. 따라서 주어진 값은 $\frac{3}{3} = 1$.

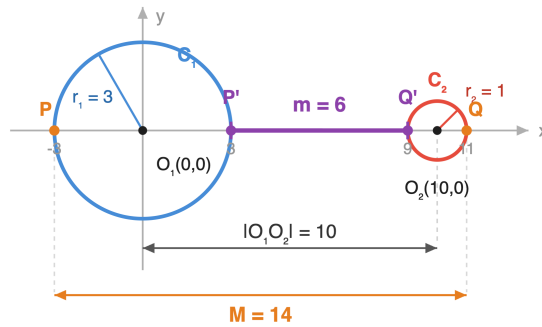
💡 풀이 전략: 이 문제의 핵심은 $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ 이 주는 두 가지 관계식 $\omega + \omega^2 = -1$ 과 $\omega^3 = 1$ 을 유리식의 분자·분모에 동시에 활용하는 것이다.

💡 ω 는 1의 세제곱근 중 1이 아닌 수이며, 복소평면에서 1, ω , ω^2 은 정삼각형의 꼭짓점을 이룬다.

Q169 도형의 방정식 심화

두 원 $C_1: x^2 + y^2 = 9$ 위의 점 P 와 원 $C_2: (x - 10)^2 + y^2 = 1$ 위의 점 Q 에 대해, 선분 PQ 길이의 최댓값 M 과 최솟값 m 의 합 $M + m$ 을 구하시오.

선분 PQ 의 최댓값 M , 최솟값 m



- ① ① 18
- ② ② 19
- ③ ③ 20
- ④ ④ 21

정답: ③ 20

해설 (1) C_1 의 중심 $O_1(0,0)$, 반지름 3. C_2 의 중심 $O_2(10,0)$, 반지름 1. 중심거리 $|O_1O_2| = 10$ 이고 $10 > 3 + 1$ 이므로 두 원은 서로 떨어져 있다. (2) PQ 의 최댓값은 P, Q 가 두 중심의 반대쪽 가장자리에 있을 때로 $M = |O_1O_2| + r_1 + r_2 = 10 + 3 + 1 = 14$. (3) 최솟값은 P, Q 가 두 중심 사이 가까운 쪽 가장자리에 있을 때로 $m = |O_1O_2| - r_1 - r_2 = 10 - 3 - 1 = 6$. 따라서 $M + m = 14 + 6 = 20$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 서로 다른 두 원 위 점 사이 거리의 극값이 두 중심을 잇는 직선 위에서 얻어진다는 기하적 사실을 이용하고, 두 원의 위치 관계에 따라 최솟값 공식을 정확히 선택하는 것이다.

💡 두 원이 분리·외접·교차·내접·포함 어느 관계인가에 따라 PQ 최솟값이 $d - r_1 - r_2, 0, 0, 0, r_1 - r_2 - d$ 등으로 달라진다.

Q170 고차·연립방정식

연립부등식 $\begin{cases} x^2 - 5x + 4 < 0 \\ (x - a)(x - 2) > 0 \end{cases}$ 의 해에 정수가 하나도 포함되지 않도록 하는 실수 a 의 값의 범위를 구하시오.

- ① ① $a < 2$
- ② ② $a \geq 3$
- ③ ③ $a = 2$
- ④ ④ $a > 4$

정답: ② $a \geq 3$

해설 (1) 첫 부등식 $x^2 - 5x + 4 < 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 4) < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 4$. 이 구간 안의 정수는 2와 3뿐. (2) 두 번째 부등식 $(x - a)(x - 2) > 0$ 에 $x = 2$ 대입: $0 > 0$ 은 거짓이므로 2는 항상 연립 해에 포함되지 않는다(자동). (3) 남은 정수 3이 연립 해에 포함되지 않으려면 $(3 - a)(3 - 2) \leq 0 \Rightarrow 3 - a \leq 0 \Rightarrow a \geq 3$. 따라서 구하는 범위는 $a \geq 3$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 첫 부등식이 만드는 열린 구간 안의 '정수 후보'를 모두 열거한 뒤, 그 정수들이 두 번째 부등식을 동시에 만족하지 않도록 하는 조건을 찾는 것이다.

💡 '정수해 없을 조건' 유형은 구간 안 정수를 하나씩 대입해 그 정수가 부등식을 만족 못 하게 하는 조건을 교집합하는 방식이 표준이다.

Q171 집합·명제 논증

전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ 의 두 부분집합 A, B 가 $A \cap B = \{2, 4\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 을 모두 만족한다. 이러한 순서쌍 (A, B) 의 개수를 구하시오.

- ① ① 8
- ② ② 12
- ③ ③ 16
- ④ ④ 24

정답: ③ 16

☞ (1) $A \cap B = \{2, 4\}$: 원소 2, 4는 A 와 B 에 모두 속함(고정). (2) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 이고 $A \cap B = \{2, 4\}$ 이므로 원소 1, 3, 5, 6은 A 와 B 중 '정확히 하나'에만 속함. 각 원소마다 'A에만' 또는 'B에만'의 2가지 선택이 있으므로 $2^4 = 16$ 가지. (3) 원소 7, 8, 9, 10은 $A \cup B$ 에 속하지 않으므로 A, B 어디에도 속하지 않음(고정). 따라서 순서쌍 (A, B) 의 수는 16.

🧠 풀이 전략: 이 문제의 핵심은 전체집합의 각 원소가 'A에만, B에만, 둘 다, 어디에도 없음' 네 상태 중 어디에 놓이는지 분류하고, $A \cap B$ 와 $A \cup B$ 조건이 각 상태를 어떻게 강제하는지 분석하는 것이다.

💡 $n(A \cup B) - n(A \cap B)$ 개의 '한쪽만' 원소가 각기 2가지 선택을 가지므로, 이런 순서쌍 수는 항상 $2^{n(A \cup B) - n(A \cap B)}$ 꼴이다.

Q172 함수 심화

함수 $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ 에 대해 $f_1 = f, f_{n+1} = f \circ f_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 으로 정의한다. $f_{2025}(2)$ 의 값을 구하시오.

- ① ① $-\frac{1}{2}$
- ② ② $\frac{1}{3}$
- ③ ③ $\frac{1}{2}$
- ④ ④ $\frac{2}{3}$

정답: ② $\frac{1}{3}$

☞ (1) 차례로 합성하면 $f_1(x) = \frac{x-1}{x+1}, f_2(x) = f(f_1(x)) = \frac{\frac{x-1}{x+1} - 1}{\frac{x-1}{x+1} + 1} = \frac{-2}{2x} = -\frac{1}{x}$. (2)

$f_3(x) = f\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{-\frac{1}{x} - 1}{-\frac{1}{x} + 1} = \frac{-1-x}{-1+x} = \frac{1+x}{1-x}$. $f_4(x) = f\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{\frac{1+x}{1-x} - 1}{\frac{1+x}{1-x} + 1} = \frac{2x}{2} = x$. 즉 f_n 은 주기 4로 반복. (3)

$2025 = 4 \cdot 506 + 1$ 이므로 $f_{2025} = f_1 = f$. 따라서 $f_{2025}(2) = f(2) = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}$.

🧠 풀이 전략: 이 문제의 핵심은 합성을 직접 몇 번 수행하여 '주기'를 발견하고, 지수 2025를 주기로 나눈 나머지로 해당 단계의 함수를 결정하는 것이다.

💡 유리식 합성이 항등함수로 돌아오는 현상은 Möbius 변환의 원소 중 위수(order)가 유한한 경우이며, 이 경우 위수가 4인 예이다.

Q173 경시·통합 문제

자연수 n 에 대해 $n^4 + 4$ 가 소수가 되는 모든 n 을 구하고, 그때 $n^4 + 4$ 의 값도 함께 구하시오.

- ① ① $n = 1$, 값 5
- ② ② $n = 2$, 값 20
- ③ ③ $n = 1, 2$, 값 각각 5, 20
- ④ ④ 어떤 자연수 n 도 없다

정답: ① $n = 1$, 값 5

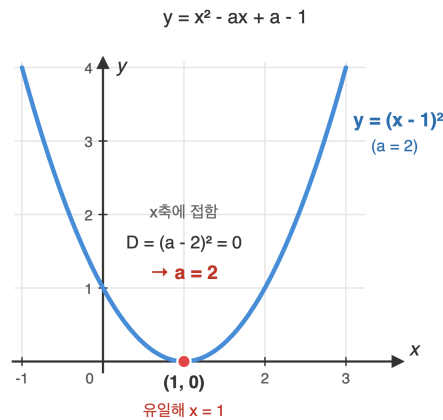
📖 (1) 소피 제르맹 항등식: $n^4 + 4 = n^4 + 4n^2 + 4 - 4n^2 = (n^2 + 2)^2 - (2n)^2 = (n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2)$. (2) 이 값이 소수가 되려면 두 인수 중 하나가 1이어야 한다. $n^2 + 2n + 2 = (n + 1)^2 + 1 \geq 2$ (자연수 n)이므로 1이 될 수 없고, $n^2 - 2n + 2 = (n - 1)^2 + 1 = 1$ 은 $n = 1$ 에서만 성립. (3) $n = 1$ 일 때 $n^4 + 4 = 1 + 4 = 5$ (소수). $n \geq 2$ 일 때는 두 인수 모두 2 이상이 되어 합성수. 따라서 해는 $n = 1$, 값 5.

🧠 풀이 전략: 이 문제의 핵심은 $n^4 + 4$ 를 소피 제르맹 항등식으로 인수분해하여 '두 자연수의 곱이 소수가 되려면 한쪽이 1이어야 한다'는 소수의 정의적 성질로 귀결시키는 것이다.

💡 소피 제르맹(1776-1831)은 프랑스의 수학자로, 여성에게 고등 수학 교육이 제한되던 시대에 페르마의 마지막 정리 연구에 크게 기여했다.

Q174 이차함수·부등식 통합

이차부등식 $x^2 - ax + a - 1 \leq 0$ 의 해가 단 하나의 실수 x 뿐이 되도록 하는 실수 a 의 값과 그때의 유일한 해 x 를 구하시오.



- ① ① $a = 1, x = 1$
- ② ② $a = 2, x = 1$
- ③ ③ $a = 2, x = 2$
- ④ ④ $a = -2, x = -1$

정답: ② $a = 2, x = 1$

📖 (1) $f(x) = x^2 - ax + a - 1$ 은 이차항 계수가 양수이므로 아래로 볼록. $f(x) \leq 0$ 의 해가 단 한 점이 되려면 포물선이 x 축에 접해야 하고, 이는 $D = 0$. (2) $D = a^2 - 4(a - 1) = a^2 - 4a + 4 = (a - 2)^2$. $D = 0 \Rightarrow a = 2$. (3) $a = 2$ 일 때 $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 \leq 0$ 은 $x = 1$ 에서만 등호. 따라서 유일해 $x = 1$.

🧠 풀이 전략: 이 문제의 핵심은 ' ≤ 0 의 해가 한 점'이라는 상황이 포물선이 x 축에 정확히 접하는 경우(중근, $D = 0$)에만 가능하다는 것을 파악하는 것이다.

💡 아래로 볼록한 이차부등식 $f(x) \leq 0$ 은 해가 구간(두 근 사이)이 되는 것이 일반적이며, '한 점'이 되는 경우는 접할 때뿐인 예외적 상황이다.

Q175 다항식·항등식 추론

다항식 $P(x)$ 가 모든 실수 x 에 대해 항등식 $(x - 1)P(x + 1) = (x + 2)P(x)$ 를 만족하고 $P(2) = 6$ 일 때, $P(x)$ 를 구하고 $P(5)$ 의 값을 계산하시오.

- ① ① 60
- ② ② 120
- ③ ③ 125
- ④ ④ 210

정답: ② 120

☞ (1) 특정 값 대입으로 근 찾기: $x = 1$ 대입 $\Rightarrow 0 = 3P(1) \Rightarrow P(1) = 0$. $x = 0$ 대입 $\Rightarrow -P(1) = 2P(0) \Rightarrow P(0) = 0$. $x = -1$ 대입 $\Rightarrow -2P(0) = P(-1) \Rightarrow P(-1) = 0$. 따라서 $P(x) = x(x - 1)(x + 1)Q(x)$ 꼴. (2) 이를 원식에 대입해 정리하면 $Q(x + 1) = Q(x)$ 가 모든 실수 x 에서 성립. 다항식이 주기 1이면 상수뿐이므로 $Q(x) = c$. 즉 $P(x) = cx(x - 1)(x + 1)$. (3) $P(2) = c \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 = 6c = 6 \Rightarrow c = 1$. 따라서 $P(x) = x^3 - x$, $P(5) = 125 - 5 = 120$.

🧠 풀이 전략: 이 문제의 핵심은 항등식에 특정 x 값을 대입해 $P(x)$ 의 근을 차례로 찾아내고, 그 근들로 인수분해한 뒤 남은 몫 $Q(x)$ 가 다항식 주기성 조건에서 상수가 되어야 함을 증명하는 것이다.

💡 다항식 함수방정식은 경시대회 단골로, '특정값 대입으로 근 발견 \rightarrow 인수분해 \rightarrow 몫의 주기성 \rightarrow 상수 결정'이 전형적 풀이 흐름이다.

Q176 경우의 수 심화

5개의 문자 A, A, B, B, C 를 일렬로 나열할 때, 두 개의 A 가 이웃하지 않고 두 개의 B 도 이웃하지 않는 배열의 가짓수를 구하시오.

- ① ① 10
- ② ② 12
- ③ ③ 14
- ④ ④ 16

정답: ② 12

☞ (1) 전체 배열 수: $\frac{5!}{2! \cdot 2! \cdot 1!} = 30$. (2) 사건 $X =$ '두 A 가 이웃', $Y =$ '두 B 가 이웃'라 하자. $|X|$: AA 를 한 덩어리로 보고 $\{AA, B, B, C\}$ 배열 $= \frac{4!}{2!} = 12$. 같은 방식으로 $|Y| = 12$. $|X \cap Y|$: AA 와 BB 를 각각 덩어리로 보고 $\{AA, BB, C\}$ 배열 $= 3! = 6$. (3) 포함-배제 원리: $|X \cup Y| = 12 + 12 - 6 = 18$. 따라서 두 A 도 두 B 도 이웃하지 않는 배열 수 $= 30 - 18 = 12$.

🧠 풀이 전략: 이 문제의 핵심은 '두 종류의 나쁜 조건'(두 A 이웃, 두 B 이웃)을 여사건으로 두고 포함-배제 원리를 적용하여 전체에서 나쁜 배열 수를 빼는 것이다.

💡 직접 '이웃하지 않는 배치'를 세려면 자리를 먼저 잡고 사이사이에 삽입해야 하는데, 두 종류 동시 제한에서는 포함-배제가 훨씬 간결하다.

Q177 다항식·항등식 추론

다항식 $f(x)$ 를 $(x-1)^2$ 으로 나눈 나머지가 $2x+1$ 이고, $f(x)$ 를 $(x+2)$ 로 나눈 나머지가 6이다. $f(x)$ 를 $(x-1)^2(x+2)$ 로 나눈 나머지 $R(x)$ 를 구하시오.

- ① ① $x^2 + 1$
- ② ② $x^2 + 2$
- ③ ③ $x^2 - 2x + 3$
- ④ ④ $2x + 4$

정답: ②

1단계: $f(x) = (x-1)^2(x+2)Q(x) + R(x)$, $\deg R < 3$ 이므로 $R(x)$ 도 $(x-1)^2$ 으로 나누면 같은 나머지 $2x+1$ 을 가져야 한다. 따라서 $R(x) = a(x-1)^2 + (2x+1)$ 꼴. **2단계:** $(x-1)^2(x+2)Q(x)$ 가 $x = -2$ 에서 0이 되므로 $f(-2) = R(-2)$. 즉 $R(-2) = a \cdot 9 + (2 \cdot (-2) + 1) = 9a - 3 = 6$. **3단계:** $9a = 9$ 이므로 $a = 1$. **4단계:** $R(x) = (x-1)^2 + (2x+1) = x^2 - 2x + 1 + 2x + 1 = x^2 + 2$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 '나머지의 나머지'라는 구조를 파악해 미정계수의 개수를 1개로 줄이는 데 있다. $(x-1)^2(x+2)$ 로 나눈 2차 이하 나머지를 다시 $(x-1)^2$ 로 나누면 원래 나머지 $2x+1$ 이 보존된다는 사실이 결정적 단서다.

💡 이러한 다단계 나눗셈은 다항식 환에서 중국인의 나머지 정리(CRT)와 동일한 원리로 접근할 수 있다.

Q178 복소수 심화

복소수 z 가 $z + \frac{1}{z} = \sqrt{3}$ 을 만족할 때, $z^{12} + \frac{1}{z^{12}}$ 의 값을 구하시오.

- ① ① -2
- ② ② -1
- ③ ③ 1
- ④ ④ 2

정답: ④

1단계: $a_n = z^n + \frac{1}{z^n}$ 로 정의하면 $a_0 = 2, a_1 = \sqrt{3}$. 점화식 $a_{n+1} = a_1 \cdot a_n - a_{n-1}$ 이 성립한다. **2단계:** 차례로 계산. $a_2 = (\sqrt{3})^2 - 2 = 1, a_3 = \sqrt{3} \cdot 1 - \sqrt{3} = 0, a_4 = \sqrt{3} \cdot 0 - 1 = -1, a_6 = (a_3)^2 - 2 = -2$. **3단계:**

$a_{12} = (a_6)^2 - 2 = 4 - 2 = 2$. **4단계:** 검증. $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$ 의 두 근 $z = \frac{\sqrt{3} \pm i}{2}$ 는 단위원 위의 점이며 편각이 $\pm \frac{\pi}{6}$ 이다. 따라서 $z^{12} = e^{\pm 2\pi i} = 1$ 이 되어 답은 $1 + 1 = 2$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 z 의 절댓값이 1임을 알아채는 것이다. $z + 1/z$ 가 실수라는 점에서 z 가 단위원 위 점임을 의심하고, 점화식 $a_{n+1} = a_1 a_n - a_{n-1}$ 로 차근차근 끌어올리거나 편각으로 환원하는 두 길이 모두 가능하다.

