📝 고1 수학 일반

총 40문제 · 문제와 정답·풀이 포함

Q1 다항식

다항식 $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 4$를 $x - 1$로 나누었을 때의 나머지는?

①) ① -4

②) ② -2

③) ③ 0

④) ④ 2

🎯 **정답:** ② -2

📖 나머지정리에 의하여 $P(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는 $P(1)$이다.

$P(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 4 = 1 - 2 + 3 - 4 = -2$

따라서 나머지는 -2이다.

💡 나머지정리는 17세기 프랑스 수학자 베주(Bezout)의 이름을 따서 '베주의 정리'라고도 불려.

Q2 다항식

다항식 $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$을 $x - 1$로 나누었을 때 나머지가 3이고, $x + 1$로 나누었을 때 나머지가 -3이다. 이때 $a + b$의 값은?

①) ① -1

②) ② 0

③) ③ 1

④) ④ 2

🎯 **정답:** ③ 1

📖 나머지정리를 이용한다.

$P(1) = 1 + a + b + 1 = 2 + a + b = 3$이므로 $a + b = 1$ ...(1)

$P(-1) = -1 + a - b + 1 = a - b = -3$ ...(2)

(1)+(2): $2a = -2$이므로 $a = -1,\ b = 2$

따라서 $a + b = 1$이다.

Q3 다항식

다항식 $x^4 + 4$를 실수 범위에서 인수분해한 것은?

①) ① $(x^2 + 2)^2$

②) ② $(x - 2)(x + 2)(x^2 + 1)$

③) ③ $(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$

④) ④ $(x^2 + 2x - 2)(x^2 - 2x + 2)$

🎯 **정답:** ③ $(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$

📖 완전제곱식을 만드는 항을 더하고 빼는 방법(소피 제르맹 항등식)을 사용한다.

$x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2$

이는 $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$ 꼴이므로

$= (x^2 + 2 - 2x)(x^2 + 2 + 2x) = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$

두 인수 모두 판별식이 음수이므로 실수 범위에서는 더 이상 인수분해되지 않는다.

💡 이 형태의 인수분해는 18세기 여성 수학자 소피 제르맹의 이름을 따 '소피 제르맹 항등식'이라 불려.

Q4 복소수와 이차방정식

i가 허수단위일 때, $i^{2026}+i^{2027}+i^{2028}+i^{2029}$의 값은?

①) ① -1

②) ② 0

③) ③ 1

④) ④ i

🎯 **정답:** ② 0

📖 i의 거듭제곱은 $i,\ -1,\ -i, 1$이 주기 4로 반복된다.
연속된 네 항의 합은 $i+(-1)+(-i)+1=0$이므로 항상 0이다.
$i^{2026}+i^{2027}+i^{2028}+i^{2029}$는 지수가 연속된 4개의 자연수이므로 합은 0.
(확인) $2026=4\cdot 506+2$이므로 $i^{2026}=i^2=-1,\ i^{2027}=-i,\ i^{2028}=1,\ i^{2029}=i$.
합: $-1-i+1+i=0$.

💡 허수단위 i는 1777년 오일러가 $\sqrt{-1}$ 을 나타내기 위해 처음 도입했어.

Q5 복소수와 이차방정식

복소수 $z=\dfrac{1+i}{1-i}$에 대하여 z^{10}의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

①) ① -1

②) ② $-i$

③) ③ i

④) ④ 1

🎯 **정답:** ① -1

📖 분모를 실수화한다. 분모와 분자에 $1+i$를 곱하면

$$z=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+2i+i^2}{1-i^2}=\frac{2i}{2}=i$$

따라서 $z^{10}=i^{10}=(i^4)^2\cdot i^2=1\cdot(-1)=-1$.

Q6 복소수와 이차방정식

이차방정식 $x^2-3x+1=0$의 두 근을 α,β라 할 때, $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\alpha^2+\beta^2$의 값은?

①) ① 8

②) ② 9

③) ③ 10

④) ④ 11

🎯 **정답:** ③ 10

📖 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=3,\ \alpha\beta=1$.

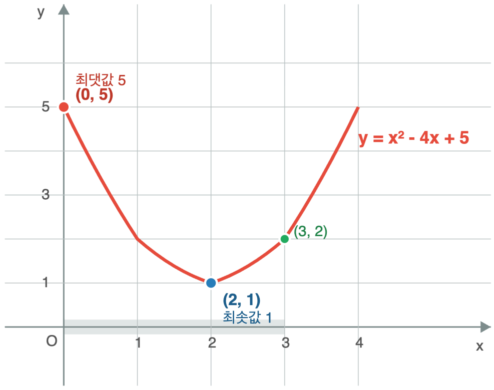
$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{3}{1}=3$$

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=9-2=7$$

따라서 구하는 값은 $3+7=10$이다.

Q7 이차함수와 이차부등식

이차함수 $f(x) = x^2 - 4x + 5$의 $0 \le x \le 3$에서의 최댓값과 최솟값의 합은?



①) ① 4

②) ② 5

③) ③ 6

④) ④ 7

🎯 **정답:** ③ 6

📖 $f(x) = x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1$로 표준형 변환한다.

꼭짓점은 $(2, 1)$이고 아래로 볼록한 포물선이다.

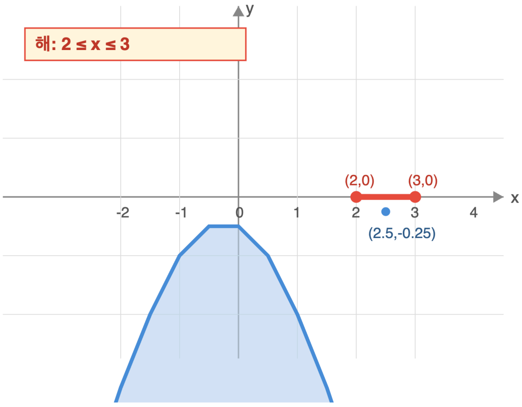
꼭짓점의 x좌표 2는 구간 $[0, 3]$에 포함된다.

- 최솟값: $f(2) = 1$
- 최댓값: 꼭짓점에서 더 먼 끝점에서 발생. $f(0) = 5$, $f(3) = 2$이므로 최댓값은 $f(0) = 5$

따라서 최댓값 + 최솟값 $= 5 + 1 = 6$.

Q8 이차함수와 이차부등식

이차부등식 $x^2 - 5x + 6 \le 0$의 해는?



①) ① $x \le 2$ 또는 $x \ge 3$

②) ② $2 \le x \le 3$

③) ③ $2 < x < 3$

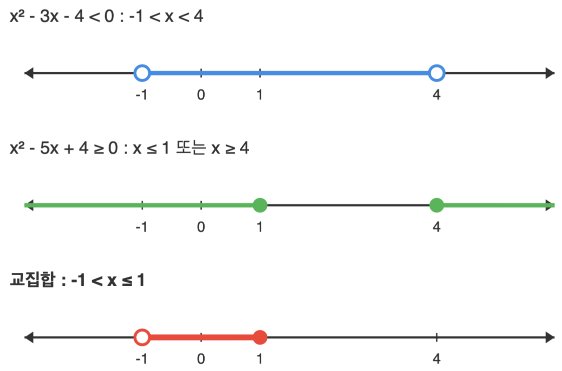
④) ④ $-3 \le x \le -2$

🎯 **정답:** ② $2 \le x \le 3$

📖 $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$으로 인수분해된다.
$(x-2)(x-3) \le 0$을 풀기 위해 두 근 2, 3을 기준으로 부호를 조사한다.
$y = (x-2)(x-3)$은 아래로 볼록한 포물선이고 두 x절편 사이에서 $y \le 0$이다.
따라서 해는 $2 \le x \le 3$.

Q9 이차함수와 이차부등식

연립부등식 $\begin{cases} x^2 - 3x - 4 < 0 \\ x^2 - 5x + 4 \geq 0 \end{cases}$ 의 해는?



①) ① $-1 < x \leq 1$

②) ② $-1 \leq x < 1$

③) ③ $1 \leq x < 4$

④) ④ $-1 < x < 4$

🎯 **정답:** ① $-1 < x \leq 1$

📖 각 부등식의 해를 구한 뒤 공통부분을 찾는다.

(1) $x^2 - 3x - 4 = (x+1)(x-4) < 0$이므로 해는 $-1 < x < 4$.

(2) $x^2 - 5x + 4 = (x-1)(x-4) \geq 0$이므로 해는 $x \leq 1$ 또는 $x \geq 4$.

두 해의 공통부분:

- $-1 < x < 4$ 와 $x \leq 1$의 교집합: $-1 < x \leq 1$

- $-1 < x < 4$ 와 $x \geq 4$의 교집합: 없음

따라서 연립부등식의 해는 $-1 < x \leq 1$이다.

Q10 방정식과 부등식 활용

삼차방정식 $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$의 값은?

①) ① 12

②) ② 13

③) ③ 14

④) ④ 15

🎯 **정답:** ③ 14

📖 방법 1 (근과 계수의 관계):

삼차방정식 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$의 세 근 α, β, γ에 대해

$\alpha + \beta + \gamma = 6$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 11$, $\alpha\beta\gamma = 6$

$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$

$= 6^2 - 2 \cdot 11 = 36 - 22 = 14$

방법 2 (직접 인수분해):

$x = 1$을 대입하면 $1 - 6 + 11 - 6 = 0$이므로 $(x-1)$이 인수.

조립제법으로 $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3)$

세 근은 1, 2, 3. $1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 4 + 9 = 14$.

Q11 방정식과 부등식 활용

방정식 $|x-3|=5$의 해는?

①) ① $x=8$

②) ② $x=-2$

③) ③ $x=8$ 또는 $x=-2$

④) ④ $x=2$ 또는 $x=-8$

🎯 **정답: ③ $x=8$ 또는 $x=-2$**

📖 절댓값의 정의에 따라 $|A|=k$ (단, $k\geq 0$)는 $A=k$ 또는 $A=-k$와 같다.

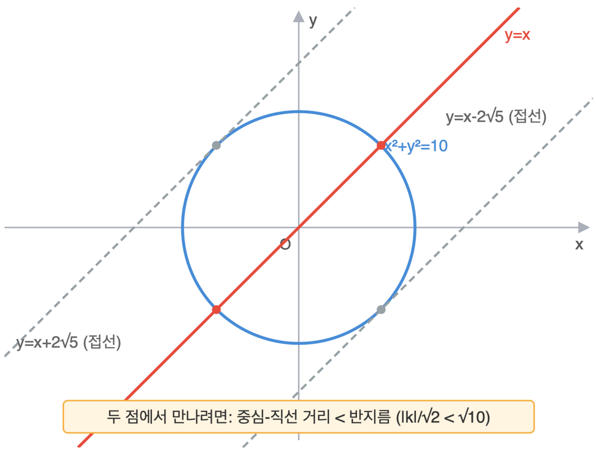
$x-3=5$ 또는 $x-3=-5$

$x=8$ 또는 $x=-2$.

수직선에서 해석하면 '점 3으로부터 거리가 5인 점'은 $3+5=8$과 $3-5=-2$이다.

Q12 도형의 방정식

원 $x^2+y^2=10$과 직선 $y=x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위는?



①) ① $-\sqrt{10}<k<\sqrt{10}$

②) ② $-2\sqrt{5}<k<2\sqrt{5}$

③) ③ $-\sqrt{5}<k<\sqrt{5}$

④) ④ $-2\sqrt{10}<k<2\sqrt{10}$

🎯 **정답: ② $-2\sqrt{5}<k<2\sqrt{5}$**

📖 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만날 조건은 '(원의 중심과 직선 사이 거리) < (반지름)'이다.

직선 $y=x+k$를 일반형으로 쓰면 $x-y+k=0$.

원의 중심 $(0,0)$에서 이 직선까지의 거리: $d=\dfrac{|0-0+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{|k|}{\sqrt{2}}$

반지름은 $r=\sqrt{10}$.

조건 $d<r$에서 $\dfrac{|k|}{\sqrt{2}}<\sqrt{10}$, 즉 $|k|<\sqrt{20}=2\sqrt{5}$.

따라서 $-2\sqrt{5}<k<2\sqrt{5}$.

💡 판별식을 이용해 원과 직선의 연립방정식에서 두 실근 조건으로 풀어도 같은 답이 나와.

Q13 집합과 명제

전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$의 부분집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$에 대하여 $(A \cap B)^c$의 원소의 개수는?

①) ① 4
②) ② 5
③) ③ 6
④) ④ 7

🎯 **정답:** ③ 6

📖 먼저 $A \cap B$를 구한다. A와 B에 공통으로 속하는 원소는 2와 4.
따라서 $A \cap B = \{2, 4\}$.
여집합은 전체집합에서 $A \cap B$의 원소를 뺀 집합이다.
$(A \cap B)^c = U - (A \cap B) = \{1, 3, 5, 6, 7, 8\}$
원소의 개수는 $8 - 2 = 6$개.

Q14 경우의 수

남학생 5명과 여학생 4명으로 이루어진 동아리에서 대표 3명을 뽑을 때, 남학생이 적어도 1명 포함되는 경우의 수는?

①) ① 60
②) ② 80
③) ③ 84
④) ④ 120

🎯 **정답:** ② 80

📖 '적어도 1명' 유형은 여사건을 이용하는 것이 편리하다.
(남학생이 적어도 1명) = (전체 경우) - (남학생이 0명인 경우)
- 전체 9명 중 3명을 뽑는 경우: ${}_9C_3 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84$
- 남학생이 0명, 즉 여학생만 3명 뽑는 경우: ${}_4C_3 = 4$
따라서 구하는 경우의 수는 $84 - 4 = 80$.
💡 '적어도'라는 표현이 나오면 여사건을 먼저 떠올리는 게 시간 단축 비결이야.

Q15 함수

함수 $f(x) = 2x - 3$, $g(x) = x^2 + 1$에 대하여 $(f \circ g)(2)$의 값을 구하시오.

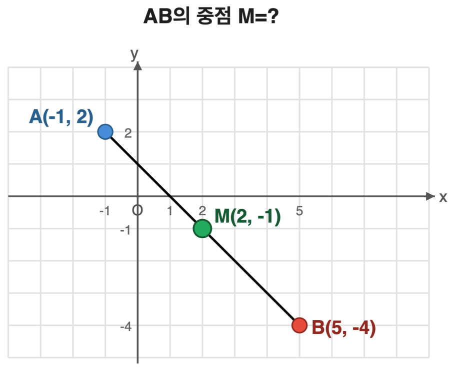
①) ① 5
②) ② 7
③) ③ 9
④) ④ 11

🎯 **정답:** ②

📖 1단계: $g(2) = 2^2 + 1 = 5$
2단계: $(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(5) = 2 \times 5 - 3 = 7$
따라서 답은 7이다.
💡 합성함수는 안쪽 함수부터 계산해야 해요. $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ 순서를 헷갈리지 마세요!

Q16 도형의 방정식

두 점 $A(-1, 2)$와 $B(5, -4)$를 잇는 선분 AB의 중점의 좌표를 구하시오.



①) ① $(2, -1)$
②) ② $(3, -1)$
③) ③ $(2, -2)$
④) ④ $(4, -1)$

🎯 **정답: ①**

📖 1단계: 두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2)의 중점은 $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$이다.
2단계: x좌표: $\frac{-1+5}{2} = \frac{4}{2} = 2$
3단계: y좌표: $\frac{2+(-4)}{2} = \frac{-2}{2} = -1$
따라서 중점은 $(2, -1)$이다.

💡 중점은 두 점의 좌표를 평균낸 값이에요. 내분점 공식 $m:n$에서 $m = n = 1$인 특수한 경우랍니다!

Q17 집합과 명제

전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$의 부분집합 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5\}$에 대하여 $A - B$를 구하시오.

①) ① $\{1, 2\}$
②) ② $\{3, 4\}$
③) ③ $\{5, 6\}$
④) ④ $\{1, 2, 5\}$

🎯 **정답: ①**

📖 1단계: $A - B$는 A의 원소 중 B에 속하지 않는 원소들의 집합이다.
2단계: $A = \{1, 2, 3, 4\}$에서 $B = \{3, 4, 5\}$의 원소인 $3, 4$를 제외한다.
3단계: $A - B = \{1, 2\}$
따라서 답은 $\{1, 2\}$이다.

💡 차집합 $A - B$는 $A \cap B^c$와 같아요. 벤다이어그램으로 그리면 A만의 영역이랍니다!

Q18 경우의 수

서로 다른 5개의 문자 a, b, c, d, e 중에서 3개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수를 구하시오.

①) ① 10

②) ② 20

③) ③ 60

④) ④ 120

🎯 **정답: ③**

📖 1단계: 서로 다른 n개에서 r개를 택하여 나열하는 순열의 수는 ${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$이다.

2단계: ${}_5P_3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{120}{2} = 60$

또는 ${}_5P_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$

따라서 답은 60이다.

💡 순열 ${}_nP_r$은 n부터 시작해 r개의 연속된 자연수를 곱한 값과 같아요!

Q19 함수

함수 $f(x) = 3x + a$의 역함수가 $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + 2$일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

①) ① -9

②) ② -6

③) ③ -3

④) ④ 6

🎯 **정답: ②**

📖 1단계: $y = 3x + a$에서 x에 대해 풀면 $x = \frac{y-a}{3} = \frac{1}{3}y - \frac{a}{3}$

2단계: x와 y를 바꾸면 역함수는 $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x - \frac{a}{3}$

3단계: 주어진 역함수 $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + 2$와 비교하면 $-\frac{a}{3} = 2$

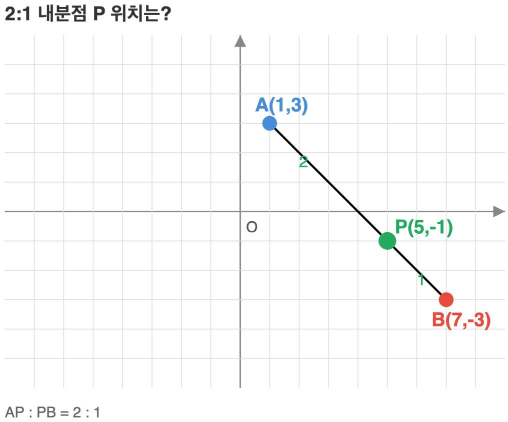
4단계: $a = -6$

따라서 답은 -6이다.

💡 일차함수 $y = mx + n$의 역함수는 $y = \frac{1}{m}x - \frac{n}{m}$이에요. 기울기는 역수가 되죠!

Q20 도형의 방정식

두 점 $A(1, 3)$과 $B(7, -3)$을 이은 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점 P의 좌표를 구하시오.



①) ① $(3, 1)$
②) ② $(4, 0)$
③) ③ $(5, -1)$
④) ④ $(6, -2)$

정답: ③

1단계: 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$를 $m:n$으로 내분하는 점은 $\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$이다.
2단계: $m=2, n=1, A(1,3), B(7,-3)$ 대입
3단계: x좌표: $\frac{2\times7+1\times1}{2+1}=\frac{15}{3}=5$
4단계: y좌표: $\frac{2\times(-3)+1\times3}{2+1}=\frac{-3}{3}=-1$
따라서 내분점은 $(5, -1)$이다.

내분점 공식에서 비율의 분자가 '반대편' 좌표에 곱해져요. A 가까이 있는 점이면 B의 비율이 커집니다!

Q21 다항식

$(x+2y-1)^2$을 전개한 식에서 xy의 계수를 구하시오.

①) ① 2
②) ② 4
③) ③ −2
④) ④ −4

정답: ②

1단계: $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$ 공식 활용
2단계: $a=x, b=2y, c=-1$ 대입
3단계: xy 항은 $2ab=2\times x\times2y=4xy$에서 나온다.
4단계: 따라서 xy의 계수는 4이다.

세 항의 제곱 공식은 모든 짝의 곱에 2를 곱해 더한 것과 같아요. 빠뜨리는 항이 없도록 주의하세요!

Q22 집합과 명제

명제 "$x > 2$이면 $x > 1$이다."의 대우는?

①) ① $x > 1$이면 $x > 2$이다.

②) ② $x \le 1$이면 $x \le 2$이다.

③) ③ $x \le 2$이면 $x \le 1$이다.

④) ④ $x \le 1$이면 $x > 2$이다.

🎯 **정답: ②**

📖 1단계: 명제 "$p \Rightarrow q$"의 대우는 "$\sim q \Rightarrow\ \sim p$"이다.
2단계: 원명제: p: $x > 2$, q: $x > 1$
3단계: 부정: $\sim p$: $x \le 2$, $\sim q$: $x \le 1$
4단계: 대우: $\sim q \Rightarrow\ \sim p$, 즉 "$x \le 1$이면 $x \le 2$이다."
따라서 답은 ②이다.

💡 부등호 $>$ 의 부정은 $\le$ 입니다. $\ge$ 가 아니라는 점에 주의하세요. 등호 포함 여부가 뒤바뀝니다!

Q23 종합 활용

다항식 $P(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지가 3, $x-2$로 나눈 나머지가 5일 때, $P(x)$를 $(x-1)(x-2)$로 나눈 나머지 $R(x)$를 구하시오.

①) ① $2x+1$

②) ② $x+2$

③) ③ $2x-1$

④) ④ $-x+4$

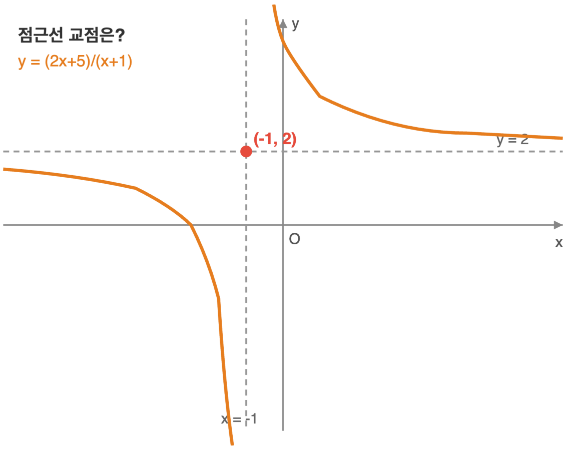
🎯 **정답: ①**

📖 1단계: $(x-1)(x-2)$로 나눈 나머지는 일차 이하이므로 $R(x) = ax+b$로 놓는다.
2단계: $P(x) = (x-1)(x-2)Q(x) + ax + b$
3단계: $P(1) = a + b = 3 \cdots$ ㉠
4단계: $P(2) = 2a + b = 5 \cdots$ ㉡
5단계: ㉡-㉠: $a = 2$, ㉠에 대입: $b = 1$
따라서 $R(x) = 2x + 1$이다.

💡 이차식으로 나눈 나머지는 일차 이하이고, n차식으로 나눈 나머지는 $(n-1)$차 이하예요!

Q24 함수

유리함수 $y = \frac{2x+5}{x+1}$의 그래프의 두 점근선의 교점의 좌표를 구하시오.



①) ① $(1, 2)$

②) ② $(-1, 2)$

③) ③ $(-1, -2)$

④) ④ $(1, -2)$

🎯 **정답: ②**

📖 1단계: 유리함수를 $y = \frac{k}{x-p} + q$ 꼴로 변형한다.

2단계: $\frac{2x+5}{x+1} = \frac{2(x+1)+3}{x+1} = \frac{3}{x+1} + 2$

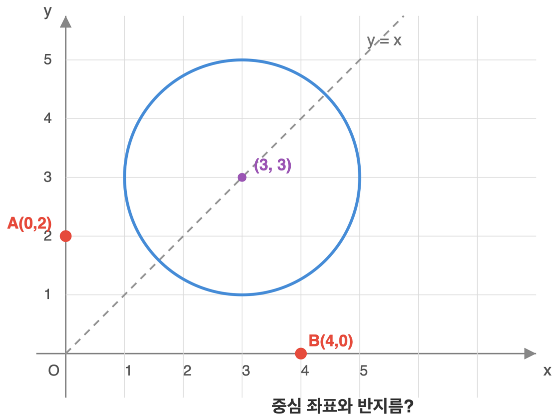
3단계: 따라서 $y = \frac{3}{x-(-1)} + 2$이고, 점근선은 $x = -1$, $y = 2$이다.

4단계: 두 점근선의 교점은 $(-1, 2)$이다.

💡 유리함수 $y = \frac{k}{x-p} + q$의 점근선 교점은 (p, q)이고, 이 점은 그래프의 대칭의 중심이기도 해요!

Q25 도형의 방정식

중심이 직선 $y = x$ 위에 있고 두 점 $A(0, 2)$, $B(4, 0)$을 지나는 원의 방정식을 구하시오.



①) ① $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 8$
②) ② $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 10$
③) ③ $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 5$
④) ④ $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 20$

🎯 **정답: ②**

📖 1단계: 중심이 직선 $y = x$ 위에 있으므로 중심은 (a, a)로 놓는다.
2단계: 원의 방정식: $(x-a)^2 + (y-a)^2 = r^2$
3단계: $A(0, 2)$ 대입: $a^2 + (2-a)^2 = r^2$, 즉 $2a^2 - 4a + 4 = r^2 \cdots$ ㉠
4단계: $B(4, 0)$ 대입: $(4-a)^2 + a^2 = r^2$, 즉 $2a^2 - 8a + 16 = r^2 \cdots$ ㉡
5단계: ㉠=㉡: $-4a + 4 = -8a + 16$, $4a = 12$, $a = 3$
6단계: $r^2 = 2(9) - 4(3) + 4 = 18 - 12 + 4 = 10$
따라서 원의 방정식은 $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 10$이다.
💡 원의 중심이 특정 직선 위에 있다는 조건은 미지수를 하나로 줄여줘요. 두 점을 지나는 조건과 합치면 미지수가 풀립니다!

Q26 종합 활용

방정식 $x^3 - 3x^2 + x + a = 0$이 중근과 다른 한 근을 가질 때, 양수 a의 값을 구하시오.

①) ① 1
②) ② $\frac{16}{27}$
③) ③ $\frac{9+4\sqrt{6}}{9}$
④) ④ $\frac{4}{9}$

🎯 **정답: ③**

📖 1단계: $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + a$가 중근 α와 다른 한 근 β를 가지려면 $f(\alpha) = 0$이고 $f'(\alpha) = 0$이어야 한다.
2단계: $f'(x) = 3x^2 - 6x + 1 = 0$에서 $\alpha = \frac{3 \pm \sqrt{6}}{3}$이다.
3단계: $3\alpha^2 - 6\alpha + 1 = 0$이므로 $\alpha^2 = 2\alpha - \frac{1}{3}$이고, $\alpha^3 = \alpha \cdot \alpha^2 = \frac{11\alpha}{3} - \frac{2}{3}$이다.
4단계: $f(\alpha) = 0$에서 $a = -\alpha^3 + 3\alpha^2 - \alpha = -\left(\frac{11\alpha}{3} - \frac{2}{3}\right) + 3\left(2\alpha - \frac{1}{3}\right) - \alpha = \frac{4\alpha - 1}{3}$이다.
5단계: $\alpha = \frac{3+\sqrt{6}}{3}$이면 $a = \frac{9+4\sqrt{6}}{9} \approx 2.09 > 0$이고, $\alpha = \frac{3-\sqrt{6}}{3}$이면 $a = \frac{9-4\sqrt{6}}{9} < 0$이다.
6단계: 따라서 양수 $a = \frac{9+4\sqrt{6}}{9}$이다. (중근을 만드는 두 a값은 $27a^2 - 54a - 5 = 0$의 두 근으로, 합 2, 곱 $-\frac{5}{27}$로 검산된다.)
💡 중근 조건은 함수와 도함수가 동시에 0이 되는 점이에요! $f(x) = 0$과 $f'(x) = 0$의 공통근을 찾으면 됩니다.

Q27 집합과 명제

실수 x, y에 대하여 $x^2 + y^2 \geq 2xy$가 항상 성립함을 이용하여, $x^2 + y^2 = 4$일 때 $x + y$의 최댓값을 구하시오.

①) ① 2

②) ② $2\sqrt{2}$

③) ③ 4

④) ④ $4\sqrt{2}$

🎯 **정답: ②**

📖 1단계: $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$이고, $x^2 + y^2 \geq 2xy$에서 $2xy \leq x^2 + y^2$

2단계: $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy \leq x^2 + y^2 + (x^2 + y^2) = 2(x^2 + y^2)$

3단계: $x^2 + y^2 = 4$ 대입: $(x+y)^2 \leq 2 \times 4 = 8$

4단계: $|x + y| \leq \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

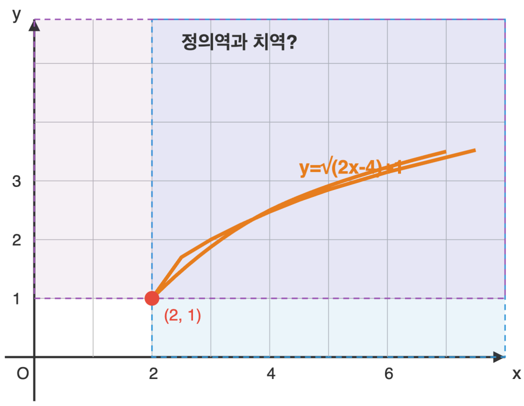
5단계: 등호는 $x = y$, 즉 $x = y = \sqrt{2}$ 일 때 성립

따라서 $x + y$의 최댓값은 $2\sqrt{2}$ 이다.

💡 산술-기하 평균 부등식 $\frac{x^2 + y^2}{2} \geq xy$의 변형이에요. 등호 조건을 항상 확인하는 습관을 들이세요!

Q28 함수

무리함수 $y = \sqrt{2x - 4} + 1$의 정의역과 치역을 모두 바르게 나타낸 것은?



①) ① 정의역: $x \geq 0$, 치역: $y \geq 1$

②) ② 정의역: $x \geq 2$, 치역: $y \geq 1$

③) ③ 정의역: $x \geq 2$, 치역: $y \geq 0$

④) ④ 정의역: $x \geq 4$, 치역: $y \geq 1$

🎯 **정답: ②**

📖 1단계: 무리함수 $y = \sqrt{2x - 4} + 1$의 정의역은 근호 안이 0 이상인 x의 범위이다.