💡 이 점화식은 체비셰프 다항식 T_n 의 점화식과 동일한 구조이며, $a_n = 2T_n(\cos\theta)$ 로 해석할 수 있다.

Q179 고차·연립방정식

방정식 $|x^2 - 4x| = k$ 가 서로 다른 네 개의 실근을 갖도록 하는 양의 실수 k 의 값의 범위를 구하시오.

- ① ① $0 < k < 2$
- ② ② $0 < k < 4$
- ③ ③ $0 < k < 6$
- ④ ④ $k > 4$

정답: ②

1단계: $y = |x^2 - 4x|$ 의 그래프 분석. $y = x^2 - 4x = x(x - 4)$ 는 $x = 0, 4$ 에서 0, 꼭짓점 $(2, -4)$. 절댓값을 씌우면 $0 \leq x \leq 4$ 에서 $y = -x^2 + 4x$ (위로 솟은 포물선, 꼭짓점 $(2, 4)$), $x < 0$ 또는 $x > 4$ 에서 $y = x^2 - 4x$ (위로 발산). **2단계:** 직선 $y = k$ 와의 교점 개수 분석. $k = 0$ 이면 2개($x = 0, 4$), $0 < k < 4$ 이면 안쪽 위로 솟은 부분에서 2개와 바깥 위로 발산하는 부분에서 2개, 합 4개. $k = 4$ 이면 안쪽 꼭짓점 1개와 바깥 2개로 3개, $k > 4$ 이면 바깥 2개. **3단계:** 따라서 정확히 4개의 실근을 가지려면 $0 < k < 4$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 절댓값을 씌운 그래프의 모양을 정확히 그려보고, 수평선 $y = k$ 가 그래프와 만나는 점의 개수를 k 의 위치에 따라 분기하여 세는 시각적 추론이다. 대수적 접근(두 이차방정식 해 개수 합산)도 가능하나 그래프 해석이 훨씬 빠르다.

💡 $y = |f(x)|$ 형태의 그래프는 $f(x) < 0$ 인 부분을 x 축 대칭으로 뒤집은 것으로, 컴퓨터 그래픽스의 절댓값 셰이더에서도 동일한 변환이 사용된다.

Q180 집합·명제 논증

양의 실수 a, b, c 가 $a + b + c = 6$ 을 만족할 때, $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b}$ 의 최솟값을 구하시오.

- ① ① 2
- ② ② 3
- ③ ③ 4
- ④ ④ 6

정답: ②

1단계: 코시-슈바르츠 부등식의 엥겔(Engel) 형태(티투의 보조정리)를 적용한다. 양의 실수 b_i 에 대해

$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \frac{a_3^2}{b_3} \geq \frac{(a_1 + a_2 + a_3)^2}{b_1 + b_2 + b_3}$. **2단계:** 분모 합 $(b+c) + (c+a) + (a+b) = 2(a+b+c) = 12$. 분자 합 $a+b+c = 6$. 따라서 $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)} = \frac{a+b+c}{2} = 3$. **3단계:** 등호는 $\frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b}$ 일 때, 즉 $a = b = c = 2$ 일 때 성립하며 이때 좌변 = $3 \cdot \frac{4}{4} = 3$. **4단계:** 따라서 최솟값은 3.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 분자가 제곱이고 분모가 양인 분수들의 합에 대해 코시-슈바르츠의 엥겔 형태(티투의 보조정리)가 강력하게 작동한다는 것을 알아채는 것이다. 산술-기하 평균만으로는 양변에 같은 식이 등장해 최솟값이 잡히지 않는 반면, 엥겔 형태는 깔끔한 하한을 준다.

💡 이 부등식은 'Nesbitt 부등식'의 일반화로 알려져 있으며, IMO 등 국제 경시에서 단골로 등장한다.

Q181 함수 심화

함수 $f(x) = \frac{x}{1+x}$ 에 대해 $f^1 = f, f^{n+1} = f \circ f^n (n \geq 1)$ 로 정의할 때, $f^{2026}(1)$ 의 값을 구하시오.

- ① ① $\frac{1}{2025}$
- ② ② $\frac{1}{2026}$
- ③ ③ $\frac{1}{2027}$
- ④ ④ $\frac{2026}{2027}$

정답: ③

1단계: 작은 n 부터 계산해 규칙을 찾는다. $f^1(x) = \frac{x}{1+x}$.

$f^2(x) = f\left(\frac{x}{1+x}\right) = \frac{x/(1+x)}{1+x/(1+x)} = \frac{x/(1+x)}{(1+2x)/(1+x)} = \frac{x}{1+2x}$. 2단계: 같은 방식으로 $f^3(x) = \frac{x/(1+2x)}{1+x/(1+2x)} = \frac{x}{1+3x}$.

3단계: 일반항 추정 $f^n(x) = \frac{x}{1+nx}$. 수학적 귀납법으로 검증: $f^{n+1}(x) = f(f^n(x)) = \frac{x/(1+nx)}{1+x/(1+nx)} = \frac{x}{1+(n+1)x}$. 4단계:

$$f^{2026}(1) = \frac{1}{1+2026 \cdot 1} = \frac{1}{2027}$$

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 합성을 직접 따라가다 보면 분모가 일정한 패턴($1+nx$)으로 진화한다는 사실을 발견한 뒤 귀납법으로 일 반항을 확정하는 것이다. 분수형 합성을 행렬 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n$ 의 작용으로 보는 관점도 같은 결론을 빠르게 준다.

💡 $\frac{x}{1+nx}$ 형태의 함수족은 '모비우스 변환'의 한 부분류이며 합성에 대해 닫혀 있다.

Q182 경우의 수 심화

서로 다른 7명을 원탁에 둘러앉히려 한다. 특정한 두 사람 A와 B가 서로 이웃하지 않도록 앉히는 방법의 수를 구하시오.

- ① ① 240
- ② ② 360
- ③ ③ 480
- ④ ④ 600

정답: ③

1단계: 전체 원순열의 수. 서로 다른 7명을 원탁에 앉히는 경우의 수는 $(7-1)! = 6! = 720$. 2단계: A, B가 이웃하는 경우의 수. A와 B를 한 묶음으로 보면 묶음 1개 + 나머지 5명 = 6개를 원탁에 앉히는 원순열. $(6-1)! = 5! = 120$. 묶음 안에서 A, B의 자리 바꾸기 $2! = 2$. 따라서 이웃 경우는 $120 \times 2 = 240$. 3단계: 여집합. 이웃하지 않는 경우는 $720 - 240 = 480$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 '이웃하지 않는다'를 직접 세려 하기보다 '전체 - 이웃하는 경우'로 환원하는 보집합 전략에 있다. 원순열 은 회전 동치를 인식해야 하므로 $(n-1)!$ 로 시작하는 것이 자연스럽다.

💡 원탁 자리 배치는 그래프 이론의 해밀턴 사이클 개수와 직결되며, 큰 n 에서는 통계역학 문제로도 등장한다.

Q183 경시·통합 문제

자연수 n 에 대하여 $\sqrt{n^2 + 84n}$ 이 자연수가 되도록 하는 n 의 개수를 구하시오.

- ① ① 3
- ② ② 4
- ③ ③ 5
- ④ ④ 6

정답: ②

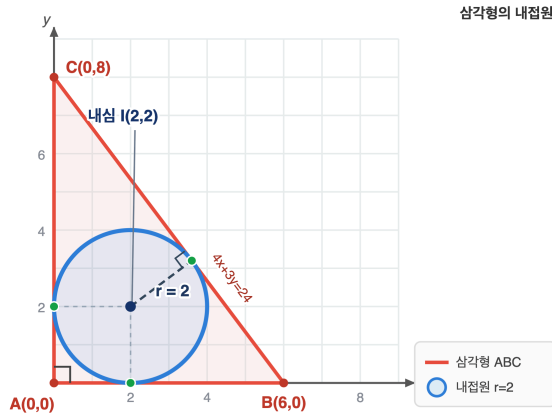
1단계: $n^2 + 84n = m^2$ (m 은 양의 정수)로 둔다. 완전제곱 변형 $n^2 + 84n = (n + 42)^2 - 1764$ 이므로 $(n + 42)^2 - m^2 = 1764$, 즉 $(n + 42 - m)(n + 42 + m) = 1764$. 2단계: $a = n + 42 - m$, $b = n + 42 + m$ 이라 하면 $ab = 1764 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2$, $b > a > 0$, $b - a = 2m$ 짝수, $b + a = 2(n + 42)$ 짝수이므로 a, b 의 홀짝성이 같다. 1764가 짝수이므로 a, b 모두 홀수일 수 없고 따라서 둘 다 짝수. 3단계: $a = 2a'$, $b = 2b'$ 로 두면 $a'b' = 441 = 3^2 \cdot 7^2$, $a' \leq b'$. 약수쌍 $(a', b') \in \{(1, 441), (3, 147), (7, 63), (9, 49), (21, 21)\}$. 4 단계: 각 쌍에서 $n = a' + b' - 42$. 차례로 400, 108, 28, 16, 0. $n = 0$ 은 자연수가 아니므로 제외. 따라서 자연수 n 은 $\{16, 28, 108, 400\}$ 의 4개.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 '루트 안이 완전제곱'이라는 조건을 $(n + 42)^2 - m^2 = 1764$ 로 옮겨 두 정수의 곱으로 분해하는 데 있다. 이때 (a, b) 의 홀짝성이 같아야 한다는 패리티 조건을 빠뜨리면 가짜 해를 줌게 된다.

이런 식으로 디오판토스 방정식을 인수분해하는 기법은 페르마가 무한강하법과 함께 즐겨 쓴 도구로, 페르마의 두 제곱수 정리로 이어진다.

Q184 도형의 방정식 심화

세 점 $A(0, 0)$, $B(6, 0)$, $C(0, 8)$ 을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 내접원의 방정식을 구하시오.



- ① ① $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$
- ② ② $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$
- ③ ③ $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 2$
- ④ ④ $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$

정답: ②

1단계: 직각삼각형 ABC는 A에서 직각, $AB = 6$, $AC = 8$, $BC = 10$. 내접원의 중심은 두 직각변(축)으로부터 같은 거리 r 만큼 떨어져 있으므로 중심 좌표는 (r, r) . 2단계: 빗변 BC의 방정식. 절편형 $\frac{x}{6} + \frac{y}{8} = 1$, 즉 $4x + 3y - 24 = 0$. 3단계: 중심 (r, r) 에서 이 직선까지 거리가 반지름 r 과 같다는 식 $\frac{|4r + 3r - 24|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = r$, 즉 $\frac{|7r - 24|}{5} = r$. 작은 r 에서 $7r - 24 < 0$ 이므로 $24 - 7r = 5r$, $12r = 24$, $r = 2$. 4단계: 내접원의 방정식 $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$. (참고: 내접원 반지름 공식 $r = (a + b - c)/2 = (6 + 8 - 10)/2 = 2$ 로도 검증된다.)

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 직각삼각형에서 내접원의 중심이 직각을 이루는 두 변(좌표축)으로부터 같은 거리에 있다는 기하적 통찰을 좌표화한 뒤, 빗변까지의 거리 = 반지름 조건으로 단일 방정식을 만드는 데 있다. 점과 직선 사이의 거리 공식을 정확히 적용하는 것이 관건.

💡 직각삼각형에서 내접원 반지름 공식 $r = \frac{a + b - c}{2}$ 는 헤론 공식의 직각 특수형이며, 변의 길이만으로 즉시 답을 준다.

Q185 다항식·항등식 추론

$(1 + x + x^2)^{10} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{20}x^{20}$ 일 때, $a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{20}$ 의 값을 구하시오.

- ① ① 14762
- ② ② 29524
- ③ ③ 29525
- ④ ④ 59049

정답: ③

1단계: 짝수 차수 계수만 추출하려면 $f(1) + f(-1)$ 을 활용한다. $f(x) = (1 + x + x^2)^{10}$ 에 대해 $f(1) = \sum_{k=0}^{20} a_k$, $f(-1) = \sum_{k=0}^{20} (-1)^k a_k$. 두 값을 더하면 홀수 차수 계수는 상쇄되고 짝수 차수 계수만 두 배로 남는다. 2단계: 각각 계산. $f(1) = (1 + 1 + 1)^{10} = 3^{10} = 59049$. $f(-1) = (1 - 1 + 1)^{10} = 1^{10} = 1$. 3단계: 짝수 차수 계수 합 $\frac{f(1) + f(-1)}{2} = \frac{59049 + 1}{2} = \frac{59050}{2} = 29525$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 '짝수 차수만의 계수 합'을 직접 구하려 하지 않고 $f(1)$ 과 $f(-1)$ 의 산술평균이라는 우아한 항등식을 사용하는 데 있다. 이는 우함수 분해 $f_e(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ 의 한 점값이라는 관점에서 이해할 수 있다.

💡 $1 + x + x^2$ 은 1의 세제곱근의 최소다항식이며, $(1 + x + x^2)^n$ 의 계수들은 '삼항계수(trinomial coefficients)'라 불린다.

Q186 경우의 수 심화

1, 2, 3, 4, 5의 다섯 숫자를 모두 한 번씩 사용하여 만들 수 있는 다섯 자리 자연수 중에서, 양 끝(만의 자리와 일의 자리)의 숫자가 모두 홀수인 것의 개수를 구하시오.

- ① ① 24
- ② ② 36
- ③ ③ 48
- ④ ④ 60

정답: ②

📖 1단계: 홀수 후보 {1, 3, 5} 3개, 짝수 후보 {2, 4} 2개. 2단계: 양 끝(2자리)에 홀수 3개 중에서 서로 다른 두 개를 순서를 고려해 배치하는 경우의 수 ${}_3P_2 = 3 \times 2 = 6$. 3단계: 가운데 3자리에는 남은 숫자 3개(짝수 2개와 홀수 1개)를 모두 배치하면 되므로 $3! = 6$. 4단계: 곱의 법칙에 따라 $6 \times 6 = 36$.

🧠 풀이 전략: 이 문제의 핵심은 자리를 두 그룹(양 끝 / 가운데)으로 분할한 뒤 각 그룹에 어떤 후보가 들어갈 수 있는지를 먼저 고정하는 데 있다. 양 끝의 두 자리는 '서로 다른 자리'이므로 조합이 아니라 순열(${}_3P_2$)임을 정확히 인식하는 것이 관건.

💡 양 끝 조건은 '제한된 자리 순열' 문제의 가장 단순한 형태로, 그래프 색칠 문제의 1차원 변형으로도 볼 수 있다.

Q187 집합·명제 논증

실수 x 에 대한 두 조건 $p: |x - 1| \leq 2$, $q: x^2 - ax + b \leq 0$ 이 서로 동치(필요충분조건)가 되도록 하는 실수 a, b 에 대하여 $a + b$ 의 값을 구하시오.

- ① ① -3
- ② ② -1
- ③ ③ 1
- ④ ④ 3

정답: ②

📖 1단계: 조건 p 의 해집합을 구한다. $|x - 1| \leq 2 \iff -2 \leq x - 1 \leq 2 \iff -1 \leq x \leq 3$. 즉 $P = [-1, 3]$. 2단계: $p \iff q$ 이므로 q 의 해집합도 $[-1, 3]$ 이어야 한다. 이차부등식 $x^2 - ax + b \leq 0$ 의 해가 닫힌 구간 $[-1, 3]$ 이 되려면 이차식의 두 근이 정확히 -1 과 3 이고 최고차 계수가 양수여야 한다. 3단계: 근과 계수의 관계로부터 $x^2 - ax + b = (x + 1)(x - 3) = x^2 - 2x - 3$. 따라서 $a = 2, b = -3$. 4단계: $a + b = 2 + (-3) = -1$.

🧠 풀이 전략: 이 문제의 핵심은 '두 조건이 동치'라는 명제를 '두 해집합이 동일'이라는 집합론적 사실로 번역하는 데 있다. 일단 해집합을 같게 만들면 이차식의 모양은 두 근 $-1, 3$ 에 의해 유일하게 결정된다(최고차 계수가 1로 고정되어 있으므로).

💡 명제의 동치성을 해집합 일치로 환원하는 발상은 모델 이론과 추상 논리학의 출발점이며, 타르스키의 진리 정의와 직접 연결된다.

Q188 다항식·항등식 추론

다항식 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대해 $f(x + 1) - f(x) = 6x + 7$ 을 만족하고 $f(0) = 4$ 일 때, $f(5)$ 의 값을 구하시오.

- ① ① 79
- ② ② 89
- ③ ③ 99
- ④ ④ 109

정답: ③ 99

📖 (1) 차분 $f(x + 1) - f(x)$ 는 f 의 차수보다 1 작은 다항식. 우변이 1차이므로 f 는 2차 다항식. $f(x) = ax^2 + bx + c$ 로 놓는다. (2) $f(x + 1) - f(x) = a(2x + 1) + b = 2ax + (a + b)$. 우변 $6x + 7$ 과 계수 비교: $2a = 6$ 이므로 $a = 3, a + b = 7$ 이므로 $b = 4$. (3) $f(0) = c = 4$. 따라서 $f(x) = 3x^2 + 4x + 4, f(5) = 75 + 20 + 4 = 99$.