2단계: $2x - 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$. 따라서 정의역은 $x \geq 2$

3단계: $\sqrt{2x - 4} \geq 0$이므로 $y = \sqrt{2x - 4} + 1 \geq 0 + 1 = 1$

4단계: 따라서 치역은 $y \geq 1$

결론: 정의역 $x \geq 2$, 치역 $y \geq 1$

💡 무리함수 $y = \sqrt{a(x - p)} + q$ $(a > 0)$의 시작점은 (p, q)이고, 그래프는 이 점에서 오른쪽 위로 뻗어요!

Q29 함수

무리함수 $f(x) = \sqrt{2x - 6} + 1$의 정의역과 치역으로 옳은 것은?

①) ① 정의역: $\{x \mid x \geq 3\}$, 치역: $\{y \mid y \geq 1\}$

②) ② 정의역: $\{x \mid x \geq 3\}$, 치역: $\{y \mid y \geq 0\}$

③) ③ 정의역: $\{x \mid x \geq 0\}$, 치역: $\{y \mid y \geq 1\}$

④) ④ 정의역: $\{x \mid x \geq -3\}$, 치역: $\{y \mid y \geq -1\}$

🎯 **정답: ①**

📖 단계 1) 무리함수에서는 근호 안의 식이 0 이상이어야 한다. $2x - 6 \geq 0$이므로 $x \geq 3$. 따라서 정의역은 $\{x \mid x \geq 3\}$.
단계 2) $\sqrt{2x - 6} \geq 0$이므로 $f(x) = \sqrt{2x - 6} + 1 \geq 1$. 따라서 치역은 $\{y \mid y \geq 1\}$.

💡 무리함수 $y = \sqrt{ax + b} + c$의 그래프는 $y = \sqrt{ax}$ 를 평행이동한 모양으로, 정의역의 시작점이 곧 그래프의 끝점이 됩니다.

Q30 다항식

다항식 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 8$이 $(x - 2)$로 나누어떨어지고, $(x + 1)$로 나눈 나머지가 6일 때, ab의 값은?

①) ① -6

②) ② 0

③) ③ 4

④) ④ 6

🎯 **정답: ④**

📖 단계 1) 인수정리/나머지정리: $f(2) = 0,\ f(-1) = 6$.
단계 2) $f(2) = 8 + 4a + 2b + 8 = 0 \Rightarrow 2a + b = -8$ ... (가)
단계 3) $f(-1) = -1 + a - b + 8 = 6 \Rightarrow a - b = -1$ ... (나)
단계 4) (가)+(나): $3a = -9$이므로 $a = -3$, (나)에서 $b = -2$.
단계 5) $ab = (-3) \times (-2) = 6$.

💡 인수정리는 18세기 베주(Bezout)가 정리한 형태로 알려져 있으며, 다항식의 인수분해를 빠르게 추측할 수 있는 강력한 도구입니다.

Q31 복소수와 이차방정식

복소수 $z = 3 + 2i$일 때, $z\bar{z}$의 값은? (단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수)

①) ① 5

②) ② 9

③) ③ 13

④) ④ $5 + 6i$

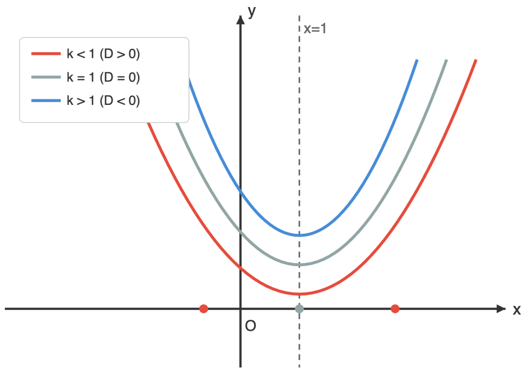
🎯 **정답: ③**

📖 단계 1) $z = 3 + 2i$의 켤레복소수는 $\bar{z} = 3 - 2i$.
단계 2) $zz = (3 + 2i)(3 - 2i) = 3^2 - (2i)^2 = 9 - (-4) = 13$.
단계 3) 일반적으로 $z = a + bi$이면 $z\bar{z} = a^2 + b^2$이며, 이는 복소수 z의 절댓값의 제곱과 같다.

💡 $z\bar{z}$는 항상 실수가 되는데, 이 성질은 복소수의 분모를 실수화할 때 핵심적으로 사용됩니다.

Q32 이차함수와 이차부등식

이차함수 $y = x^2 - 2x + k$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위는?



판별식 D > 0 이 되는 k의 범위는?

①) ① $k < 1$
②) ② $k > 1$
③) ③ $k \le 1$
④) ④ $-1 < k < 1$

정답: ①

단계 1) 이차함수의 그래프와 x축의 교점 개수는 이차방정식 $x^2 - 2x + k = 0$의 판별식 D의 부호로 결정된다.
단계 2) 서로 다른 두 점에서 만나려면 $D > 0$.
단계 3) $\frac{D}{4} = (-1)^2 - 1 \cdot k = 1 - k > 0$.
단계 4) 따라서 $k < 1$.

이차함수 $y = ax^2 + bx + c$의 그래프 모양과 x축 교점 수는 $D = b^2 - 4ac$ 하나로 모두 판별할 수 있어, 작은 식 하나가 함수 전체의 모양을 좌우합니다.

Q33 방정식과 부등식 활용

부등식 $|x - 1| + |x - 4| \le 5$의 해를 구하시오.

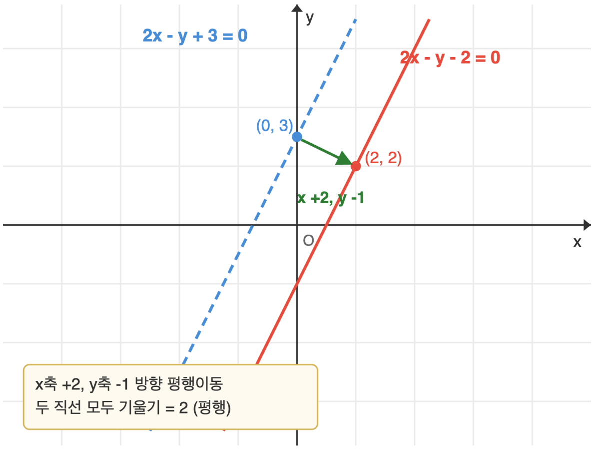
정답: $0 \le x \le 5$

단계 1) 절댓값 안의 식이 0이 되는 $x = 1, x = 4$를 기준으로 세 구간으로 나눈다.
단계 2) (i) $x < 1$일 때: $-(x - 1) - (x - 4) = -2x + 5 \le 5 \Rightarrow x \ge 0$. 조건과 합쳐 $0 \le x < 1$.
단계 3) (ii) $1 \le x \le 4$일 때: $(x - 1) - (x - 4) = 3 \le 5$ (항상 성립). 따라서 $1 \le x \le 4$.
단계 4) (iii) $x > 4$일 때: $(x - 1) + (x - 4) = 2x - 5 \le 5 \Rightarrow x \le 5$. 조건과 합쳐 $4 < x \le 5$.
단계 5) 세 구간을 합치면 $0 \le x \le 5$.

$|x - a| + |x - b|$는 수직선 위에서 점 x가 두 점 a, b로부터 떨어진 거리의 합을 의미하며, 항상 $|a - b|$ 이상이라는 기하적 의미를 가집니다.

Q34 도형의 방정식

직선 $2x-y+3=0$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 직선의 방정식은?



①) ① $2x-y-2=0$

②) ② $2x-y-1=0$

③) ③ $2x-y+7=0$

④) ④ $2x-y-4=0$

🎯 **정답: ①**

📖 단계 1) x축으로 a, y축으로 b만큼 평행이동: $x\to x-a,\ y\to y-b.$

단계 2) 여기서 $a=2,\ b=-1$이므로 $x\to x-2,\ y\to y-(-1)=y+1.$

단계 3) 원 식에 대입: $2(x-2)-(y+1)+3=0.$

단계 4) 정리하면 $2x-4-y-1+3=0\Rightarrow 2x-y-2=0.$

💡 평행이동에서는 그래프의 모양과 기울기가 그대로 유지되어, 두 직선은 항상 서로 평행한 관계를 가집니다.

Q35 집합과 명제

명제 "$x^2=4$이면 $x=2$이다."에 대한 설명으로 옳은 것은?

①) ① 원명제는 참이다.

②) ② 역 "$x=2$이면 $x^2=4$이다"는 참이다.

③) ③ 역은 거짓이고 반례는 $x=-2$이다.

④) ④ 대우는 "$x=2$이면 $x^2=4$이다"이다.

🎯 **정답: ②**

📖 단계 1) 원명제 "$x^2=4\Rightarrow x=2$"는 거짓이다. 반례: $x=-2$이면 $x^2=4$이지만 $x\neq 2.$

단계 2) 역은 가정과 결론을 바꾼 명제로 "$x=2\Rightarrow x^2=4$". $x=2$이면 $x^2=4$가 성립하므로 참이다.

단계 3) 대우는 "$x\neq 2\Rightarrow x^2\neq 4$"이므로 ④는 옳지 않다.

💡 원명제와 그 대우의 진리값은 항상 같지만, 원명제와 역의 진리값은 같을 수도 다를 수도 있습니다.

Q36 함수

함수 $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x - 3$일 때, $(g \circ f)^{-1}(5)$의 값은?

①) ① $\frac{5}{2}$

②) ② 3

③) ③ $\frac{7}{2}$

④) ④ 4

🎯 **정답: ③**

📖 단계 1) 합성함수 정의: $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 1) = (2x + 1) - 3 = 2x - 2$.
단계 2) $(g \circ f)^{-1}(5)$는 $(g \circ f)(x) = 5$의 해 x를 구하는 것.
단계 3) $2x - 2 = 5 \Rightarrow 2x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{2}$.
단계 4) 따라서 $(g \circ f)^{-1}(5) = \frac{7}{2}$.

💡 $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$이라는 공식도 있으며, 합성함수의 역함수는 양말 신고 신발 신은 후 다시 벗을 때 신발부터 벗는 순서와 같습니다.

Q37 경우의 수

문자 a, a, a, b, b, c 를 일렬로 나열하는 방법의 수는?

①) ① 20

②) ② 40

③) ③ 60

④) ④ 120

🎯 **정답: ③**

📖 단계 1) 같은 것이 있는 순열의 공식: 전체 n개 중 같은 것이 각각 $p, q, r, \ldots$개 있을 때, 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{n!}{p!\,q!\,r!\,\cdots}$.
단계 2) 전체 6개, 같은 a가 3개, 같은 b가 2개, c가 1개.
단계 3) $\frac{6!}{3!\,2!\,1!} = \frac{720}{6 \times 2 \times 1} = \frac{720}{12} = 60$.

💡 "MISSISSIPPI"라는 단어를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $\frac{11!}{4!\,4!\,2!} = 34650$가지나 됩니다.

Q38 경우의 수

5명의 학생을 원형 식탁에 둘러앉히는 방법의 수는? (단, 회전하여 같은 배열은 한 가지로 본다.)

①) ① 24

②) ② 60

③) ③ 120

④) ④ 720

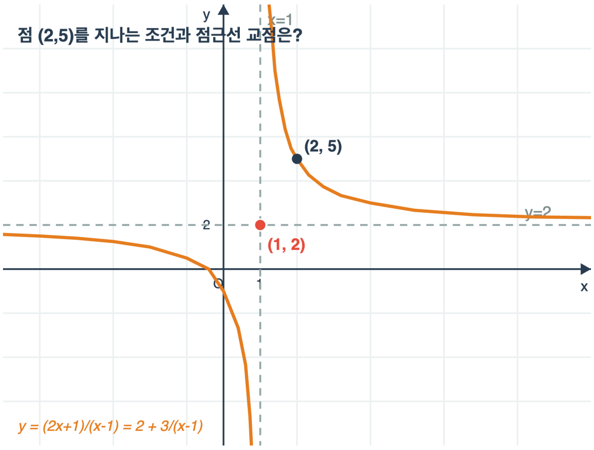
🎯 **정답: ①**

📖 단계 1) 원순열: 한 사람의 위치를 고정하면 회전 중복이 사라진다.
단계 2) 원순열의 수 공식: $(n - 1)!$.
단계 3) $n = 5$이므로 $(5 - 1)! = 4! = 24$.
단계 4) 일렬 순열 $5! = 120$을 회전 가짓수 5로 나눈 것과 같다: $\frac{120}{5} = 24$.

💡 원순열은 회전을 같은 것으로 보지만 거울 대칭(뒤집기)도 같다고 보면 염주 순열이 되어 $\frac{(n-1)!}{2}$가 됩니다.

Q39 함수

유리함수 $f(x) = \dfrac{2x+a}{x-1}$의 그래프가 점 $(2,5)$를 지날 때, 이 함수의 두 점근선의 교점의 좌표를 구하시오.



🎯 **정답:** $(1,2)$

📖 단계 1) $f(2)=5$ 조건에서 $\frac{2\cdot 2+a}{2-1} = \frac{4+a}{1} = 4+a=5 \Rightarrow a=1$.

단계 2) $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$을 $\frac{k}{x-p}+q$ 꼴로 변형: $f(x) = \frac{2(x-1)+3}{x-1} = 2+\frac{3}{x-1}$.

단계 3) 두 점근선은 $x=1$ (수직)과 $y=2$ (수평).

단계 4) 점근선의 교점은 $(1,2)$.

💡 유리함수 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$의 그래프는 점근선의 교점을 중심으로 점대칭이며, 이 점이 곧 그래프의 "중심"이 됩니다.

Q40 방정식과 부등식 활용

연립방정식 $\begin{cases} y = x+1 \\ x^2+y^2=13 \end{cases}$ 의 해 중에서 x좌표의 합은?

①) ① -3

②) ② -1

③) ③ 1

④) ④ 2

🎯 **정답:** ②

📖 단계 1) 첫째 식 $y=x+1$을 둘째 식에 대입.

단계 2) $x^2+(x+1)^2=13 \Rightarrow x^2+x^2+2x+1=13 \Rightarrow 2x^2+2x-12=0$.

단계 3) 양변을 2로 나누면 $x^2+x-6=0$, 인수분해 $(x+3)(x-2)=0$.

단계 4) $x=-3$ 또는 $x=2$. 두 해의 합은 $-3+2=-1$.

💡 기하적으로 이 연립방정식은 직선 $y=x+1$과 원 $x^2+y^2=13$의 교점을 구하는 것과 같으며, 두 교점의 x좌표의 합은 이차방정식의 근과 계수 관계로 바로 알 수 있습니다.

📝 고1 수학 일반

총 40문제 · 문제와 정답·풀이 포함

Q41 종합 활용

둘레의 길이가 40cm인 직사각형의 넓이의 최댓값을 구하시오. (단, 가로와 세로의 길이는 양수이다.)

①) ① 80 cm²
②) ② 100 cm²
③) ③ 120 cm²
④) ④ 400 cm²

🎯 **정답: ②**

📖 단계 1) 가로 길이를 x cm라 하면 둘레가 40이므로 세로는 $\frac{40-2x}{2} = 20 - x$ cm. 단, $0 < x < 20$.
단계 2) 넓이 $S(x) = x(20 - x) = -x^2 + 20x$.
단계 3) 완전제곱: $S(x) = -(x^2 - 20x) = -(x - 10)^2 + 100$.
단계 4) $0 < x < 20$ 범위에 꼭짓점 $x = 10$이 포함되므로, $x = 10$일 때 최댓값 $S(10) = 100$.
단계 5) 즉, 가로 = 세로 = 10cm인 정사각형일 때 넓이가 최대 100 cm²이다.

💡 둘레가 일정한 도형 중 넓이가 가장 큰 것은 원이지만, 변의 개수가 정해진 사각형 중에서는 정사각형이 항상 가장 넓다는 사실은 등주(等周) 부등식의 한 예입니다.

Q42 다항식

다항식 $(x+2)^3 - (x-2)^3$을 전개하여 정리할 때, x^2의 계수를 구하시오.

①) ① 8
②) ② 10
③) ③ 12
④) ④ 14

🎯 **정답: ③ 12**

📖 [1단계] 곱셈 공식 $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$을 각각 적용한다.
$(x+2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$
$(x-2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$
[2단계] 두 식을 뺀다.
$(x+2)^3 - (x-2)^3 = 12x^2 + 16$
[3단계] 따라서 x^2의 계수는 12이다.

💡 $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ 공식을 이용하면 $4(3x^2 + 4)$로도 같은 결과를 얻을 수 있어요.

Q43 복소수와 이차방정식

복소수 $z = 3 + 2i$에 대하여 $z \cdot \overline{z}$의 값을 구하시오. (단, $i = \sqrt{-1}$)

①) ① 5

②) ② 9

③) ③ 13

④) ④ 17

정답: ③ 13

[1단계] $z = 3 + 2i$의 켤레복소수는 $\overline{z} = 3 - 2i$이다.

[2단계] $z \cdot \overline{z} = (3 + 2i)(3 - 2i)$를 합차공식으로 전개하면 $3^2 - (2i)^2 = 9 - 4i^2$.

[3단계] $i^2 = -1$이므로 $9 - 4(-1) = 9 + 4 = 13$.

💡 일반적으로 $z = a + bi$이면 $z\overline{z} = a^2 + b^2$로 항상 0 이상인 실수가 됩니다. 이 값이 복소수의 절댓값 제곱이에요.

Q44 함수

함수 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & (x \geq 0) \\ -x + 3 & (x < 0) \end{cases}$ 에 대하여 $f(-2) + f(3)$의 값을 구하시오.

①) ① 13

②) ② 14

③) ③ 15

④) ④ 16

정답: ③ 15

[1단계] $-2 < 0$이므로 아래 식을 적용: $f(-2) = -(-2) + 3 = 5$.

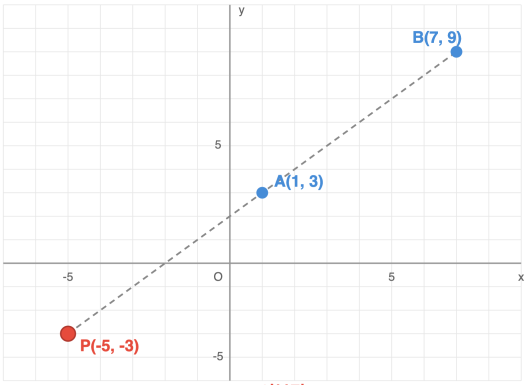
[2단계] $3 \geq 0$이므로 위 식을 적용: $f(3) = 3^2 + 1 = 10$.

[3단계] 따라서 $f(-2) + f(3) = 5 + 10 = 15$.

💡 구간별로 정의된 함수를 조각함수(piecewise function)라 해요. 세금 계산이나 배송비처럼 실생활에도 자주 등장합니다.

Q45 도형의 방정식

좌표평면 위의 두 점 $A(1, 3)$, $B(7, 9)$에 대하여 선분 AB를 $1:2$로 외분하는 점 P의 좌표를 구하시오.



1 : 2 외분점

①) ① $(-5, -3)$

②) ② $(-3, -1)$

③) ③ $(3, 5)$

④) ④ $(5, 7)$

정답: ① $(-5, -3)$

[1단계] 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$를 $m:n$으로 외분하는 점의 좌표는 $\left(\dfrac{mx_2 - nx_1}{m-n}, \dfrac{my_2 - ny_1}{m-n}\right)$이다.

[2단계] $m = 1, n = 2$, $A(1, 3)$, $B(7, 9)$ 대입.

$P_x = \dfrac{1 \cdot 7 - 2 \cdot 1}{1-2} = \dfrac{5}{-1} = -5$

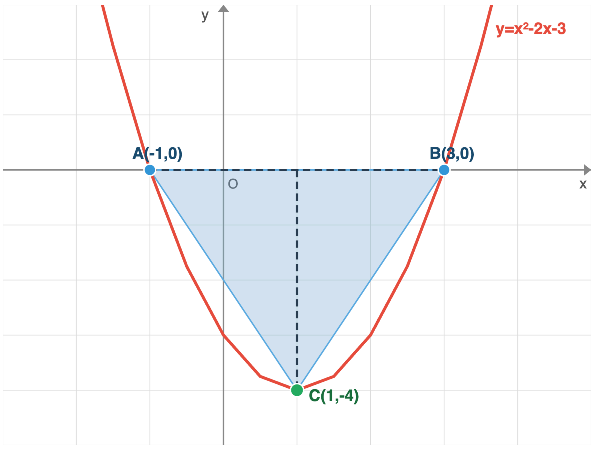
$P_y = \dfrac{1 \cdot 9 - 2 \cdot 3}{1-2} = \dfrac{3}{-1} = -3$

[3단계] 따라서 $P(-5, -3)$.

외분점은 선분의 '바깥쪽'에 있어요. $1:2$ 외분은 점 A가 P와 B 사이에 있게 된다는 뜻입니다.

Q46 이차함수와 이차부등식

이차함수 $y=x^2-2x-3$의 그래프와 x축이 만나는 두 점을 A, B라 하고, 이 그래프의 꼭짓점을 C라 할 때, 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오.



①) ① 4
②) ② 6
③) ③ 8
④) ④ 10

정답: ③ 8

[1단계] x축과의 교점: $x^2-2x-3=0 \Rightarrow (x-3)(x+1)=0$ 이므로 $A(-1,0), B(3,0)$.
[2단계] 꼭짓점: $y=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$ 이므로 $C(1,-4)$.
[3단계] 밑변 $\overline{AB}=3-(-1)=4$, 높이는 C의 y좌표의 절댓값 $|-4|=4$.
[4단계] 넓이 $=\frac{1}{2}\times 4\times 4=8$.

이차함수 $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$의 그래프와 x축이 이루는 삼각형의 넓이는 $\frac{|a|(\beta-\alpha)^3}{8}$로 일반화할 수 있어요.

Q47 복소수와 이차방정식

이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근을 ω라 할 때, $\omega^{100}+\omega^{101}+\omega^{102}$의 값을 구하시오.

①) ① -1
②) ② 0
③) ③ 1
④) ④ ω

정답: ② 0

[1단계] ω가 $x^2+x+1=0$의 근이므로 $\omega^2+\omega+1=0$, 즉 $1+\omega+\omega^2=0$이다.
[2단계] 또한 $(x-1)(x^2+x+1)=x^3-1$이므로 $\omega^3=1$이다.
[3단계] 공통인수 ω^{100}을 묶어내면
$\omega^{100}+\omega^{101}+\omega^{102}=\omega^{100}(1+\omega+\omega^2)$.
[4단계] $(1+\omega+\omega^2)=0$이므로 전체 식의 값은 0이다.

ω는 '1의 원시 3제곱근'이라 불려요. 복소평면에서 120° 회전을 나타내고, 3회 회전하면 제자리로 돌아오는 성질 덕분에 $\omega^3=1$이 성립합니다.

Q48 방정식과 부등식 활용

방정식 $|x-3| = 2x$의 실근을 구하시오.

①) ① $x = -3$

②) ② $x = 1$

③) ③ $x = -3$ 또는 $x = 1$

④) ④ 해가 없다

🎯 **정답: ② $x = 1$**

📖 [1단계] 좌변은 절댓값이므로 0 이상이다. 따라서 우변도 $2x \geq 0$, 즉 $x \geq 0$이어야 한다.
[2단계] $x \geq 3$일 때: $x - 3 = 2x \Rightarrow x = -3$. 조건 $x \geq 3$에 맞지 않으므로 제외.
[3단계] $0 \leq x < 3$일 때: $-(x-3) = 2x \Rightarrow 3 - x = 2x \Rightarrow x = 1$. 조건 $0 \leq x < 3$ 만족.
[4단계] 따라서 해는 $x = 1$이다.

💡 절댓값 방정식은 반드시 해가 조건 범위에 들어있는지 '확인'해야 해요. $x = -3$처럼 식은 만족해도 범위에서 벗어나면 버려야 합니다.

Q49 함수

두 함수 $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = 2x - 3$에 대하여 $(g \circ f)(2)$의 값을 구하시오.

①) ① 5

②) ② 6

③) ③ 7

④) ④ 8

🎯 **정답: ③ 7**

📖 [1단계] 합성함수 정의: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.
[2단계] 안쪽 함숫값 계산: $f(2) = 2^2 + 1 = 5$.
[3단계] 바깥쪽 함숫값 계산: $g(5) = 2 \cdot 5 - 3 = 7$.
[4단계] 따라서 $(g \circ f)(2) = 7$.

💡 합성 순서가 중요해요. $(g \circ f)(2) = 7$이지만 $(f \circ g)(2) = f(1) = 2$로 값이 다릅니다.

Q50 경우의 수

한 원 위에 서로 다른 8개의 점이 있다. 이 점들 중에서 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 개수를 구하시오.

①) ① 21

②) ② 28

③) ③ 42

④) ④ 56

🎯 **정답: ④ 56**

📖 [1단계] 원 위의 점들은 어떤 세 점을 택해도 한 직선 위에 있지 않으므로, 세 점을 택하기만 하면 삼각형이 만들어진다.
[2단계] 따라서 8개 중 3개를 택하는 조합의 수와 같다.
[3단계] ${}_8C_3 = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = \frac{336}{6} = 56$.

💡 만약 직선 위의 점이라면 세 점이 일직선이 되어 삼각형이 만들어지지 않는 경우를 빼줘야 해요. 원 위의 점이라는 조건이 조합만으로 풀게 해주는 핵심입니다.

Q51 집합과 명제

실수 x에 대한 두 조건 $p: |x| < 2$, $q: x^2 < a$ 에 대하여, p가 q이기 위한 필요충분조건이 되도록 하는 실수 a의 값을 구하시오.

①) ① 2

②) ② $\sqrt{2}$

③) ③ 4

④) ④ $2\sqrt{2}$

🎯 **정답: ③ 4**

📖 [1단계] p의 진리집합 $P: |x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2$.

[2단계] q의 진리집합 $Q: x^2 < a$에서 의미가 있으려면 $a > 0$이어야 하며, $-\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$.

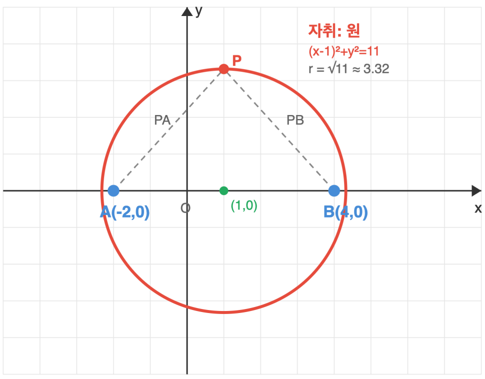
[3단계] p가 q이기 위한 필요충분조건이려면 $P = Q$ 이어야 한다.

[4단계] $\sqrt{a} = 2 \Rightarrow a = 4$.

💡 필요충분조건은 두 조건의 진리집합이 '완전히 같을 때' 성립합니다. 한쪽만 포함되면 필요조건 또는 충분조건 중 하나만 됩니다.

Q52 종합 활용

좌표평면 위의 두 점 $A(-2, 0)$, $B(4, 0)$이 있다. 점 $P(x, y)$가 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = 40$을 만족할 때, 점 P의 자취의 방정식을 구하시오.



①) ① $(x-1)^2 + y^2 = 11$

②) ② $(x-1)^2 + y^2 = 20$

③) ③ $(x+1)^2 + y^2 = 11$

④) ④ $x^2 + y^2 = 40$

🎯 **정답: ①** $(x-1)^2 + y^2 = 11$

📖 [1단계] 거리 제곱을 좌표로 표현한다.

$\overline{PA}^2 = (x+2)^2 + y^2$

$\overline{PB}^2 = (x-4)^2 + y^2$

[2단계] 두 식을 더하면

$(x+2)^2 + (x-4)^2 + 2y^2 = 40$.

[3단계] 전개: $(x^2 + 4x + 4) + (x^2 - 8x + 16) + 2y^2 = 40$

$\Rightarrow 2x^2 - 4x + 20 + 2y^2 = 40$.

[4단계] 양변을 2로 나누고 이항: $x^2 - 2x + y^2 = 10$.

[5단계] 완전제곱 꼴로: $(x-1)^2 + y^2 = 11$. 중심 $(1, 0)$, 반지름 $\sqrt{11}$ 인 원이다.

💡 두 점에서의 거리 제곱의 합이 일정한 점의 자취는 항상 '두 점의 중점'을 중심으로 하는 원이 됩니다. 이 문제에서 중심 $(1, 0)$은 A, B의 중점이에요.

Q53 함수

일대일대응인 함수 f에 대하여 모든 실수 x에서 $f(2x+1)=4x-3$이 성립할 때, $f^{-1}(5)$의 값을 구하시오.

①) ① 3

②) ② 4

③) ③ 5

④) ④ 6

정답: ③ 5

[1단계] $f(2x+1)=4x-3$에서 f의 정의식을 찾기 위해 $t=2x+1$로 치환하면 $x=\frac{t-1}{2}$.

[2단계] 이를 대입: $f(t)=4\cdot\frac{t-1}{2}-3=2(t-1)-3=2t-5$.

[3단계] $f^{-1}(5)=k$ 라 하면 $f(k)=5$, 즉 $2k-5=5$.

[4단계] $2k=10 \Rightarrow k=5$. 따라서 $f^{-1}(5)=5$.

역함수값 $f^{-1}(a)=b$는 $f(b)=a$와 같은 말이에요. 정의식을 몰라도 f의 함숫값 하나로 바로 찾을 수 있습니다.

Q54 종합 활용

x에 대한 부등식 $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)\le 24$를 만족하는 정수 x의 개수를 구하시오.

①) ① 4

②) ② 5

③) ③ 6

④) ④ 7

정답: ③ 6

[1단계] 양 끝끼리 묶는다: $(x-1)(x-4)=x^2-5x+4$, $(x-2)(x-3)=x^2-5x+6$.