🧠 풀이 전략: 이 문제의 핵심은 차분이 다항식의 차수를 1만큼 낮춘다는 사실이다. 우변 차수에서 +1 한 차수의 일반형으로 두고 항등식의 계수를 비교한다.

💡 차분 $\Delta f(x) = f(x + 1) - f(x)$ 는 미분의 이산 버전이며, 정수론과 조합론에서 자주 등장한다.

Q189 복소수 심화

복소수 z 가 $|z| = 2$ 이고 $z^2 + \bar{z}^2 = 4$ 를 만족할 때, $z + \bar{z}$ 의 값을 모두 구하시오. (단, \bar{z} 는 z 의 켤레복소수)

- ① ① ± 2
- ② ② $\pm 2\sqrt{2}$
- ③ ③ $\pm 2\sqrt{3}$
- ④ ④ ± 4

정답: ③ $\pm 2\sqrt{3}$

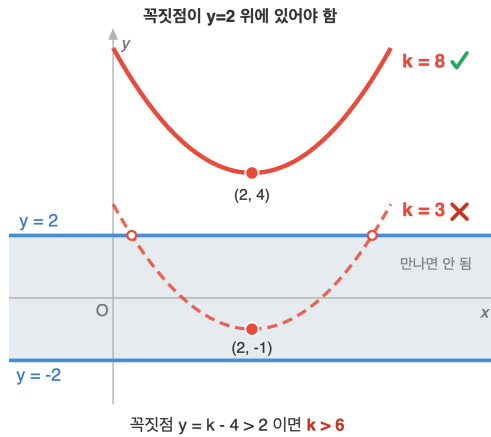
📖 (1) $|z|^2 = z\bar{z} = 4$. (2) 항등식 $(z + \bar{z})^2 = z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2$ 를 이용. 즉 $(z + \bar{z})^2 = (z^2 + \bar{z}^2) + 2z\bar{z} = 4 + 8 = 12$. (3) $z + \bar{z} = \pm 2\sqrt{3}$. 검증: $z = \sqrt{3} + i$ 이면 $|z|^2 = 3 + 1 = 4$ ✓, $z^2 = 2 + 2\sqrt{3}i$, $\bar{z}^2 = 2 - 2\sqrt{3}i$, 합 = 4 ✓.

🧠 풀이 전략: 이 문제의 핵심은 $z + \bar{z}$, $z\bar{z}$, $z^2 + \bar{z}^2$ 사이의 대칭식 항등식이다. 두 가지 정보를 결합해 미지의 대칭식을 직접 만들어낸다.

💡 $z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$ 이므로 이 결과는 z 의 실수부가 $\pm\sqrt{3}$ 임을 뜻한다.

Q190 이차함수-부등식 통합

이차함수 $y = x^2 - 4x + k$ 의 그래프가 두 직선 $y = -2$ 와 $y = 2$ 사이의 영역(직선 위의 점 포함)과 만나지 않도록 하는 실수 k 의 값의 범위를 구하시오.



- ① ① $k > 2$
- ② ② $k > 4$
- ③ ③ $k > 6$
- ④ ④ $k > 8$

정답: ③ $k > 6$

📖 (1) $y = x^2 - 4x + k = (x - 2)^2 + (k - 4)$ 이므로 꼭짓점은 $(2, k - 4)$, 위로 무한히 뻗는다. 이 포물선의 치역은 $[k - 4, \infty)$. (2) 그래프가 $-2 \leq y \leq 2$ 와 만나지 않으려면 치역이 이 구간과 서로소여야 한다. 치역이 위로 무한이므로 가능한 경우는 $k - 4 > 2$. (3) 즉 $k > 6$. 경계 $k = 6$ 이면 꼭짓점이 $y = 2$ 위에 정확히 있어 한 점에서 만나므로 제외.

🧠 풀이 전략: 이 문제의 핵심은 포물선의 치역과 띠 영역의 교집합이 비어야 한다는 집합 관계 분석이다. 위로 볼록한 그래프는 아래쪽으로 막혀 있지 않으므로 반드시 꼭짓점이 띠 위쪽에 있어야 한다.

💡 수능형 문제에서 '~사이 영역과 만나지 않는다'는 조건은 치역과 영역의 교집합 분석으로 환원된다.

Q191 고차·연립방정식

x 에 대한 삼차방정식 $x^3 - kx + 2 = 0$ 이 적어도 하나의 정수근을 가질 때, 가능한 모든 정수 k 의 값의 합을 구하시오.

- ① ① 5
- ② ② 6
- ③ ③ 7
- ④ ④ 8

정답: ③ 7

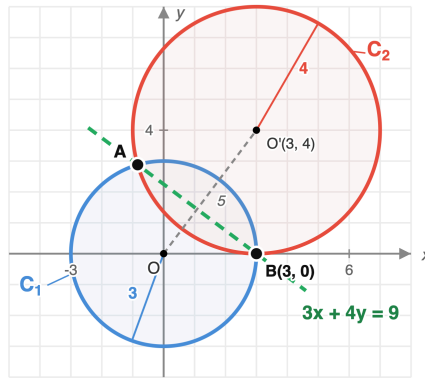
☞ (1) 정수근을 $x = n$ 이라 하면 $n^3 - kn + 2 = 0$, 즉 $kn = n^3 + 2$. 또한 $n^3 + 2$ 가 0이 아니어야 한다($n^3 = -2$ 인 정수 n 없음). (2) 정수계수 다항식의 정수근 후보는 상수항 2의 약수: $n = \pm 1, \pm 2$. 각각 대입: $n = 1$ 이면 $k = 3$, $n = -1$ 이면 $k = -1$, $n = 2$ 이면 $2k = 10$, $k = 5$, $n = -2$ 이면 $-2k = -6$, $k = 3$. (3) 서로 다른 k 값은 $\{-1, 3, 5\}$. 합 = $-1 + 3 + 5 = 7$. (참고: $n = \pm 2$ 일 때 모두 $k = 3$ 또는 다른 값으로 나오지만 같은 k 는 한 번만 셈)

🧠 풀이 전략: 이 문제의 핵심은 정수계수 다항식에서 정수근은 상수항의 약수만 가능하다는 사실(유리근 정리의 정수 버전)이다. 그 후보 4개를 대입해 가능한 k 를 모두 추리고 중복을 제거한다.

💡 유리근 정리는 17세기 데카르트의 인자정리에서 유래한 고전적 결과로, 고차다항식 풀이의 첫 단계로 늘 활용된다.

Q192 도형의 방정식 심화

두 원 $C_1: x^2 + y^2 = 9$ 와 $C_2: (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 16$ 이 두 점에서 만난다. 이 두 교점을 지나는 직선의 방정식을 구하시오.



- ① ① $3x + 4y = 9$
- ② ② $3x + 4y = 18$
- ③ ③ $4x + 3y = 9$
- ④ ④ $6x + 8y = 25$

정답: ① $3x + 4y = 9$

☞ (1) 두 원의 방정식을 일반형으로 정리한 뒤 변끼리 빼면 두 식을 동시에 만족하는 점들의 자취가 직선이 된다(이차항이 소거됨).

$C_1: x^2 + y^2 - 9 = 0$, $C_2: x^2 + y^2 - 6x - 8y + 9 + 16 - 16 = x^2 + y^2 - 6x - 8y + 9 = 0$. (2) $C_1 - C_2$:

$-9 - (-6x - 8y + 9) = 0$, 즉 $6x + 8y - 18 = 0$. (3) 양변을 2로 나누면 $3x + 4y - 9 = 0$, 곧 $3x + 4y = 9$. 검증: 두 중심 사이 거리 $\sqrt{9+16} = 5$ 이고 $|3 - 4| < 5 < 3 + 4$ 이므로 두 원은 두 점에서 만난다.

🧠 풀이 전략: 이 문제의 핵심은 두 원의 방정식의 차가 두 교점을 모두 만족하는 일차식이라는 점이다. 이차항이 같은 형태이므로 빼면 자동으로 소거되어 직선만 남는다.

💡 이 직선은 두 원의 '근축(radical axis)'이라 불리며, 두 원이 만나지 않을 때도 정의된다.

Q193 집합·명제 논증

두 조건 $p: |x - 1| \leq 3$, $q: x^2 - 2x + a \leq 0$ 에 대하여 p 가 q 이기 위한 충분조건이 되도록 하는 실수 a 의 최댓값을 구하시오.

- ① ① -8
- ② ② -4
- ③ ③ 0
- ④ ④ 8

정답: ① -8

☞ (1) p 의 진리집합 $P = \{x \mid -2 \leq x \leq 4\}$. $p \Rightarrow q$ 이면 $P \subseteq Q$ (Q 는 q 의 진리집합). (2)

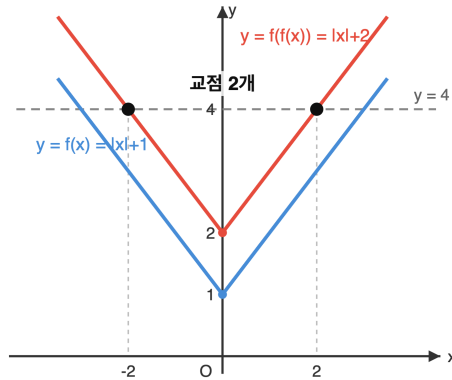
$f(x) = x^2 - 2x + a = (x - 1)^2 + (a - 1)$ 로 놓으면 Q 는 $f(x) \leq 0$ 의 해집합. f 의 $[-2, 4]$ 에서의 최댓값이 0 이하여야 한다. 꼭짓점 $x = 1$ 에서 최솟값, 끝값 $x = -2, x = 4$ 에서 모두 $f = 8 + a$ 로 최대. (3) $8 + a \leq 0$, 즉 $a \leq -8$. 따라서 최댓값은 $a = -8$. (검증: $a = -8$ 이면 $Q = [-2, 4] = P$ 이므로 $P \subseteq Q$ ✓.)

🧠 풀이 전략: 이 문제의 핵심은 명제의 함의 $p \Rightarrow q$ 를 진리집합의 포함관계 $P \subseteq Q$ 로 번역한 뒤, 폐구간에서 이차함수가 항상 음 이하가 될 조건을 끝값에서의 최댓값 조건으로 환원하는 것이다.

💡 $P \subseteq Q$ 이면서 $Q \not\subseteq P$ 일 때 p 는 q 의 진부분조건(strictly sufficient)이라 한다.

Q194 함수 심화

함수 $f(x) = \begin{cases} x + 1 & (x \geq 0) \\ -x + 1 & (x < 0) \end{cases}$ 에 대하여 방정식 $f(f(x)) = 4$ 의 실근의 개수를 구하시오.



- ① ① 1
- ② ② 2
- ③ ③ 3
- ④ ④ 4

정답: ② 2

☞ (1) $f(x) = |x| + 1 \geq 1$ 이므로 f 의 치역은 $[1, \infty)$. $f(f(x)) = 4$ 에서 $y = f(x)$ 로 놓으면 $f(y) = 4$. (2) $f(y) = 4$ 의 해: $y \geq 0$ 인 영역에서 $y + 1 = 4$, $y = 3$ (적합), $y < 0$ 인 영역에서 $-y + 1 = 4$, $y = -3$ 인데 이 값은 f 의 치역 밖($f \geq 1$)이므로 사용 불가. 즉 $f(x) = 3$ 만 풀면 된다. (3) $f(x) = 3$: $x \geq 0$ 이면 $x + 1 = 3$, $x = 2$ ✓. $x < 0$ 이면 $-x + 1 = 3$, $x = -2$ ✓. 따라서 실근은 $x = -2, 2$ 의 2개.

🧠 풀이 전략: 이 문제의 핵심은 $f(x) = |x| + 1$ 이 항상 1 이상이라는 치역 분석이다. 합성함수 방정식을 두 단계로 분해할 때, 중간값이 치역에 포함되는지 반드시 점검해 가짜해를 걸러야 한다.

💡 $f(x) = |x| + 1$ 은 R 에서 $[1, \infty)$ 로 가는 사상으로, 그 합성은 V그래프가 위로 평행이동된 또 다른 V그래프가 된다.

Q195 경우의 수 심화

좌표평면 위의 격자점 $A(0, 0)$ 에서 $B(4, 3)$ 까지 가로 또는 세로로 한 칸씩 이동하여 가는 최단경로 중에서, 점 $P(2, 1)$ 을 반드시 지나는 경로의 수를 구하시오.

- ① ① 12
- ② ② 15
- ③ ③ 18
- ④ ④ 21

정답: ③ 18

풀이 (1) $A(0, 0)$ 에서 $P(2, 1)$ 까지의 최단경로 수: 오른쪽 2번, 위로 1번, 총 3번 이동. 같은 것이 있는 순열의 수 $\frac{3!}{2!1!} = 3$. (2) $P(2, 1)$ 에서 $B(4, 3)$ 까지의 최단경로 수: 오른쪽 2번, 위로 2번, 총 4번 이동. $\frac{4!}{2!2!} = 6$. (3) P 를 통과하는 경로는 $A \rightarrow P$ 경로와 $P \rightarrow B$ 경로를 결합한 것이므로 곱의 법칙으로 $3 \times 6 = 18$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 통과해야 할 점이 있을 때 경로를 두 구간으로 잘라 각각 독립적으로 세고 곱하는 분할 전략이다. 격자 최단경로의 개수는 같은 것이 있는 순열로 깔끔하게 표현된다.

💡 점 (a, b) 에서 (c, d) 까지의 최단경로 수는 $\binom{(c-a) + (d-b)}{c-a}$ 로, 파스칼 삼각형과 직접 연결된다.

Q196 경사·통합 문제

실수 x 에 대하여 함수 $f(x) = |x - 1| + |x - 3| + |x - 5|$ 의 최솟값과, 그때의 x 의 값을 구하시오.

- ① ① 최솟값 2, $x = 2$
- ② ② 최솟값 4, $x = 3$
- ③ ③ 최솟값 6, $x = 3$
- ④ ④ 최솟값 4, $x = 2$

정답: ② 최솟값 4, $x = 3$

풀이 (1) 절대값 함수의 합 $\sum_{i=1}^n |x - a_i|$ 는 $\{a_i\}$ 의 중앙값(median)에서 최솟값을 가진다(고1 수준의 직관: 구간별 일차함수의 기울기가 부호 바뀔 때 최솟값). (2) $\{1, 3, 5\}$ 의 중앙값은 3. 구간별로 분석: $x < 1$ 에서 $f(x) = -3x + 9$ (감소), $1 \leq x < 3$ 에서 $f(x) = -x + 7$ (감소), $3 \leq x < 5$ 에서 $f(x) = x + 1$ (증가), $x \geq 5$ 에서 $f(x) = 3x - 9$ (증가). 부호 전환점은 $x = 3$. (3) $f(3) = 2 + 0 + 2 = 4$. 최솟값 = 4, $x = 3$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 절대값 합 함수가 구간별 일차함수의 결합이며, 기울기가 음에서 양으로 전환되는 지점, 곧 중앙값에서 최솟값을 가진다는 것이다. 항이 홀수 개일 때 가운데 점에서 최소가 된다.

💡 통계학에서 절대편차의 합을 최소화하는 점이 중앙값이라는 사실은 회귀분석의 LAD(Least Absolute Deviations) 추정법의 근거가 된다.

Q197 다항식·항등식 추론

실수 a, b, c 가 $a + b + c = 6, a^2 + b^2 + c^2 = 14$ 를 만족할 때, $ab + bc + ca$ 의 값을 구하시오.

- ① ① 9
- ② ② 10
- ③ ③ 11
- ④ ④ 13

정답: ③ 11

☞ (1) 항등식 $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$ 를 활용한다. (2) 주어진 값을 대입: $6^2 = 14 + 2(ab + bc + ca)$, 즉 $36 = 14 + 2(ab + bc + ca)$. (3) $2(ab + bc + ca) = 22$ 이므로 $ab + bc + ca = 11$.

🧠 풀이 전략: 이 문제의 핵심은 세 변수의 기본대칭식 사이의 항등식을 이용하는 것이다. 1차 합과 제곱합에서 두 번째 기본대칭식을 추출한다.

💡 a, b, c 의 기본대칭식 $e_1 = a + b + c, e_2 = ab + bc + ca, e_3 = abc$ 는 세 수를 근으로 하는 삼차방정식 $t^3 - e_1t^2 + e_2t - e_3 = 0$ 의 계수와 같다(비에트의 정리).

Q198 복소수 심화

복소수 z 가 $z^2 = -3 + 4i$ 를 만족할 때, z 의 값을 모두 구하시오. (단, $i = \sqrt{-1}$)

- ① ① $z = 1 + 2i$
- ② ② $z = 1 + 2i$ 또는 $z = -1 - 2i$
- ③ ③ $z = 1 + 2i$ 또는 $z = -1 + 2i$
- ④ ④ $z = 2 + i$ 또는 $z = -2 - i$

정답: ② $z = 1 + 2i$ 또는 $z = -1 - 2i$

☞ (1) $z = a + bi$ (a, b 는 실수)로 놓으면 $z^2 = (a^2 - b^2) + 2abi = -3 + 4i$. 실수부와 허수부를 비교: $a^2 - b^2 = -3, 2ab = 4$, 즉 $ab = 2$. (2) $a^2 + b^2 = \sqrt{(a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$ (또는 $|z|^2 = |z|^2$ 로 직접 계산). 따라서 $a^2 = \frac{5 + (-3)}{2} = 1, b^2 = \frac{5 - (-3)}{2} = 4$. (3) $ab = 2 > 0$ 이므로 a, b 는 같은 부호. $z = 1 + 2i$ 또는 $z = -1 - 2i$. (검증: $(1 + 2i)^2 = 1 + 4i - 4 = -3 + 4i \checkmark$)

🧠 풀이 전략: 이 문제의 핵심은 복소수 방정식 $z^2 = w$ 를 실수부와 허수부의 두 실수 방정식으로 나누고, $|z|^2 = |z|^2$ 항등식으로 $a^2 + b^2$ 를 추가로 얻어 연립을 닫는 것이다. 마지막에 ab 의 부호로 부호조합을 결정한다.