[2단계] $t=x^2-5x$로 치환: 부등식은 $(t+4)(t+6)\le 24$.

[3단계] 전개: $t^2+10t+24\le 24 \Rightarrow t^2+10t\le 0 \Rightarrow t(t+10)\le 0$, 즉 $-10\le t\le 0$.

[4단계] $x^2-5x\le 0 \Rightarrow x(x-5)\le 0 \Rightarrow 0\le x\le 5$.

$x^2-5x\ge -10 \Rightarrow x^2-5x+10\ge 0$. 판별식 $=25-40=-15<0$이므로 모든 실수 x에서 성립.

[5단계] 따라서 $0\le x\le 5$. 정수는 $0,1,2,3,4,5$의 6개.

$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24$! 문제의 우변 24가 바로 이 '연속 네 수의 곱'이에요. 치환 트릭이 자주 나오는 출제자의 단골 소재입니다.

Q55 방정식과 부등식 활용

연립방정식 $\begin{cases} x+y=5 \\ x^3+y^3=35 \end{cases}$ 를 만족하는 실수 x, y에 대하여 xy의 값을 구하시오.

①) ① 4

②) ② 6

③) ③ 8

④) ④ 10

정답: ② 6

[1단계] 세제곱 합 공식 $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$를 이용한다.

[2단계] $x+y=5$를 대입: $x^3+y^3=5^3-3xy\cdot 5=125-15xy$.

[3단계] 조건 $x^3+y^3=35$와 같다고 놓는다: $125-15xy=35$.

[4단계] $15xy=90 \Rightarrow xy=6$.

[참고] $x+y=5, xy=6$이면 x, y는 $t^2-5t+6=0$의 두 근, 즉 $2, 3$이므로 실근이 존재함을 확인할 수 있다.

대칭식 x^3+y^3은 기본대칭식 $x+y$, xy만으로 모두 표현됩니다. 이 두 값만 알면 x, y의 개별값도 이차방정식으로 복구할 수 있어요.

Q56 다항식

다항식 $P(x) = x^3 + ax^2 - 5x + 6$이 $x - 1$을 인수로 가질 때, 상수 a의 값은?

①) ① -2

②) ② -1

③) ③ 1

④) ④ 2

🎯 **정답: ①**

📖 인수정리에 의해 $x - 1$이 $P(x)$의 인수이면 $P(1) = 0$이다. 대입하면 $P(1) = 1 + a - 5 + 6 = a + 2$. 따라서 $a + 2 = 0$이므로 $a = -2$이다.

💡 인수정리는 데카르트가 17세기에 제시한 방법을 일반화한 것으로, 다항식의 실근 탐색에 유용합니다.

Q57 복소수와 이차방정식

허수단위 i에 대하여 $i + i^2 + i^3 + \cdots + i^{50}$의 값은?

①) ① $-1 + i$

②) ② $1 + i$

③) ③ $-1 - i$

④) ④ $1 - i$

🎯 **정답: ①**

📖 i의 거듭제곱은 $i, -1, -i, 1$이 반복되므로 연속한 네 항의 합은 0이다. $50 = 4 \times 12 + 2$이므로 앞의 48개 항의 합은 0이고, 남은 두 항은 $i^{49} + i^{50} = i + (-1) = -1 + i$이다.

💡 i의 거듭제곱이 주기 4로 순환한다는 사실은 오일러 공식 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$로 우아하게 설명됩니다.

Q58 경우의 수

숫자 $1, 2, 3, 4, 5$ 중에서 서로 다른 3개를 뽑아 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는?

①) ① 30

②) ② 40

③) ③ 60

④) ④ 120

🎯 **정답: ③**

📖 서로 다른 5개에서 3개를 뽑아 일렬로 나열하는 순열이다. ${}_5P_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$이다.

💡 순열(permutation)이란 단어는 라틴어 'permutare'(완전히 바꾸다)에서 왔어요.

Q59 함수

집합 $X = \{1, 2, 3\}$에서 집합 $Y = \{a, b, c, d, e\}$로의 일대일함수의 개수는?

①) ① 10

②) ② 20

③) ③ 60

④) ④ 125

🎯 **정답: ③**

📖 일대일함수는 정의역의 서로 다른 원소를 치역의 서로 다른 원소에 대응시키는 함수이다. X의 세 원소 각각을 Y의 서로 다른 원소에 대응시켜야 하므로 그 개수는 ${}_5P_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$이다.

💡 일대일대응이 성립하는 두 집합은 원소의 개수가 같다는 개념은 칸토어가 무한집합의 '크기'를 비교하는 데 사용했습니다.

Q60 집합과 명제

전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 $n(U) = 30,\ n(A) = 15,\ n(B) = 12,\ n(A \cap B) = 5$일 때, $n((A \cup B)^c)$의 값은?

①) ① 6

②) ② 8

③) ③ 10

④) ④ 12

🎯 **정답: ②**

📖 포함배제 원리에 의해 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 15 + 12 - 5 = 22$이다. 여집합은 전체에서 $A \cup B$를 빼면 되므로 $n((A \cup B)^c) = n(U) - n(A \cup B) = 30 - 22 = 8$이다.

💡 포함배제 원리는 1854년 영국 수학자 드 무아브르 이후 여러 수학자가 정식화한 결과로, 조합론의 근본 도구입니다.

Q61 다항식

세 실수 a, b, c가 $a + b + c = 5,\ ab + bc + ca = 6,\ abc = -2$를 만족할 때, $a^2 + b^2 + c^2$의 값은?

①) ① 11

②) ② 13

③) ③ 17

④) ④ 21

🎯 **정답: ②**

📖 곱셈공식 $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$를 이용한다. 대입하면 $5^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2 \times 6$이므로 $a^2 + b^2 + c^2 = 25 - 12 = 13$이다. abc 값은 이 문제에서 사용하지 않는다.

💡 세 수의 기본 대칭식 $a + b + c,\ ab + bc + ca,\ abc$만 있으면 세 수에 관한 대칭 다항식을 모두 나타낼 수 있어요.

Q62 경우의 수

문자 m, a, t, h, h, h의 여섯 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는?

①) ① 60
②) ② 120
③) ③ 360
④) ④ 720

🎯 **정답: ②**

📖 같은 것이 있는 순열의 공식을 적용한다. h가 세 번 반복되므로 전체 배열 수는 $\frac{6!}{3!} = \frac{720}{6} = 120$이다.

💡 'MATHEMATICS'라는 단어를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $\frac{11!}{2! \cdot 2! \cdot 2!}$로, 약 499만 가지나 된답니다.

Q63 함수

두 일차함수 $f(x) = 2x - 3$, $g(x) = ax + b$에 대하여 모든 실수 x에 대해 $(f \circ g)(x) = 4x + 1$이 성립한다. 상수 a, b의 합 $a + b$의 값은?

①) ① 2
②) ② 3
③) ③ 4
④) ④ 5

🎯 **정답: ③**

📖 $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2(ax + b) - 3 = 2ax + 2b - 3$이다. 이것이 $4x + 1$과 항등식으로 같으므로 계수를 비교하면 $2a = 4$, $2b - 3 = 1$이다. 따라서 $a = 2$, $b = 2$이므로 $a + b = 4$이다.

💡 일차함수의 합성은 또 다른 일차함수이며, 선형변환의 합성이 행렬곱으로 표현된다는 선형대수의 기초가 됩니다.

Q64 복소수와 이차방정식

이차방정식 $x^2 - 6x + k = 0$이 서로 다른 두 양의 실근을 가지도록 하는 정수 k의 개수는?

①) ① 6
②) ② 7
③) ③ 8
④) ④ 9

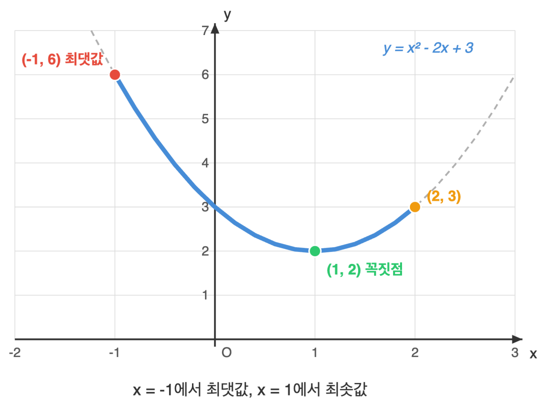
🎯 **정답: ③**

📖 서로 다른 두 양의 실근 조건은 세 가지이다. (1) 판별식 $D = 36 - 4k > 0 \Rightarrow k < 9$. (2) 두 근의 합 $= 6 > 0$ (항상 성립). (3) 두 근의 곱 $= k > 0$. 세 조건을 모두 만족하는 범위는 $0 < k < 9$이므로 정수 k는 $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$의 8개이다.

💡 근의 부호 조건은 비에타의 공식(근과 계수의 관계)에서 자연스럽게 도출되며, 수학자 프랑수아 비에트의 이름에서 유래되었습니다.

Q65 이차함수와 이차부등식

이차함수 $f(x) = x^2 - 2x + 3$의 정의역이 $-1 \le x \le 2$일 때, 이 함수의 최댓값과 최솟값의 합은?



x = -1에서 최댓값, x = 1에서 최솟값

①) ① 5

②) ② 8

③) ③ 9

④) ④ 11

🎯 **정답: ②**

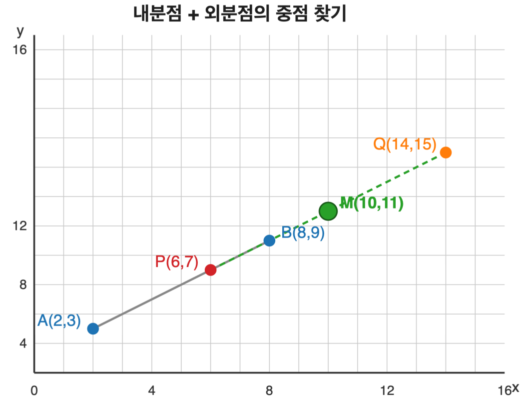
📖 완전제곱 꼴로 변형하면 $f(x) = (x-1)^2 + 2$이다. 꼭짓점은 $(1, 2)$로 정의역 내부에 있다. 따라서 최솟값은 $f(1) = 2$. 구간 양 끝 값은 $f(-1) = 1 + 2 + 3 = 6$, $f(2) = 4 - 4 + 3 = 3$이므로 최댓값은 6이다. 합은 $2 + 6 = 8$이다.

💡 꼭짓점이 정의역 내부에 있는지 여부에 따라 최댓값/최솟값의 위치가 달라지는 것이 제한구간 최적화의 핵심입니다.

Q66 도형의 방정식

두 점 $A(2, 3)$, $B(8, 9)$에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점 P와 $2:1$로 외분하는 점 Q가 있다. 선분 PQ의 중점 M의 좌표는?

내분점 + 외분점의 중점 찾기



①) ① $(8, 9)$

②) ② $(9, 10)$

③) ③ $(10, 11)$

④) ④ $(11, 12)$

🎯 **정답: ③**

📖 P의 좌표는 $\left(\frac{2\times8+1\times2}{2+1}, \frac{2\times9+1\times3}{2+1}\right) = (6, 7)$이다. Q의 좌표는 $\left(\frac{2\times8-1\times2}{2-1}, \frac{2\times9-1\times3}{2-1}\right) = (14, 15)$이다. 따라서 $M = \left(\frac{6+14}{2}, \frac{7+15}{2}\right) = (10, 11)$이다.

💡 선분을 $m:n$으로 내분하는 점과 외분하는 점은 조화평균, 기하평균과도 깊은 관계가 있어요.

Q67 방정식과 부등식 활용

방정식 $(x^2+x)^2-2(x^2+x)-3=0$의 모든 실근의 합은?

①) ① -3

②) ② -1

③) ③ 0

④) ④ 1

🎯 **정답: ②**

📖 $t=x^2+x$로 치환하면 $t^2-2t-3=0$, 즉 $(t-3)(t+1)=0$이므로 $t=3$ 또는 $t=-1$이다. (1) $x^2+x-3=0$: 판별식 $1+12=13>0$이므로 두 실근을 가지며, 근과 계수의 관계에 의해 합은 -1이다. (2) $x^2+x+1=0$: 판별식 $1-4=-3<0$이므로 허근만 갖는다. 따라서 모든 실근의 합은 -1이다.

💡 치환법은 복잡한 방정식을 간단한 형태로 바꾸는 핵심 기법으로, 미적분에서 치환적분의 아이디어와 같은 뿌리입니다.

Q68 경우의 수

남학생 5명과 여학생 4명으로 이루어진 9명의 학생 중에서 4명의 대표를 뽑을 때, 여학생이 적어도 2명 포함되는 경우의 수는?

①) ① 60

②) ② 81

③) ③ 99

④) ④ 110

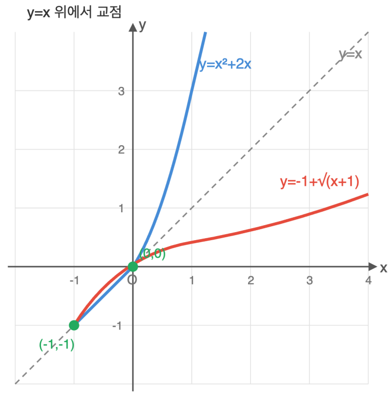
🎯 **정답: ②**

📖 전체 경우 ${}_9C_4=126$에서 여학생이 0명 또는 1명 포함되는 경우를 뺀다. 여학생 0명(남학생 4명): ${}_5C_4=5$. 여학생 1명(남학생 3명): ${}_5C_3\times{}_4C_1=10\times4=40$. 따라서 구하는 경우의 수는 $126-5-40=81$이다.

💡 '적어도' 조건이 붙은 문제는 대부분 여사건으로 계산하는 편이 훨씬 간편합니다.

Q69 함수

$x \geq -1$에서 정의된 함수 $f(x) = x^2 + 2x$의 역함수를 $f^{-1}(x)$라 할 때, 방정식 $f(x) = f^{-1}(x)$의 모든 실근의 합은?



①) ① -2
②) ② -1
③) ③ 0
④) ④ 1

🎯 **정답: ②**

📖 $f(x) = x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$은 $x \geq -1$에서 증가함수이므로 그래프가 $y = x$에 대해 대칭인 역함수와의 교점은 모두 $y = x$ 위에 존재한다. 따라서 $f(x) = x$를 풀면 된다. $x^2 + 2x = x$, 즉 $x^2 + x = 0$이므로 $x(x+1) = 0$. 해는 $x = 0$ 또는 $x = -1$이며 둘 다 $x \geq -1$을 만족한다. 실근의 합은 $0 + (-1) = -1$이다.

💡 함수와 그 역함수의 그래프가 $y = x$에 대해 대칭이라는 사실은 역함수의 정의에서 곧바로 얻어집니다.

Q70 다항식

세 실수 a, b, c에 대하여 $a + b + c = 4$이고 $ab + bc + ca = 5$일 때, $a^2 + b^2 + c^2$의 값을 구하시오.

①) ① 4
②) ② 5
③) ③ 6
④) ④ 7

🎯 **정답: ③ 6**

📖 곱셈공식 $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$를 이용한다. 양변에 주어진 값을 대입하면 $4^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2 \cdot 5$. 즉 $16 = a^2 + b^2 + c^2 + 10$이므로 $a^2 + b^2 + c^2 = 6$.

💡 세 변수 곱셈공식은 대칭식의 기본 도구로, $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ 같은 식 변형에서도 자주 등장한다.

Q71 복소수와 이차방정식

$i+i^2+i^3+\cdots+i^{20}$의 값을 구하시오. (단, $i=\sqrt{-1}$)

①) ① -1

②) ② 0

③) ③ 1

④) ④ i

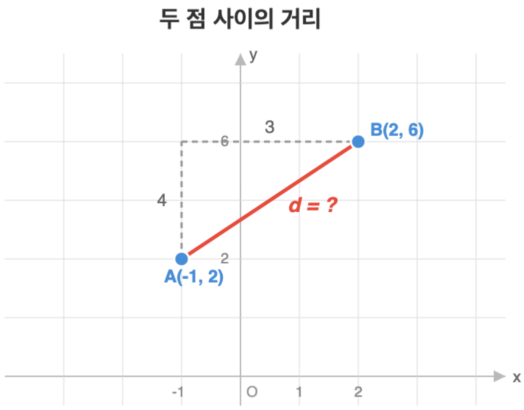
🎯 **정답:** ② 0

📖 i의 거듭제곱은 4개 주기로 반복된다: $i+i^2+i^3+i^4=i-1-i+1=0$. 20은 4의 배수이므로 4개씩 묶으면 5묶음이 모두 0이 되어 합은 0이다.

💡 i의 거듭제곱이 주기적으로 반복되는 성질은 단위원 위 회전과 대응되며, 이는 복소평면 회전 변환의 기초가 된다.

Q72 도형의 방정식

좌표평면 위의 두 점 $A(-1,2)$, $B(2,6)$ 사이의 거리를 구하시오.



①) ① 4

②) ② 5

③) ③ $\sqrt{29}$

④) ④ $\sqrt{34}$

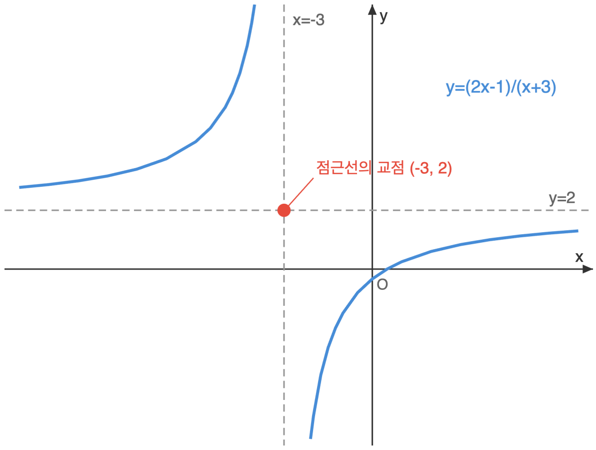
🎯 **정답:** ② 5

📖 두 점 사이의 거리 공식 $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$를 적용한다. $d=\sqrt{(2-(-1))^2+(6-2)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$
.

💡 두 점 사이 거리 공식은 결국 피타고라스 정리의 좌표판이다.

Q73 함수

유리함수 $y=\dfrac{2x-1}{x+3}$의 두 점근선의 교점의 좌표를 구하시오.



①) ① $(-3,\ -2)$

②) ② $(3, 2)$

③) ③ $(-3, 2)$

④) ④ $(2,\ -3)$

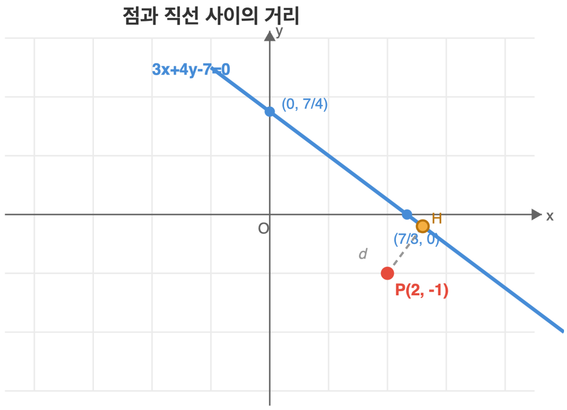
🎯 **정답:** ③ $(-3, 2)$

📖 분자를 분모에 대해 변형한다. $\dfrac{2x-1}{x+3}=\dfrac{2(x+3)-7}{x+3}=2-\dfrac{7}{x+3}$. 따라서 그래프는 $y=-\dfrac{7}{x}$를 x축 방향으로 -3, y축 방향으로 2만큼 평행이동한 것이며, 점근선은 $x=-3$, $y=2$이다. 두 점근선의 교점은 $(-3, 2)$.

💡 유리함수의 점근선 교점은 그래프의 대칭의 중심이기도 하다.

Q74 도형의 방정식

점 $P(2,\ -1)$에서 직선 $3x+4y-7=0$까지의 거리를 구하시오.



①) ① $\frac{1}{5}$
②) ② $\frac{2}{5}$
③) ③ 1
④) ④ 5

🎯 **정답:** ③ 1

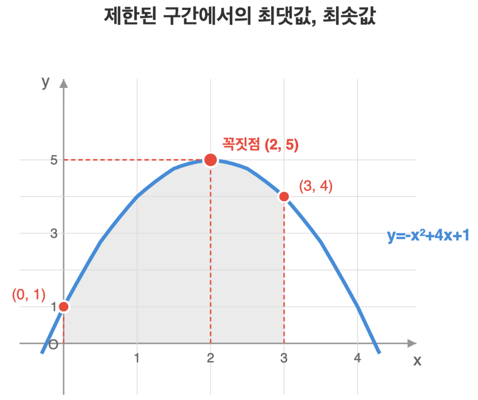
📖 점 (x_1, y_1)에서 직선 $ax+by+c=0$까지의 거리 공식 $d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$를 적용한다.

$d=\frac{|3\cdot 2+4\cdot(-1)-7|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|6-4-7|}{\sqrt{25}}=\frac{5}{5}=1.$

💡 점과 직선 사이의 거리 공식은 법선벡터의 정사영 길이를 계산한 것이다.

Q75 이차함수와 이차부등식

$0 \le x \le 3$에서 이차함수 $f(x) = -x^2 + 4x + 1$의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오.



①) ① 5
②) ② 6
③) ③ 8
④) ④ 9

🎯 **정답: ② 6**

📖 $f(x) = -(x^2 - 4x) + 1 = -(x-2)^2 + 5$이므로 위로 볼록한 포물선이고 꼭짓점은 $(2, 5)$. 꼭짓점의 x좌표 2가 구간 $[0, 3]$에 포함되므로 $x = 2$에서 최댓값 5. 양 끝값을 비교하면 $f(0) = 1$, $f(3) = -9 + 12 + 1 = 4$이므로 최솟값은 $f(0) = 1$. 따라서 합은 $5 + 1 = 6$.

💡 제한된 구간에서 이차함수의 최값은 꼭짓점이 구간 안에 있는지 먼저 확인하는 것이 핵심이다.

Q76 집합과 명제

어느 학급 학생 40명 중 농구를 좋아하는 학생이 25명, 축구를 좋아하는 학생이 18명, 두 종목 모두 좋아하는 학생이 10명이다. 두 종목 모두 좋아하지 않는 학생 수를 구하시오.

①) ① 5명
②) ② 7명
③) ③ 10명
④) ④ 13명

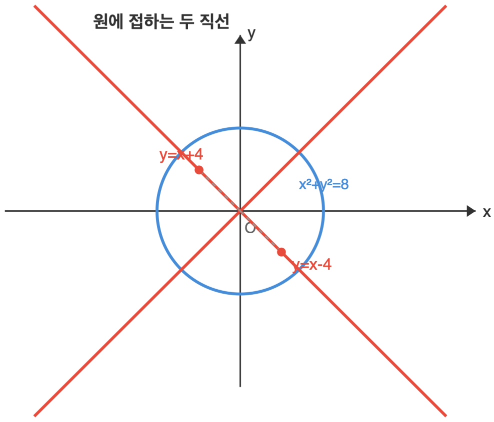
🎯 **정답: ② 7명**

📖 농구를 좋아하는 학생의 집합을 A, 축구를 좋아하는 학생의 집합을 B라 하자.
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 25 + 18 - 10 = 33$. 두 종목 모두 좋아하지 않는 학생 수는 전체에서 합집합을 뺀 것이므로 $40 - 33 = 7$.

💡 포함배제 원리는 집합 3개로 확장할 수 있고, 확률론에서도 같은 형태로 자주 쓰인다.

Q77 도형의 방정식

원 $x^2+y^2=8$과 직선 $y=x+k$가 접할 때, 모든 실수 k의 값의 곱을 구하시오.



①) ① -16

②) ② -8

③) ③ 8

④) ④ 16

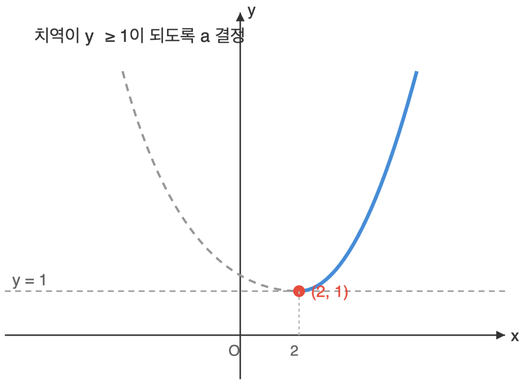
🎯 **정답:** ① -16

📖 직선을 $x-y+k=0$ 꼴로 쓰고, 원의 중심 $(0,0)$에서 직선까지의 거리가 반지름 $2\sqrt{2}$ 와 같아야 접한다. $\dfrac{|0-0+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2}$, 즉 $\dfrac{|k|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$ 이므로 $|k|=4$, $k=\pm4$. 두 값의 곱은 $4\cdot(-4)=-16$.

💡 원과 직선이 접한다는 조건은 '중심과 직선 사이 거리 = 반지름'으로 통일적으로 다룰 수 있다.

Q78 함수

함수 $f(x) = x^2 - 4x + a$가 $x \geq 2$에서 일대일함수이고 그 치역이 $\{y \mid y \geq 1\}$일 때, 상수 a의 값을 구하시오.



①) ① 3
②) ② 4
③) ③ 5
④) ④ 6

🎯 **정답:** ③ 5

📖 표준형으로 변형하면 $f(x) = (x-2)^2 + a - 4$. 꼭짓점은 $(2, a-4)$이고 아래로 볼록하다. 정의역 $x \geq 2$는 꼭짓점 오른쪽이므로 f는 증가함수가 되어 일대일함수이다. 이때 최솟값은 $x = 2$에서 $a - 4$이고 $x \to \infty$로 보내면 $f(x) \to \infty$이므로 치역은 $[a-4, \infty)$. 이것이 $[1, \infty)$와 같아야 하므로 $a - 4 = 1$, $a = 5$.

💡 이차함수는 일반적으로 일대일함수가 아니지만, 정의역을 꼭짓점을 기준으로 한쪽만 잘라내면 일대일함수가 된다.

Q79 경우의 수

남학생 5명, 여학생 4명 중에서 대표 3명을 뽑을 때, 남학생이 적어도 1명 포함되는 경우의 수를 구하시오.

①) ① 70
②) ② 75
③) ③ 80
④) ④ 84

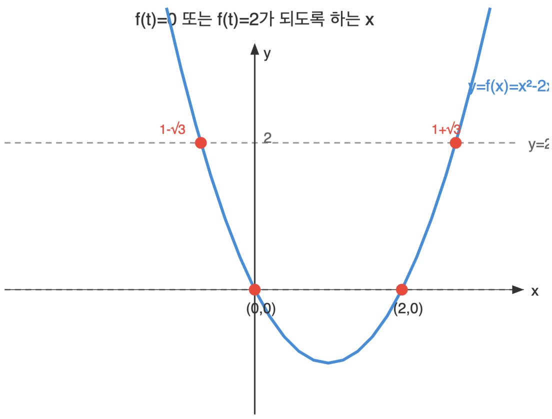
🎯 **정답:** ③ 80

📖 여사건 활용이 빠르다. 전체 경우의 수는 9명 중 3명을 뽑는 ${}_9C_3 = \dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84$. 남학생이 한 명도 포함되지 않는 경우(모두 여학생)는 ${}_4C_3 = 4$. 따라서 남학생이 적어도 1명 포함되는 경우의 수는 $84 - 4 = 80$.

💡 '적어도' 조건은 여사건으로 풀면 경우 분류 횟수를 줄일 수 있어 거의 항상 더 빠르다.

Q80 종합 활용

함수 $f(x) = x^2 - 2x$에 대하여 방정식 $f(f(x)) = 0$의 모든 실근의 합을 구하시오.



①) ① 2

②) ② 3

③) ③ 4

④) ④ 5

🎯 **정답:** ③ 4

📖 $t = f(x)$로 치환하면 $f(t) = 0$, 즉 $t^2 - 2t = 0$, $t(t-2) = 0$이므로 $t = 0$ 또는 $t = 2$. (1) $f(x) = 0$: $x^2 - 2x = 0$, $x = 0$ 또는 $x = 2$. 두 근의 합은 2. (2) $f(x) = 2$: $x^2 - 2x - 2 = 0$이므로 근과 계수의 관계에 의해 두 근의 합은 2. 모든 실근의 합은 $2 + 2 = 4$.

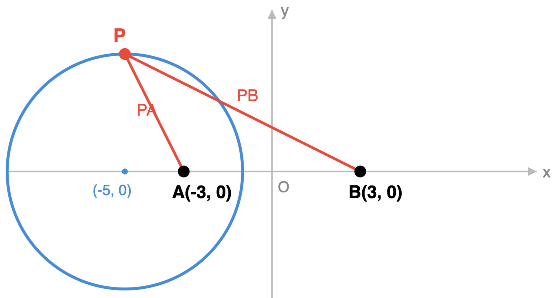
💡 합성방정식 $f(f(x)) = 0$ 같은 문제는 안쪽 함숫값을 새 변수로 치환해 두 단계로 분해하는 것이 정석이다.

📝 고1 수학 일반

총 40문제 · 문제와 정답·풀이 포함

Q81 도형의 방정식

두 점 $A(-3, 0)$, $B(3, 0)$에 대하여 $\overline{PA} : \overline{PB} = 1 : 2$를 만족하는 점 P의 자취가 나타내는 도형의 넓이를 구하시오.



①) ① 9π

②) ② 12π

③) ③ 16π

④) ④ 25π

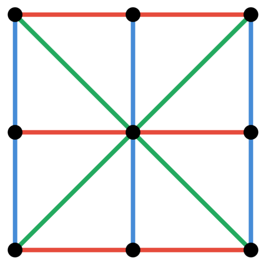
🎯 **정답:** ③ 16π

📖 $P(x, y)$라 하면 $\overline{PA} : \overline{PB} = 1 : 2$에서 $2\overline{PA} = \overline{PB}$, 양변을 제곱하면 $4\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$. 즉 $4\{(x+3)^2 + y^2\} = (x-3)^2 + y^2$. 전개하면 $4x^2 + 24x + 36 + 4y^2 = x^2 - 6x + 9 + y^2$이고 정리하면 $3x^2 + 30x + 27 + 3y^2 = 0$, 양변을 3으로 나누면 $x^2 + 10x + 9 + y^2 = 0$. 완전제곱으로 $(x+5)^2 + y^2 = 16$. 따라서 자취는 중심 $(-5, 0)$, 반지름 4인 원이고 그 넓이는 $\pi \cdot 4^2 = 16\pi$.

💡 두 정점에서의 거리 비가 일정한 점들의 자취는 항상 원이 되는데, 이를 아폴로니우스의 원이라 한다.

Q82 종합 활용

좌표평면 위에서 가로 좌표와 세로 좌표가 모두 $0, 1, 2$ 중 하나인 점 9개가 있다. 이 중에서 서로 다른 3개의 점을 골라 만들 수 있는 삼각형의 개수를 구하시오.



삼각형이 되지 않는 8가지 일직선 배치

①) ① 72
②) ② 74
③) ③ 76
④) ④ 80

🎯 **정답: ③ 76**

📖 9개의 점에서 3개를 고르는 전체 경우의 수는 ${}_9C_3 = \dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84$. 그러나 3개의 점이 일직선 위에 있으면 삼각형이 만들어지지 않는다. 일직선 위 3점은 (i) 가로 방향 3줄, (ii) 세로 방향 3줄, (iii) 두 대각선 2개로 모두 $3 + 3 + 2 = 8$가지이다. 따라서 삼각형의 개수는 $84 - 8 = 76$.

💡 격자점 위 도형 개수 문제는 '전체 - 일직선 케이스'라는 여사건 전략을 거의 항상 사용한다.

Q83 집합과 명제

집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$의 부분집합 중에서 1과 2를 모두 포함하고 3은 포함하지 않는 부분집합의 개수를 구하시오.

①) ① 4
②) ② 6
③) ③ 8
④) ④ 16

🎯 **정답: ③ 8**

📖 1단계: 1, 2는 반드시 포함되므로 고정.
2단계: 3은 반드시 제외되므로 고정.
3단계: 남은 원소 $\{4, 5, 6\}$의 각 원소는 포함 여부를 자유롭게 선택할 수 있다.
4단계: 따라서 부분집합의 개수는 $2^3 = 8$개.

💡 n개의 원소 중 k개를 포함시키고 m개를 제외하면 부분집합 수는 2^{n-k-m}개로 일반화된다.

Q84 방정식과 부등식 활용

삼차방정식 $x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$의 모든 실근의 합을 구하시오.

①) ① 0

②) ② 1

③) ③ 2

④) ④ 3

정답: ② 1

1단계: 좌변을 묶어서 인수분해한다.

$x^3 - x^2 - 4x + 4 = x^2(x-1) - 4(x-1) = (x-1)(x^2-4)$

2단계: $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$로 더 인수분해.

$(x-1)(x-2)(x+2) = 0$

3단계: 실근은 $x = 1, 2, -2$.

4단계: 실근의 합은 $1 + 2 + (-2) = 1$.

근과 계수의 관계에서 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$의 세 근의 합은 $-a$이다. 여기선 $-(-1) = 1$로 즉시 확인된다.

Q85 집합과 명제

명제 "$x > 0$이면 $x^2 > 0$이다"의 대우를 고르시오.

①) ① $x^2 > 0$이면 $x > 0$이다

②) ② $x \le 0$이면 $x^2 \le 0$이다

③) ③ $x^2 \le 0$이면 $x \le 0$이다

④) ④ $x > 0$이면 $x^2 \le 0$이다

정답: ③ $x^2 \le 0$이면 $x \le 0$이다

1단계: 명제 $p \Rightarrow q$의 대우는 $\sim q \Rightarrow \sim p$이다.

2단계: 가정 p: $x > 0$, 결론 q: $x^2 > 0$.

3단계: $\sim q$는 $x^2 \le 0$, $\sim p$는 $x \le 0$.

4단계: 따라서 대우는 "$x^2 \le 0$이면 $x \le 0$이다"이다. ①은 역, ②는 이.

한 명제가 참이면 그 대우도 항상 참이다. 이를 대우 증명법이라 한다.

Q86 종합 활용

두 실수 x, y가 $x + y = 3$, $xy = 1$을 만족할 때 $x^3 + y^3$의 값을 구하시오.

①) ① 12

②) ② 15

③) ③ 18

④) ④ 21

정답: ③ 18

1단계: 곱셈공식의 변형 $x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y)$를 이용한다.

2단계: $x + y = 3$, $xy = 1$을 대입.

3단계: $(x+y)^3 = 3^3 = 27$, $3xy(x+y) = 3 \cdot 1 \cdot 3 = 9$.

4단계: $x^3 + y^3 = 27 - 9 = 18$.

$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$로도 풀 수 있다. $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = 9 - 2 = 7$이므로 $3 \cdot (7-1) = 18$.

Q87 함수

집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$에서 X로의 일대일대응 f 중에서 $f(1) = 2$를 만족하는 함수의 개수를 구하시오.

①) ① 4

②) ② 6

③) ③ 8

④) ④ 12

🎯 **정답: ② 6**

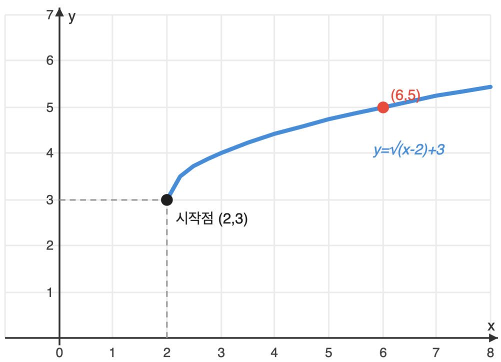
📖 1단계: 일대일대응이므로 $f(1), f(2), f(3), f(4)$의 값은 $\{1, 2, 3, 4\}$를 한 번씩 모두 차지한다.
2단계: $f(1) = 2$로 고정되어 있으므로 $f(2), f(3), f(4)$는 남은 집합 $\{1, 3, 4\}$의 원소 3개를 한 번씩 사용한다.
3단계: 이는 3개의 원소를 일렬로 배열하는 경우와 같다.
4단계: 따라서 $3! = 6$개.

💡 일대일대응(전단사함수)은 정의역과 공역의 원소 수가 같을 때만 존재한다.

Q88 함수

무리함수 $y = \sqrt{x-a} + b$의 그래프가 점 $(2, 3)$에서 시작하여 점 $(6, 5)$를 지난다. 상수 a, b에 대하여 $a + b$의 값을 구하시오.

y=√(x-a)+b 의 평행이동



①) ① 3

②) ② 4

③) ③ 5

④) ④ 6

🎯 **정답: ③ 5**

📖 1단계: 무리함수 $y = \sqrt{x-a} + b$의 시작점(정의역의 끝점)은 (a, b)이다.
2단계: 시작점이 $(2, 3)$이므로 $a = 2,\ b = 3$.
3단계: 검산: $x = 6$을 대입하면 $y = \sqrt{6-2} + 3 = 2 + 3 = 5$로 점 $(6, 5)$를 통과 ✓.
4단계: 따라서 $a + b = 2 + 3 = 5$.

💡 $y = \sqrt{x}$ 를 x축 방향으로 a만큼, y축 방향으로 b만큼 평행이동하면 시작점은 원점에서 (a, b)로 이동한다.

Q89 방정식과 부등식 활용

모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^2 - 2(a-1)x + a^2 - a + 3 > 0$이 성립하도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하시오.

①) ① $a < -2$

②) ② $a > -2$

③) ③ $a < 2$

④) ④ $a > 2$

🎯 **정답:** ② $a > -2$

📖 1단계: 이차항의 계수가 양수($1 > 0$)이고 모든 실수에서 부등식이 성립하려면 판별식이 음수여야 한다.
2단계: 판별식의 1/4을 계산. $D/4 = (a-1)^2 - (a^2 - a + 3) < 0$.
3단계: 전개. $(a^2 - 2a + 1) - a^2 + a - 3 = -a - 2 < 0$.
4단계: $-a - 2 < 0$에서 $a > -2$.

💡 이차식 $f(x)$가 모든 실수에서 양수이려면 (1) 이차항 계수 양수 (2) $D < 0$ 두 조건이 동시에 필요하다.

Q90 함수

함수 $f(x) = x^2 - 2\ (x \geq 0)$의 역함수 $f^{-1}(x)$가 존재한다. 함수 $y = f(x)$의 그래프와 $y = f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 좌표를 구하시오.

①) ① $(1, 1)$

②) ② $(2, 2)$

③) ③ $(-1, -1), (2, 2)$

④) ④ $(2, 2), (0, -2)$

🎯 **정답:** ② $(2, 2)$

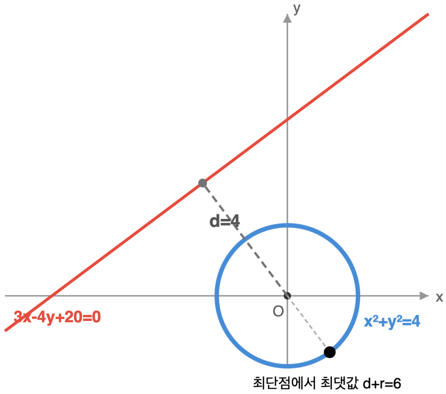
📖 1단계: $f(x) = x^2 - 2\ (x \geq 0)$는 증가함수이므로, $y = f(x)$와 $y = f^{-1}(x)$의 교점은 직선 $y = x$ 위에 있다.
2단계: 따라서 교점에서 $f(x) = x$가 성립. $x^2 - 2 = x$.
3단계: $x^2 - x - 2 = 0$이므로 $(x-2)(x+1) = 0$, $x = 2$ 또는 $x = -1$.
4단계: 정의역 조건 $x \geq 0$에 의해 $x = 2$만 해. 교점은 $(2, 2)$.

💡 f가 증가함수일 때만 두 그래프의 교점이 모두 직선 $y = x$ 위에 있음이 보장된다. 감소함수에서는 $y = x$ 밖에서 교점이 생길 수 있다.

Q91 종합 활용

원 $x^2+y^2=4$ 위의 점과 직선 $3x-4y+20=0$ 사이의 거리의 최댓값을 구하시오.

원과 직선의 최대 거리



①) ① 4
②) ② 5
③) ③ 6
④) ④ 7

🎯 **정답: ③ 6**

📖 1단계: 원의 중심은 $(0,0)$, 반지름 $r=2$.
2단계: 점과 직선 사이의 거리 공식으로 중심에서 직선까지의 거리를 구한다.
$d=\dfrac{|3\cdot 0-4\cdot 0+20|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{20}{5}=4.$
3단계: $d>r$이므로 직선과 원은 만나지 않는다.
4단계: 원 위의 점에서 직선까지의 거리의 최댓값은 $d+r=4+2=6.$

💡 중심에서 직선의 반대편 끝점에서 거리는 최대$(d+r)$, 같은 편 가까운 끝점에서는 최소$(d-r)$가 된다.

Q92 집합과 명제

전체집합 U의 두 부분집합 A,B에 대하여 $n(U)=30$, $n(A)=18$, $n(B)=15$일 때, $n(A\cap B)$의 최솟값을 구하시오.

①) ① 0
②) ② 3
③) ③ 5
④) ④ 15

🎯 **정답: ② 3**

📖 1단계: 합집합의 원소 개수 공식 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$을 이용한다.
2단계: $A\cup B\subset U$이므로 $n(A\cup B)\le n(U)=30.$
3단계: $18+15-n(A\cap B)\le 30$, 즉 $n(A\cap B)\ge 33-30=3.$
4단계: 따라서 $n(A\cap B)$의 최솟값은 $3.$ ($A\cup B=U$일 때 달성)

💡 $n(A)+n(B)>n(U)$이면 두 집합은 반드시 겹치며, 그 겹치는 정도의 최솟값은 $n(A)+n(B)-n(U)$이다 (포함배제 원리의 결과).

Q93 다항식

다항식 $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + k$를 $(x-1)$로 나눈 나머지가 3일 때, 상수 k의 값을 구하시오.

①) ① 3
②) ② 4
③) ③ 5
④) ④ 6

🎯 **정답:** ③ 5

📖 나머지정리에 의해 다항식 $f(x)$를 $(x-1)$로 나눈 나머지는 $f(1)$이다.
$f(1) = 1^3 + 2\cdot 1^2 - 5\cdot 1 + k = 1 + 2 - 5 + k = -2 + k$
$f(1) = 3$이므로 $-2 + k = 3$, 따라서 $k = 5$이다.
💡 나머지정리는 1637년 데카르트가 '기하학'에서 언급한 이래, 다항식을 다루는 가장 기본적인 도구가 되었다.

Q94 복소수와 이차방정식

이차방정식 $x^2 - 2x + 5 = 0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2$의 값을 구하시오.

①) ① -6
②) ② -4
③) ③ 4
④) ④ 6

🎯 **정답:** ① -6

📖 근과 계수의 관계에 의해 $\alpha + \beta = 2$, $\alpha\beta = 5$이다.
$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 2^2 - 2\cdot 5 = 4 - 10 = -6$
판별식 $D = 4 - 20 = -16 < 0$이므로 두 근은 서로 켤레인 허근이지만, 근과 계수의 관계는 그대로 성립한다.
💡 두 근이 허수여도 대칭식($\alpha^2 + \beta^2$ 등)은 항상 실수값을 갖는다.

Q95 방정식과 부등식 활용

삼차방정식 $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$의 값을 구하시오.

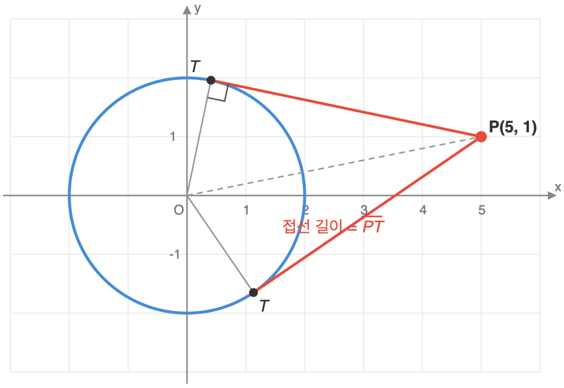
①) ① $\frac{6}{11}$
②) ② $\frac{11}{6}$
③) ③ $\frac{1}{6}$
④) ④ 6

🎯 **정답:** ② $\frac{11}{6}$

📖 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의해
$\alpha + \beta + \gamma = 6$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 11$, $\alpha\beta\gamma = 6$
역수의 합을 통분하면
$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta}{\alpha\beta\gamma} = \frac{11}{6}$$
(참고: 실제 근은 $1, 2, 3$이며 $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$로 같다.)
💡 역수의 합은 곱셈공식을 통분으로 풀면 '이차 대칭식 / 근의 곱'으로 항상 정리된다.

Q96 도형의 방정식

좌표평면 위의 점 $P(5, 1)$에서 원 $x^2 + y^2 = 4$에 그은 접선의 길이를 구하시오.



①) ① $\sqrt{21}$
②) ② $\sqrt{22}$
③) ③ $\sqrt{26}$
④) ④ 5

🎯 **정답:** ② $\sqrt{22}$

📖 원의 중심 $O(0, 0)$, 반지름 $r = 2$이다.

점 P에서 원의 중심까지의 거리는

$\overline{OP} = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}$

접점을 T라 하면 $\overline{OT} = r = 2$이고 $\overline{OT} \perp \overline{PT}$이므로 직각삼각형 OTP에서 피타고라스 정리에 의해

$\overline{PT} = \sqrt{\overline{OP}^2 - \overline{OT}^2} = \sqrt{26 - 4} = \sqrt{22}$

💡 원 밖 한 점에서 그은 두 접선의 길이는 항상 같다(접선길이의 성질).

Q97 집합과 명제

전체집합 $U = \{1, 2, 3, \cdots, 20\}$의 두 부분집합 $A = \{x \mid x$는 20의 약수$\}$, $B = \{x \mid x$는 3의 배수$\}$에 대하여 $n(A \cup B)$를 구하시오.

①) ① 10
②) ② 11
③) ③ 12
④) ④ 13

🎯 **정답:** ③ 12

📖 $A = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$이므로 $n(A) = 6$.

$B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$이므로 $n(B) = 6$.

$A \cap B$는 20의 약수이면서 3의 배수인 원소이다. A의 원소 중 3의 배수는 없으므로 $A \cap B = \varnothing$, $n(A \cap B) = 0$.

포함배제의 원리에 의해

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 6 + 6 - 0 = 12$

💡 두 집합이 서로소일 때 합집합의 원소 개수는 단순히 두 집합의 원소 개수의 합이 된다.

Q98 함수

함수 $f(x) = \sqrt{2x-4}$ 의 역함수가 $f^{-1}(x) = \dfrac{x^2+a}{b}$ $(x \geq 0)$일 때, $a+b$의 값을 구하시오.

①) ① 4

②) ② 5

③) ③ 6

④) ④ 7

🎯 **정답:** ③ 6

📖 역함수를 구하기 위해 $y = \sqrt{2x-4}$ 로 놓고 x에 대해 정리한다.
양변을 제곱하면 $y^2 = 2x - 4$ (단, $y \geq 0$).
x에 대해 풀면 $2x = y^2 + 4$, 즉 $x = \dfrac{y^2+4}{2}$.
x와 y를 바꾸면 $f^{-1}(x) = \dfrac{x^2+4}{2}$ $(x \geq 0)$.
따라서 $a = 4$, $b = 2$이므로 $a + b = 6$이다.

💡 무리함수 $y = \sqrt{ax+b}$ 의 역함수는 항상 이차함수의 일부(반쪽 포물선)가 된다.

Q99 방정식과 부등식 활용

연립부등식 $\begin{cases} x^2 - 5x + 6 \leq 0 \\ x^2 - x - 2 > 0 \end{cases}$ 의 해를 구하시오.

①) ① $-1 < x \leq 2$

②) ② $2 < x \leq 3$

③) ③ $2 \leq x \leq 3$

④) ④ $-1 < x < 3$

🎯 **정답:** ② $2 < x \leq 3$

📖 첫 번째 부등식: $x^2 - 5x + 6 \leq 0$을 인수분해하면 $(x-2)(x-3) \leq 0$이므로 $2 \leq x \leq 3$.
두 번째 부등식: $x^2 - x - 2 > 0$을 인수분해하면 $(x-2)(x+1) > 0$이므로 $x < -1$ 또는 $x > 2$.
두 해의 공통 구간을 구하면, $2 \leq x \leq 3$과 ($x < -1$ 또는 $x > 2$)의 교집합은 $2 < x \leq 3$이다.
($x = 2$는 두 번째 부등식에서 제외된다.)

💡 연립부등식의 해는 수직선 위에 각 부등식의 해를 그려 겹치는 구간을 찾으면 시각적으로 쉽게 구할 수 있다.

Q100 함수

일차함수 $f(x) = ax + b$가 모든 실수 x에 대하여 $f(f(x)) = 4x + 9$를 만족시킬 때, $f(2)$의 값을 구하시오. (단, $a > 0$)

①) ① 5

②) ② 6

③) ③ 7

④) ④ 8

🎯 **정답:** ③ 7

📖 $f(f(x))$를 $f(x) = ax + b$에 대입하여 전개한다.
$f(f(x)) = f(ax+b) = a(ax+b) + b = a^2x + ab + b$
이것이 $4x + 9$와 모든 x에 대해 같으므로 계수를 비교한다.
x의 계수: $a^2 = 4$, 조건 $a > 0$에서 $a = 2$.
상수항: $ab + b = b(a+1) = 9$, 즉 $b(2+1) = 9$이므로 $b = 3$.
따라서 $f(x) = 2x + 3$이고 $f(2) = 2 \cdot 2 + 3 = 7$이다.

💡 일차함수의 n회 합성은 여전히 일차함수이며, $a \neq 1$일 때 $(f \circ f \circ \cdots \circ f)(x)$의 기울기는 a^n이 된다.

Q101 다항식

다항식 $f(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지가 5이고, $x+1$로 나눈 나머지가 -4이다. $f(x)$를 $(x-2)(x+1)$로 나눈 나머지를 구하시오.

①) ① $3x-1$

②) ② $2x+1$

③) ③ $-3x+1$

④) ④ $x+3$

🎯 **정답:** ① $3x-1$

📖 $f(x)$를 이차식 $(x-2)(x+1)$로 나눈 나머지는 일차 이하이므로 $ax+b$로 놓을 수 있다. 즉 $f(x)=(x-2)(x+1)Q(x)+ax+b$이다. $f(2)=5$에서 $2a+b=5$, $f(-1)=-4$에서 $-a+b=-4$이다. 두 식을 변끼리 빼면 $3a=9$, 즉 $a=3$이고 $b=-1$이다. 따라서 나머지는 $3x-1$이다.

💡 이차식으로 나눈 나머지는 항상 일차 이하라는 사실은 라그랑주 보간법의 기초가 된다.

Q102 경우의 수

1, 2, 3, 4, 5의 숫자가 적힌 5장의 카드 중에서 서로 다른 3장을 뽑아 일렬로 나열하여 세 자리 자연수를 만든다. 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수를 구하시오.

①) ① 20

②) ② 30

③) ③ 60

④) ④ 120

🎯 **정답:** ③ 60

📖 서로 다른 5장에서 3장을 뽑아 일렬로 나열하는 순열의 수와 같다. 백의 자리에 올 수 있는 경우는 5가지, 십의 자리는 4가지, 일의 자리는 3가지이므로 ${}_5P_3=5\times4\times3=60$이다.

💡 순열 ${}_nP_r$은 서로 다른 n개에서 r개를 뽑아 순서를 고려해 배열하는 경우의 수이다.

Q103 함수

함수 $f(x)=3x-5$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g(7)$의 값을 구하시오.

①) ① 3

②) ② 4

③) ③ 5

④) ④ 6

🎯 **정답:** ② 4

📖 $g(7)=a$라 하면 역함수의 정의에 의해 $f(a)=7$이다. 즉 $3a-5=7$이므로 $3a=12$, $a=4$이다. 따라서 $g(7)=4$이다.

💡 역함수의 그래프는 원래 함수의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 것과 일치한다.

Q104 종합 활용

$x = 2 + \sqrt{3}$ 일 때, $x^2 - 4x + 5$의 값을 구하시오.

①) ① 3

②) ② 4

③) ③ 5

④) ④ 6

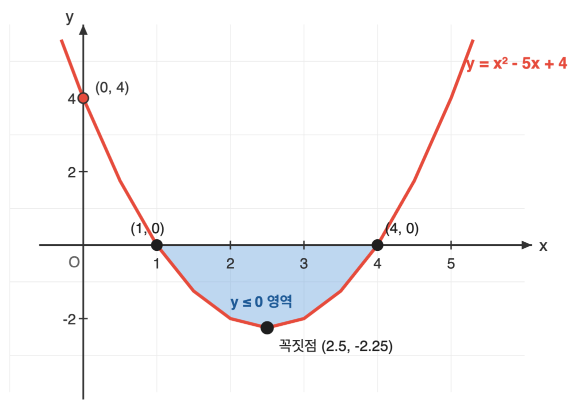
정답: ② 4

📖 $x - 2 = \sqrt{3}$ 의 양변을 제곱하면 $(x-2)^2 = 3$이므로 $x^2 - 4x + 4 = 3$, 즉 $x^2 - 4x = -1$이다. 따라서 $x^2 - 4x + 5 = -1 + 5 = 4$이다.

💡 무리수가 포함된 식의 값을 구할 때는 무리수 부분을 한쪽으로 이항하여 제곱하는 것이 핵심 전략이다.

Q105 이차함수와 이차부등식

이차함수 $y = x^2 - 5x + 4$의 그래프가 다음과 같을 때, 부등식 $x^2 - 5x + 4 \le 0$의 해를 구하시오.



①) ① $x \le 1$ 또는 $x \ge 4$

②) ② $1 \le x \le 4$

③) ③ $-4 \le x \le -1$

④) ④ $-1 \le x \le 4$

정답: ② $1 \le x \le 4$

📖 이차방정식 $x^2 - 5x + 4 = 0$을 인수분해하면 $(x-1)(x-4) = 0$이므로 $x = 1$ 또는 $x = 4$이다. 그래프는 아래로 볼록한 포물선이고 $y \le 0$인 부분은 두 x절편 사이의 영역이다. 따라서 부등식의 해는 $1 \le x \le 4$이다.

💡 이차부등식의 해는 그래프와 x축의 교점, 그리고 포물선이 아래로 볼록인지 위로 볼록인지로 결정된다.

Q106 다항식

다항식 $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$이 $x - 3$을 인수로 가질 때, $f(x)$를 일차식들의 곱으로 인수분해하시오.

①) ① $(x-3)(x+1)(x-2)$

②) ② $(x-3)(x-1)(x-2)$

③) ③ $(x-3)(x-1)(x+2)$

④) ④ $(x+3)(x-1)(x+2)$

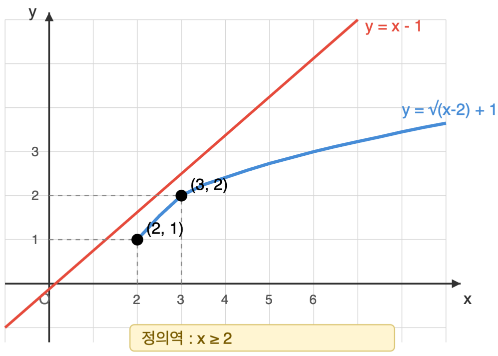
🎯 **정답:** ③ $(x-3)(x-1)(x+2)$

📖 조립제법을 이용해 $f(x)$를 $x-3$으로 나누면 몫이 $x^2 + x - 2$, 나머지가 0이다. 몫 $x^2 + x - 2$를 다시 인수분해하면 $(x-1)(x+2)$이다. 따라서 $f(x) = (x-3)(x-1)(x+2)$이다.

💡 조립제법은 다항식을 일차식 $x - a$로 나눌 때 계수 연산만으로 빠르게 몫과 나머지를 구하는 방법이다.

Q107 함수

무리함수 $y = \sqrt{x-2} + 1$의 그래프와 직선 $y = x - 1$의 교점의 좌표를 모두 구하시오.



①) ① $(2, 1)$ 한 점

②) ② $(3, 2)$ 한 점

③) ③ $(2, 1), (3, 2)$

④) ④ $(2, 1), (4, 3)$

🎯 **정답:** ③ $(2, 1), (3, 2)$

📖 $\sqrt{x-2} + 1 = x - 1$에서 $\sqrt{x-2} = x - 2$이다. 양변을 제곱하면 $x - 2 = (x-2)^2$이므로 $(x-2)\{(x-2) - 1\} = 0$, 즉 $x = 2$ 또는 $x = 3$이다. 두 값 모두 정의역 $x \geq 2$를 만족하고 우변 $x - 2 \geq 0$도 성립하므로 교점의 좌표는 $(2, 1)$과 $(3, 2)$이다.

💡 제곱근이 포함된 방정식은 양변을 제곱한 뒤 반드시 원래 식에 대입하여 무연근을 점검해야 한다.

Q108 경우의 수

문자 S, U, C, C, E, S, S의 7개 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수를 구하시오.

①) ① 210

②) ② 360

③) ③ 420

④) ④ 840

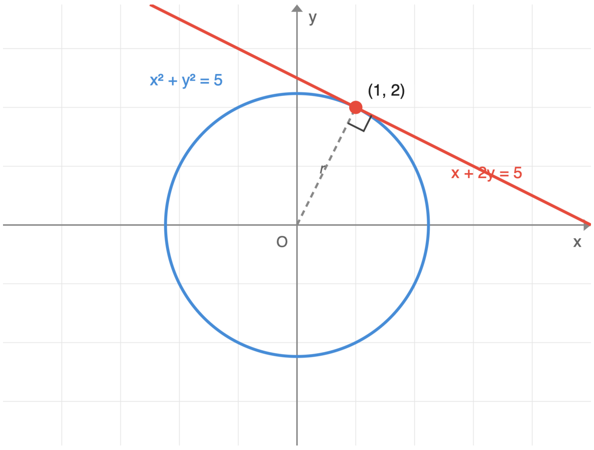
🎯 **정답:** ③ 420

📖 7개 문자 중 S가 3개, C가 2개, U와 E는 각각 1개씩이다. 같은 것이 있는 순열의 수는 $\frac{7!}{3! \times 2!} = \frac{5040}{12} = 420$이다.

💡 같은 것이 $p, q, r, \ \dots$ 개씩 있을 때 n개를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{n!}{p!\,q!\,r!\ \cdots}$이다.

Q109 도형의 방정식

원 $x^2 + y^2 = 5$ 위의 점 $(1, 2)$에서 그은 접선의 방정식을 구하시오.



①) ① $x + 2y = 5$
②) ② $x - 2y = 5$
③) ③ $2x + y = 5$
④) ④ $2x + y = 4$

🎯 **정답:** ① $x + 2y = 5$

📖 원 $x^2 + y^2 = r^2$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은 $x_1 x + y_1 y = r^2$이다. 따라서 $(1, 2)$에서의 접선은 $1 \cdot x + 2 \cdot y = 5$, 즉 $x + 2y = 5$이다. 접점 $(1, 2)$를 대입하면 $1 + 4 = 5$로 식을 만족하므로 검산도 일치한다.

💡 원 위의 점에서의 접선은 그 점을 지나면서 중심으로부터의 반지름과 수직인 직선이다.

Q110 종합 활용

실수 x, y가 $x^2 + y^2 = 1$을 만족할 때, $x + y^2$의 최댓값을 구하시오.