💡 복소수 w 의 두 제곱근은 항상 부호만 다른 한 쌍이며, 복소평면에서 원점에 대해 대칭이다.

Q199 함수 심화

일차함수 $f(x) = ax + b$ 가 모든 실수 x 에 대해 $f(f(x)) = 4x + 3$ 을 만족할 때, 가능한 $a + b$ 의 값을 모두 구하시오.

- ① ① 3만 가능
- ② ② -5만 가능
- ③ ③ 3 또는 -5
- ④ ④ -2 또는 4

정답: ③ 3 또는 -5

☞ (1) $f(f(x)) = a(ax + b) + b = a^2x + (ab + b) = a^2x + b(a + 1)$. 이 식이 항등적으로 $4x + 3$ 과 같으려면 $a^2 = 4, b(a + 1) = 3$. (2) $a^2 = 4$ 에서 $a = 2$ 또는 $a = -2$. $a = 2: b(3) = 3$ 이므로 $b = 1, a + b = 3$. $a = -2: b(-1) = 3$ 이므로 $b = -3, a + b = -5$. (3) 따라서 $a + b$ 의 가능한 값은 3 또는 -5. (검증: $a = 2, b = 1$ 이면 $f(f(x)) = 2(2x + 1) + 1 = 4x + 3 \checkmark$; $a = -2, b = -3$ 이면 $f(f(x)) = -2(-2x - 3) - 3 = 4x + 3 \checkmark$)

🧠 풀이 전략: 이 문제의 핵심은 일차함수의 합성이 다시 일차함수가 되며, 양변을 항등식으로 보고 계수를 비교해 두 미지수를 결정한다는 점이다. 두 가지 부호 가능성을 모두 살펴 함정 보기를 피해야 한다.

💡 일차함수 $f(x) = ax + b$ 의 n 회 합성은 $a^n x + b \frac{a^n - 1}{a - 1}$ ($a \neq 1$)으로 일반화된다.

Q200 다항식·항등식 추론

모든 실수 x 에 대하여 등식 $x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 3x + 2 = (x^2 + x + 1)(x^2 + px + q)$ 가 성립할 때, $p \cdot q$ 의 값은?

- ① ① 1
- ② ② 2
- ③ ③ 3
- ④ ④ 4

🎯 정답: ② 2

📖 1단계: 우변 전개.

$$(x^2 + x + 1)(x^2 + px + q) = x^4 + px^3 + qx^2 + x^3 + px^2 + qx + x^2 + px + q = x^4 + (p + 1)x^3 + (p + q + 1)x^2 + (p + q)x + q$$

2단계: 좌변과 계수 비교. x^3 계수: $p + 1 = 2 \Rightarrow p = 1$. 상수항: $q = 2$.

3단계: 검증. x^2 계수: $p + q + 1 = 4 \checkmark$. x 계수: $p + q = 3 \checkmark$. 따라서 $p \cdot q = 1 \cdot 2 = 2$.

🧠 풀이 전략: 이 문제의 핵심은 항등식의 양변을 직접 전개하지 않고 차수가 낮은 계수(x^3 계수와 상수항)부터 결정한 뒤, 나머지 계수들로 검증하는 전략이다. 4차식 인수분해의 역방향 사고가 필요하다.

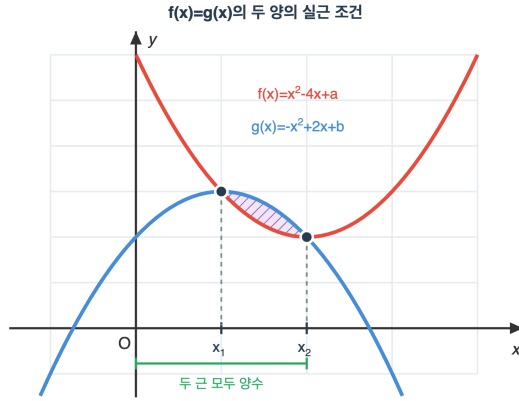
💡 $x^2 + x + 1$ 은 1의 세제곱근 ω 를 근으로 갖는 인수로, 다항식 인수분해에서 자주 등장하는 '단위근 인수'이다.

고1 수학 심화

총 40문제 · 문제와 정답·풀이 포함

Q201 이차함수·부등식 통합

두 이차함수 $f(x) = x^2 - 4x + a$ 와 $g(x) = -x^2 + 2x + b$ 의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나고, 두 교점의 x 좌표가 모두 양수이다. 이때 $a - b$ 의 값의 범위는?



- ① ① $-\frac{9}{2} < a - b < 0$
- ② ② $0 < a - b < \frac{9}{2}$
- ③ ③ $0 < a - b < 9$
- ④ ④ $-9 < a - b < 0$

정답: ② $0 < a - b < \frac{9}{2}$

1단계: 교점의 x 좌표는 $f(x) = g(x)$ 의 해. $x^2 - 4x + a = -x^2 + 2x + b \Rightarrow 2x^2 - 6x + (a - b) = 0$.

2단계: 서로 다른 두 양의 실근 조건 (세 가지). (i) 판별식: $D/4 = 9 - 2(a - b) > 0 \Rightarrow a - b < \frac{9}{2}$. (ii) 두 근의 합 > 0 : $\frac{6}{2} = 3 > 0 \checkmark$ 항상 성립. (iii) 두 근의 곱 > 0 : $\frac{a-b}{2} > 0 \Rightarrow a - b > 0$.

3단계: 종합. $0 < a - b < \frac{9}{2}$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 두 함수의 교점 문제를 ' $f(x) - g(x) = 0$ 의 근의 조건'으로 환원하는 것이다. 두 양의 실근 조건은 판별식, 합, 곱의 세 조건을 모두 따로 따져야 하며, 어느 하나라도 빠뜨리면 함정 보기에 빠진다.

두 포물선의 교점 문제는 결국 차이식의 근 문제로 귀결되므로, 그래프적 직관과 대수적 조건이 만나는 좋은 예이다.

Q202 고차·연립방정식

삼차방정식 $x^3 - 6x^2 + ax + b = 0$ 의 세 근이 등차수열을 이루고, 세 근의 곱이 -6 일 때, $a + b$ 의 값은?

- ① ① 9
- ② ② 10
- ③ ③ 11
- ④ ④ 12

정답: ③ 11

1단계: 세 근을 $p - d, p, p + d$ 로 놓으면 합이 $3p = 6 \Rightarrow p = 2$. 따라서 가운데 근은 2.

2단계: 곱 조건. $(2 - d) \cdot 2 \cdot (2 + d) = 2(4 - d^2) = -6 \Rightarrow 4 - d^2 = -3 \Rightarrow d^2 = 7$.

3단계: 두 근씩 곱의 합. $(2 - d) \cdot 2 + 2(2 + d) + (2 - d)(2 + d) = 4 - 2d + 4 + 2d + 4 - d^2 = 12 - 7 = 5$. 따라서 $a = 5$. 곱 $= -b = -6 \Rightarrow b = 6$. $a + b = 11$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 등차수열을 이루는 세 근을 $p - d, p, p + d$ 로 대칭적으로 잡으면 합 조건에서 가운데 항이 즉시 결정된다는 점이다. 그 후 근과 계수의 관계를 이용해 두 근씩 곱의 합으로 a 를, 곱으로 b 를 결정한다.

등차·등비수열을 이루는 근의 문제는 항상 가운데를 기준으로 대칭 변수($\pm d$ 또는 $\times r^{\pm 1}$)를 잡는 것이 정석이다.

Q203 복소수 심화

ω 가 방정식 $x^2 + x + 1 = 0$ 의 한 허근일 때, $\omega^{2024} + \omega^{2023} + 1$ 의 값은?

- ① ① -1
- ② ② 0
- ③ ③ 1
- ④ ④ ω

정답: ② 0

1단계: ω 는 $x^2 + x + 1 = 0$ 의 근이므로 $\omega^2 + \omega + 1 = 0$. 또한 $(x-1)(x^2 + x + 1) = x^3 - 1$ 에서 $\omega^3 = 1$.

2단계: 지수를 3으로 나눈 나머지를 구한다. $2024 = 3 \times 674 + 2$ 이므로 $\omega^{2024} = \omega^2$. $2023 = 3 \times 674 + 1$ 이므로 $\omega^{2023} = \omega$.

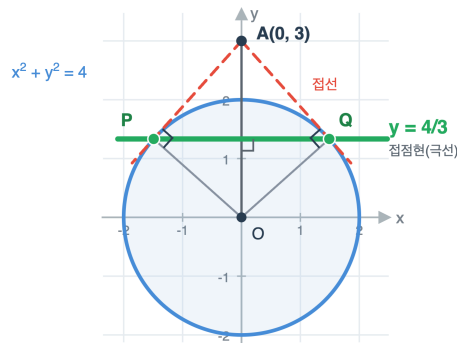
3단계: $\omega^{2024} + \omega^{2023} + 1 = \omega^2 + \omega + 1 = 0$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 $\omega^3 = 1$ 이라는 주기성을 발견하는 것이다. 큰 지수는 3으로 나눈 나머지로 환원되며, 환원된 식은 정의 관계식 $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ 과 정확히 일치한다.

💡 ω 를 1의 원시 세제곱근이라 하며, 복소평면에서 단위원 위 120° 위치에 있다. $1, \omega, \omega^2$ 의 합이 항상 0이라는 사실은 정삼각형의 무게 중심 성질과 같다.

Q204 도형의 방정식 심화

원 $x^2 + y^2 = 4$ 밖의 점 $A(0, 3)$ 에서 원에 그은 두 접선의 접점을 P, Q 라 할 때, 직선 PQ 의 방정식은?



- ① ① $y = \frac{3}{4}$
- ② ② $y = 1$
- ③ ③ $y = \frac{4}{3}$
- ④ ④ $y = 2$

정답: ③ $y = \frac{4}{3}$

1단계: 접점 $P(x_1, y_1)$ 에서의 접선 방정식은 $x_1x + y_1y = 4$. 이 접선이 $A(0, 3)$ 를 지나므로 $3y_1 = 4 \Rightarrow y_1 = \frac{4}{3}$.

2단계: 마찬가지로 $Q(x_2, y_2)$ 에서 $y_2 = \frac{4}{3}$.

3단계: 두 접점 P, Q 가 모두 $y = \frac{4}{3}$ 위에 있으므로 직선 PQ 의 방정식은 $y = \frac{4}{3}$. (이를 점 A 의 원에 대한 '극선'이라 한다.)

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 두 접점을 직접 구하지 않고 '극선' 개념을 쓰는 것이다. 점 (x_0, y_0) 에서 원 $x^2 + y^2 = r^2$ 에 그은 접선들의 접점을 잇는 직선(극선)은 $x_0x + y_0y = r^2$ 이라는 공식이 곧바로 답을 준다.

💡 극선 개념은 사영기하학의 시초이며, 원뿔곡선 전체에서 일반화된다. A 가 원 위에 있으면 극선은 A 에서의 접선 자체와 일치한다.

Q205 집합·명제 논증

양의 실수 x, y 가 $xy = 9$ 를 만족할 때, $4x + y$ 의 최솟값은? (단, 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.)

- ① ① 6
- ② ② 9
- ③ ③ 12
- ④ ④ 18

정답: ③ 12

1단계: 산술평균-기하평균 부등식. 양수 a, b 에 대하여 $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ (등호는 $a = b$ 일 때).

2단계: $a = 4x, b = y$ 로 놓으면 $4x + y \geq 2\sqrt{4xy} = 2\sqrt{4 \cdot 9} = 2 \cdot 6 = 12$.

3단계: 등호 조건. $4x = y$ 이고 $xy = 9$. 두 식에서 $4x \cdot x = 9 \Rightarrow x = \frac{3}{2}, y = 6$. 이때 $4 \cdot \frac{3}{2} + 6 = 12$ 로 실제로 도달 가능. 따라서 최솟값은 12.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 식 $4x + y$ 를 두 양수의 합으로 보고 그 곱이 일정 ($4x \cdot y = 4 \cdot 9 = 36$)함을 알아채는 것이다. 곱이 일정한 두 양수의 합의 최솟값은 산술-기하 평균에서 $2\sqrt{(\text{곱})}$ 로 즉시 나온다. 등호 조건을 반드시 검증하여 최솟값에 도달 가능한지 확인해야 한다.

💡 산술-기하 평균 부등식은 절대부등식의 대표 예로, '곱이 일정하면 합이 최소', '합이 일정하면 곱이 최대'라는 쌍대 명제를 동시에 담고 있다.

Q206 함수 심화

함수 $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ ($x \neq 1$)의 역함수 $f^{-1}(x)$ 를 구하면?

- ① ① $\frac{x+1}{x-2}$
- ② ② $\frac{x+2}{x-1}$
- ③ ③ $\frac{2x-1}{x+1}$
- ④ ④ $\frac{x+2}{x-1}$

정답: ① $\frac{x+1}{x-2}$

1단계: $y = \frac{2x+1}{x-1}$ 로 놓고 양변에 $(x-1)$ 을 곱하여 $y(x-1) = 2x+1$.

2단계: x 에 대해 정리. $yx - y = 2x + 1 \Rightarrow x(y-2) = y+1 \Rightarrow x = \frac{y+1}{y-2}$.

3단계: x 와 y 를 바꾸면 $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-2}$ (단, $x \neq 2$).

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 분수식의 역함수 구하기 정형 절차이다. $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ 꼴은 분모를 곱한 뒤 x 에 대해 정리하는 단순 대수 조작으로 풀린다. 정의역(원래 함수의 치역)에 해당하는 $x \neq 2$ 조건도 함께 이해해야 한다.

💡 유리함수 $\frac{ax+b}{cx+d}$ 의 그래프는 직각쌍곡선이며, 점근선은 $x = -d/c, y = a/c$ 이다. 역함수도 같은 모양이지만 역할이 바뀐다.

Q207 경우의 수 심화

1, 2, 3, 4, 5, 6을 모두 한 번씩 사용하여 만들 수 있는 6자리 자연수 중, 홀수와 짝수가 교대로 나타나는 것의 개수는?

- ① ① 36
- ② ② 48
- ③ ③ 60
- ④ ④ 72

정답: ④ 72

1단계: 홀수는 1, 3, 5 (3개), 짝수는 2, 4, 6 (3개). 교대 배치 패턴은 두 가지: '홀짝홀짝홀짝' 또는 '짝홀짝홀짝홀'.

2단계: 한 패턴에서 홀수 자리에 1, 3, 5를 배열하는 방법은 $3! = 6$ 가지, 짝수 자리에 2, 4, 6을 배열하는 방법도 $3! = 6$ 가지. 따라서 한 패턴당 $6 \times 6 = 36$ 개.

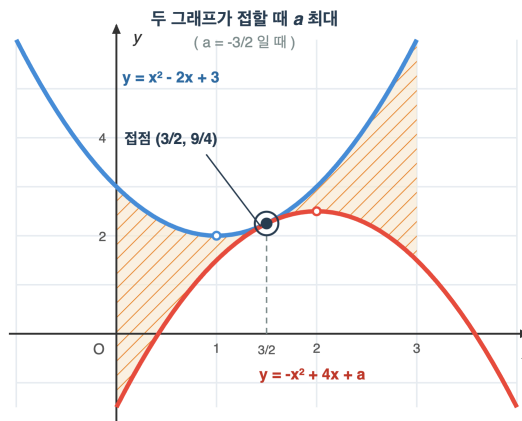
3단계: 두 패턴이 가능하므로 총 개수는 $36 \times 2 = 72$ 개. (어떤 자리에서 시작해도 첫 자리가 0이 아니므로 제외할 자연수 없음.)

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 '교대 배치'를 두 가지 패턴(홀-짝 시작 vs 짝-홀 시작)으로 나누고, 각 패턴 내에서는 홀수끼리·짝수끼리 독립적으로 배열한다는 곱의 법칙 적용이다. 각 자리 배정과 자리 내 순열을 분리하는 사고가 핵심.

홀짝 개수가 다르다면 교대 배치 패턴이 한 가지로 강제된다. 예를 들어 홀수 4개·짝수 3개라면 '홀짝홀짝홀짝홀'만 가능하다.

Q208 이차함수·부등식 통합

모든 실수 x 에 대하여 부등식 $x^2 - 2x + 3 \geq -x^2 + 4x + a$ 가 성립하도록 하는 실수 a 의 최댓값은?



- ① ① $-\frac{3}{2}$
- ② ② -1
- ③ ③ 0
- ④ ④ $\frac{3}{2}$

정답: ① $-\frac{3}{2}$

1단계: 부등식을 한쪽으로 정리. $x^2 - 2x + 3 - (-x^2 + 4x + a) \geq 0 \Rightarrow 2x^2 - 6x + (3 - a) \geq 0$.

2단계: 모든 실수 x 에 대해 위 부등식이 성립하려면, 이차항의 계수 $2 > 0$ 이고 판별식 ≤ 0 이어야 한다.

$$D/4 = 9 - 2(3 - a) \leq 0 \Rightarrow 9 - 6 + 2a \leq 0 \Rightarrow 2a \leq -3 \Rightarrow a \leq -\frac{3}{2}$$

3단계: 따라서 a 의 최댓값은 $-\frac{3}{2}$. 이때 두 포물선은 한 점에서 접한다 (접점 $x = 3/2$).