①) ① 1
②) ② $\frac{5}{4}$
③) ③ $\frac{3}{2}$
④) ④ 2

🎯 **정답:** ② $\frac{5}{4}$

📖 $y^2 = 1 - x^2 \geq 0$이므로 $-1 \leq x \leq 1$이다. $f(x) = x + y^2 = x + (1 - x^2) = -x^2 + x + 1$로 놓으면 $f(x) = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}$이다. $x = \frac{1}{2}$는 정의역 $-1 \leq x \leq 1$에 속하므로 이때 최댓값 $\frac{5}{4}$를 갖는다.

💡 제약조건이 있는 식의 최댓값/최솟값은 변수를 하나로 줄여 이차함수의 표준형으로 변형하면 쉽게 구할 수 있다.

Q111 함수

두 함수 $f(x) = ax + b$, $g(x) = x^2 + 1$에 대하여 $(f \circ g)(x) = 2x^2 + 5$가 모든 실수 x에 대해 성립한다. 두 상수 a, b에 대하여 $a + b$의 값을 구하시오.

①) ① 3
②) ② 4
③) ③ 5
④) ④ 6

🎯 **정답:** ③ 5

📖 $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = a(x^2 + 1) + b = ax^2 + (a + b)$이다. 이 식이 $2x^2 + 5$와 항등식이려면 x^2의 계수와 상수항이 각각 같아야 하므로 $a = 2$, $a + b = 5$이다. 따라서 $b = 3$이고 $a + b = 5$이다.

💡 두 다항식이 항등식이 되려면 차수가 같은 항의 계수가 모두 일치해야 한다는 것이 계수비교법의 기본 원리이다.

Q112 경우의 수

6명의 학생을 원형 탁자에 둘러앉히려고 한다. 특정한 두 학생 A, B가 서로 이웃하지 않도록 앉히는 경우의 수를 구하시오.

①) ① 48
②) ② 72
③) ③ 96
④) ④ 120

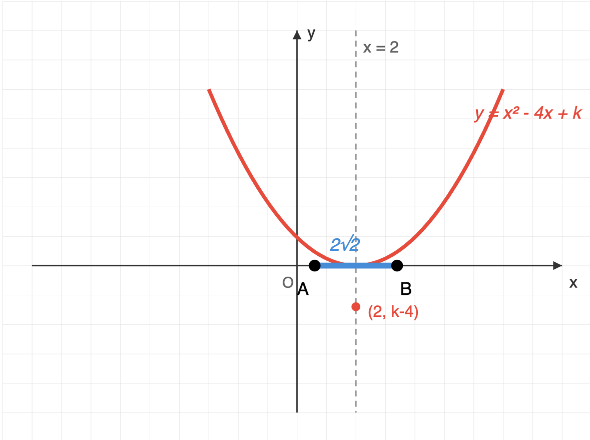
🎯 **정답:** ② 72

📖 6명을 원형으로 배열하는 전체 경우의 수는 $(6 - 1)! = 5! = 120$이다. A, B가 이웃하는 경우는 두 사람을 한 묶음으로 보면 5개를 원형으로 배열하는 경우의 수가 $(5 - 1)! = 4! = 24$이고, 묶음 안에서 A, B가 자리를 바꾸는 경우가 2가지이므로 $24 \times 2 = 48$이다. 따라서 이웃하지 않는 경우의 수는 $120 - 48 = 72$이다.

💡 원순열에서 n명을 원형으로 배열하는 경우의 수가 $(n - 1)!$인 이유는 회전에 의해 같은 배열이 n개씩 중복되기 때문이다.

Q113 종합 활용

이차함수 $y = x^2 - 4x + k$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점 A, B에서 만나고 $\overline{AB} = 2\sqrt{2}$ 일 때, 상수 k의 값을 구하시오.



①) ① 1

②) ② 2

③) ③ 3

④) ④ 4

🎯 **정답:** ② 2

📖 두 점 A, B의 x좌표를 α, β라 하면 이차방정식 $x^2 - 4x + k = 0$의 두 근이다. 근과 계수의 관계에 의해 $\alpha + \beta = 4$, $\alpha\beta = k$이다. $\overline{AB} = |\alpha - \beta| = \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta} = \sqrt{16 - 4k}$ 이므로 $\sqrt{16 - 4k} = 2\sqrt{2}$ 이다. 양변을 제곱하면 $16 - 4k = 8$이므로 $k = 2$이다. 이때 판별식 $D = 16 - 4k = 8 > 0$이므로 서로 다른 두 실근 조건도 만족한다.

💡 이차방정식 두 근의 차는 $|\alpha - \beta| = \dfrac{\sqrt{D}}{|a|}$로 판별식과 직접 연결되어 있다.

Q114 다항식

두 다항식 $A = 2x^2 - 3x + 1$, $B = -x^2 + 4x + 2$에 대하여 $2A - B$를 간단히 한 것은?

①) ① $3x^2 - 10x$

②) ② $5x^2 - 10x$

③) ③ $5x^2 + 2x$

④) ④ $3x^2 + 2x + 4$

🎯 **정답:** ②

📖 먼저 $2A = 4x^2 - 6x + 2$를 구한다. 그러면

$2A - B = (4x^2 - 6x + 2) - (-x^2 + 4x + 2) = 4x^2 - 6x + 2 + x^2 - 4x - 2 = 5x^2 - 10x$. 동류항끼리 정리하면 답은 ②.

💡 다항식의 사칙연산은 실수의 연산법칙(교환·결합·분배)을 그대로 따른다.

Q115 복소수와 이차방정식

$i+i^2+i^3+i^4+\cdots+i^{10}$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

①) ① $-1+i$

②) ② $-1-i$

③) ③ $1+i$

④) ④ 0

🎯 **정답: ①**

📖 $i^1, i^2, i^3, i^4 = i, -1, -i, 1$이고 그 합은 0이다. 거듭제곱은 4를 주기로 반복되므로 $i+i^2+\cdots+i^8=0$. 남는 것은 i^9+i^{10}이고 $i^9=i^{4\cdot 2+1}=i$, $i^{10}=i^{4\cdot 2+2}=i^2=-1$이다. 따라서 합은 $i+(-1)=-1+i$.

💡 i의 거듭제곱은 $i, -1, -i, 1$이 4개씩 주기적으로 반복되어 합이 0이 된다.

Q116 함수

다음 중 실수 전체의 집합에서 정의된 함수가 아닌 것은?

①) ① $f(x)=x^2+1$

②) ② $f(x)=|x|-3$

③) ③ $f(x)=\frac{1}{x}$

④) ④ $f(x)=2x-5$

🎯 **정답: ③**

📖 함수가 실수 전체에서 정의되려면 모든 실수 x에 대하여 함숫값이 하나로 정해져야 한다. ①, ②, ④는 임의의 실수 x에 대해 함숫값이 정의된다. 그러나 ③ $f(x)=\frac{1}{x}$는 $x=0$에서 분모가 0이 되어 정의되지 않으므로 실수 전체의 집합에서 정의된 함수가 아니다.

💡 함수의 핵심 조건은 '정의역의 모든 원소에 정확히 하나의 함숫값이 대응'하는 것이다.

Q117 다항식

다항식 $P(x)=x^3-4x^2+5x-2$를 $x-1$로 나눈 몫은?

①) ① x^2-3x+2

②) ② x^2-4x+1

③) ③ x^2+3x-2

④) ④ x^2-5x+7

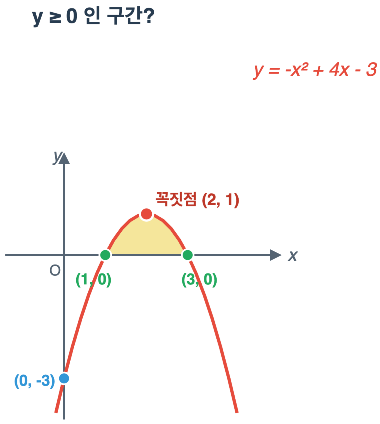
🎯 **정답: ①**

📖 조립제법을 이용한다. 계수 $1, -4, 5, -2$를 나열하고 나누는 수 1을 적용한다. 첫 항 1을 그대로 내리고 $1\times1=1$, $-4+1=-3$. 다시 $-3\times1=-3$, $5+(-3)=2$. $2\times1=2$, $-2+2=0$(나머지). 따라서 몫의 계수는 $1, -3, 2$이고 몫은 x^2-3x+2.

💡 조립제법은 일차식 $x-a$로 나눌 때만 사용 가능한 빠른 계산법이다.

Q118 이차함수와 이차부등식

그림은 이차함수 $y = -x^2 + 4x - 3$의 그래프이다. 부등식 $-x^2 + 4x - 3 \geq 0$의 해는?



①) ① $x \leq 1$ 또는 $x \geq 3$

②) ② $1 \leq x \leq 3$

③) ③ $1 < x < 3$

④) ④ $x \leq -3$ 또는 $x \geq -1$

🎯 **정답: ②**

📖 부등식 $-x^2 + 4x - 3 \geq 0$은 그래프에서 $y \geq 0$인 x의 범위를 묻는 것과 같다. 양변에 -1을 곱하면 부등호 방향이 바뀌어 $x^2 - 4x + 3 \leq 0$, 즉 $(x-1)(x-3) \leq 0$이므로 $1 \leq x \leq 3$. 그래프에서 곡선이 x축 위 또는 x축에 있는 구간이다.

💡 부등호에 등호가 포함되면 x절편(=경계)도 해에 포함된다.

Q119 복소수와 이차방정식

복소수 $z = 1 + 2i$에 대하여 $z\bar{z} + (z + \bar{z})$의 값은? (단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수)

①) ① 5

②) ② 7

③) ③ 9

④) ④ $4 + 2i$

🎯 **정답: ②**

📖 $\bar{z} = 1 - 2i$이다. 켤레복소수의 곱은 실수가 되어 $z\bar{z} = (1+2i)(1-2i) = 1^2 - (2i)^2 = 1 - (-4) = 5$. 또 $z + z = (1+2i) + (1-2i) = 2$. 따라서 $zz + (z + z) = 5 + 2 = 7$.

💡 $z\bar{z} = |z|^2$, $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$로 둘 다 항상 실수다.

Q120 방정식과 부등식 활용

연립방정식 $\begin{cases} y = x + 1 \\ y = x^2 - 1 \end{cases}$ 의 두 해를 (x_1, y_1), (x_2, y_2)라 할 때 $x_1 + x_2$의 값은?

①) ① -1

②) ② 0

③) ③ 1

④) ④ 2

🎯 **정답: ③**

📖 두 식에서 y를 소거하면 $x + 1 = x^2 - 1$, 정리하면 $x^2 - x - 2 = 0$. 인수분해 $(x - 2)(x + 1) = 0$이므로 $x = 2$ 또는 $x = -1$이다. 따라서 $x_1 + x_2 = 2 + (-1) = 1$. (근과 계수의 관계로 두 근의 합은 $-\frac{-1}{1} = 1$로도 즉시 구할 수 있다.)

💡 직선과 포물선의 교점을 구하는 표준 절차는 '한 변수를 소거 후 이차방정식'으로 귀결된다.

📝 고1 수학 일반

총 40문제 · 문제와 정답·풀이 포함

Q121 함수

함수 $f(x) = -x^2 + 4x + 1$의 정의역이 $\{x \mid 0 \le x \le 3\}$일 때, 이 함수의 치역은?

①) ① $\{y \mid 1 \le y \le 5\}$
②) ② $\{y \mid 0 \le y \le 5\}$
③) ③ $\{y \mid 1 \le y \le 4\}$
④) ④ $\{y \mid -3 \le y \le 5\}$

🎯 **정답: ①**

📖 $f(x) = -(x^2 - 4x) + 1 = -(x-2)^2 + 5$로 표준형 변환. 위로 볼록, 꼭짓점 $(2, 5)$. 정의역 $0 \le x \le 3$에 꼭짓점 $x = 2$가 포함되므로 최댓값은 $f(2) = 5$. 양 끝의 함숫값 $f(0) = 1$, $f(3) = -9 + 12 + 1 = 4$ 중 작은 값이 최솟값이므로 최솟값은 $f(0) = 1$. 따라서 치역은 $\{y \mid 1 \le y \le 5\}$.

💡 제한된 정의역 위 이차함수의 치역은 '꼭짓점이 구간 내에 있는지'와 '양 끝값'을 함께 살펴야 한다.

Q122 경우의 수

문자 P, A, R, A, L, L, E, L 8개를 일렬로 나열하는 방법의 수는?

①) ① 1680
②) ② 3360
③) ③ 6720
④) ④ 40320

🎯 **정답: ②**

📖 8개의 문자 중 A가 2개, L이 3개로 같은 문자가 있다. 같은 것이 있는 순열 공식에 따라 $\frac{8!}{2!\,3!} = \frac{40320}{2 \times 6} = \frac{40320}{12} = 3360$.

💡 단어 'PARALLEL'은 영어의 흔한 단어이지만 같은 문자가 많아 좋은 같은것순열 예시다.

Q123 함수

$x \ge 2$에서 정의된 함수 $f(x) = x^2 - 4x + 3$의 역함수를 f^{-1}이라 할 때, $f^{-1}(0)$의 값은?

①) ① 1
②) ② 2
③) ③ 3
④) ④ 4

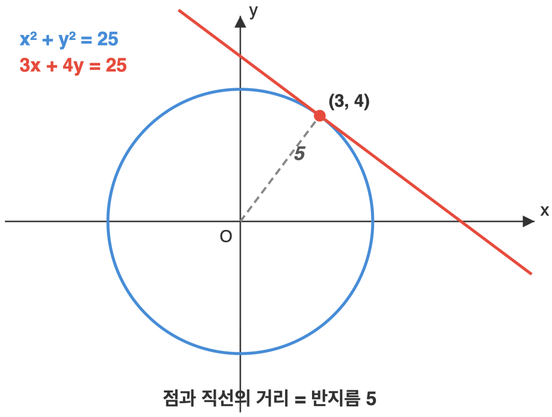
🎯 **정답: ③**

📖 역함수의 정의에 의해 $f^{-1}(0) = a$이면 $f(a) = 0$이다. 방정식 $a^2 - 4a + 3 = 0$, 즉 $(a-1)(a-3) = 0$의 해는 $a = 1$ 또는 $a = 3$이다. 정의역 조건 $x \ge 2$에 의해 $a = 3$만 적합. 한편 $f(x) = (x-2)^2 - 1$로 표준형이며 $x \ge 2$에서 단조증가하므로 일대일대응이고, 역함수가 잘 정의된다.

💡 이차함수가 일대일대응이 되도록 정의역을 꼭짓점 한쪽으로 제한하면 역함수가 존재한다.

Q124 도형의 방정식

원 $x^2 + y^2 = 25$와 직선 $3x + 4y = k$가 접할 때, 양수 k의 값을 구하시오.



①) ① 15
②) ② 20
③) ③ 25
④) ④ 30

정답: ③

📖 원과 직선이 접할 조건은 '원의 중심에서 직선까지의 거리 = 반지름'이다. 원의 중심은 $(0, 0)$, 반지름은 5. 직선 $3x + 4y - k = 0$에 대한 점과 직선의 거리 공식: $\frac{|3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 - k|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|k|}{5}$. 이 값이 5이므로 $|k| = 25$. k가 양수이므로 $k = 25$.

💡 $3, 4, 5$는 가장 작은 정수 피타고라스 수로 분모 $\sqrt{9 + 16} = 5$가 깔끔하게 떨어진다.

Q125 집합과 명제

모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^2 - 2ax + 4 > 0$이 성립하도록 하는 정수 a의 개수는?

①) ① 1
②) ② 2
③) ③ 3
④) ④ 4

정답: ③

📖 이차항 계수 $1 > 0$이므로 $x^2 - 2ax + 4$의 그래프는 아래로 볼록. 모든 실수 x에 대해 양수가 되려면 그래프가 x축과 만나지 않아야 하며, 이는 판별식이 음수일 조건과 동치다. $\frac{D}{4} = a^2 - 4 < 0$, 즉 $a^2 < 4$이므로 $-2 < a < 2$. 이 범위의 정수는 $-1, 0, 1$로 총 3개.

💡 '모든 실수에 대해 성립'하는 이차부등식 문제는 거의 항상 판별식 부호 조건으로 환원된다.

Q126 종합 활용

다항식 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$가 $f(1) = 0,\ f(-1) = 0,\ f(2) = 6$을 모두 만족할 때, $f(3)$의 값은?

①) ① 20

②) ② 24

③) ③ 28

④) ④ 30

🎯 **정답: ②**

📖 $f(1) = 0,\ f(-1) = 0$이므로 $f(x)$는 $(x-1)$과 $(x+1)$을 인수로 갖는다. $f(x)$가 삼차이고 최고차항 계수가 1이므로 $f(x) = (x-1)(x+1)(x-r) = (x^2-1)(x-r)$로 둘 수 있다. $f(2) = (4-1)(2-r) = 3(2-r) = 6$이므로 $2 - r = 2$, 즉 $r = 0$. 따라서 $f(x) = x(x^2-1) = x^3 - x$이고, $f(3) = 27 - 3 = 24$.

💡 세 조건이 주어진 삼차다항식 문제는 두 개의 근을 활용해 인수분해 형태로 표현하는 것이 핵심이다.

Q127 다항식

다항식 $f(x) = 2x^3 - x^2 + 4x - 7$을 $x - 2$로 나눈 나머지를 구하시오.

①) ① 9

②) ② 11

③) ③ 13

④) ④ 15

🎯 **정답: ③** 13

📖 나머지정리에 의해 다항식 $f(x)$를 $x - 2$로 나눈 나머지는 $f(2)$와 같다. $f(2) = 2 \cdot 2^3 - 2^2 + 4 \cdot 2 - 7 = 16 - 4 + 8 - 7 = 13$이다.

💡 조립제법을 쓰면 몫과 나머지를 동시에 빠르게 구할 수 있어요.

Q128 복소수와 이차방정식

복소수 $z = 3 - 2i$에 대하여 $z\bar{z} - (z + \bar{z})$의 값을 구하시오.

①) ① 5

②) ② 6

③) ③ 7

④) ④ 8

🎯 **정답: ③** 7

📖 $\bar{z} = 3 + 2i$이므로 $z + \bar{z} = 6$이다. 또 $z\bar{z} = (3-2i)(3+2i) = 3^2 - (2i)^2 = 9 + 4 = 13$이다. 따라서 $z\bar{z} - (z + \bar{z}) = 13 - 6 = 7$.

💡 $z\bar{z}$는 복소수 z의 절댓값의 제곱과 같아요.

Q129 집합과 명제

실수 x에 대한 두 조건 $p: x > 2$, $q: x^2 > 4$에 대하여 p는 q이기 위한 어떤 조건인가?

①) ① 필요조건이지만 충분조건은 아니다

②) ② 충분조건이지만 필요조건은 아니다

③) ③ 필요충분조건이다

④) ④ 필요조건도 충분조건도 아니다

🎯 **정답: ② 충분조건이지만 필요조건은 아니다**

📖 $p \Rightarrow q$: $x > 2$이면 양수의 제곱이 커지므로 $x^2 > 4$이다 (참). $q \Rightarrow p$: $x^2 > 4$이면 $x > 2$ 또는 $x < -2$이므로 항상 $x > 2$인 것은 아니다. 예를 들어 $x = -3$은 $x^2 = 9 > 4$를 만족하지만 $x > 2$를 만족하지 않으므로 반례가 된다. 따라서 p는 q의 충분조건이지만 필요조건은 아니다.

💡 진리집합이 $P \subset Q$이고 $P \neq Q$이면 p는 q의 충분조건이지만 필요조건은 아니에요.

Q130 경우의 수

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 두 눈의 수의 합이 7 또는 11이 되는 경우의 수를 구하시오.

①) ① 6

②) ② 7

③) ③ 8

④) ④ 9

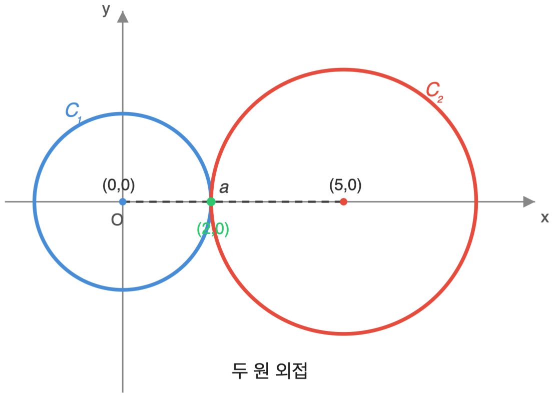
🎯 **정답: ③ 8**

📖 두 사건은 동시에 일어날 수 없으므로 합의 법칙을 쓴다. 합이 7인 경우: $(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)$의 6가지. 합이 11인 경우: $(5, 6), (6, 5)$의 2가지. 따라서 구하는 경우의 수는 $6 + 2 = 8$가지이다.

💡 두 주사위의 합 중 가장 자주 나오는 값은 7, 가장 드문 값은 2와 12예요.

Q131 도형의 방정식

두 원 $C_1 : x^2 + y^2 = 4$와 $C_2 : (x - a)^2 + y^2 = 9$가 서로 외접할 때, 양수 a의 값을 구하시오.



①) ① 3
②) ② 4
③) ③ 5
④) ④ 6

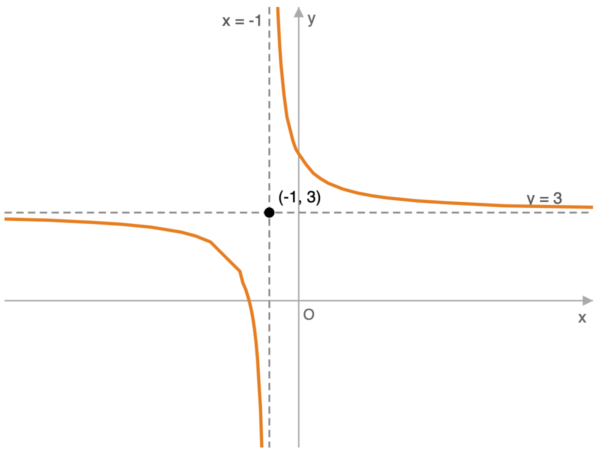
🎯 **정답:** ③ 5

📖 두 원 C_1, C_2의 중심은 각각 $(0, 0)$, $(a, 0)$이고 반지름은 $r_1 = 2$, $r_2 = 3$이다. 두 원이 외접할 조건은 두 원의 중심 사이의 거리가 두 반지름의 합과 같은 것이므로 $|a| = r_1 + r_2 = 2 + 3 = 5$이다. $a > 0$이므로 $a = 5$.

💡 두 원이 내접할 때는 중심거리가 두 반지름의 차의 절댓값과 같아요.

Q132 함수

유리함수 $y = \dfrac{3x + 5}{x + 1}$의 두 점근선의 교점의 좌표를 구하시오.



①) ① $(-1, 3)$
②) ② $(1, 3)$
③) ③ $(-1, -3)$
④) ④ $(1, -3)$

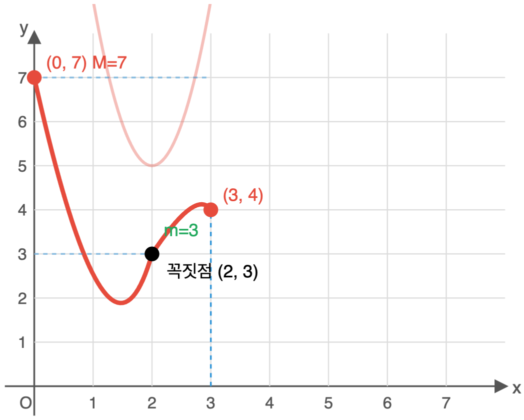
🎯 **정답:** ① $(-1, 3)$

📖 분자를 분모로 나누어 정리하면 $y = \dfrac{3x + 5}{x + 1} = \dfrac{3(x + 1) + 2}{x + 1} = 3 + \dfrac{2}{x + 1}$이다. 즉, $y = \dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축 방향으로 -1, y축 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프이므로 점근선은 $x = -1$, $y = 3$이다. 따라서 두 점근선의 교점은 $(-1, 3)$이다.

💡 유리함수의 두 점근선의 교점은 그래프 자체의 대칭의 중심이에요.

Q133 이차함수와 이차부등식

$0 \le x \le 3$에서 함수 $f(x) = x^2 - 4x + 7$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M + m$의 값을 구하시오.



①) ① 8

②) ② 9

③) ③ 10

④) ④ 11

🎯 **정답:** ③ 10

📖 $f(x) = x^2 - 4x + 7 = (x-2)^2 + 3$이고 꼭짓점의 x좌표 $x = 2$가 정의역 $[0, 3]$에 속한다. 따라서 최솟값은 $f(2) = 3$, 즉 $m = 3$. 양 끝값을 비교하면 $f(0) = 7$, $f(3) = 4$이므로 최댓값은 $f(0) = 7$, 즉 $M = 7$. 따라서 $M + m = 7 + 3 = 10$.

💡 포물선의 대칭축에서 더 멀리 떨어진 끝점이 최댓값을 가져요.

Q134 복소수와 이차방정식

복소수 $z = \dfrac{1+i}{1-i}$일 때, z^{50}의 값을 구하시오.

①) ① 1

②) ② -1

③) ③ i

④) ④ $-i$

🎯 **정답:** ② -1

📖 분자와 분모에 $1 + i$를 곱해 분모를 실수화하면 $z = \dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \dfrac{1+2i+i^2}{1-i^2} = \dfrac{2i}{2} = i$이다. 따라서 $z^{50} = i^{50} = (i^2)^{25} = (-1)^{25} = -1$.

💡 $\dfrac{1+i}{1-i} = i$는 복소평면에서 90도 회전을 의미해요.

Q135 방정식과 부등식 활용

방정식 $|2x-1|+|x+2|=6$의 모든 실근의 합을 구하시오.

①) ① -1

②) ② $-\frac{2}{3}$

③) ③ $\frac{2}{3}$

④) ④ 1

🎯 **정답:** ② $-\frac{2}{3}$

📖 절댓값 안의 식의 부호가 바뀌는 $x=\frac{1}{2}$, $x=-2$를 기준으로 구간을 나눈다. (i) $x \geq \frac{1}{2}$: $(2x-1)+(x+2)=6$, 즉 $3x+1=6$, $x=\frac{5}{3}$ (조건 만족). (ii) $-2 \leq x < \frac{1}{2}$: $-(2x-1)+(x+2)=6$, 즉 $-x+3=6$, $x=-3$ (구간 조건 불만족, 버림). (iii) $x<-2$: $-(2x-1)-(x+2)=6$, 즉 $-3x-1=6$, $x=-\frac{7}{3}$ (조건 만족). 모든 실근의 합은 $\frac{5}{3}+\left(-\frac{7}{3}\right)=-\frac{2}{3}$이다.

💡 절댓값 방정식은 부호가 바뀌는 점들로 수직선을 나누어 푸는 게 정석이에요.

Q136 다항식

다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지가 3이고, $x+2$로 나눈 나머지가 -3일 때, $f(x)$를 $(x-1)(x+2)$로 나눈 나머지를 구하시오.

①) ① $2x+1$

②) ② $2x-1$

③) ③ $-2x+1$

④) ④ $x+2$

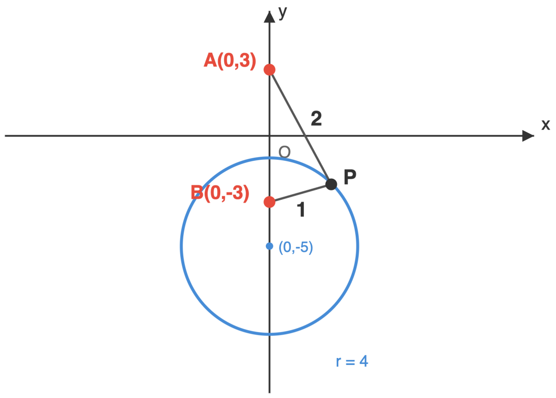
🎯 **정답:** ① $2x+1$

📖 $(x-1)(x+2)$는 이차식이므로 나머지는 일차 이하의 다항식 $R(x)=ax+b$로 둘 수 있다. 즉, $f(x)=(x-1)(x+2)Q(x)+ax+b$이다. 나머지정리에 의해 $f(1)=a+b=3$, $f(-2)=-2a+b=-3$. 두 식을 빼면 $3a=6$, $a=2$. 첫 식에 대입하면 $b=1$. 따라서 나머지는 $2x+1$이다.

💡 n차식으로 나눈 나머지는 항상 $n-1$차 이하의 다항식이에요.

Q137 도형의 방정식

두 점 $A(0,3)$, $B(0,-3)$에 대하여 $\overline{PA}:\overline{PB}=2:1$을 만족하는 점 P의 자취가 나타내는 도형으로 옳은 것은?



①) ① 중심 $(0,-5)$, 반지름 4인 원
②) ② 중심 $(0,5)$, 반지름 4인 원
③) ③ 중심 $(0,-5)$, 반지름 3인 원
④) ④ 직선 $y=-2$

정답: ① 중심 $(0,-5)$, 반지름 4인 원

📖 $P(x,y)$로 두면 $\overline{PA}=2\overline{PB}$, 즉 $\overline{PA}^2=4\overline{PB}^2$이다. $x^2+(y-3)^2=4\{x^2+(y+3)^2\}$를 전개하면 $x^2+y^2-6y+9=4x^2+4y^2+24y+36$. 정리하면 $3x^2+3y^2+30y+27=0$, 양변을 3으로 나누면 $x^2+y^2+10y+9=0$. 완전제곱하면 $x^2+(y+5)^2=16$이다. 따라서 자취는 중심 $(0,-5)$, 반지름 4인 원이다.

💡 두 정점에서 거리의 비가 일정한 점들의 자취를 '아폴로니우스의 원'이라고 불러요.

Q138 함수

두 일차함수 $f(x)=2x+3$과 $g(x)=ax+b$에 대하여 모든 실수 x에서 $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$가 성립하고, $g(2)=7$일 때, 상수 $a+b$의 값을 구하시오.