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 두 함수 $f(x), g(x)$ 의 대소 비교 $f(x) \geq g(x)$ 를 차이식 $f(x) - g(x) \geq 0$ 으로 환원해, '항상 0 이상' 조건으로 만든 뒤 판별식을 쓰는 것이다. 시각적으로는 두 포물선이 접하는 임계 상황이 답이다.

두 곡선이 어디서나 위 곡선이 아래 곡선보다 위에 있도록 하는 매개변수의 임계값은 두 곡선이 접할 때 결정된다. 이 원리는 미적분 없이도 판별식만으로 풀린다.

Q209 고차·연립방정식

부등식 $(x^2 - 9)(x^2 - 2x - 3) \leq 0$ 을 만족하는 정수 x 의 개수는?

- ① ① 3
- ② ② 4
- ③ ③ 5
- ④ ④ 6

정답: ② 4

1단계: 인수분해. $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$, $x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$. 따라서 좌변 = $(x - 3)^2(x + 3)(x + 1) \leq 0$.
 2단계: $(x - 3)^2 \geq 0$ 이고 $(x - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3$. 따라서 부등식은 두 경우로 나뉜다: (i) $x = 3$ (좌변 = 0), 또는 (ii) $(x + 3)(x + 1) \leq 0$, 즉 $-3 \leq x \leq -1$.

3단계: 정수 해. (i)에서 $x = 3$. (ii)에서 $x \in \{-3, -2, -1\}$. 종합 $\{-3, -2, -1, 3\}$ 로 총 4개.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 4차 부등식을 인수분해해 중근(제공 인수)을 찾아내는 것이다. 중근 인수는 항상 0 이상이므로 그 자리에 서 값이 0이 되는 경우와 나머지 인수의 부호 조건을 따로 분리해 합쳐야 한다. 단순히 부호가 바뀌는 점만 따지면 $x = 3$ 을 빠뜨린다.

제공 인수 $(x - 3)^2$ 같은 부등식의 부호를 바꾸지 않지만, 등호 조건에서 추가 해를 만들어내는 '숨은 해'의 원천이다.

Q210 경사·통합 문제

1부터 n 까지의 자연수 중 서로 다른 두 수를 뽑아 곱한 모든 값들의 합을 S_n 이라 한다. S_5 의 값은? (예:

$S_3 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 = 11)$

- ① ① 75
- ② ② 80
- ③ ③ 85
- ④ ④ 90

정답: ③ 85

1단계: 합과 제곱합의 항등식 활용. $(\sum_{i=1}^n i)^2 = \sum_{i=1}^n i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} ij$. 따라서 $S_n = \frac{(\sum i)^2 - \sum i^2}{2}$.

2단계: $n = 5$ 일 때 $\sum_{i=1}^5 i = 15$, $\sum_{i=1}^5 i^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$.

3단계: $S_5 = \frac{15^2 - 55}{2} = \frac{225 - 55}{2} = \frac{170}{2} = 85$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 10개나 되는 곱을 일일이 더하는 대신, 대칭다항식 항등식 $(\sum a_i)^2 = \sum a_i^2 + 2 \sum_{i < j} a_i a_j$ 를 써서 우회하는 것이다. 이 아이디어는 근과 계수의 관계, 분산 공식 등 여러 곳에서 재등장한다.

이 식은 일반화하면 $S_n = \binom{n+1}{2}^2 / 2 - \frac{n(n+1)(2n+1)}{12}$ 로 폐형 공식이 존재하지만, 항등식으로 푸는 쪽이 훨씬 간결하다.

Q211 경우의 수 심화

7명의 학생을 2명, 2명, 3명의 세 조로 나누는 방법의 수는?

- ① ① 70
- ② ② 105
- ③ ③ 140
- ④ ④ 210

정답: ② 105

1단계: 먼저 7명에서 2명을 뽑는 방법은 $\binom{7}{2} = 21$ 가지. 남은 5명에서 2명을 뽑는 방법은 $\binom{5}{2} = 10$ 가지. 마지막 3명은 $\binom{3}{3} = 1$ 가지.

2단계: 단순 곱은 $21 \times 10 \times 1 = 210$. 그러나 두 개의 '2명짜리 조'는 서로 구분할 수 없는 같은 크기의 조이므로, 같은 분할이 2!번씩 중복되어 세어졌다.

3단계: 중복을 제거. $\frac{210}{2!} = 105$ 가지.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 '같은 인원수의 조가 둘 이상이면 그만큼의 계승으로 나눠야 한다'는 분할의 기본 규칙이다. $2! = 2$ 로 나누는 것을 빼뜨리면 합정 보기 ④ 210에 빠진다. 만약 세 조가 모두 다른 인원수(1, 2, 4 등)라면 나누지 않는다.

n명을 k_1 명, k_1 명, ... (a개의 같은 크기), k_2 명, ... (b개) 등으로 나누는 일반 공식은 $\frac{n!}{(k_1!)^a (k_2!)^b \dots a! b! \dots}$ 로, 다항계수와 같은 크기 조의 중복 제거를 함께 적용한다.

Q212 다항식·항등식 추론

다항식 $P(x)$ 를 $x - 1$ 로 나눈 나머지가 3이고, $x + 2$ 로 나눈 나머지가 -3 이다. $P(x)$ 를 $(x - 1)(x + 2)$ 로 나눈 나머지를 구하시오.

- ① ① $2x - 1$
- ② ② $2x + 1$
- ③ ③ $-2x + 1$
- ④ ④ $4x + 2$

정답: ②

1단계: $(x - 1)(x + 2)$ 는 이차식이므로 나머지의 차수는 1 이하이다. 나머지를 $R(x) = ax + b$ 로 놓는다.

2단계: 몫을 $Q(x)$ 라 하면 $P(x) = (x - 1)(x + 2)Q(x) + ax + b$. 나머지정리에 의해 $P(1) = 3$, $P(-2) = -3$ 이므로 $a + b = 3$, $-2a + b = -3$.

3단계: 두 식을 빼면 $3a = 6$, $a = 2$. 대입하면 $b = 1$. 따라서 나머지는 $2x + 1$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 '이차식으로 나눈 나머지는 일차 이하'라는 차수 규칙과 나머지정리를 결합해 미정계수를 연립으로 푸는 것이다.

n차 다항식으로 나눈 나머지는 항상 $n - 1$ 차 이하이며, 서로 다른 n개 점에서의 값으로 유일하게 결정된다.

Q213 복소수 심화

복소수 z 가 $z^2 + \bar{z} = 0$ 을 만족할 때, 가능한 모든 z 의 합을 구하시오. (단, \bar{z} 는 z 의 켈레복소수)

- ① ①-1
- ② ② $-\frac{1}{2}$
- ③ ③0
- ④ ④1

정답: ③

1단계: $z = a + bi$ (a, b 는 실수)로 놓으면 $z^2 = (a^2 - b^2) + 2abi$, $\bar{z} = a - bi$. 따라서 $z^2 + \bar{z} = (a^2 - b^2 + a) + (2ab - b)i = 0$.

2단계: 실수부와 허수부가 모두 0이어야 하므로 $a^2 - b^2 + a = 0$, $b(2a - 1) = 0$.

3단계: $b = 0$ 이면 $a^2 + a = 0$ 에서 $a = 0$ 또는 $a = -1$, 즉 $z = 0, -1$. $2a - 1 = 0$ 이면 $a = \frac{1}{2}$ 이고 $\frac{1}{4} - b^2 + \frac{1}{2} = 0$ 에서

$b = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$, 즉 $z = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

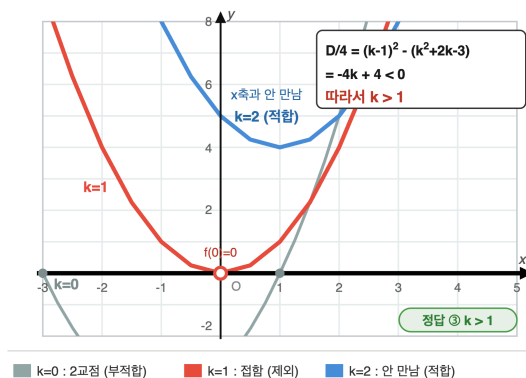
4단계: 네 근의 합 $0 + (-1) + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 0$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 복소수 방정식을 실수부, 허수부 두 개의 실수 방정식으로 분리한 뒤 인수분해된 조건에서 경우를 모두 살피는 것이다. 한 경우만 보고 끝내는 함정에 주의한다.

💡 $z = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 는 단위원 위의 점이며, $z = 0, -1$ 과 함께 복소평면에서 대칭적인 4개 점을 이룬다.

Q214 이차함수·부등식 통합

모든 실수 x 에 대하여 부등식 $x^2 - 2(k-1)x + k^2 - 3 > -2k$ 가 성립하도록 하는 실수 k 의 값의 범위는?



- ① ① $k > -1$
- ② ② $k > 0$
- ③ ③ $k > 1$
- ④ ④ $k \geq 1$

정답: ③

1단계: 부등식을 한쪽으로 모으면 $f(x) = x^2 - 2(k-1)x + (k^2 + 2k - 3) > 0$ 이 모든 실수 x 에서 성립해야 한다.

2단계: 이차항 계수가 양수이므로 그래프는 아래로 볼록. 모든 x 에서 $f(x) > 0$ 이라면 그래프가 x 축과 만나지 않아야 하고, 이는 판별식 $D < 0$ 과 동치이다.

3단계: $D/4 = (k-1)^2 - (k^2 + 2k - 3) = k^2 - 2k + 1 - k^2 - 2k + 3 = -4k + 4 < 0$. 따라서 $k > 1$.

4단계: 계산: $k = 2$ 이면 $f(x) = x^2 - 2x + 5 = (x-1)^2 + 4 > 0$, 항상 성립.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 '모든 실수에서 부등식 성립' 조건을 그래프와 x 축의 관계, 즉 판별식 부호로 번역하는 것이다. 등호 포함 여부에 주의해야 한다(엄밀 부등식이므로 $D = 0$ 제외).

💡 판별식 부호로 부등식 성립을 판정하는 기법은 19세기 가우스의 이차형식 이론에서 다변수로 일반화된다.

Q215 고차·연립방정식

연립부등식 $\begin{cases} x^2 - 5x + 4 < 0 \\ x^2 - (a+2)x + 2a > 0 \end{cases}$ 의 해가 $1 < x < 2$ 가 되도록 하는 실수 a 의 값의 범위를 구하시오.

- ① ① $a \geq 2$
- ② ② $a \geq 4$
- ③ ③ $2 \leq a \leq 4$
- ④ ④ $a > 4$

정답: ②

1단계: 첫 부등식 $(x-1)(x-4) < 0$ 의 해는 $1 < x < 4$.

2단계: 둘째 부등식은 $(x-2)(x-a) > 0$. $a > 2$ 이면 해 $x < 2$ 또는 $x > a$, $a < 2$ 이면 $x < a$ 또는 $x > 2$, $a = 2$ 이면 $x \neq 2$.

3단계: 두 해의 교집합이 정확히 $(1, 2)$ 이라면 $a \geq 2$ 인 경우를 본다. $a = 2$ 이면 교집합이 $(1, 2) \cup (2, 4)$, $2 < a < 4$ 이면 $(1, 2) \cup (a, 4)$ 로 모두 $(1, 2)$ 를 초과한다. $a \geq 4$ 이면 $x > a$ 부분이 $(1, 4)$ 밖이므로 교집합이 $(1, 2)$ 로 정확히 일치.

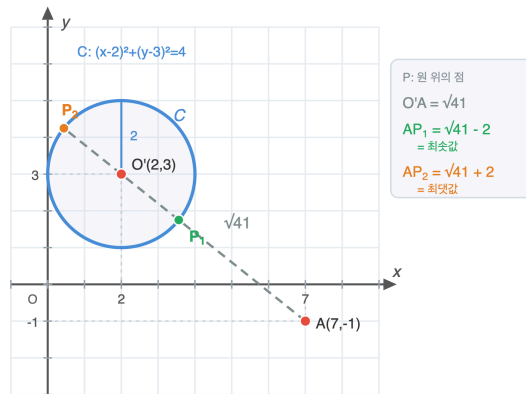
4단계: $a < 2$ 인 경우는 교집합이 $(2, 4)$ 또는 $(1, a) \cup (2, 4)$ 로 조건 불만족. 따라서 $a \geq 4$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 매개변수가 들어간 인수에 따라 부등식의 해 영역이 어떻게 달라지는지 경우를 빠짐없이 분류하고, 목표 해집합에 정확히 일치하는 경계값을 찾는 것이다.

💡 등호 포함 경계값($a = 4$)도 답에 포함되는 이유는 $x = 4$ 가 첫 부등식에서 이미 제외되기 때문이다. 두 조건의 상호작용을 보는 좋은 예시.

Q216 도형의 방정식 심화

원 $C: x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$ 위의 점 P 와 점 $A(7, -1)$ 사이의 거리의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오.



- ① ① $\sqrt{41}$
- ② ② $2\sqrt{41}$
- ③ ③ $\sqrt{41} + 4$
- ④ ④ $2\sqrt{41} - 4$

정답: ②

1단계: 주어진 원의 방정식을 표준형으로 정리한다. $x^2 - 4x + y^2 - 6y + 9 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$. 중심 $O'(2, 3)$, 반지름 $r = 2$.

2단계: 점 $A(7, -1)$ 과 중심 O' 사이의 거리는 $d = \sqrt{(7-2)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{25+16} = \sqrt{41}$. $d > r$ 이므로 A 는 원의 외부.

3단계: 원 위 점 P 에 대해 $|AP|$ 의 최댓값은 직선 $O'A$ 가 원과 만나는 먼 쪽 점에서 $d + r = \sqrt{41} + 2$, 최솟값은 가까운 쪽 점에서 $d - r = \sqrt{41} - 2$.

4단계: 최댓값과 최솟값의 합은 $(\sqrt{41} + 2) + (\sqrt{41} - 2) = 2\sqrt{41}$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 외부 점과 원 위 점 사이의 거리가 '중심에서 두 점이 일직선상에 있을 때' 극값을 가진다는 기하적 직관이다. 두 극값의 합이 $2d$ 가 되어 반지름이 사라지는 깔끔한 구조에 주목.

💡 두 극값의 차는 항상 지름 $2r$ 이고, 합은 항상 $2d$ 이다. 이는 원의 회전 대칭성에서 자연스럽게 따라온다.

Q217 집합·명제 논증

임의의 두 실수 a, b 에 대하여 부등식 $|a + b| \leq |a| + |b|$ 가 항상 성립한다. 이 부등식에서 등호가 성립할 필요충분조건은?

- ① ① a, b 중 적어도 하나가 0
- ② ② $ab \geq 0$
- ③ ③ $a = b$
- ④ ④ $|a| = |b|$

정답: ②

1단계: 양변이 모두 음이 아니므로 제곱하여 비교한다. $(|a + b|)^2 = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$,
 $(|a| + |b|)^2 = a^2 + 2|a||b| + b^2 = a^2 + 2|ab| + b^2$.

2단계: 두 값의 차는 $(|a| + |b|)^2 - (a + b)^2 = 2(|ab| - ab) \geq 0$. 등호는 $|ab| = ab$ 일 때, 즉 $ab \geq 0$ 일 때.

3단계: 역으로 $ab \geq 0$ 이면 $|ab| = ab$ 이므로 위 차가 0. 따라서 $|a + b| = |a| + |b|$ 가 성립.

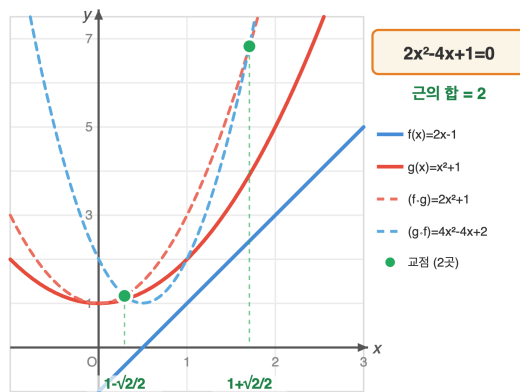
4단계: 합정 검토: ①(적어도 하나가 0)은 충분조건이다. 예를 들어 $b = 0$ 이면 $|a + 0| = |a| = |a| + |0|$ 로 항상 등호가 성립한다. 그러나 $a = 1, b = 2$ 처럼 둘 다 0이 아니어도 등호가 성립하므로 ①은 필요조건이 아니다. 즉 ①은 충분조건이지만 필요조건이 아니어서 필요충분조건이 아니다. ③($a = b$)은 $ab = a^2 \geq 0$ 이므로 충분조건이지만 $a = 1, b = 2$ 에서 보듯 필요조건이 아니다. ④($|a| = |b|$)는 $a = 1, b = -1$ 일 때 $|a| = |b|$ 이지만 $|a + b| = 0 \neq 2 = |a| + |b|$ 이므로 충분조건조차 아니다. 따라서 필요충분조건은 ②뿐이다.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 절댓값의 기하적 의미('같은 방향이면 합쳐지고 반대 방향이면 상쇄됨')를 대수적으로 $ab \geq 0$ 이라는 조건으로 번역하는 것이다. 필요충분 판별에서는 양방향을 모두 확인해야 한다.

이 부등식은 삼각부등식의 1차원 버전이다. 벡터로 일반화하면 $|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$, 등호 조건은 두 벡터가 같은 방향(서로 양의 스칼라배)일 때.

Q218 함수 심화

두 함수 $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = x^2 + 1$ 에 대하여 $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ 를 만족하는 모든 실수 x 의 합을 구하시오.



- ① ①0
- ② ②1
- ③ ③2
- ④ ④ $\sqrt{2}$

정답: ③

1단계: $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 1) = 2(x^2 + 1) - 1 = 2x^2 + 1$.

2단계: $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x - 1) = (2x - 1)^2 + 1 = 4x^2 - 4x + 2$.

3단계: $2x^2 + 1 = 4x^2 - 4x + 2$ 를 정리하면 $2x^2 - 4x + 1 = 0$. 근의 공식으로 $x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 8}}{4} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

4단계: 두 근의 합은 근과 계수의 관계에 의해 $-\frac{-4}{2} = 2$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 합성함수의 교환법칙이 일반적으로 성립하지 않는다는 점이며, 두 합성을 직접 계산해 같아지는 x 를 이차 방정식으로 환원하는 것이다. 두 근의 합은 굳이 근을 구하지 않고 근과 계수의 관계로 빠르게 얻을 수 있다.

💡 $f \circ g = g \circ f$ 가 모든 x 에서 성립하는 함수쌍은 매우 특별하다(예: f, g 가 모두 다항식일 때 거의 $f = x$ 또는 $g = x$ 또는 같은 함수의 반복합성에 한정).

Q219 경우의 수 심화

문자 a, a, b, b, c, c, d 7개를 모두 일렬로 나열하는 방법의 수는?

- ① ①420
- ② ②540
- ③ ③630
- ④ ④720

정답: ③

1단계: 같은 것이 있는 순열. 7개 자리에 7개 문자를 모두 배열하는 전체 방법은 $7! = 5040$.

2단계: 그러나 a 가 2개로 같고, b 가 2개로 같고, c 가 2개로 같으므로 같은 문자끼리의 순서 교환은 같은 배열로 친다.

3단계: 따라서 답은 $\frac{7!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{5040}{8} = 630$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 '같은 것이 있는 순열' 공식 $\frac{n!}{p!q!r!}$ 의 적용이다. 각 중복 문자에 대해 별도의 계승으로 나누어야 하며, d 는 1개이므로 $1! = 1$ 로 영향 없음.

💡 이 공식은 다항계수와 같다: $\binom{7}{2, 2, 2, 1} = 630$.

Q220 경시·통합 문제

실수 x, y, z 가 $x + y + z = 6$, $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ 를 만족할 때, $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ 의 값은?

- ① ①15
- ② ②18
- ③ ③22
- ④ ④33

정답: ②

1단계: 항등식 $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$ 를 이용한다. $36 = 14 + 2(xy + yz + zx)$ 이므로 $xy + yz + zx = 11$.

2단계: 핵심 항등식 $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$ 를 적용한다.

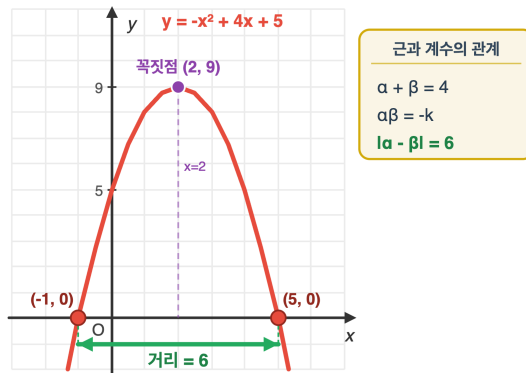
3단계: 대입하면 $(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = 6 \cdot (14 - 11) = 6 \cdot 3 = 18$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 세 변수의 대칭식을 기본 대칭식 $e_1 = x + y + z$, $e_2 = xy + yz + zx$, $e_3 = xyz$ 로 환원해 푸는 것이다. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ 는 e_3 이 사라지는 특별한 대칭식이라 e_1, e_2 만으로 결정된다.

💡 $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$ 는 행렬식으로 표현하면 $\det \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix}$ 와 같다.

Q221 이차함수·부등식 통합

이차함수 $y = -x^2 + 4x + k$ 의 그래프가 x 축과 두 점에서 만나고, 그 두 교점 사이의 거리가 6이 되도록 하는 실수 k 의 값을 구하시오.



- ① ①3
- ② ②4
- ③ ③5
- ④ ④6

정답: ③

1단계: $-x^2 + 4x + k = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - k = 0$. 두 실근을 α, β 라 하면 근과 계수의 관계로 $\alpha + \beta = 4$, $\alpha\beta = -k$.

2단계: 두 교점 사이 거리 $|\alpha - \beta| = 6$ 이므로 양변 제곱: $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 16 + 4k = 36$.

3단계: 따라서 $4k = 20$, $k = 5$.

4단계: 검산: $x^2 - 4x - 5 = (x - 5)(x + 1) = 0$, 두 교점 $(-1, 0), (5, 0)$ 사이 거리 6. 또한 두 실근 조건 $D = 16 + 4k > 0$, 즉 $k > -4$ 를 만족.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 두 근 사이의 거리를 근과 계수의 관계로 표현하는 항등식 $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$ 를 활용하는 것이다. 이차함수와 x 축의 교점이 곧 이차방정식의 실근이라는 동치성을 잊지 말 것.

💡 두 교점 사이 거리는 $\frac{\sqrt{D}}{|a|}$ 로 일반화되며, 이는 이차함수 그래프의 폭을 측정하는 지표가 된다.

Q222 고차·연립방정식

방정식 $|x^2 - 4| = x + 2$ 의 모든 실근의 합은?

- ① ①0
- ② ②1
- ③ ③2
- ④ ④3

정답: ③

1단계: 우변 $x + 2 \geq 0$ 이어야 하므로 $x \geq -2$ 가 필요조건. 또한 절댓값의 부호로 경우를 나눈다.

2단계: 경우 1, $x^2 - 4 \geq 0$ (즉 $x \leq -2$ 또는 $x \geq 2$): $x^2 - 4 = x + 2 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 2) = 0$. $x = 3$ (조건 만족), $x = -2$ (조건 만족).

3단계: 경우 2, $-2 < x < 2$: $-(x^2 - 4) = x + 2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow (x + 2)(x - 1) = 0$. $x = 1$ (조건 만족), $x = -2$ (조건 미달).

4단계: 모든 실근 $\{-2, 1, 3\}$ 의 합 = $-2 + 1 + 3 = 2$. (중복 $x = -2$ 는 한 번만 셈)

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 절댓값을 풀 때 안쪽 식의 부호로 정의역을 나누는 것과, 각 경우에서 얻은 해가 그 경우의 정의역에 속하는지 반드시 검증하는 것이다. 또 $x + 2 \geq 0$ 이라는 우변 조건도 잊지 말 것.

💡 $y = |x^2 - 4|$ 의 그래프는 $y = x^2 - 4$ 의 x 축 아래 부분을 위로 접어 올린 모양으로, 직선 $y = x + 2$ 와의 교점 분석은 그래프로 시각적으로 셀 수도 있다.

Q223 함수 심화

함수 $f(x) = \frac{2x + 1}{x - 1}$ ($x \neq 1$)의 역함수를 g 라 할 때, $g(3)$ 의 값은?

- ① ①2
- ② ②3
- ③ ③4
- ④ ④5

정답: ③

1단계: 역함수의 정의에 의해 $g(3) = a$ 이면 $f(a) = 3$.

2단계: $\frac{2a + 1}{a - 1} = 3$ ($a \neq 1$). 양변에 $a - 1$ 을 곱하면 $2a + 1 = 3(a - 1) = 3a - 3$.

3단계: $2a + 1 = 3a - 3 \Rightarrow a = 4$. 정의역 조건 $a \neq 1$ 만족.

4단계: 검산: $f(4) = \frac{2 \cdot 4 + 1}{4 - 1} = \frac{9}{3} = 3$. 따라서 $g(3) = 4$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 역함수를 직접 구하는 대신 정의 $g(b) = a \Leftrightarrow f(a) = b$ 로 환원해 한 번의 일차방정식으로 푸는 것이다. 유리함수의 역함수도 같은 방식으로 빠르게 처리할 수 있다.

💡 역함수를 일반식으로 구하면 $g(x) = \frac{x + 1}{x - 2}$. 흥미롭게도 f 와 g 는 모두 분수일차변환(메비우스 변환)이며, 이런 변환의 역함수는 항상 같은 형태다.

Q224 다항식·항등식 추론

다항식 $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) + 1$ 을 인수분해하면?

- ① ① $(x^2 + 5x + 4)^2$
- ② ② $(x^2 + 5x + 5)^2$
- ③ ③ $(x^2 + 5x + 6)^2$
- ④ ④ $(x^2 + 4x + 5)^2$

정답: ② $(x^2 + 5x + 5)^2$

1단계: 일차식의 합이 같아지도록 짝을 묶는다. $(x + 1)(x + 4) = x^2 + 5x + 4$, $(x + 2)(x + 3) = x^2 + 5x + 6$.

2단계: 공통 부분을 치환한다. $t = x^2 + 5x + 5$ 로 두면 두 식은 $t - 1$ 과 $t + 1$.

3단계: 원식 = $(t - 1)(t + 1) + 1 = t^2 - 1 + 1 = t^2 = (x^2 + 5x + 5)^2$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 네 일차식을 그냥 곱해 사차로 풀지 않고, 합이 같은 짝(1과 4, 2와 3)을 묶어 공통 이차식을 만든 뒤 치환으로 완전제곱 꼴을 끌어내는 것이다.

💡 $n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1$ 은 항상 정수의 제곱이고, 그 값은 $(n^2 + 3n + 1)^2$ 이다.

Q225 복소수 심화

$z = \frac{1+i}{1-i}$ 일 때, $z + z^2 + z^3 + \dots + z^{2026}$ 의 값은?

- ① ① 0
- ② ② $-1 + i$
- ③ ③ $1 + i$
- ④ ④ $-1 - i$

정답: ② $-1 + i$

1단계: 분모를 실수화한다. $z = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2} = i$.

2단계: i^k 는 $k = 1, 2, 3, 4$ 에서 $i, -1, -i, 1$ 이고 그 합은 0. 즉 연속한 4항의 합은 항상 0.

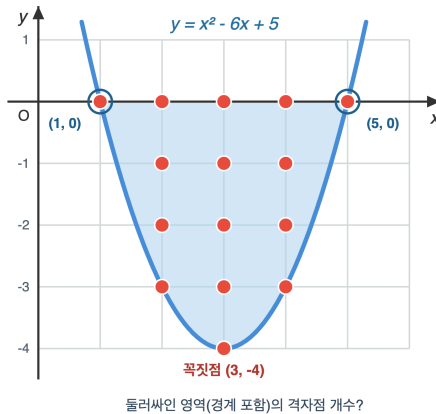
3단계: $2026 = 4 \times 506 + 2$ 이므로 처음 $4 \times 506 = 2024$ 항의 합은 0. 남은 두 항은 $i^{2025} + i^{2026} = i + (-1) = -1 + i$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 분수 복소수를 단순화하면 i 가 되어, i 의 거듭제곱이 갖는 주기 4 성질로 합을 분할 처리하는 것이다.

💡 임의의 자연수 n 에 대해 $\sum_{k=1}^n i^k$ 는 $\{0, i, -1 + i, -1\}$ 네 값 중 하나만 가진다.

Q226 이차함수·부등식 통합

좌표평면에서 이차함수 $y = x^2 - 6x + 5$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 영역(경계 포함)에 속하는 격자점(좌표가 모두 정수인 점)의 개수는?



- ① ① 13
- ② ② 14
- ③ ③ 15
- ④ ④ 16

정답: ③ 15

1단계: x 축과의 교점은 $x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow x = 1, 5$. 영역은 $1 \leq x \leq 5, x^2 - 6x + 5 \leq y \leq 0$.

2단계: 정수 x 별로 가능한 정수 y 개수를 센다.

$x = 1: y = 0$ (1개), $x = 2: -3 \leq y \leq 0$ (4개), $x = 3: -4 \leq y \leq 0$ (5개), $x = 4: -3 \leq y \leq 0$ (4개), $x = 5: y = 0$ (1개).

3단계: $1 + 4 + 5 + 4 + 1 = 15$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 영역의 위/아래 경계를 명확히 구한 뒤 정수 x 슬라이스마다 y 가 가질 수 있는 정수의 개수를 세서 합하는 절단(슬라이싱) 전략이다.

포물선 아래 격자점을 세는 문제는 가우스 격자점 정리의 입문 문제로 자주 등장한다.

Q227 집합·명제 논증

두 집합 $A = \{x \mid x^2 - 4x + a \leq 0\}$, $B = \{x \mid x^2 - (b + 1)x + b \leq 0\}$ 에 대해 $A = B$ 가 성립할 때, 실수 $a + b$ 의 값은? (단, A, B 는 공집합이 아니다.)

- ① ① 4
- ② ② 5
- ③ ③ 6
- ④ ④ 7

정답: ③ 6

1단계: B 의 부등식은 $(x - 1)(x - b) \leq 0$ 이므로 B 의 두 끝점은 1과 b .

2단계: A 의 두 끝점을 α, β ($\alpha \leq \beta$)라 하면 근과 계수의 관계로 $\alpha + \beta = 4, \alpha\beta = a$.

3단계: $A = B$ 이라면 두 끝점이 일치해야 한다. 즉 $\{1, b\} = \{\alpha, \beta\}$, $1 + b = 4$ 에서 $b = 3, a = 1 \cdot 3 = 3$. 따라서 $a + b = 6$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 두 이차부등식의 해집합이 같다는 조건이 곧 두 이차식의 근(끝점)이 일치한다는 조건임을 알아채고, 근과 계수의 관계로 a, b 를 동시에 구하는 것이다.

달린 구간을 해로 갖는 두 이차부등식은 양의 상수배 차이만큼 자유도가 있지만, 일계수가 모두 1로 정해져 있을 때는 두 식이 완전히 일치한다.

Q228 고차·연립방정식

연립부등식 $\begin{cases} x^2 - 5x + 4 \leq 0 \\ x^2 - (a+2)x + 2a \leq 0 \end{cases}$ 의 해에 속하는 정수의 개수가 정확히 3일 때, 실수 a 의 값의 범위는?

- ① ① $a > 4$
- ② ② $a \geq 4$
- ③ ③ $4 \leq a < 5$
- ④ ④ $a > 5$

정답: ② $a \geq 4$

1단계: 첫 부등식은 $1 \leq x \leq 4$, 정수해 $\{1, 2, 3, 4\}$.

2단계: 둘째는 $(x-2)(x-a) \leq 0$. $a \geq 2$ 이면 $2 \leq x \leq a$, $a < 2$ 이면 $a \leq x \leq 2$.

3단계: 교집합의 정수해를 분석한다.

(i) $a \geq 2$ 일 때 교집합은 $2 \leq x \leq \min(4, a)$. 정수 3개($\{2, 3, 4\}$)이려면 $\min(4, a) \geq 4$, 즉 $a \geq 4$.

(ii) $a < 2$ 일 때 교집합은 $\max(1, a) \leq x \leq 2$ 로 정수 최대 2개뿐이라 조건 불가.

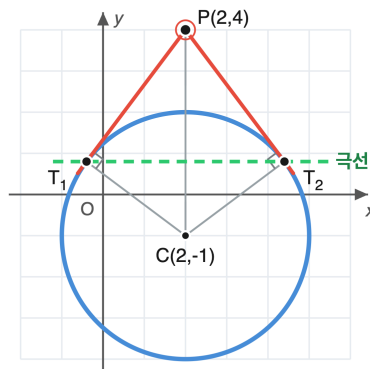
따라서 $a \geq 4$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 첫 부등식이 정수해의 후보를 4개로 한정하고, 둘째가 그중 정확히 3개만 살리도록 하는 끝점의 위치를 찾는 것이다. a 가 4 이상이면 위쪽 끝이 4를 넘어도 첫 부등식이 잘라내므로 정수 개수가 변하지 않는다는 점에 주의.

💡 a 가 매우 커도 정수해 개수가 일정해지는 현상은 '한 부등식이 다른 부등식의 천장 역할을 하는' 전형적 패턴이다.

Q229 도형의 방정식 심화

점 $P(2,4)$ 에서 원 $C: x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ 에 그은 두 접선의 접점을 각각 T_1, T_2 라 할 때, 직선 T_1T_2 의 방정식은?



- ① ① $5y = 4$
- ② ② $5y = -4$
- ③ ③ $5y = 9$
- ④ ④ $y = 1$

정답: ① $5y = 4$

1단계: 원을 표준형으로 정리한다. $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$. 중심 $(2, -1)$, 반지름 3.

2단계: 외부점 $P(x_1, y_1)$ 에서의 접점을 잇는 직선(극선)의 공식 $(x_1 - h)(x - h) + (y_1 - k)(y - k) = r^2$ 을 적용한다.

3단계: $(2-2)(x-2) + (4-(-1))(y-(-1)) = 9 \Rightarrow 0 + 5(y+1) = 9 \Rightarrow 5y = 4$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 두 접선의 방정식을 각각 구해 교차하는 대신, 외부점에서 그은 접점들을 잇는 '극선' 공식을 바로 사용하는 것이다. P 가 중심과 같은 x 좌표를 가져 식이 단순해진다.

💡 극선은 사영기하에서 원에 대한 점의 '쌍대선'이며, 점이 원 안에 있어도 의미 있게 정의된다.

Q230 함수 심화

$f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ ($x \neq -1$)에 대하여 $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n\text{개}}$ 로 정의한다. $f^{2026}(2)$ 의 값은?

- ① ① -2
- ② ② $-\frac{1}{2}$
- ③ ③ $\frac{1}{2}$
- ④ ④ 2

정답: ② $-\frac{1}{2}$

1단계: $f^2(x) = f(f(x)) = \frac{\frac{x-1}{x+1} - 1}{\frac{x-1}{x+1} + 1} = \frac{(x-1) - (x+1)}{(x-1) + (x+1)} = \frac{-2}{2x} = -\frac{1}{x}$.