①) ① 3
②) ② 4
③) ③ 5
④) ④ 6

정답: ③ 5

📖 $(f\circ g)(x)=f(ax+b)=2(ax+b)+3=2ax+2b+3$이고, $(g\circ f)(x)=g(2x+3)=a(2x+3)+b=2ax+3a+b$이다. 모든 x에서 두 식이 같으려면 상수항이 같아야 하므로 $2b+3=3a+b$, 즉 $b=3a-3$. 또 $g(2)=2a+b=7$이므로 두 식을 연립하면 $2a+(3a-3)=7$, $5a=10$, 따라서 $a=2$, $b=3$. 그러므로 $a+b=5$.

💡 두 함수의 합성이 어느 순서로도 같으려면 계수에 특별한 관계가 필요해요.

Q139 방정식과 부등식 활용

방정식 $(x^2-x)^2-8(x^2-x)+12=0$의 모든 실근의 합을 구하시오.

①) ① 0

②) ② 1

③) ③ 2

④) ④ 3

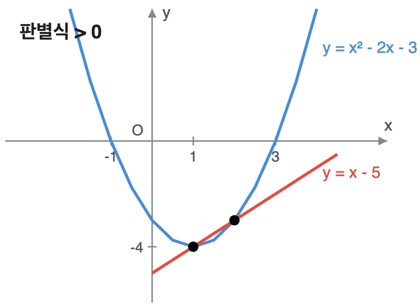
정답: ③ 2

$t=x^2-x$로 치환하면 $t^2-8t+12=0$, $(t-2)(t-6)=0$이므로 $t=2$ 또는 $t=6$이다. (i) $x^2-x=2$: $x^2-x-2=0$, $(x-2)(x+1)=0$이므로 $x=2$ 또는 $x=-1$. (ii) $x^2-x=6$: $x^2-x-6=0$, $(x-3)(x+2)=0$이므로 $x=3$ 또는 $x=-2$. 모든 실근은 $2, -1, 3, -2$이고 그 합은 $2+(-1)+3+(-2)=2$이다.

공통식이 보이면 치환으로 사차방정식을 이차방정식으로 줄일 수 있어요.

Q140 종합 활용

이차함수 $y=x^2-2x-3$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 정수 k의 최솟값을 구하시오.



①) ① -7

②) ② -6

③) ③ -5

④) ④ -4

정답: ③ -5

두 그래프의 교점의 x좌표는 $x^2-2x-3=x+k$, 즉 $x^2-3x-(3+k)=0$의 실근이다. 서로 다른 두 점에서 만나려면 이 이차방정식의 판별식이 양수여야 한다. $D=(-3)^2-4\cdot1\cdot\{-(3+k)\}=9+4(3+k)=21+4k>0$, 즉 $k>-\frac{21}{4}=-5.25$이다. 따라서 정수 k의 최솟값은 -5이다.

k가 작아질수록 직선은 아래로 내려가다 어느 순간 포물선과 만나지 못해요.

Q141 복소수와 이차방정식

$\dfrac{1+i}{1-i}+\dfrac{1-i}{1+i}$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

①) ① -2

②) ② 0

③) ③ 2

④) ④ $2i$

🎯 **정답:** ② 0

📖 통분하면 $\dfrac{(1+i)^2+(1-i)^2}{(1-i)(1+i)}$. 분모: $1-i^2=1-(-1)=2$. 분자: $(1+2i+i^2)+(1-2i+i^2)=2i+(-2i)=0$. 따라서 값은 $\dfrac{0}{2}=0$.

💡 $z+\bar{z}$는 항상 실수이고, 본 식은 켤레쌍의 비끼리 더한 형태라 실수가 된다.

Q142 집합과 명제

전체집합 $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$의 두 부분집합 $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{2,4,6,8\}$에 대하여 $A^c\cap B$의 모든 원소의 합은?

①) ① 8

②) ② 10

③) ③ 12

④) ④ 14

🎯 **정답:** ④ 14

📖 여집합 $A^c=U-A=\{6,7,8\}$. $A^c\cap B$는 두 집합 모두에 속하는 원소: $\{6,8\}$. 원소의 합은 $6+8=14$.

💡 $A^c\cap B$는 차집합 $B-A$와 같으므로 'B에는 있고 A에는 없는 원소'를 찾으면 된다.

Q143 경우의 수

6명의 동아리 부원 중에서 회장과 부회장을 각각 한 명씩 뽑는 방법의 수는? (단, 한 명이 두 직책을 겸할 수 없다.)

①) ① 15

②) ② 20

③) ③ 30

④) ④ 36

🎯 **정답:** ③ 30

📖 먼저 회장을 뽑는 경우의 수는 6가지. 회장이 정해진 후 남은 5명 중에서 부회장을 뽑는 경우의 수는 5가지. 곱의 법칙에 의하여 $6\times5=30$. 이는 순열 ${}_6P_2=30$과 같다.

💡 직책에 구별이 없으면 조합 ${}_6C_2=15$이므로, 순열은 그 두 배가 된다.

Q144 함수

함수 $f(x) = 3x + 2$에 대하여 $(f \circ f \circ f)(1)$의 값은?

①) ① 26

②) ② 44

③) ③ 53

④) ④ 80

🎯 **정답:** ③ 53

📖 안에서부터 차례로 계산한다. $f(1) = 3 \cdot 1 + 2 = 5$. $f(f(1)) = f(5) = 3 \cdot 5 + 2 = 17$. $(f \circ f \circ f)(1) = f(f(f(1))) = f(17) = 3 \cdot 17 + 2 = 53$.

💡 $f(x) = ax + b$를 n번 합성하면 $a^n x + b \cdot \dfrac{a^n - 1}{a - 1}$ 꼴이 된다 $(a \neq 1)$.

Q145 복소수와 이차방정식

이차방정식 $x^2 - 4x + 7 = 0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha^3 + \beta^3$의 값은?

①) ① -20

②) ② -8

③) ③ 8

④) ④ 20

🎯 **정답:** ① -20

📖 근과 계수의 관계에서 $\alpha + \beta = 4$, $\alpha\beta = 7$. 곱셈공식 $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$를 이용하면 $4^3 - 3 \cdot 7 \cdot 4 = 64 - 84 = -20$.

💡 판별식 $D = 16 - 28 = -12 < 0$이므로 두 근은 켤레인 허근이지만, 그 합과 곱(그리고 세제곱합)은 모두 실수이다.

Q146 방정식과 부등식 활용

부등식 $|2x - 3| < 5$의 해는?

①) ① $-1 < x < 4$

②) ② $-1 \leq x \leq 4$

③) ③ $0 < x < 4$

④) ④ $-4 < x < 1$

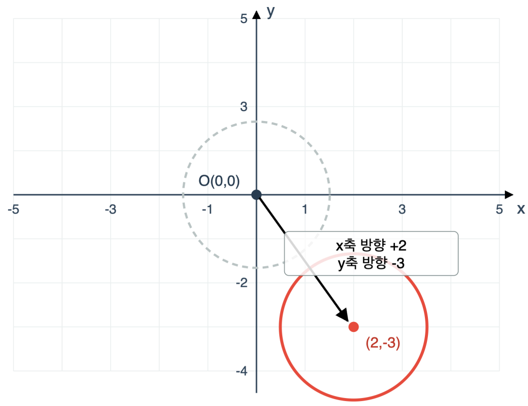
🎯 **정답:** ① $-1 < x < 4$

📖 $|A| < k$ $(k > 0)$는 $-k < A < k$와 동치이다. 따라서 $|2x - 3| < 5$는 $-5 < 2x - 3 < 5$. 각 변에 3을 더하면 $-2 < 2x < 8$, 양변을 2로 나누면 $-1 < x < 4$.

💡 $|A| < k$는 '사이' 영역, $|A| > k$는 '바깥' 영역으로 외워두면 절댓값 부등식을 빠르게 풀 수 있다.

Q147 도형의 방정식

원 $x^2 + y^2 = 10$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 원의 방정식은?



①) ① $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 10$

②) ② $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 10$

③) ③ $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 10$

④) ④ $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 10$

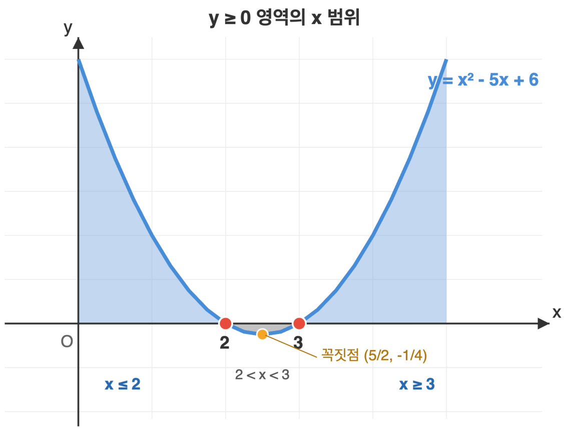
🎯 **정답:** ① $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 10$

📖 도형 $f(x, y) = 0$을 x축 방향 a, y축 방향 b만큼 평행이동하면 $f(x-a, y-b) = 0$이 된다. $a = 2$, $b = -3$이므로 $x \to x-2$, $y \to y-(-3) = y+3$을 대입. 따라서 $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 10$. 새 원의 중심은 $(2, -3)$, 반지름은 그대로 $\sqrt{10}$ 이다.

💡 평행이동은 도형의 모양과 크기를 보존하므로 반지름은 변하지 않고 중심만 같은 벡터만큼 이동한다.

Q148 이차함수와 이차부등식

이차부등식 $x^2 - 5x + 6 \geq 0$의 해는?



①) ① $2 \leq x \leq 3$

②) ② $x \leq 2$ 또는 $x \geq 3$

③) ③ $2 < x < 3$

④) ④ $x < 2$ 또는 $x > 3$

🎯 **정답:** ② $x \leq 2$ **또는** $x \geq 3$

📖 $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$로 인수분해된다. 부등식 $(x-2)(x-3) \geq 0$의 해는 두 근 $2, 3$의 '바깥' 영역이므로 $x \leq 2$ 또는 $x \geq 3$. 등호가 포함되어 있으므로 경계값 $x = 2, 3$도 해에 포함된다.

💡 이차항 계수가 양수일 때 ≥ 0은 두 근의 '바깥', ≤ 0은 두 근의 '사이'로 외워두면 빠르게 판단할 수 있다.

Q149 집합과 명제

실수 x, y에 대한 명제 "$xy = 0$이면 $x = 0$ 또는 $y = 0$이다"의 대우는?

①) ① $x = 0$ 또는 $y = 0$이면 $xy = 0$이다
②) ② $x \neq 0$이고 $y \neq 0$이면 $xy \neq 0$이다
③) ③ $xy \neq 0$이면 $x \neq 0$이고 $y \neq 0$이다
④) ④ $x \neq 0$ 또는 $y \neq 0$이면 $xy \neq 0$이다

🎯 **정답: ② $x \neq 0$이고 $y \neq 0$이면 $xy \neq 0$이다**

📖 명제 '$p \to q$'의 대우는 '$\sim q \to \ \sim p$'이다. 결론 q인 '$x = 0$ 또는 $y = 0$'의 부정은 '$x \neq 0$이고 $y \neq 0$' (또는 → 그리고). 가정 p인 '$xy = 0$'의 부정은 '$xy \neq 0$'. 따라서 대우는 '$x \neq 0$이고 $y \neq 0$이면 $xy \neq 0$이다'.

💡 명제와 그 대우의 진리값은 항상 일치한다. 이 명제와 대우는 모두 참이며, 실수 곱이 영인자를 갖지 않음을 나타낸다.

Q150 함수

함수 $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$ $(x \neq 1)$에 대하여 $f^{-1}(3)$의 값은?

①) ① 1
②) ② 2
③) ③ 3
④) ④ 4

🎯 **정답: ④ 4**

📖 $f^{-1}(3) = k$라 하면 $f(k) = 3$이다. 즉 $\dfrac{2k+1}{k-1} = 3$. 양변에 $k-1$을 곱하면 $2k+1 = 3(k-1) = 3k-3$. 정리하면 $k = 4$. 검산: $f(4) = \dfrac{2 \cdot 4 + 1}{4-1} = \dfrac{9}{3} = 3$. ✓

💡 역함수의 한 점 값은 굳이 역함수 식을 만들 필요 없이 정의 $f(k) = a$에서 k를 푸는 것이 더 빠른 경우가 많다.

Q151 복소수와 이차방정식

이차방정식 $x^2 + x + 1 = 0$의 한 허근을 ω라 할 때, $\omega^{10} + \omega^{20} + 1$의 값은?

①) ① -1
②) ② 0
③) ③ 1
④) ④ 2

🎯 **정답: ② 0**

📖 $x^2 + x + 1 = 0$의 양변에 $x - 1$을 곱하면 $x^3 - 1 = 0$이므로 $\omega^3 = 1$. 따라서 $\omega^{10} = \omega^{3 \cdot 3 + 1} = \omega^1 = \omega$, $\omega^{20} = \omega^{3 \cdot 6 + 2} = \omega^2$. 그러므로 $\omega^{10} + \omega^{20} + 1 = \omega + \omega^2 + 1$. ω가 원래 방정식의 근이므로 $\omega^2 + \omega + 1 = 0$. 따라서 값은 0.

💡 1의 세제곱근 중 허수해 ω는 $\omega^3 = 1$, $1 + \omega + \omega^2 = 0$ 두 항등식만으로 모든 거듭제곱 계산을 단순화한다.

Q152 방정식과 부등식 활용

사차방정식 $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$의 모든 실근의 곱은?

①) ① -4

②) ② -2

③) ③ 2

④) ④ 4

🎯 **정답:** ④ 4

📖 $t = x^2$으로 치환하면 $t^2 - 5t + 4 = 0$, 즉 $(t-1)(t-4) = 0$이므로 $t = 1$ 또는 $t = 4$. 다시 대입하면 $x^2 = 1$에서 $x = \pm 1$, $x^2 = 4$에서 $x = \pm 2$. 네 실근은 $-2, -1, 1, 2$이고 그 곱은 $(-2)\cdot(-1)\cdot 1 \cdot 2 = 4$.

💡 근과 계수의 관계로도 사차방정식 $x^4 + \cdots + c = 0$의 모든 근의 곱은 상수항 $c = 4$로 바로 확인할 수 있다.

Q153 종합 활용

연립부등식 $\begin{cases} x^2 - 3x - 4 \le 0 \\ x^2 - 5x + 6 > 0 \end{cases}$ 를 만족시키는 정수 x의 개수는?

①) ① 3

②) ② 4

③) ③ 5

④) ④ 6

🎯 **정답:** ② 4

📖 첫째 부등식: $(x-4)(x+1) \le 0$이므로 $-1 \le x \le 4$. 둘째 부등식: $(x-2)(x-3) > 0$이므로 $x < 2$ 또는 $x > 3$. 두 해의 공통부분은 $-1 \le x < 2$ 또는 $3 < x \le 4$. 첫 구간의 정수: $-1, 0, 1$ (3개). 둘째 구간의 정수: 4 (1개). 합쳐서 4개.

💡 연립이차부등식은 각 해를 수직선에 표시한 후 공통 영역을 찾는 것이 가장 직관적이고 빠르다.

Q154 다항식

다항식 $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x + 2$를 일차식 $x - 3$으로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

①) ① 6

②) ② 7

③) ③ 8

④) ④ 9

🎯 **정답: ③ 8**

📖 나머지정리에 의해, 다항식 $f(x)$를 $x - a$로 나눈 나머지는 $f(a)$이다.
따라서 $x - 3$으로 나눈 나머지는 $f(3)$이다.
$f(3) = 3^3 - 4\cdot 3^2 + 5\cdot 3 + 2$
$= 27 - 36 + 15 + 2 = 8$
그러므로 나머지는 8이다.

💡 나머지정리는 18세기에 베주(Bezout)가 정리한 결과로, 다항식 나눗셈을 직접 하지 않고도 나머지를 빠르게 구할 수 있게 해준다.

Q155 함수

유리함수 $y = \dfrac{2}{x-3} + 1$의 그래프의 두 점근선의 방정식을 모두 고른 것은?

①) ① $x = 3,\ y = 1$

②) ② $x = -3,\ y = -1$

③) ③ $x = 3,\ y = -1$

④) ④ $x = -3,\ y = 1$

정답: ① $x = 3,\ y = 1$

📖 유리함수 $y = \dfrac{k}{x-p} + q\ (k \neq 0)$의 그래프는 $y = \dfrac{k}{x}$의 그래프를 x축 방향으로 p만큼, y축 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.
주어진 함수는 $p = 3,\ q = 1$이므로 두 점근선은 $x = 3,\ y = 1$이다.

💡 유리함수의 그래프는 두 점근선의 교점을 대칭의 중심으로 하는 점대칭 도형이다.

Q156 다항식

두 다항식 $A = 2x^2 - 3x + 1,\ B = -x^2 + 5x - 4$에 대하여 $A + 2B$를 간단히 나타내면?

①) ① $7x - 7$

②) ② $-7x + 7$

③) ③ $4x^2 + 7x - 7$

④) ④ $-4x^2 + 7x - 7$

정답: ① $7x - 7$

📖 $A + 2B = (2x^2 - 3x + 1) + 2(-x^2 + 5x - 4)$
$= 2x^2 - 3x + 1 - 2x^2 + 10x - 8$
$= (2-2)x^2 + (-3+10)x + (1-8)$
$= 7x - 7$

💡 다항식의 덧셈과 뺄셈은 동류항끼리 모아서 정리하는 것이 핵심이다.

Q157 집합과 명제

전체집합 $U = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$의 두 부분집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\},\ B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$에 대하여 $n(A^c \cap B)$의 값은?

①) ① 2

②) ② 3

③) ③ 4

④) ④ 5

정답: ② 3

📖 A^c는 U에서 A에 속하지 않는 원소의 집합이다.
$A^c = \{6, 7, 8, 9, 10\}$
$A^c \cap B = \{6, 7, 8, 9, 10\} \cap \{2, 4, 6, 8, 10\} = \{6, 8, 10\}$
따라서 $n(A^c \cap B) = 3$

💡 $A^c \cap B = B - A$임을 알면 B에서 A의 원소를 빼는 방식으로도 빠르게 구할 수 있다.

Q158 함수

무리함수 $y = \sqrt{6-3x} + 2$의 정의역을 부등식으로 나타내시오.

🎯 **정답:** $x \le 2$

📖 무리함수에서 근호 안의 식은 0 이상이어야 한다.

$6 - 3x \ge 0$

$-3x \ge -6$

양변을 -3으로 나누면 부등호의 방향이 바뀐다.

$x \le 2$

따라서 정의역은 $\{x \mid x \le 2\}$이다.

💡 무리함수 $y = \sqrt{ax+b} + c$의 그래프는 a의 부호에 따라 시작점에서 오른쪽으로 뻗거나 왼쪽으로 뻗는다.

Q159 경우의 수

문자 K, O, R, E, A를 일렬로 나열할 때, 모음 O, E, A가 이 순서대로 (왼쪽에서 오른쪽으로) 나열되는 경우의 수는?

①) ① 12

②) ② 16

③) ③ 20

④) ④ 24

🎯 **정답: ③ 20**

📖 5개의 자리 중에서 모음 O, E, A가 들어갈 자리 3개를 먼저 고른다.

${}_5C_3 = 10$(가지)

선택된 세 자리에는 O, E, A가 이 순서대로 들어가므로 한 가지로 정해진다.

나머지 두 자리에 자음 K, R을 배열하는 방법은

$2! = 2$(가지)

따라서 전체 경우의 수는

$10 \times 1 \times 2 = 20$(가지)

💡 특정 문자들의 순서가 고정된 경우의 나열은 그 문자들이 들어갈 자리만 선택하면 된다는 점에서 조합과 연결된다.

Q160 함수

유리함수 $f(x) = \dfrac{x-2}{x+1}$의 역함수 $f^{-1}(x)$를 구한 것은?

①) ① $f^{-1}(x) = \dfrac{x+2}{1-x}$

②) ② $f^{-1}(x) = \dfrac{x-2}{x+1}$

③) ③ $f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$

④) ④ $f^{-1}(x) = \dfrac{1-x}{x+2}$

🎯 **정답:** ① $f^{-1}(x) = \dfrac{x+2}{1-x}$

📖 $y = \dfrac{x-2}{x+1}$로 놓고 x에 대하여 푼다.

양변에 $x+1$을 곱하면

$y(x+1) = x-2$

$yx + y = x - 2$

x항을 한쪽으로 모으면

$yx - x = -2 - y$

$x(y-1) = -(y+2)$

$x = \dfrac{-(y+2)}{y-1} = \dfrac{y+2}{1-y}$

x와 y를 바꾸면 $f^{-1}(x) = \dfrac{x+2}{1-x}$

💡 유리함수의 역함수도 유리함수이며, 원함수의 그래프와 직선 $y = x$에 대하여 대칭이다.

📝 고1 수학 일반

총 40문제 · 문제와 정답·풀이 포함

Q161 다항식

다항식 $f(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지가 5이고, $x+1$로 나눈 나머지가 -4이다. $f(x)$를 $(x-2)(x+1)$로 나눈 나머지를 구하시오.

①) ① $3x-1$

②) ② $3x+1$

③) ③ $-3x+1$

④) ④ $2x-3$

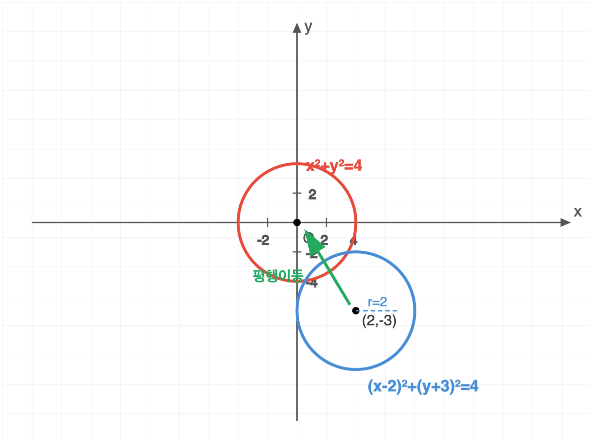
🎯 **정답:** ① $3x-1$

📖 $f(x)$를 이차식 $(x-2)(x+1)$로 나눈 나머지는 일차 이하의 식이므로
$f(x) = (x-2)(x+1)Q(x) + ax + b$
로 놓을 수 있다.
나머지정리에 의해
$f(2) = 2a + b = 5$ \cdots ㉠
$f(-1) = -a + b = -4$ \cdots ㉡
㉠에서 ㉡을 빼면 $3a = 9$, $a = 3$
㉡에 대입하면 $b = -4 + 3 = -1$
따라서 나머지는 $3x-1$이다.

💡 이차식으로 나눈 나머지는 항상 일차 이하의 식이므로, 두 개의 조건만 알면 미지의 계수를 모두 결정할 수 있다.

Q162 도형의 방정식

방정식 $x^2+y^2-4x+6y+9=0$이 나타내는 도형을 평행이동하여 그 중심이 원점에 오도록 하려고 한다. 어떻게 평행이동해야 하는가?



①) ① x축 방향으로 -2, y축 방향으로 $+3$만큼
②) ② x축 방향으로 $+2$, y축 방향으로 -3만큼
③) ③ x축 방향으로 -2, y축 방향으로 -3만큼
④) ④ x축 방향으로 $+2$, y축 방향으로 $+3$만큼

🎯 **정답: ① x축 방향으로 -2, y축 방향으로 $+3$만큼**

📖 주어진 방정식을 표준형으로 고친다.

$x^2-4x+y^2+6y+9=0$

$(x^2-4x+4)+(y^2+6y+9)=4$

$(x-2)^2+(y+3)^2=4$

따라서 중심은 $(2,-3)$, 반지름은 2인 원이다.

중심 $(2,-3)$을 원점 $(0,0)$으로 옮기려면 x축 방향으로 -2, y축 방향으로 $+3$만큼 평행이동하면 된다.

💡 원의 일반형 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$에서 중심은 $\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$로 빠르게 구할 수 있다.

Q163 경우의 수

6명의 학생이 원탁에 둘러앉을 때, 특정한 두 학생 A, B가 서로 이웃하여 앉는 경우의 수를 구하시오.

①) ① 36
②) ② 48
③) ③ 60
④) ④ 72

🎯 **정답: ② 48**

📖 두 학생 A, B를 한 묶음으로 보면 5개의 묶음을 원탁에 배열하는 원순열이 된다.

원순열의 수는

$(5-1)!=4!=24$(가지)

묶음 안에서 A, B의 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$(가지)

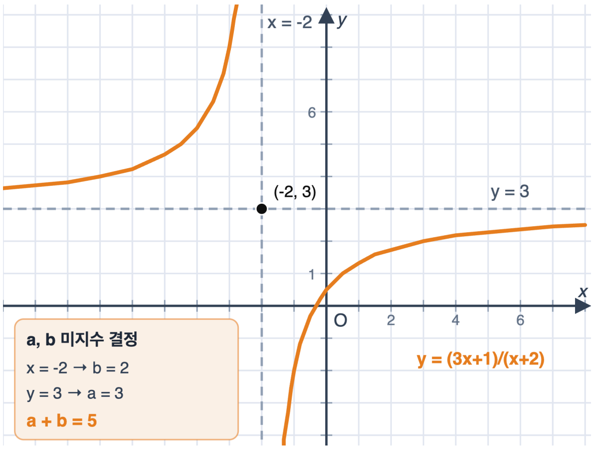
따라서 구하는 경우의 수는

$24\times 2=48$(가지)

💡 원순열에서 한 사람의 자리를 고정하는 이유는 회전하여 같아지는 배열을 한 가지로 보기 때문이다.

Q164 함수

유리함수 $y = \dfrac{ax+1}{x+b}$의 그래프의 두 점근선의 방정식이 $x = -2$, $y = 3$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. (단, $ab \neq 1$)



①) ① 3
②) ② 4
③) ③ 5
④) ④ 6

🎯 **정답: ③ 5**

📖 분자를 분모로 나누어 표준형으로 변형한다.

$y = \dfrac{ax+1}{x+b} = \dfrac{a(x+b)+1-ab}{x+b} = a + \dfrac{1-ab}{x+b}$

점근선은 $x = -b$, $y = a$이다.

조건에서 $-b = -2$이므로 $b = 2$

$y = 3$이므로 $a = 3$

따라서 $a + b = 3 + 2 = 5$

💡 유리함수 $y = \dfrac{ax+c}{x+b}$에서 분모를 0으로 만드는 x값과 $\dfrac{ax}{x}$의 극한값이 각각 두 점근선의 위치를 결정한다.

Q165 종합 활용

부등식 $|x-1|+|x+2| \le 5$의 해를 구하시오.

①) ① $-3 \le x \le 2$

②) ② $-2 \le x \le 1$

③) ③ $-3 \le x \le 1$

④) ④ $-2 \le x \le 2$

🎯 **정답: ① $-3 \le x \le 2$**

📖 절댓값 안의 식이 0이 되는 $x=1$, $x=-2$를 기준으로 구간을 나눈다.

(i) $x<-2$일 때: $-(x-1)-(x+2) \le 5$

$-2x-1 \le 5$, $x \ge -3$

조건과 합치면 $-3 \le x < -2$

(ii) $-2 \le x < 1$일 때: $-(x-1)+(x+2) \le 5$

$3 \le 5$ (항상 성립)

조건 그대로 $-2 \le x < 1$

(iii) $x \ge 1$일 때: $(x-1)+(x+2) \le 5$

$2x+1 \le 5$, $x \le 2$

조건과 합치면 $1 \le x \le 2$

(i), (ii), (iii)의 합집합은 $-3 \le x \le 2$이다.

💡 $|x-a|+|x-b|$는 수직선에서 점 x로부터 a, b까지의 거리의 합을 뜻하며, 그 최솟값은 $|a-b|$이다.

Q166 종합 활용

다항식 $P(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $P(x+1)-P(x)=2x+3$을 만족하고, $P(0)=1$이다. 이때 $P(5)$의 값을 구하시오.

①) ① 25

②) ② 36

③) ③ 49

④) ④ 64

🎯 **정답: ② 36**

📖 $P(x+1)-P(x)$가 일차식이므로 $P(x)$는 이차식이다.

$P(x)=ax^2+bx+c$ $(a \ne 0)$로 놓으면

$P(x+1)=a(x+1)^2+b(x+1)+c$

$=ax^2+(2a+b)x+(a+b+c)$

따라서

$P(x+1)-P(x)=2ax+(a+b)$

이것이 $2x+3$과 항등식으로 같아야 하므로

$2a=2$에서 $a=1$

$a+b=3$에서 $b=2$

또 $P(0)=c=1$이므로

$P(x)=x^2+2x+1=(x+1)^2$

따라서 $P(5)=(5+1)^2=36$

💡 다항식의 차분 $P(x+1)-P(x)$의 차수는 원래 다항식의 차수보다 항상 1만큼 작다는 사실은 적분과 미분의 이산판 같은 성질이다.

Q167 다항식

다항식 $P(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지가 3이고, $x+2$로 나눈 나머지가 -3이다. $P(x)$를 $(x-1)(x+2)$로 나눈 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(0)$의 값은?

①) ① -1

②) ② 0

③) ③ 1

④) ④ 2

🎯 **정답:** ③ 1

📖 $(x-1)(x+2)$로 나눈 나머지는 일차 이하이므로 $R(x) = ax + b$로 놓는다. 나머지정리에 의해 $P(1) = R(1) = a + b = 3$, $P(-2) = R(-2) = -2a + b = -3$이다. 두 식을 빼면 $3a = 6$이므로 $a = 2$, $b = 1$이다. 따라서 $R(x) = 2x + 1$이고 $R(0) = 1$이다.

💡 두 일차식의 곱으로 나누면 나머지는 항상 일차 이하의 식이 된다는 사실을 이용하면, 두 점에서의 함숫값만으로 나머지를 완전히 결정할 수 있다.

Q168 복소수와 이차방정식

복소수 $z = \dfrac{3+i}{1-i}$의 실수부와 허수부의 합을 구하시오. (단, $i = \sqrt{-1}$)

①) ① 1

②) ② 2

③) ③ 3

④) ④ 4

🎯 **정답:** ③ 3

📖 분모의 켤레복소수 $1+i$를 분모와 분자에 곱하여 분모를 실수화한다. $z = \dfrac{(3+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \dfrac{3+3i+i+i^2}{1-i^2} = \dfrac{2+4i}{2} = 1+2i$. 실수부는 1, 허수부는 2이므로 합은 $1+2=3$이다.

💡 분모의 켤레복소수를 곱하는 분모 실수화는 무리수의 분모를 유리화하는 과정과 완전히 같은 발상이다.

Q169 집합과 명제

전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$의 부분집합 $A = \{1, 3, 5, 7\}$에 대하여 여집합 A^c의 모든 원소의 합은?

①) ① 16

②) ② 18

③) ③ 20

④) ④ 22

🎯 **정답:** ③ 20

📖 여집합은 전체집합의 원소 중 A에 속하지 않는 원소들의 집합이므로 $A^c = U - A = \{2, 4, 6, 8\}$이다. 따라서 모든 원소의 합은 $2+4+6+8 = 20$이다.

💡 1부터 n까지 자연수의 합은 $\dfrac{n(n+1)}{2}$이므로 $1+2+\cdots+8 = 36$이고, A의 원소합 16을 빼도 A^c의 원소합 20을 얻을 수 있다.

Q170 경우의 수

영문자 MATHEMATICS의 11개 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는?

①) ① 4989600

②) ② 9979200

③) ③ 19958400

④) ④ 39916800

🎯 **정답:** ① 4989600

📖 MATHEMATICS에는 M이 2개, A가 2개, T가 2개, 그리고 H, E, I, C, S가 각 1개씩 들어 있다. 같은 것이 있는 순열의 공식에 의해 경우의 수는 $\frac{11!}{2!\cdot 2!\cdot 2!}=\frac{39916800}{8}=4989600$이다.

💡 같은 것이 있는 순열에서 같은 문자를 서로 구별할 수 있다고 가정한 후, 구별할 수 없게 만들어 주기 위해 같은 것의 개수의 계승으로 나누어 준다.

Q171 다항식

조립제법을 이용하여 다항식 $P(x)=x^3-2x^2-5x+6$을 $x-3$으로 나눌 때 얻는 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R이라 하자. $Q(2)+R$의 값은?

①) ① 2

②) ② 3

③) ③ 4

④) ④ 5

🎯 **정답:** ③ 4

📖 조립제법으로 계수 $1, -2, -5, 6$을 3으로 나눈다. 1을 내리고, $1\times 3=3$을 더해 $-2+3=1$. $1\times 3=3$을 더해 $-5+3=-2$. $-2\times 3=-6$을 더해 $6+(-6)=0$. 따라서 몫 $Q(x)=x^2+x-2$, 나머지 $R=0$이다. $Q(2)=4+2-2=4$이므로 $Q(2)+R=4+0=4$이다.

💡 조립제법은 일차식 $x-a$로 나눌 때만 사용할 수 있는 빠른 나눗셈 방법으로, 인수정리에 의해 $R=P(a)$임이 보장된다.

Q172 방정식과 부등식 활용

방정식 $|x-2|+|x+1|=7$의 모든 해의 합을 구하시오.

①) ① 0

②) ② 1

③) ③ 2

④) ④ 3

🎯 **정답:** ② 1

📖 절댓값 안의 식의 부호가 바뀌는 $x=-1$과 $x=2$를 기준으로 구간을 나눈다.
(i) $x\geq 2$일 때: $(x-2)+(x+1)=2x-1=7$이므로 $x=4$ (적합).
(ii) $-1\leq x<2$일 때: $-(x-2)+(x+1)=3$이고 $3\neq 7$이므로 해가 없다.
(iii) $x<-1$일 때: $-(x-2)-(x+1)=-2x+1=7$이므로 $x=-3$ (적합).
따라서 모든 해의 합은 $4+(-3)=1$이다.

💡 $|x-2|+|x+1|$은 수직선에서 점 x로부터 2와 -1까지의 거리의 합으로 해석되며, 이 값이 7이 되는 점을 찾는 문제로 바꿔 풀 수도 있다.

Q173 도형의 방정식

직선 $y = 2x + 1$ 위의 점 $\mathrm{P}(1, 3)$을 지나고 이 직선과 수직인 직선의 방정식을 $y = ax + b$라 할 때, $a + b$의 값은?

①) ① 1

②) ② 2

③) ③ 3

④) ④ 4

🎯 **정답:** ③ 3

📖 두 직선이 수직이려면 기울기의 곱이 -1이어야 한다. 주어진 직선의 기울기가 2이므로 구하는 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이다. 점 $(1, 3)$을 지나므로 점-기울기형으로 $y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 1)$, 정리하면 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$이다. 따라서 $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{7}{2}$이고 $a + b = -\frac{1}{2} + \frac{7}{2} = 3$이다.

💡 점 P가 직선 위에 있는지 확인하려면 $3 = 2 \cdot 1 + 1$임을 보면 된다. 두 직선의 교점이 곧 P가 된다.

Q174 함수

함수 $f(x) = \dfrac{3x + 1}{x - 2}$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g(4)$의 값을 구하시오.

①) ① 7

②) ② 8

③) ③ 9

④) ④ 10

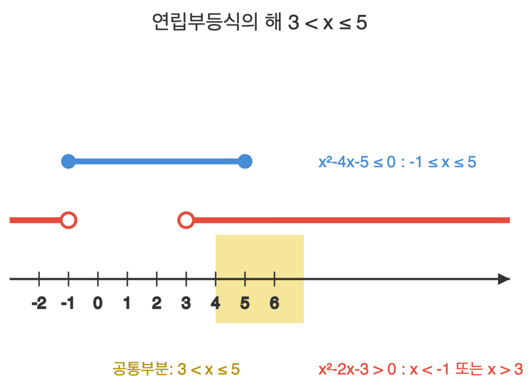
🎯 **정답:** ③ 9

📖 $g(4) = k$라 하면 $f(k) = 4$이다. $\dfrac{3k + 1}{k - 2} = 4$에서 $3k + 1 = 4(k - 2) = 4k - 8$, 정리하면 $k = 9$이다.
[다른 풀이] $y = \dfrac{3x + 1}{x - 2}$를 x에 대해 풀면 $y(x - 2) = 3x + 1$, $x(y - 3) = 2y + 1$, $x = \dfrac{2y + 1}{y - 3}$이다. x와 y를 바꾸면 $g(x) = \dfrac{2x + 1}{x - 3}$이고 $g(4) = \dfrac{9}{1} = 9$이다.

💡 역함수의 함숫값 $g(a)$를 구할 때는 역함수 식을 직접 구하지 않고 $f(k) = a$인 k를 찾는 방법이 더 빠르다.

Q175 이차함수와 이차부등식

연립부등식 $\begin{cases} x^2 - 4x - 5 \le 0 \\ x^2 - 2x - 3 > 0 \end{cases}$ 의 해는?



①) ① $-1 \le x \le 3$

②) ② $3 < x \le 5$

③) ③ $-1 < x < 3$

④) ④ $3 \le x \le 5$

🎯 **정답:** ② $3 < x \le 5$

📖 $x^2 - 4x - 5 = (x-5)(x+1) \le 0$이므로 $-1 \le x \le 5$.
$x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1) > 0$이므로 $x < -1$ 또는 $x > 3$.
두 해를 수직선 위에 나타내고 공통부분을 찾으면 $3 < x \le 5$이다. ($x = 3$은 둘째 부등식이 등호를 포함하지 않으므로 제외, $x = 5$는 첫째 부등식이 등호를 포함하므로 포함.)

💡 연립부등식에서 부등호가 등호를 포함하느냐의 여부는 경계점이 해에 포함되는지를 결정하므로 매우 중요하다.

Q176 집합과 명제

양수 x, y가 $x + y = 4$를 만족할 때, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$의 최솟값을 구하시오.

①) ① $\frac{1}{2}$

②) ② 1

③) ③ $\frac{3}{2}$

④) ④ 2

🎯 **정답:** ② 1

📖 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{y+x}{xy} = \frac{4}{xy}$이다. 산술평균과 기하평균의 관계에 의해 양수 x, y에 대하여 $x + y \ge 2\sqrt{xy}$ 이므로 $4 \ge 2\sqrt{xy}$, 즉 $\sqrt{xy} \le 2$, $xy \le 4$이다. (등호는 $x = y = 2$일 때 성립.) 따라서 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{4}{xy} \ge \frac{4}{4} = 1$이고, 최솟값은 1이다.

💡 이 문제는 산술평균과 조화평균의 관계 $\frac{x+y}{2} \ge \frac{2xy}{x+y}$를 변형하여 직접 풀 수도 있다.

Q177 복소수와 이차방정식

실수 계수 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$의 한 근이 $1 + 2i$일 때, $a + b$의 값은? (단, a, b는 실수, $i = \sqrt{-1}$)

①) ① 1

②) ② 2

③) ③ 3

④) ④ 4

정답: ③ 3

실수 계수 이차방정식이 허근을 가질 때, 두 근은 서로 켤레복소수 관계이다. 따라서 다른 한 근은 $1 - 2i$이다.

근과 계수의 관계에 의해

두 근의 합: $(1 + 2i) + (1 - 2i) = 2 = -a$이므로 $a = -2$.

두 근의 곱: $(1 + 2i)(1 - 2i) = 1^2 - (2i)^2 = 1 + 4 = 5 = b$이므로 $b = 5$.

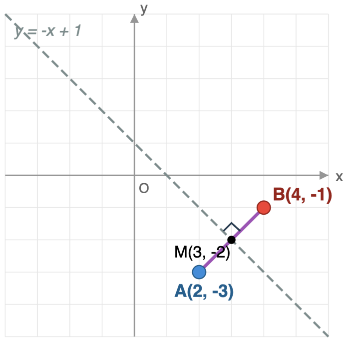
그러므로 $a + b = -2 + 5 = 3$이다.

실수 계수 다항방정식이 허근 $\alpha + \beta i$ $(\beta \neq 0)$를 가지면 그 켤레인 $\alpha - \beta i$도 반드시 근이 된다는 정리를 '켤레근 정리'라고 한다.

Q178 도형의 방정식

좌표평면 위의 점 $\mathrm{A}(2, -3)$을 직선 $y = -x + 1$에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{B}(p, q)$라 할 때, $p - q$의 값은?

점 A의 직선에 대한 대칭점 B



①) ① 1

②) ② 3

③) ③ 5

④) ④ 7

정답: ③ 5

점 $\mathrm{A}(2, -3)$의 대칭점을 $\mathrm{B}(p, q)$라 하면 두 조건이 성립한다.

(i) 선분 AB의 중점 $\left(\dfrac{2+p}{2}, \dfrac{-3+q}{2}\right)$이 직선 $y = -x + 1$ 위에 있다: $\dfrac{-3+q}{2} = -\dfrac{2+p}{2} + 1$. 양변에 2를 곱하면 $-3 + q = -(2 + p) + 2 = -p$, 즉 $p + q = 3$.

(ii) 직선 AB가 직선 $y = -x + 1$과 수직이므로 AB의 기울기는 1이다: $\dfrac{q - (-3)}{p - 2} = 1$, 즉 $q + 3 = p - 2$, $p - q = 5$.

식 (ii)에서 곧바로 $p - q = 5$를 얻는다. (참고로 두 식을 연립하면 $p = 4$, $q = -1$.)

직선 $y = mx + n$에 대한 점 대칭은 직선의 기울기 m과 그에 수직인 기울기 $-\dfrac{1}{m}$ 두 정보만으로 결정된다. 특히 $m = -1$인 경우 수직 방향 기울기는 1로 깔끔하다.

Q179 종합 활용

방정식 $(x^2+x-2)^2-3(x^2+x-2)-4=0$의 모든 실근의 합을 구하시오.

①) ① -3

②) ② -2

③) ③ -1

④) ④ 0

정답: ② -2

$t=x^2+x-2$로 치환하면 $t^2-3t-4=0$, 즉 $(t-4)(t+1)=0$이므로 $t=4$ 또는 $t=-1$이다.

(i) $t=4$일 때: $x^2+x-2=4$, $x^2+x-6=0$, $(x+3)(x-2)=0$이므로 $x=-3$ 또는 $x=2$. 두 근의 합은 -1.

(ii) $t=-1$일 때: $x^2+x-2=-1$, $x^2+x-1=0$. 판별식 $D=1+4=5>0$이므로 두 실근이 존재하고, 근과 계수의 관계에 의해 두 근의 합은 -1이다.

따라서 모든 실근의 합은 $(-1)+(-1)=-2$이다.

고차방정식을 풀 때 적절한 식을 한 변수 t로 치환하면 차수를 절반으로 낮출 수 있다. 이 문제처럼 사차방정식이 이차방정식 두 개로 분해된다.

Q180 다항식

다항식 $P(x)=2x^3-3x^2+5x-7$을 $x-2$로 나눈 몫과 나머지를 바르게 짝지은 것은?

①) ① 몫 $2x^2+x+7$, 나머지 7

②) ② 몫 $2x^2-x+7$, 나머지 7

③) ③ 몫 $2x^2+x-7$, 나머지 -7

④) ④ 몫 $2x^2+x+7$, 나머지 -7

정답: ①

조립제법으로 계산한다. 계수 $2, -3, 5, -7$을 나열하고 $x=2$를 적용한다.

[1] 첫 계수 그대로 내리기: 2

[2] $2\times2=4$, $-3+4=1$

[3] $1\times2=2$, $5+2=7$

[4] $7\times2=14$, $-7+14=7$

따라서 몫은 $2x^2+x+7$, 나머지는 7이다.

조립제법은 17세기에 영국 수학자 윌리엄 호너가 정리한 방법으로, 컴퓨터 다항식 계산에서도 핵심 알고리즘으로 사용된다.

Q181 복소수와 이차방정식

이차방정식 $x^2-6x+k=0$의 두 실근의 차가 4일 때, 상수 k의 값은?

①) ① 3

②) ② 4

③) ③ 5

④) ④ 6

정답: ③

두 근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의해 $\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=k$이다.

공식 $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$을 이용하면

$4^2=6^2-4k$

$16=36-4k$

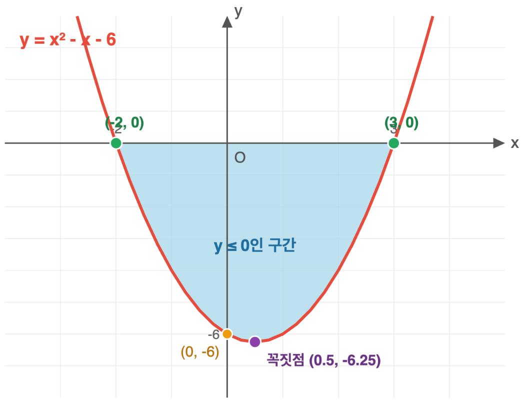
$4k=20$

$\therefore k=5$

두 근의 차이는 판별식의 제곱근에 비례하며, $|\alpha-\beta|=\sqrt{D}\ /|a|$이다.

Q182 이차함수와 이차부등식

이차부등식 $x^2 + ax + b \le 0$의 해가 $-2 \le x \le 3$일 때, 상수 $a + b$의 값은?



①) ① -7

②) ② -5

③) ③ -1

④) ④ 1

🎯 **정답: ①**

📖 이차부등식 $x^2 + ax + b \le 0$의 해가 $-2 \le x \le 3$이므로, 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$의 두 근은 -2와 3이다.

근과 계수의 관계에 의해

$-a = (-2) + 3 = 1$, 즉 $a = -1$

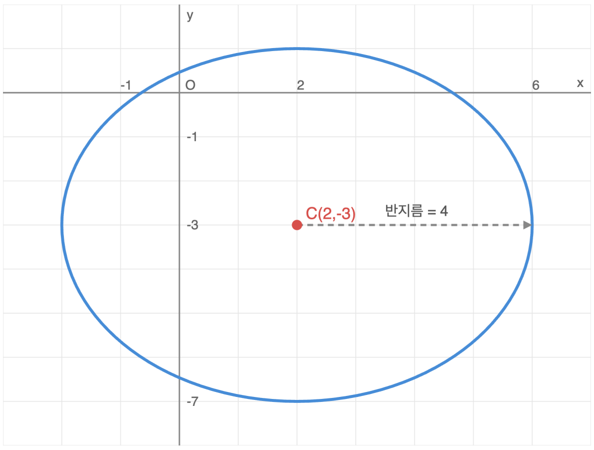
$b = (-2) \times 3 = -6$

$\therefore a + b = -1 + (-6) = -7$

💡 이차부등식의 해 구간 끝점은 곧 이차함수 그래프와 x축의 교점이므로, 부등식의 해는 그래프의 위치 관계에서 직관적으로 보인다.

Q183 도형의 방정식

원 $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$의 중심의 좌표와 반지름의 길이를 바르게 짝지은 것은?



①) ① 중심 $(2, -3)$, 반지름 4

②) ② 중심 $(-2, 3)$, 반지름 4

③) ③ 중심 $(2, -3)$, 반지름 $\sqrt{13}$

④) ④ 중심 $(-2, 3)$, 반지름 $\sqrt{13}$

🎯 **정답: ①**

📖 일반형을 표준형으로 변환하기 위해 완전제곱식을 만든다.

$x^2 - 4x + y^2 + 6y - 3 = 0$

$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 6y + 9) - 3 - 4 - 9 = 0$

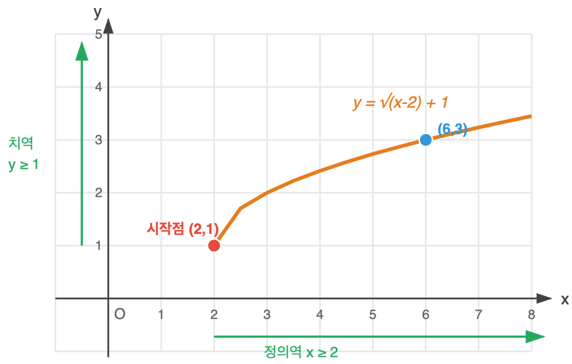
$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$

따라서 중심은 $(2, -3)$, 반지름은 $\sqrt{16} = 4$이다.

💡 원의 일반형 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$에서 중심은 $(-A/2, -B/2)$이고, 반지름의 제곱은 $A^2/4 + B^2/4 - C$이다.

Q184 함수

무리함수 $y = \sqrt{ax+b} \ + c$의 그래프가 점 $(2, 1)$에서 시작하여 점 $(6, 3)$을 지난다. 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값은? (단, $a > 0$)



①) ① -2

②) ② 0

③) ③ 2

④) ④ 4

🎯 **정답: ②**

📖 무리함수 $y = \sqrt{ax+b} \ + c$의 그래프 시작점이 $(2, 1)$이라는 것은 근호 안이 0이 되는 x의 값에서 함숫값이 c가 됨을 의미한다.

[1] 시작점 조건: 근호 안 $= 0$일 때 $x = 2$이므로 $2a + b = 0$ ... (i), 그리고 $c = 1$ ... (ii)

[2] 점 $(6, 3)$ 조건: $3 = \sqrt{6a+b} \ + 1$이므로 $\sqrt{6a+b} \ = 2$, 즉 $6a + b = 4$ ... (iii)

[3] (iii) - (i)을 하면 $4a = 4$, $a = 1$. 대입하면 $b = -2$.

$\therefore a + b + c = 1 + (-2) + 1 = 0$

💡 무리함수 $y = \sqrt{ax+b} \ + c$는 $y = \sqrt{a(x-p)} \ + q$로 변형할 수 있고, $y = \sqrt{ax}$ 그래프를 x축으로 p, y축으로 q만큼 평행이동 한 것이다.

Q185 경우의 수

서로 다른 6가지 종류의 음식을 원형 식탁에 둘러놓으려고 한다. 두 음식 A, B가 서로 마주 보도록 놓는 방법의 수는?

①) ① 12

②) ② 24

③) ③ 48

④) ④ 120

🎯 **정답: ②**

📖 원순열에서 한 자리를 고정하여 회전 대칭을 제거한다.

[1] A를 한 자리에 고정한다.

[2] B는 A의 정반대편 자리(마주 보는 자리)에 놓이므로 자리가 1가지로 결정된다.

[3] 나머지 4개 음식을 남은 4자리에 일렬로 배치하면 $4! = 24$가지.

따라서 구하는 방법의 수는 $1 \times 1 \times 24 = 24$

💡 n개의 원순열에서 두 특정 대상이 마주 보는 경우의 수는 n이 짝수일 때만 의미가 있고, $(n-2)!$로 계산된다.

Q186 종합 활용

두 점 $A(1, 3)$, $B(5, 1)$에 대하여 선분 AB의 수직이등분선의 방정식은?

①) ① $y = 2x - 4$

②) ② $y = 2x + 4$

③) ③ $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$

④) ④ $y = \frac{1}{2}x - 4$

🎯 **정답: ①**

📖 수직이등분선은 선분 AB의 중점을 지나고 AB에 수직인 직선이다.

[1] 중점 M의 좌표: $\left(\frac{1+5}{2}, \frac{3+1}{2}\right) = (3, 2)$

[2] 선분 AB의 기울기: $\frac{1-3}{5-1} = -\frac{1}{2}$

[3] 수직이등분선의 기울기는 AB 기울기와의 곱이 -1이 되어야 하므로 2.

[4] 점 $(3, 2)$를 지나고 기울기가 2인 직선:

$y - 2 = 2(x - 3)$

$\therefore y = 2x - 4$

💡 수직이등분선 위의 점은 두 끝점 A, B로부터 같은 거리에 있다는 성질을 가지며, 이는 원의 중심을 찾을 때 자주 활용된다.

Q187 함수

두 함수 $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x^2 - 1$에 대하여 $(g \circ f)(2)$의 값은?

①) ① 9

②) ② 11

③) ③ 24

④) ④ 25

🎯 **정답: ③**

📖 합성함수 $(g \circ f)(x) = g(f(x))$이므로 안쪽 f를 먼저 계산한 뒤 g에 대입한다.

[1] $f(2) = 2 \times 2 + 1 = 5$

[2] $g(5) = 5^2 - 1 = 25 - 1 = 24$

$\therefore (g \circ f)(2) = 24$

💡 합성함수는 함수의 합성 순서가 매우 중요하며, 일반적으로 $f \circ g \neq g \circ f$이다.

Q188 방정식과 부등식 활용

연립부등식 $\begin{cases} 2x-1<3x+2 \\ x+4\le k \end{cases}$ 를 만족하는 정수 x가 정확히 5개일 때, 자연수 k의 값은?

①) ① 5

②) ② 6

③) ③ 7

④) ④ 8

🎯 **정답: ②**

📖 각 부등식을 풀어 공통 범위를 구한다.

[1] 첫 번째: $2x-1<3x+2 \Rightarrow\ -3<x$

[2] 두 번째: $x+4\le k \Rightarrow x\le k-4$

[3] 공통 해: $-3<x\le k-4$

[4] 정수 x가 정확히 5개이려면 정수 $-2,\ -1, 0, 1, 2$가 포함되고 3은 포함되지 않아야 한다.

따라서 $2\le k-4<3$, 즉 $6\le k<7$.

k가 자연수이므로 $k=6$

💡 연립부등식의 정수해 개수 문제는 경계값 처리($<$ 와 $\le$ 의 차이)가 핵심이며, 등호 유무에 따라 답이 달라진다.

Q189 경우의 수

평면 위에 어느 세 점도 한 직선 위에 있지 않은 서로 다른 8개의 점이 있다. 이 점들 중 두 점을 이어 만들 수 있는 서로 다른 선분의 개수는?

①) ① 16

②) ② 21

③) ③ 28

④) ④ 56

🎯 **정답: ③**

📖 선분은 두 점을 선택하여 이으면 결정되며, 선택 순서는 무관하므로 조합으로 계산한다.

${}_8C_2=\dfrac{8\times 7}{2\times 1}=\dfrac{56}{2}=28$

따라서 만들 수 있는 서로 다른 선분의 개수는 28이다.

💡 n개의 점으로 만들 수 있는 선분의 수 ${}_nC_2$는 다각형의 대각선 수 공식 ${}_nC_2-n$과도 직접 연결된다.

Q190 종합 활용

이차방정식 $x^2 - 2kx + k + 6 = 0$의 두 실근이 모두 1보다 클 때, 실수 k의 값의 범위는?

①) ① $k > 3$

②) ② $3 \le k < 7$

③) ③ $-2 < k < 7$

④) ④ $k \ge 3$

정답: ②

$f(x) = x^2 - 2kx + k + 6$이라 하면, 두 실근이 모두 1보다 크려면 다음 세 조건을 모두 만족해야 한다.

[1] 판별식 $D \ge 0$ (실근 존재):

$\frac{D}{4} = k^2 - (k+6) \ge 0 \Rightarrow k^2 - k - 6 \ge 0 \Rightarrow (k-3)(k+2) \ge 0$

$\therefore k \le -2$ 또는 $k \ge 3$

[2] $f(1) > 0$ (경계값에서 함숫값 양수):

$1 - 2k + k + 6 > 0 \Rightarrow 7 - k > 0 \Rightarrow k < 7$

[3] 축의 방정식 $x = k > 1$ (축이 경계 오른쪽):

$k > 1$

세 조건 공통 범위: $k \ge 3$ 그리고 $k < 7$ 그리고 $k > 1$

$\therefore 3 \le k < 7$

💡 이차방정식의 두 근이 특정 수 p보다 큰 조건은 (i) 판별식 (ii) $f(p)$ 부호 (iii) 축의 위치, 이 세 가지를 동시에 따져야 한다.

Q191 다항식

등식 $x^3 + 2x^2 + ax + b = (x-1)(x^2 + cx + 5)$가 x에 대한 항등식일 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a + b + c$의 값은?

①) ① -2

②) ② 0

③) ③ 2

④) ④ 4

정답: ②

우변을 전개하여 좌변과 계수를 비교한다.

$(x-1)(x^2 + cx + 5) = x^3 + cx^2 + 5x - x^2 - cx - 5$

$= x^3 + (c-1)x^2 + (5-c)x - 5$

좌변 $x^3 + 2x^2 + ax + b$와 계수 비교하면

[1] x^2 계수: $c - 1 = 2 \Rightarrow c = 3$

[2] x 계수: $5 - c = a \Rightarrow a = 5 - 3 = 2$

[3] 상수항: $b = -5$

$\therefore a + b + c = 2 + (-5) + 3 = 0$

💡 항등식의 미정계수를 구할 때는 계수비교법과 수치대입법을 모두 활용할 수 있으며, 둘 중 더 효율적인 방법을 선택하는 것이 중요하다.

Q192 복소수와 이차방정식

복소수 $(2+i)(3-i)-(1-2i)$를 $a+bi$ $(a, b$는 실수) 꼴로 나타낼 때, $a+b$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

①) ① 7

②) ② 8

③) ③ 9

④) ④ 10

🎯 **정답: ③ 9**

📖 $(2+i)(3-i)=6-2i+3i-i^2=6+i+1=7+i$. 따라서 $(7+i)-(1-2i)=7-1+(1+2)i=6+3i$. $a=6, b=3$이므로 $a+b=9$.

💡 복소수는 실수부와 허수부를 따로 계산해서 모으면 됩니다.

Q193 함수

두 집합 $X=\{1,2,3\}$, $Y=\{0,1,2,3,4,5,6\}$에 대하여 함수 $f: X \to Y$가 $f(x)=2x-1$로 정의될 때, 함수 f의 치역의 모든 원소의 합은?

①) ① 6

②) ② 9

③) ③ 11

④) ④ 15

🎯 **정답: ② 9**

📖 $f(1)=2(1)-1=1$, $f(2)=2(2)-1=3$, $f(3)=2(3)-1=5$. 치역은 $\{1,3,5\}$이고, 원소의 합은 $1+3+5=9$.

💡 치역은 항상 공역의 부분집합입니다.

Q194 경우의 수

서로 다른 5개의 도시 A, B, C, D, E 중에서 여행할 출발 도시 1곳과 도착 도시 1곳을 정하려고 한다. 출발 도시와 도착 도시가 서로 다른 경우의 수는?

①) ① 10

②) ② 15

③) ③ 20

④) ④ 25

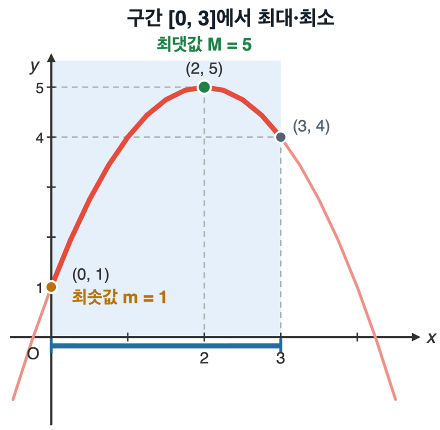
🎯 **정답: ③ 20**

📖 출발 도시는 5가지 중 1가지를 선택하므로 5가지. 도착 도시는 출발 도시를 제외한 4가지 중 1가지를 선택하므로 4가지. 곱의 법칙에 의해 $5\times4=20$. 이는 ${}_5P_2$와 같습니다.

💡 순서가 있는 선택은 순열, 없는 선택은 조합으로 셉니다.

Q195 이차함수와 이차부등식

이차함수 $f(x) = -x^2 + 4x + 1$의 $0 \le x \le 3$에서의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M + m$의 값은?



①) ① 5
②) ② 6
③) ③ 7
④) ④ 8

🎯 **정답: ② 6**

📖 $f(x) = -(x-2)^2 + 5$이므로 꼭짓점은 $(2, 5)$. $0 \le x \le 3$에 $x = 2$가 포함되므로 최댓값은 $f(2) = 5$. 양 끝점 $f(0) = 1$, $f(3) = -9 + 12 + 1 = 4$. 최솟값은 $f(0) = 1$. 따라서 $M + m = 5 + 1 = 6$.