2단계: $f^3(x) = f\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{-\frac{1}{x} - 1}{-\frac{1}{x} + 1} = \frac{-1-x}{-1+x} = \frac{x+1}{1-x}$, $f^4(x) = f\left(\frac{x+1}{1-x}\right) = x$.

3단계: $f^4 =$ 항등이므로 주기 4. $2026 = 4 \cdot 506 + 2$ 이므로 $f^{2026}(2) = f^2(2) = -\frac{1}{2}$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 합성을 끈기 있게 두세 번 계산하면 $f^4 =$ 항등임이 드러나며, 이후 큰 지수는 모두 4의 나머지로 환원되는 점이다.

💡 $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ 꼴 일차분수함수의 반복 합성은 행렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 의 거듭제곱과 일치한다.

Q231 경우의 수 심화

서로 다른 7명을 원형 테이블에 둘러앉힐 때, 특정한 두 사람 A, B 사이에 정확히 한 명만 들어가도록 앉히는 경우의 수는?

- ① ① 120
- ② ② 240
- ③ ③ 360
- ④ ④ 480

정답: ② 240

1단계: 원순열은 한 사람을 고정한다. A의 자리를 고정.

2단계: A에서 두 자리 떨어진 위치는 시계방향과 반시계방향 두 곳이 있고, 7명 자리에서는 서로 다른 자리이므로 B가 들어갈 위치는 2가지.

3단계: A와 B 사이의 한 자리에는 나머지 5명 중 1명이 오므로 5가지, 남은 4자리에 4명을 배치하는 방법은 $4! = 24$. 총 $2 \times 5 \times 24 = 240$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 원순열에서 한 사람을 고정해 회전 중복을 제거한 뒤, 조건을 만족하는 두 사람의 상대적 위치(거리 2)를 먼저 정하고 사이 자리와 나머지 자리를 단계적으로 채우는 것이다.

💡 7명 원순열에서 두 특정 인물 사이 거리가 정확히 k 인 경우의 수는 $k = 1, 2, 3$ 일 때 $2 \cdot 5!/?$ 형태로 모두 같은 비례식으로 계산된다.

Q232 경시·통합 문제

양의 약수의 개수가 정확히 6인 자연수 n 중 $n \leq 100$ 인 것의 개수는?

- ① ① 14
- ② ② 15
- ③ ③ 16
- ④ ④ 18

정답: ③ 16

1단계: 약수 개수 함수의 곱셈성질로 $\tau(n) = 6$ 인 자연수는 $n = p^5$ 또는 $n = p^2q$ (p, q 는 서로 다른 소수) 두 형태뿐이다.

2단계: $p^5 \leq 100$: $2^5 = 32$ 만 가능 \rightarrow 1개.

3단계: $p^2q \leq 100$:

$p = 2$: $q \leq 25$, $q \neq 2$ 소수 $\{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\} \rightarrow$ 8개.

$p = 3$: $q \leq 11$, $q \neq 3$ 소수 $\{2, 5, 7, 11\} \rightarrow$ 4개.

$p = 5$: $q \leq 4$, $q \neq 5$ 소수 $\{2, 3\} \rightarrow$ 2개.

$p = 7$: $q \leq 2$, $q = 2 \rightarrow$ 1개. ($p \geq 11$ 이면 $p^2 \geq 121 > 100$.)

총합: $1 + 8 + 4 + 2 + 1 = 16$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 약수 개수 함수 $\tau(n) = \prod (e_i + 1)$ 의 분해 $6 = 6 = 3 \cdot 2$ 로 가능한 소인수분해 꼴을 두 가지로 한정된 뒤, 각각의 상한을 정해 케이스별로 세는 것이다.

약수의 개수가 홀수인 자연수는 정확히 완전제곱수이고, 약수 개수가 소수인 자연수는 항상 어떤 소수의 거듭제곱이다.

Q233 다항식·항등식 추론

$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{15}x^{15}$ 일 때, $a_3 + a_7 + a_{12}$ 의 값은?

- ① ① 1
- ② ② 2
- ③ ③ 3
- ④ ④ 4

정답: ③ 3

1단계: 양변에 $(1-x)$ 를 곱한다. $(1-x)(1+x) = 1-x^2$, $(1-x^2)(1+x^2) = 1-x^4$, ... 식으로 연쇄 적용하면 좌변은 $1-x^{16}$.

2단계: 따라서 원식 $= \frac{1-x^{16}}{1-x} = 1+x+x^2+\dots+x^{15}$.

3단계: 모든 계수가 1이므로 $a_3 = a_7 = a_{12} = 1$, 합은 3.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 $1-x^{2^k}$ 꼴이 차례로 만들어지는 인수분해 사슬을 알아채고, 원식을 등비합 꼴로 바꿔 모든 계수가 1임을 동시에 결정하는 것이다.

$\prod_{k=0}^{n-1} (1+x^{2^k}) = 1+x+x^2+\dots+x^{2^n-1}$ 은 모든 자연수가 이진법으로 유일하게 표현된다는 사실의 다항식 버전이다.

Q234 복소수 심화

복소수 z 가 $z + \bar{z} = 6$, $z\bar{z} = 13$ 을 만족할 때, $|z - 3|^2$ 의 값은?

- ① ① 2
- ② ② 3
- ③ ③ 4
- ④ ④ 5

정답: ③ 4

1단계: $z = a + bi$ (a, b 는 실수)로 두면 $z + \bar{z} = 2a = 6$ 이므로 $a = 3$.

2단계: $z\bar{z} = a^2 + b^2 = 9 + b^2 = 13$ 이므로 $b^2 = 4$.

3단계: $z - 3 = bi$ 이므로 $|z - 3|^2 = b^2 = 4$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 켈레의 합과 곱이 각각 실수부의 두 배와 절댓값의 제곱이라는 사실을 사용해 직접 a, b 를 추출하는 것이다.

$z + \bar{z} = p$, $z\bar{z} = q$ 를 만족하는 복소수는 항상 이차방정식 $t^2 - pt + q = 0$ 의 두 근(실근 또는 켈레허근)이다.

Q235 이차함수·부등식 통합

이차함수 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 가 다음 세 조건을 모두 만족한다.

(가) $x = 1$ 에서 최댓값을 갖는다.

(나) $f(0) = 1$

(다) 그래프가 x 축에서 잘라내는 선분의 길이가 $2\sqrt{2}$ 이다.

이때 abc 의 값은?

- ① ① -3
- ② ② -2
- ③ ③ -1
- ④ ④ 0

정답: ② -2

1단계: 최댓값을 가지므로 $a < 0$ 이고 꼭짓점이 $x = 1$ 이면 $-\frac{b}{2a} = 1$, 즉 $b = -2a$.

2단계: $f(0) = c = 1$.

3단계: 두 근의 차는 $\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|} = 2\sqrt{2}$. $b = -2a, c = 1$ 대입하면 $\frac{\sqrt{4a^2 - 4a}}{-a} = 2\sqrt{2}$ ($a < 0$ 이므로 $|a| = -a$). 양변 제곱: $\frac{4a^2 - 4a}{a^2} = 8, 4a^2 - 4a = 8a^2, a^2 + a = 0, a = -1$ ($a < 0$). 따라서 $b = 2, c = 1$ 이고 $abc = -2$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 세 조건을 각각 (꼭짓점 가로좌표), (y 절편), (두 근 사이 거리) 식으로 옮긴 뒤, $a < 0$ 이라는 부호 조건을 끝까지 유지해 a 의 두 후보 중 옳은 하나를 고르는 것이다.

이차함수의 두 근 사이 거리는 $\frac{\sqrt{D}}{|a|}$ 로, 같은 모양(a 동일)에서 거리가 같으면 판별식도 같다.

Q236 복소수 심화

복소수 $z = 1 + i$ 에 대하여 $S = z + z^2 + z^3 + \dots + z^{16}$ 의 값을 구하시오.

- ① ① $255 - 255i$
- ② ② $256 - 256i$
- ③ ③ $255 + 255i$
- ④ ④ $-255 - 255i$

정답: ① $255 - 255i$

1단계: 등비수열의 합 공식으로 $S = \frac{z(z^{16} - 1)}{z - 1} = \frac{(1 + i)(z^{16} - 1)}{i}$.

2단계: i 의 거듭제곱 패턴 활용. $z^2 = (1 + i)^2 = 2i$, $z^4 = (2i)^2 = -4$, $z^8 = 16$, $z^{16} = 256$.

3단계: $S = \frac{(1 + i) \cdot 255}{i}$. 분모를 실수화: $\frac{1 + i}{i} = \frac{(1 + i)(-i)}{-i \cdot i} = \frac{-i + 1}{1} = 1 - i$.

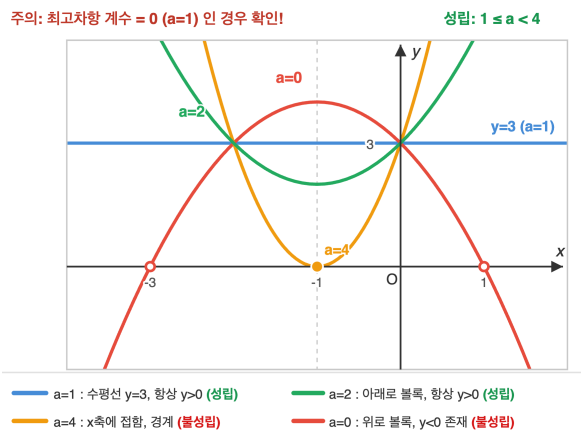
4단계: 따라서 $S = 255(1 - i) = 255 - 255i$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 복소수의 등비수열 합 공식과 $z^2 = 2i$ 로부터 출발하는 i 의 거듭제곱 주기성을 결합하여, z^{16} 같은 고차 거듭제곱을 단순화하는 것이다.

💡 $1 + i$ 의 편각은 45° , 절댓값은 $\sqrt{2}$ 이므로 거듭제곱은 회전과 확대가 결합된 기하학적 의미를 가진다.

Q237 이차함수·부등식 통합

모든 실수 x 에 대하여 부등식 $(a - 1)x^2 + 2(a - 1)x + 3 > 0$ 이 항상 성립하도록 하는 실수 a 의 값의 범위를 구하시오.



- ① ① $1 < a < 4$
- ② ② $1 \leq a < 4$
- ③ ③ $1 \leq a \leq 4$
- ④ ④ $0 < a < 4$

정답: ② $1 \leq a < 4$

1단계 (이차항이 0인 경우): $a = 1$ 이면 좌변 = $3 > 0$ 이 모든 x 에서 성립. 만족.

2단계 (이차식인 경우): $a \neq 1$ 이면 위로 볼록 조건 $a - 1 > 0$, 즉 $a > 1$ 이 필요.

3단계: 또한 판별식 $D/4 = (a - 1)^2 - 3(a - 1) = (a - 1)(a - 4) < 0$, 즉 $1 < a < 4$.

4단계: 두 경우 합치면 $1 \leq a < 4$. 함정: $a = 1$ 을 빠뜨리면 ①, $a = 4$ 를 포함하면 ③이 되어 오답.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 '이차항 계수에 매개변수가 들어 있는 부등식'에서, 그 계수가 0이 되어 이차식이 아닐 수도 있는 경우를 별도로 처리해야 한다는 점이다.

💡 이차 부등식에서 '최고차항 계수가 0일 수도 있다'는 점을 잊고 단순히 판별식만 다루면 시험에서 빈번히 감점되는 함정이다.

Q238 고차·연립방정식

연립방정식 $\begin{cases} x + y = 4 \\ x^3 + y^3 = 28 \end{cases}$ 를 만족시키는 실수 순서쌍 (x, y) 를 모두 구하시오.

- ① ① (1, 3), (3, 1)
- ② ② (2, 2)
- ③ ③ (0, 4), (4, 0)
- ④ ④ (-1, 5), (5, -1)

정답: ① (1, 3), (3, 1)

1단계 (대칭식 변환): $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$. 주어진 값 대입하면 $28 = 64 - 12xy$, 즉 $xy = 3$.

2단계 (기본대칭식 활용): $x + y = 4, xy = 3$ 이므로 x, y 는 이차방정식 $t^2 - 4t + 3 = 0$ 의 두 근.

3단계 (인수분해): $(t - 1)(t - 3) = 0$ 이므로 $t = 1$ 또는 $t = 3$.

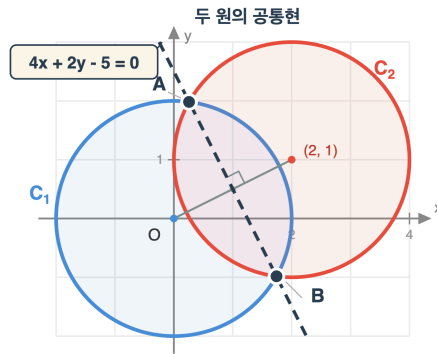
4단계: 두 미지수가 대칭이므로 $(x, y) = (1, 3)$ 또는 $(3, 1)$. (함정: ②는 $x + y = 4$ 만 만족, 두 번째 식 위반.)

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 비대칭으로 보이는 두 식을 합 $x + y$ 와 곱 xy 에 관한 기본대칭식으로 변환한 뒤, 이를 한 변수의 이차방정식으로 환원하는 것이다.

💡 두 미지수의 합과 곱을 알면 그들이 한 이차방정식의 두 근이라는 사실은 일반화된 대칭식 이론의 가장 기초적인 응용이다.

Q239 도형의 방정식 심화

두 원 $C_1: x^2 + y^2 = 4$ 와 $C_2: x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$ 이 서로 다른 두 점 A, B 에서 만난다. 직선 AB 의 방정식을 구하시오.



두 원의 식을 빼면 공통현(직선 AB)이 나온다

- ① ① $4x + 2y - 5 = 0$
- ② ② $2x + y - 5 = 0$
- ③ ③ $4x - 2y + 5 = 0$
- ④ ④ $x + y - 5 = 0$

정답: ① $4x + 2y - 5 = 0$

1단계 (식 형태 통일): $C_1: x^2 + y^2 - 4 = 0, C_2: x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$.

2단계 (식의 차감): C_1 에서 C_2 를 빼면 이차항이 모두 소거되어 $4x + 2y - 5 = 0$ 이라는 일차식을 얻는다.

3단계 (논리): 두 교점 A, B 는 C_1 과 C_2 둘 다 만족하므로 두 식의 차도 만족한다. 따라서 일차식 $4x + 2y - 5 = 0$ 위에 있다.

4단계: 일차식은 한 직선을 결정하므로 직선 AB 의 방정식은 $4x + 2y - 5 = 0$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 두 원의 방정식을 빼면 이차항이 소거되어 두 교점이 동시에 만족하는 일차식이 나온다는 대수적 사실을 이용해, 교점을 직접 구하지 않고도 직선을 결정하는 것이다.

💡 두 원의 차로 얻은 이 직선을 일반적으로 라디칼축(radical axis)이라 부르며, 두 원이 만나지 않더라도 정의된다.

Q240 집합·명제 논증

양의 실수 a, b 에 대하여 부등식 $\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{a}\right) \geq 4$ 가 성립함을 증명하고, 등호가 성립할 조건을 구하시오.

- ① ① 증명 완료, 등호는 $ab = 1$ 일 때
- ② ② 등호는 $ab = 2$ 일 때
- ③ ③ 등호는 $a = b$ 일 때만
- ④ ④ 등호는 $a = b = 1$ 일 때만

☞ 정답: ① 증명 완료, 등호는 $ab = 1$ 일 때

📖 1단계 (전개): 좌변 $= ab + 1 + 1 + \frac{1}{ab} = ab + \frac{1}{ab} + 2$.

2단계 (산술-기하 평균): $a, b > 0$ 이므로 $ab > 0$. 양수 ab 와 $\frac{1}{ab}$ 에 대해 $ab + \frac{1}{ab} \geq 2\sqrt{ab \cdot \frac{1}{ab}} = 2$.

3단계 (결합): 좌변 $\geq 2 + 2 = 4$. (증명 완료)

4단계 (등호): $ab = \frac{1}{ab}$ 일 때, 즉 $(ab)^2 = 1$ 이고 $ab > 0$ 이므로 $ab = 1$ 일 때 등호. 함정: $a = b$ 만으로는 부족 ($a = b = 2$ 이면 좌변 $= 2.5 \cdot 2.5 = 6.25 \neq 4$).

🧠 풀이 전략: 이 문제의 핵심은 곱을 그대로 전개해서 $ab + \frac{1}{ab}$ 꼴이 나오게 한 뒤, 이 두 양수에 산술-기하 평균 부등식을 한 번 더 적용하는 '두 단계 AM-GM'이다. 변수를 그대로 두지 말고 적절한 묶음을 찾는 것이 관건.

💡 이 형태의 부등식은 a, b 가 다양해도 등호가 $ab = 1$ 이라는 곡선 위에서만 성립한다는 점에서, 단순히 $a = b$ 를 등호 조건으로 답하면 오답이다.

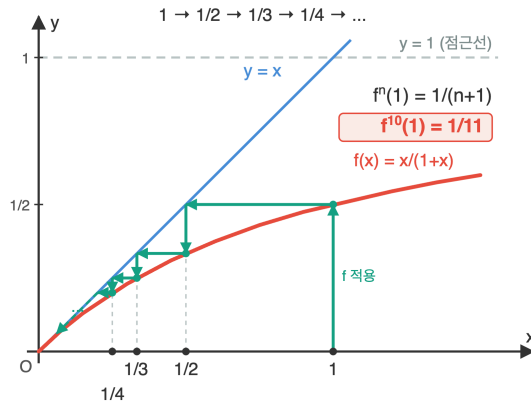


고1 수학 심화

총 10문제 · 문제와 정답·풀이 포함

Q241 함수 심화

함수 $f(x) = \frac{x}{1+x}$ ($x \geq 0$)에 대하여 $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n\text{개}}$ 로 정의할 때, $f^{10}(1)$ 의 값을 구하시오.



- ① ① $\frac{1}{11}$
- ② ② $\frac{1}{10}$
- ③ ③ $\frac{1}{12}$
- ④ ④ $\frac{2}{11}$

정답: ① $\frac{1}{11}$

1단계 (실험): $f^1(1) = \frac{1}{2}$, $f^2(1) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1/2}{3/2} = \frac{1}{3}$, $f^3(1) = \frac{1/3}{4/3} = \frac{1}{4}$.

2단계 (패턴 추측): $f^n(1) = \frac{1}{n+1}$ 로 보인다.

3단계 (귀납법 검증): $f^{n+1}(1) = f\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1/(n+1)}{1+1/(n+1)} = \frac{1/(n+1)}{(n+2)/(n+1)} = \frac{1}{n+2}$. 패턴이 유지된다.

4단계: $n = 10$ 대입하면 $f^{10}(1) = \frac{1}{11}$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 합성함수를 직접 끝까지 계산하지 않고, 몇 번의 시행으로 패턴 $f^n(1) = \frac{1}{n+1}$ 을 발견한 뒤 귀납적으로 검증하는 것이다. 분수함수의 합성을 깔끔히 정리하는 능력이 필요하다.

💡 $f(x) = \frac{x}{1+x}$ 는 좌표 변환 $u = \frac{1}{x}$ 아래에서 단순한 평행이동 $u \mapsto u + 1$ 이 되어, 패턴이 자연스럽게 등장한다.

Q242 경우의 수 심화

6개의 문자 a, a, b, b, c, c 를 일렬로 나열할 때, 같은 문자끼리 서로 이웃하지 않는 경우의 수를 구하시오.

- ① ① 30
- ② ② 60
- ③ ③ 24
- ④ ④ 36

정답: ① 30

1단계 (전체 수): 같은 것이 있는 순열 공식으로 $\frac{6!}{2!2!2!} = 90$.

2단계 (포함-배제 설정): 사건 A_i 를 '문자 i 두 개가 이웃' (단, $i \in \{a, b, c\}$). $|A_i| = \frac{5!}{2!2!} = 30$.

3단계: $|A_i \cap A_j| = \frac{4!}{2!} = 12$, $|A_a \cap A_b \cap A_c| = 3! = 6$.

4단계 (포함-배제): $|A_a \cup A_b \cup A_c| = 3 \cdot 30 - 3 \cdot 12 + 6 = 60$.

5단계: 이웃하지 않는 경우 = $90 - 60 = 30$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 '이웃하지 않는다'는 부정 조건을 직접 다루기 어려우므로, 여사건(이웃 발생 사건)을 포함-배제 원리로 정확히 세는 것이다. 같은 문자끼리도 분모로 나누는 데 주의해야 한다.

💡 같은 문자가 두 개씩 있는 6개 문자 배치에서 인접 금지 비율이 정확히 $\frac{30}{90} = \frac{1}{3}$ 이라는 점은, 비슷한 문제 일반화에서도 자주 등장한다.

Q243 경사·통합 문제

두 함수 $f(x) = x^2 - 2$, $g(x) = ax + b$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $f(g(x)) = g(f(x))$ 를 만족시킬 때, 가능한 순서쌍 (a, b) 의 개수를 구하시오.

- ① ① 3
- ② ② 2
- ③ ③ 4
- ④ ④ 1

정답: ① 3

1단계 (좌변 전개): $f(g(x)) = (ax + b)^2 - 2 = a^2x^2 + 2abx + b^2 - 2$.

2단계 (우변 전개): $g(f(x)) = a(x^2 - 2) + b = ax^2 - 2a + b$.

3단계 (항등식 계수비교): $a^2 = a$, $2ab = 0$, $b^2 - 2 = -2a + b$.

4단계 (경우 분석): $a^2 = a$ 에서 $a = 0$ 또는 $a = 1$.

- $a = 0$: 두 번째 식 자동 성립. 세 번째에서 $b^2 - b - 2 = 0$, 즉 $(b - 2)(b + 1) = 0$, $b = 2$ 또는 $b = -1$. 두 쌍 $(0, 2), (0, -1)$.

- $a = 1$: 둘째 식에서 $2b = 0$, $b = 0$. 셋째 식: $0 - 2 = -2 + 0 = -2$. 성립. 한 쌍 $(1, 0)$.

5단계: 총 3개의 순서쌍.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 합성함수의 가환($f \circ g = g \circ f$) 조건을 항등식 계수비교로 환원하고, 매개변수 방정식을 분기해서 누락 없이 모든 해를 잡아내는 것이다. 한 경우($a = 1$)를 빠뜨리면 ②가 답이 되므로 함정.

💡 두 함수의 합성이 가환인 경우는 매우 드물어, 함수방정식이라는 별도의 분야로 깊게 연구된다.

Q244 다항식·항등식 추론

삼차다항식 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 가 $(x - 1)^2$ 로 나누어떨어지고 $f(2) = 4$ 일 때, 상수 a, b, c 의 값을 각각 구하시오.

- ① ① $a = 0, b = -3, c = 2$
- ② ② $a = -2, b = 1, c = 0$
- ③ ③ $a = 0, b = -3, c = -2$
- ④ ④ $a = 1, b = -3, c = 2$

정답: ① $a = 0, b = -3, c = 2$

1단계 (인수 표현): 최고차계수가 1인 삼차식 $f(x)$ 가 $(x - 1)^2$ 로 나누어떨어지므로 $f(x) = (x - 1)^2(x - r)$ 로 둘 수 있다.

2단계 (조건 활용): $f(2) = (2 - 1)^2(2 - r) = 2 - r = 4$, 따라서 $r = -2$.

3단계 (전개): $f(x) = (x - 1)^2(x + 2) = (x^2 - 2x + 1)(x + 2)$.

$$= x^3 + 2x^2 - 2x^2 - 4x + x + 2 = x^3 - 3x + 2.$$

4단계 (계수 비교): $a = 0, b = -3, c = 2$. 검증: $f(1) = 1 - 3 + 2 = 0, f(2) = 8 - 6 + 2 = 4$. ✓

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 ' $(x - 1)^2$ 로 나누어떨어진다는' 조건을 단순한 등식 두 개($f(1) = 0$ 과 또 하나)로 풀려 하지 않고, 곧바로 $f(x) = (x - 1)^2(x - r)$ 꼴로 표현해 미지수를 한 개로 줄이는 것이다.

💡 $(x - 1)^2$ 로 나누어떨어진다는 사실은 그래프가 $x = 1$ 에서 x 축에 접한다는 기하적 의미를 가지며, 이는 미분을 배우지 않고도 인수 형태로 파악 가능하다.

Q245 복소수 심화

복소수 z 가 $z\bar{z} = 2, z + \bar{z} = 2$ 를 동시에 만족시킬 때, $z^4 + \bar{z}^4$ 의 값을 구하시오.

- ① ① -8
- ② ② 8
- ③ ③ -16
- ④ ④ 0

정답: ① -8

1단계 (제곱합 변환): $z^2 + \bar{z}^2 = (z + \bar{z})^2 - 2z\bar{z} = 2^2 - 2 \cdot 2 = 0$.

2단계 (네제곱합 변환): $z^4 + \bar{z}^4 = (z^2 + \bar{z}^2)^2 - 2(z\bar{z})^2 = 0^2 - 2 \cdot 2^2 = -8$.

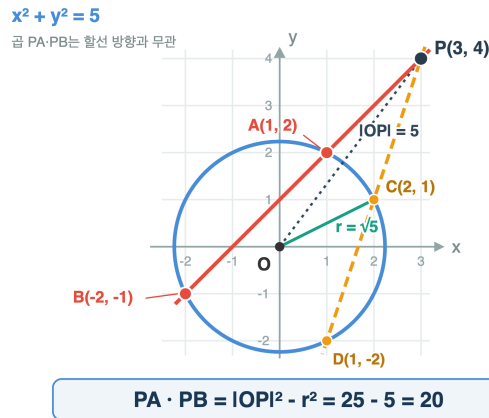
3단계 (검증): $z + \bar{z} = 2, z\bar{z} = 2$ 이면 z, \bar{z} 는 $t^2 - 2t + 2 = 0$ 의 두 근, 즉 $z = 1 \pm i$. $(1 + i)^4 = ((1 + i)^2)^2 = (2i)^2 = -4$. 같은 방식으로 $(1 - i)^4 = -4$. 합 -8 . ✓

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 켈레의 합과 곱이 주어졌을 때, 거듭제곱 합을 단계적으로 끌어올리는 점화 관계 $s_{k+1} = s_1 s_k - p s_{k-1}$ 류의 뉴턴 항등식을 활용하는 것이다. 직접 $z = 1 + i$ 를 구해 계산하는 것도 좋다.

💡 $z + \bar{z} = 2, z\bar{z} = 2$ 인 복소수는 정확히 $1 \pm i$ 이며, 정사각형 격자의 회전 대칭과 깊은 관련이 있다.

Q246 도형의 방정식 심화

점 $P(3, 4)$ 를 지나는 직선이 원 $x^2 + y^2 = 5$ 와 서로 다른 두 점 A, B 에서 만날 때, $PA \cdot PB$ 의 값을 구하시오. (단, 직선의 방향에 무관하게 그 곱이 일정함을 이용해도 좋다.)



- ① ① 20
- ② ② 16
- ③ ③ 25
- ④ ④ 5

정답: ① 20

1단계 (점거듭제곱 관찰): 원 밖의 점 P 에서 원과 만나는 임의의 할선의 두 교점 A, B 에 대하여 $PA \cdot PB$ 는 직선 방향에 관계없이 $|OP|^2 - r^2$ 로 일정.

2단계 (구체 계산): $|OP|^2 = 3^2 + 4^2 = 25, r^2 = 5.$

3단계: 따라서 $PA \cdot PB = 25 - 5 = 20.$

4단계 (검증, 특수 직선): P 와 O 를 지나는 직선($y = \frac{4}{3}x$) 사용 시 두 교점은 $(\pm 1) \cdot \sqrt{5} / 5 \cdot (3, 4)$ 위에 위치.

$PA \cdot PB = (|OP| + r)(|OP| - r) = (5 + \sqrt{5})(5 - \sqrt{5}) = 25 - 5 = 20. \checkmark$

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 원 밖의 한 점에서 그은 두 할선 위 두 점까지의 거리의 곱이 직선의 방향에 관계없이 일정하다는 점거듭제곱(방역) 정리를 이용해, 복잡한 좌표계산 없이 답을 얻는 것이다.

💡 이 일정한 값을 점 P 의 원에 대한 '거듭제곱(power of a point)'이라 부르며, 점이 원 안에 있으면 음수 값을 가진다.

Q247 다항식·항등식 추론

$(1 + x)^{10} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{10}x^{10}$ 일 때, $a_0 + a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10}$ 의 값은?

- ① ① 256
- ② ② 512
- ③ ③ 1024
- ④ ④ 2048

정답: ② 512

1단계: 항등식이므로 양변에 $x = 1$ 을 대입하면 $2^{10} = 1024 = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{10}$. 2단계: $x = -1$ 을 대입하면

$0^{10} = 0 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + a_{10}$. 3단계: 두 식을 번끼리 더하면 홀수 차수 항이 모두 소거되어

$1024 + 0 = 2(a_0 + a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10})$. 따라서 짝수 차수 계수의 합은 $\frac{1024}{2} = 512$ 이다.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 '특정 값 대입 후 식의 합·차'라는 항등식 활용 표준 전략이다. $x = 1$ 은 모든 계수의 합, $x = -1$ 은 부호가 교대하는 합을 주므로 두 결과를 더하거나 빼서 짝수 차수 또는 홀수 차수 계수만 분리할 수 있다.

💡 이항전개의 짝수 차수 계수 합과 홀수 차수 계수 합은 항상 같으며 모두 2^{n-1} (여기서는 $2^9 = 512$)이다.

Q248 집합·명제 논증

$a > 0, b > 0$ 일 때, 다음 부등식 중 항상 성립하는 것을 모두 고른 것은? ㉠ $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ ㉡ $\sqrt{a^2 + b^2} \geq \frac{a+b}{\sqrt{2}}$ ㉢

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$$

- ① ㉠ ㉢만
- ② ㉡ ㉢, ㉣
- ③ ㉢ ㉣, ㉤
- ④ ㉣ ㉣, ㉣, ㉤

정답: ④ ㉠, ㉡, ㉣

1단계 (㉠): $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 = \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{ab} = \frac{(a-b)^2}{ab} \geq 0$ 이므로 성립 (등호 $a = b$). 2단계 (㉡): 양변이 양수이므로 제곱하여 비교한다. $a^2 + b^2 - \frac{(a+b)^2}{2} = \frac{2(a^2 + b^2) - (a+b)^2}{2} = \frac{(a-b)^2}{2} \geq 0$ 이므로 성립. 3단계 (㉢):

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{4}{a+b} = \frac{(a+b)^2 - 4ab}{ab(a+b)} = \frac{(a-b)^2}{ab(a+b)} \geq 0$$

이므로 성립. 결론: 세 부등식 모두 절대부등식이며 등호 조건은 모두 $a = b$ 로 일치한다.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 'LHS-RHS를 완전제곱 꼴로 변형'하는 절대부등식 증명의 표준 기법이다. 세 부등식 모두 $(a-b)^2 \geq 0$ 으로 환원되며 등호 조건이 $a = b$ 로 동일하다는 통찰된 구조를 인식하는 것이 중요하다.

㉠은 산술-기하 평균(AM-GM), ㉡은 제곱평균-산술평균(QM-AM), ㉢은 산술-조화 평균(AM-HM) 관계의 특수형으로, 모두 같은 뿌리에서 자라난 형제 부등식이다.

Q249 고차·연립방정식

방정식 $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$ 의 서로 다른 실근의 합은?

- ① ① 1
- ② ② 3
- ③ ③ 4
- ④ ④ 5

정답: ③ 4

1단계: 계수가 좌우 대칭이므로 상반방정식. $x = 0$ 은 해가 아니므로 양변을 x^2 으로 나누면 $(x^2 + \frac{1}{x^2}) - 5(x + \frac{1}{x}) + 8 = 0$. 2단계: $t = x + \frac{1}{x}$ 로 놓으면 $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$ 이므로 $(t^2 - 2) - 5t + 8 = 0 \Rightarrow t^2 - 5t + 6 = 0 \Rightarrow (t-2)(t-3) = 0$. 3단계: $t = 2$ 일 때 $x + \frac{1}{x} = 2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ (중근). $t = 3$ 일 때 $x + \frac{1}{x} = 3 \Rightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$. 4단계: 서로 다른 실근은 $1, \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ 이고 그 합은 $1 + \frac{(3 + \sqrt{5}) + (3 - \sqrt{5})}{2} = 1 + 3 = 4$.

풀이 전략: 이 문제의 핵심은 '계수가 좌우 대칭인 사차방정식'을 보면 $t = x + \frac{1}{x}$ 치환으로 이차로 환원할 수 있음을 인식하는 것이다. 함정: 모든 근의 합(중복 포함)은 비에타로 5지만, 문제는 '서로 다른 실근의 합'이므로 중복된 1을 한 번만 세어 4이다.

상반(回文) 방정식 $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = 0$ ($a_k = a_{n-k}$)은 짝수 차수일 때 항상 $t = x + \frac{1}{x}$ 치환으로 차수를 절반으로 줄일 수 있다.

Q250 함수 심화

함수 $f(x) = \frac{x}{2x+1}$ ($x \neq -\frac{1}{2}$)에 대하여 $f^1 = f, f^{n+1} = f \circ f^n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)이라 할 때, $f^{10}(1)$ 의 값은?

- ① ① $\frac{1}{11}$
- ② ② $\frac{1}{20}$
- ③ ③ $\frac{1}{21}$
- ④ ④ $\frac{1}{31}$

☞ 정답: ③ $\frac{1}{21}$

☞ 1단계 (실험): $f^1(x) = \frac{x}{2x+1}, f^2(x) = f(f(x)) = \frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{2x}{2x+1} + 1} = \frac{x}{2x + (2x+1)} = \frac{x}{4x+1}$. 같은 방식으로 $f^3(x) = \frac{x}{6x+1} \cdot 2$

단계 (일반항 추측 후 귀납 검증): $f^n(x) = \frac{x}{2nx+1}$ 로 추측. $f^{n+1}(x) = f(f^n(x)) = \frac{\frac{x}{2nx+1}}{\frac{2x}{2nx+1} + 1} = \frac{x}{2x + 2nx + 1} = \frac{x}{2(n+1)x + 1}$

이므로 $n+1$ 일 때도 성립. 3단계 (대입): $f^{10}(1) = \frac{1}{2 \cdot 10 \cdot 1 + 1} = \frac{1}{21}$.

🧠 풀이 전략: 이 문제의 핵심은 '몇 번 합성해보고 일반항을 추측한 뒤 귀납법으로 확정'하는 반복 합성 표준 전략이다. 분모의 x 계수가 2, 4, 6, ... 로 등차로 늘어남을 포착하면 $2n$ 이라는 일반항이 자연스럽게 도출된다.

💡 $f(x) = \frac{x}{ax+1}$ 꼴의 분수함수는 합성에 대해 닫혀 있고 항상 $f^n(x) = \frac{x}{nax+1}$ 형태가 되어, 합성 연산이 덧셈처럼 작동하는 군(group) 구조를 이룬다.