💡 제한된 구간에서는 꼭짓점이 구간 안에 있는지 먼저 확인해야 합니다.

Q196 방정식과 부등식 활용

부등식 $|2x - 1| < 5$를 만족하는 정수 x의 개수는?

①) ① 3
②) ② 4
③) ③ 5
④) ④ 6

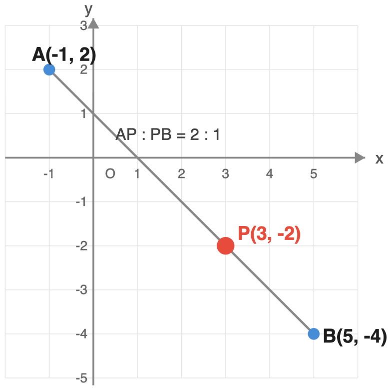
🎯 **정답: ② 4**

📖 $|2x - 1| < 5$는 $-5 < 2x - 1 < 5$와 동치. 각 변에 1을 더하면 $-4 < 2x < 6$, 2로 나누면 $-2 < x < 3$. 이 범위의 정수는 $-1, 0, 1, 2$로 4개.

💡 $|A| < k$ 꼴은 $-k < A < k$로 바로 풀 수 있습니다.

Q197 도형의 방정식

좌표평면 위의 두 점 $A(-1,2)$, $B(5,\ -4)$에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점 P의 좌표는?



①) ① $(2,\ -1)$
②) ② $(3,\ -2)$
③) ③ $(1,0)$
④) ④ $(3,0)$

🎯 **정답: ②** $(3,\ -2)$

📖 내분점 공식 $P=\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$에서 $m=2,n=1$. $x_P=\frac{2\cdot 5+1\cdot(-1)}{3}=\frac{9}{3}=3$, $y_P=\frac{2\cdot(-4)+1\cdot 2}{3}=\frac{-6}{3}=-2$. 따라서 $P(3,\ -2)$.

💡 내분 비율 $m:n$에서 분자에는 반대편 점의 좌표에 자기 비율을 곱합니다.

Q198 집합과 명제

전체집합 $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$의 두 부분집합 $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{3,4,5,6\}$에 대하여 집합 $(A\cup B)^c\cup(A\cap B)$의 모든 원소의 합은?

①) ① 14
②) ② 15
③) ③ 17
④) ④ 22

🎯 **정답: ④ 22**

📖 $A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\}$이므로 $(A\cup B)^c=\{7,8\}$. $A\cap B=\{3,4\}$. 따라서 $(A\cup B)^c\cup(A\cap B)=\{3,4,7,8\}$. 원소의 합은 $3+4+7+8=22$.

💡 여집합은 전체집합에서 그 집합을 뺀 나머지입니다.

Q199 함수

무리함수 $y = -\sqrt{x-1} + 3$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표는?

①) ① 8

②) ② 9

③) ③ 10

④) ④ 11

🎯 **정답: ③ 10**

📖 x축과 만나려면 $y = 0$이어야 한다. $-\sqrt{x-1} + 3 = 0$에서 $\sqrt{x-1} = 3$. 양변을 제곱하면 $x - 1 = 9$이므로 $x = 10$. 정의역 $x \geq 1$ 조건도 만족.

💡 무리함수의 양변 제곱 후에는 반드시 정의역을 확인해야 합니다.

Q200 이차함수와 이차부등식

이차함수 $f(x) = x^2 - 2x + k$의 최솟값이 5일 때, 부등식 $f(x) \leq 9$의 해는? (단, k는 상수)

①) ① $-1 \leq x \leq 3$

②) ② $-3 \leq x \leq 1$

③) ③ $0 \leq x \leq 4$

④) ④ $-2 \leq x \leq 4$

🎯 **정답: ① $-1 \leq x \leq 3$**

📖 $f(x) = (x-1)^2 + k - 1$이므로 최솟값은 $k - 1 = 5$에서 $k = 6$. 따라서 $f(x) = x^2 - 2x + 6$. 부등식 $x^2 - 2x + 6 \leq 9$는 $x^2 - 2x - 3 \leq 0$, 즉 $(x+1)(x-3) \leq 0$. 해는 $-1 \leq x \leq 3$.

💡 완전제곱 꼴로 변형하면 최솟값(꼭짓점의 y좌표)을 바로 얻을 수 있습니다.

📝 고1 수학 일반

총 40문제 · 문제와 정답·풀이 포함

Q201 다항식

다항식 $P(x) = x^4 + 5x^2 + 9$를 $(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$ 꼴로 인수분해할 때, $a + b + c + d$의 값은? (단, a, b, c, d는 정수이고 $b > 0,\ d > 0$)

① ① 4
② ② 5
③ ③ 6
④ ④ 7

🎯 **정답: ③ 6**

📖 $x^4 + 5x^2 + 9 = x^4 + 6x^2 + 9 - x^2 = (x^2 + 3)^2 - x^2 = (x^2 + 3 - x)(x^2 + 3 + x) = (x^2 - x + 3)(x^2 + x + 3)$. 따라서 $a = -1, b = 3, c = 1, d = 3$이므로 $a + b + c + d = -1 + 3 + 1 + 3 = 6$.

💡 $x^4 + ax^2 + b$ 꼴은 적절한 항을 더하고 빼서 $A^2 - B^2$ 형태로 만드는 것이 핵심입니다.

Q202 복소수와 이차방정식

이차방정식 $x^2 + x + 1 = 0$의 한 허근을 ω라 할 때, $\omega^{10} + \omega^{20} + \omega^{30}$의 값은?

① ① -2
② ② -1
③ ③ 0
④ ④ 1

🎯 **정답: ③** 0

📖 $x^2 + x + 1 = 0$의 양변에 $(x - 1)$을 곱하면 $x^3 - 1 = 0$이므로 $\omega^3 = 1$. 따라서 $\omega^{10} = \omega^{3\cdot 3+1} = \omega$, $\omega^{20} = \omega^{3\cdot 6+2} = \omega^2$, $\omega^{30} = \omega^{3\cdot 10} = 1$. 합은 $\omega + \omega^2 + 1$. 그런데 $\omega^2 + \omega + 1 = 0$이므로 답은 0.

💡 ω는 1의 세제곱근 중 허근으로, $\omega^3 = 1$과 $1 + \omega + \omega^2 = 0$이라는 두 핵심 성질을 갖습니다.

Q203 방정식과 부등식 활용

사차방정식 $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$의 모든 실근의 곱을 P, 모든 실근의 제곱의 합을 S라 할 때, $P + S$의 값은?

① ① 10
② ② 12
③ ③ 14
④ ④ 16

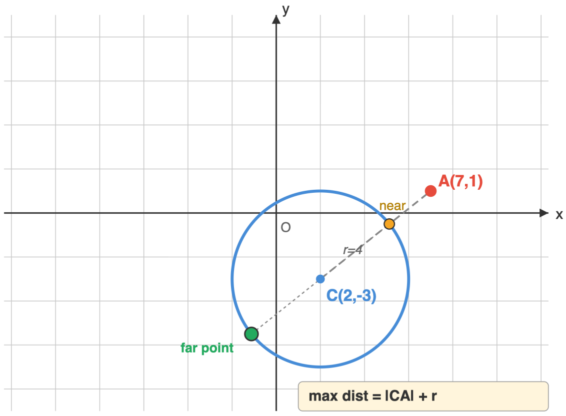
🎯 **정답: ③** 14

📖 $x^2 = t$로 치환하면 $t^2 - 5t + 4 = 0$, 즉 $(t - 1)(t - 4) = 0$이므로 $t = 1$ 또는 $t = 4$. $x^2 = 1$에서 $x = \pm 1$, $x^2 = 4$에서 $x = \pm 2$. 실근은 $-2, -1, 1, 2$. 곱 $P = (-2)(-1)(1)(2) = 4$. 제곱의 합 $S = 4 + 1 + 1 + 4 = 10$. 따라서 $P + S = 14$.

💡 복이차방정식은 $x^2 = t$ 치환이 가장 빠른 풀이법입니다.

Q204 도형의 방정식

원 $x^2+y^2-4x+6y-3=0$ 위의 점 P와 점 $A(7,1)$ 사이의 거리의 최댓값은?



①) ① $\sqrt{41}-4$

②) ② $4+\sqrt{41}$

③) ③ $5+\sqrt{41}$

④) ④ $\sqrt{41}-3$

🎯 **정답: ② $4+\sqrt{41}$**

📖 원의 방정식을 표준형으로 정리하면 $(x-2)^2+(y+3)^2=16$. 중심 $C(2,-3)$, 반지름 $r=4$. 중심과 점 $A(7,1)$ 사이의 거리는 $|CA|=\sqrt{(7-2)^2+(1-(-3))^2}=\sqrt{25+16}=\sqrt{41}$. 점 A가 원 밖에 있으므로 ($\sqrt{41}>4$) 거리의 최댓값은 $|CA|+r=\sqrt{41}+4$.

💡 원 위의 점과 외부 점 사이 거리의 최대는 (중심까지 거리)+(반지름), 최소는 (중심까지 거리)-(반지름)입니다.

Q205 다항식

다항식 $f(x)=2x^3-3x^2+5x-4$를 $x-2$로 나눈 나머지를 구하시오.

①) ① 8

②) ② 10

③) ③ 12

④) ④ 14

🎯 **정답: ② 10**

📖 나머지정리에 의해 다항식 $f(x)$를 일차식 $x-2$로 나눈 나머지는 $f(2)$와 같다.

$f(2)=2\times8-3\times4+5\times2-4=16-12+10-4=10$이므로 나머지는 10이다.

💡 나머지정리는 일차식으로 나눌 때만 단순히 한 점의 함숫값으로 구할 수 있다는 점에서 매우 강력한 도구이다.

Q206 복소수와 이차방정식

두 복소수의 곱 $(2+i)(3-2i)$를 $a+bi$ 꼴로 나타낼 때, $a-b$의 값은? (단, a, b는 실수, $i=\sqrt{-1}$)

①) ① 7

②) ② 8

③) ③ 9

④) ④ 10

🎯 **정답: ③ 9**

📖 $(2+i)(3-2i)=6-4i+3i-2i^2=6-i+2=8-i$이다. 따라서 $a=8$, $b=-1$이고 $a-b=8-(-1)=9$이다.

💡 복소수의 곱셈에서 $i^2=-1$이라는 사실이 결국 실수 부분을 변화시키는 핵심이다.

Q207 집합과 명제

전체집합 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$의 두 부분집합 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B=\{2, 4, 6, 8\}$에 대하여 $n(A \cup B)$의 값은?

①) ① 6

②) ② 7

③) ③ 8

④) ④ 9

🎯 **정답: ② 7**

📖 $A \cap B=\{2, 4\}$이므로 $n(A \cap B)=2$이다. 포함배제 원리에 의해 $n(A \cup B)=n(A)+n(B)-n(A \cap B)=5+4-2=7$이다.

💡 포함배제 원리는 세 집합 이상으로도 일반화되어 다양한 경우의 수 문제 풀이에 활용된다.

Q208 경우의 수

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 두 눈의 수의 합이 5 또는 9인 경우의 수는?

①) ① 6

②) ② 7

③) ③ 8

④) ④ 9

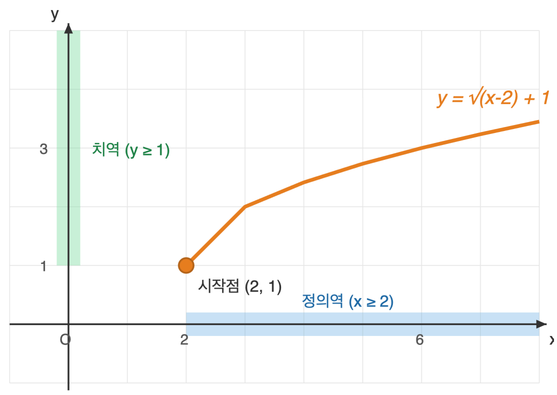
🎯 **정답: ③ 8**

📖 두 눈의 합이 5인 경우는 $(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)$의 4가지이다. 두 눈의 합이 9인 경우는 $(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)$의 4가지이다. 두 사건은 동시에 일어날 수 없으므로(배반) 합의 법칙에 의해 $4+4=8$가지이다.

💡 두 주사위의 눈의 합 중 가장 많이 나오는 합은 7이며, 7이 되는 경우는 6가지이다.

Q209 함수

무리함수 $y = \sqrt{x-2} + 1$의 정의역과 치역은?



①) ① 정의역 $\{x|x \geq 0\}$, 치역 $\{y|y \geq 0\}$

②) ② 정의역 $\{x|x \geq 2\}$, 치역 $\{y|y \geq 1\}$

③) ③ 정의역 $\{x|x \geq 1\}$, 치역 $\{y|y \geq 2\}$

④) ④ 정의역 $\{x|x \geq 2\}$, 치역 $\{y|y \geq 0\}$

🎯 **정답: ②**

📖 근호 안의 식이 0 이상이어야 하므로 $x-2 \geq 0$에서 정의역은 $\{x|x \geq 2\}$이다. 또한 $\sqrt{x-2} \geq 0$이므로 $y = \sqrt{x-2} + 1 \geq 1$이고, 치역은 $\{y|y \geq 1\}$이다.

💡 무리함수 $y = \sqrt{x-p} + q$의 그래프는 $y = \sqrt{x}$ 를 x축 방향으로 p, y축 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.

Q210 방정식과 부등식 활용

삼차방정식 $x^3 - 7x + 6 = 0$의 모든 실근의 합은?

①) ① -1

②) ② 0

③) ③ 1

④) ④ 2

🎯 **정답: ② 0**

📖 $x = 1$을 대입하면 $1 - 7 + 6 = 0$이므로 $x - 1$이 인수이다. 조립제법으로 $x^3 - 7x + 6 = (x-1)(x^2 + x - 6) = (x-1)(x-2)(x+3)$로 인수분해된다. 따라서 세 실근은 $1, 2, -3$이고 합은 $1 + 2 + (-3) = 0$이다. 또는 근과 계수 관계에 의해 x^2의 계수가 0이므로 세 근의 합은 0이다.

💡 삼차방정식 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$의 세 근의 합은 항상 $-a$이다(근과 계수 관계).

Q211 집합과 명제

실수 x에 대한 명제 "$x^2 = 1$이면 $x = 1$이다"의 역, 이, 대우 중 참인 것을 모두 고른 것은?

①) ① 역

②) ② 이

③) ③ 대우

④) ④ 역과 이

🎯 **정답: ④ 역과 이**

📖 역 "$x = 1$이면 $x^2 = 1$이다"는 $x = 1$이면 항상 $x^2 = 1$이므로 참이다. 이 "$x^2 \neq 1$이면 $x \neq 1$이다"는 역의 대우이므로 역과 진리값이 같고, 역이 참이므로 이도 참이다. 원명제 "$x^2 = 1$이면 $x = 1$이다"는 $x = -1$일 때 $x^2 = 1$이지만 $x \neq 1$이므로 거짓이고, 대우 "$x \neq 1$이면 $x^2 \neq 1$이다"는 원명제와 진리값이 같으므로 거짓이다. 따라서 참인 것은 역과 이이다.

💡 원명제와 대우는 항상 진리값이 같고, 역과 이도 항상 진리값이 같다는 사실은 명제 증명의 핵심 도구이다.

Q212 함수

함수 $f(x) = 3x + 5$의 역함수를 f^{-1}이라 할 때, $f^{-1}(11)$의 값은?

①) ① 1

②) ② 2

③) ③ 3

④) ④ 4

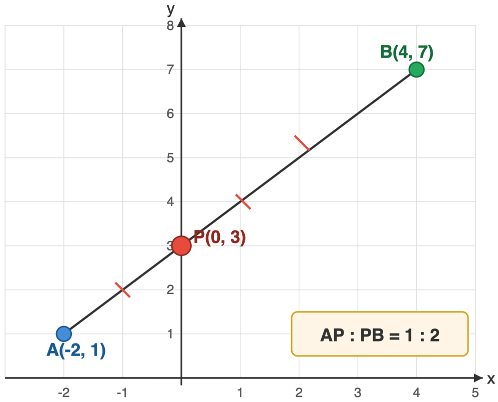
🎯 **정답: ② 2**

📖 $f^{-1}(11) = a$로 놓으면 $f(a) = 11$이다. $3a + 5 = 11$에서 $a = 2$이다. 또는 $y = 3x + 5$를 x에 대해 풀면 $x = \frac{y-5}{3}$이므로 $f^{-1}(x) = \frac{x-5}{3}$이고, $f^{-1}(11) = \frac{11-5}{3} = 2$이다.

💡 f와 f^{-1}의 그래프는 직선 $y = x$에 대해 항상 대칭이다.

Q213 도형의 방정식

두 점 $A(-2,1)$, $B(4,7)$에 대하여 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점 P의 좌표는?



①) ① $(-1,3)$
②) ② $(0,3)$
③) ③ $(1,4)$
④) ④ $(2,5)$

🎯 **정답: ②** $(0,3)$

📖 두 점 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$를 $m:n$으로 내분하는 점은 $\left(\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}, \dfrac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$이다. 따라서 $P=\left(\dfrac{1\cdot4+2\cdot(-2)}{1+2}, \dfrac{1\cdot7+2\cdot1}{1+2}\right)=\left(\dfrac{0}{3},\dfrac{9}{3}\right)=(0,3)$이다.

💡 내분점 공식은 무게중심을 다룰 때나 벡터의 내분 표현에서도 그대로 확장되어 사용된다.

Q214 종합 활용

두 실수 x, y가 $x+y=5$, $xy=4$를 만족할 때, x^3+y^3의 값은?

①) ① 55
②) ② 60
③) ③ 65
④) ④ 70

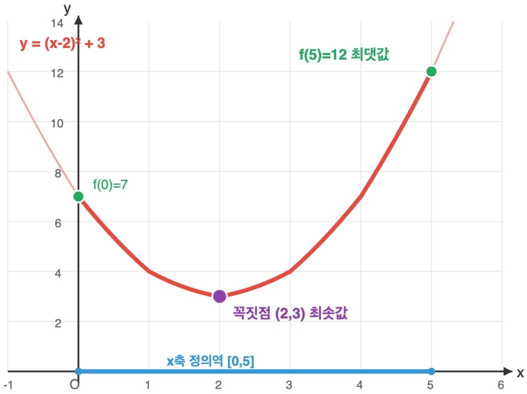
🎯 **정답: ③ 65**

📖 항등식 $(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)$를 변형하면 $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$이다. 주어진 값을 대입하면 $x^3+y^3=5^3-3\cdot4\cdot5=125-60=65$이다.

💡 두 변수의 대칭식은 모두 기본대칭식 $x+y$와 xy만으로 표현할 수 있다는 강력한 성질이 있다.

Q215 이차함수와 이차부등식

$0 \le x \le 5$에서 정의된 함수 $f(x) = x^2 - 4x + 7$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M + m$의 값은?



①) ① 13
②) ② 14
③) ③ 15
④) ④ 16

🎯 **정답: ③ 15**

📖 $f(x) = x^2 - 4x + 7 = (x-2)^2 + 3$이다. 꼭짓점 $x = 2$가 정의역 $[0, 5]$에 속하므로 최솟값은 $f(2) = 3 = m$이다. 최댓값은 정의역의 양 끝값 중 더 큰 값이다. $f(0) = 7$, $f(5) = 25 - 20 + 7 = 12$이므로 최댓값 $M = 12$. 따라서 $M + m = 12 + 3 = 15$이다.

💡 제한된 정의역에서 이차함수 최값을 찾을 때는 꼭짓점이 정의역에 들어오는지 먼저 확인하는 것이 핵심이다.

Q216 집합과 명제

모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^2 + 2(k-1)x + k + 5 > 0$이 성립하도록 하는 정수 k의 개수는?

①) ① 3
②) ② 4
③) ③ 5
④) ④ 6

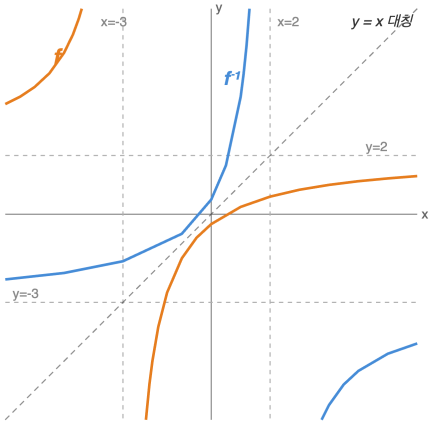
🎯 **정답: ② 4**

📖 이차식 $x^2 + 2(k-1)x + k + 5$의 최고차항 계수가 양수$(+1)$이므로, 모든 실수 x에 대해 부등식이 성립하려면 판별식이 음수여야 한다. $\frac{D}{4} = (k-1)^2 - (k+5) = k^2 - 2k + 1 - k - 5 = k^2 - 3k - 4 < 0$, 즉 $(k-4)(k+1) < 0$이므로 $-1 < k < 4$이다. 이를 만족하는 정수 k는 $0, 1, 2, 3$의 4개이다.

💡 "모든 실수에 대해 성립"하는 절대부등식 조건은 이차식의 부호 결정 문제로 환원되며, 그래프가 x축과 만나지 않는다는 기하학적 의미를 가진다.

Q217 함수

유리함수 $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+3}$의 역함수 $f^{-1}(x)$는?



①) ① $f^{-1}(x) = \dfrac{3x+1}{2-x}$

②) ② $f^{-1}(x) = \dfrac{x+3}{2x-1}$

③) ③ $f^{-1}(x) = \dfrac{3x-1}{x+2}$

④) ④ $f^{-1}(x) = \dfrac{2-x}{3x+1}$

정답: ① $f^{-1}(x) = \dfrac{3x+1}{2-x}$

$y = \dfrac{2x-1}{x+3}$에서 x와 y를 바꾸면 $x = \dfrac{2y-1}{y+3}$이다. 양변에 $y+3$을 곱하면 $x(y+3) = 2y-1$, $xy+3x = 2y-1$이다. y에 대해 정리하면 $y(x-2) = -3x-1$, $y = \dfrac{-3x-1}{x-2} = \dfrac{3x+1}{2-x}$이다. 따라서 $f^{-1}(x) = \dfrac{3x+1}{2-x}$이다.

유리함수의 역함수는 원함수와 같은 형태의 유리함수이며, 두 그래프는 직선 $y = x$에 대해 대칭이다.

Q218 종합 활용

집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$의 부분집합 중에서 모든 원소의 합이 짝수인 부분집합의 개수는? (단, 공집합의 원소의 합은 0으로 본다.)

①) ① 12

②) ② 14

③) ③ 16

④) ④ 18

정답: ③ 16

집합 A의 홀수 원소는 $\{1, 3, 5\}$ (3개), 짝수 원소는 $\{2, 4\}$ (2개)이다. 부분집합 원소의 합이 짝수가 되려면 홀수 원소를 짝수 개 포함해야 한다(홀수를 짝수 개 더하면 짝수). 홀수 원소 선택 방법: ${}_3C_0 + {}_3C_2 = 1 + 3 = 4$가지. 짝수 원소는 어떻게 선택해도 합의 홀짝성에 영향을 주지 않으므로 $2^2 = 4$가지. 따라서 총 $4 \times 4 = 16$개이다.

공집합이 아닌 일반 집합의 부분집합 중 원소의 합이 짝수인 것과 홀수인 것의 개수는 각각 정확히 절반인 2^{n-1}로 같다($n = 5$일 때 $2^4 = 16$).

Q219 함수

유리함수 $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+1}$에 대하여 $f(2)$의 값은?

①) ① $\frac{1}{3}$
②) ② $\frac{1}{2}$
③) ③ $\frac{2}{3}$
④) ④ 1

정답: ①

📖 분수 함수에 $x = 2$를 직접 대입한다. 분자: $2 \times 2 - 3 = 1$. 분모: $2 + 1 = 3$. 따라서 $f(2) = \frac{1}{3}$.

💡 유리함수의 함숫값은 분모가 0이 되는 $x = -1$을 제외한 모든 실수에서 정의된다.

Q220 방정식과 부등식 활용

방정식 $|x-4| = 3$의 두 해의 합은?

①) ① 6
②) ② 7
③) ③ 8
④) ④ 9

정답: ③

📖 절댓값 방정식 $|A| = k\,(k > 0)$은 $A = k$ 또는 $A = -k$로 푼다. (i) $x - 4 = 3$이면 $x = 7$. (ii) $x - 4 = -3$이면 $x = 1$. 따라서 두 해의 합은 $7 + 1 = 8$.

💡 $|x - a| = k$ 꼴 방정식의 두 해는 항상 a를 중심으로 좌우 대칭이므로, 두 해의 합은 항상 $2a$이다.

Q221 경우의 수

서로 다른 4권의 소설책과 3권의 시집 중에서 소설책 1권과 시집 1권을 각각 고르는 방법의 수는?

①) ① 7
②) ② 10
③) ③ 12
④) ④ 15

정답: ③

📖 두 사건이 동시에 일어나므로 곱의 법칙을 적용한다. 소설책을 고르는 방법: 4가지. 시집을 고르는 방법: 3가지. 따라서 $4 \times 3 = 12$가지.

💡 합의 법칙은 '또는', 곱의 법칙은 '그리고'와 대응된다고 외우면 헷갈리지 않는다.

Q222 다항식

다항식 $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 1$을 $x - 1$로 나누었을 때의 나머지는?

①) ① 1

②) ② 2

③) ③ 3

④) ④ 4

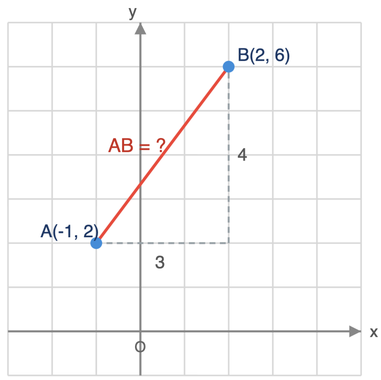
🎯 **정답: ③**

📖 나머지정리에 의해 다항식 $P(x)$를 $x - a$로 나눈 나머지는 $P(a)$이다. $P(1) = 1 - 2 + 3 + 1 = 3$. 따라서 나머지는 3이다.

💡 나머지정리는 직접 다항식 나눗셈을 하지 않고도 단 한 번의 대입으로 나머지를 구할 수 있게 해 주는 강력한 도구이다.

Q223 도형의 방정식

좌표평면 위의 두 점 $A(-1, 2)$, $B(2, 6)$ 사이의 거리는?



①) ① 4

②) ② $\sqrt{17}$

③) ③ 5

④) ④ $\sqrt{29}$

🎯 **정답: ③**

📖 두 점 사이의 거리 공식 $\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$에 대입한다.

$\overline{AB} = \sqrt{(2-(-1))^2 + (6-2)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$.

💡 두 점 사이의 거리 공식은 본질적으로 피타고라스 정리이다. 좌표 차이를 직각삼각형의 두 변으로 보면 자연스럽게 유도된다.

Q224 함수

일차함수 $f(x) = 3x + 2$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g(11)$의 값은?

①) ① 1

②) ② 2

③) ③ 3

④) ④ 4

🎯 **정답: ③**

📖 $g(11)$은 $f(x) = 11$이 되는 x의 값이다. $3x + 2 = 11$을 풀면 $3x = 9$, $x = 3$. 따라서 $g(11) = 3$. 또는 역함수 식을 직접 구해 보면, $y = 3x + 2$에서 $x = \frac{y-2}{3}$이므로 $g(x) = \frac{x-2}{3}$. $g(11) = \frac{9}{3} = 3$.

💡 역함수 값을 구할 때는 굳이 역함수 식을 따로 구하지 않고, 원래 함수에서 함숫값이 그 값이 되는 x를 찾는 게 더 빠르다.

Q225 방정식과 부등식 활용

삼차방정식 $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$의 세 실근 중 음의 실근은?

①) ① -3

②) ② -2

③) ③ -1

④) ④ 0

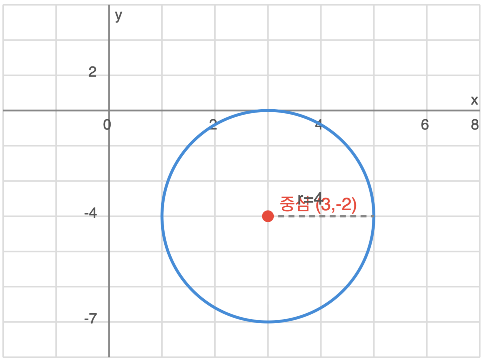
🎯 **정답: ③**

📖 $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$이라 하자. $P(-1) = -1 - 4 - 1 + 6 = 0$이므로 $x + 1$을 인수로 갖는다. 조립제법 또는 다항식 나눗셈으로 $P(x) = (x+1)(x^2 - 5x + 6) = (x+1)(x-2)(x-3)$. 따라서 세 근은 -1, 2, 3이고 음의 실근은 -1.

💡 삼차방정식의 정수근 후보는 상수항(여기서는 6)의 약수 중에서 찾으면 된다($\pm1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$).

Q226 도형의 방정식

원 $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$의 중심의 좌표를 $(a,\ b)$, 반지름을 r라 할 때, $a + b + r$의 값은?



①) ① 3
②) ② 4
③) ③ 5
④) ④ 6

🎯 **정답: ③**

📖 일반형 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$을 표준형으로 바꾸기 위해 완전제곱식을 만든다. $x^2 - 6x = (x-3)^2 - 9$, $y^2 + 4y = (y+2)^2 - 4$. 따라서 $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 9 + 4 + 3 = 16$. 중심 $(3,\ -2)$, 반지름 4. 그러므로 $a + b + r = 3 + (-2) + 4 = 5$.

💡 원의 일반형에서 표준형으로 바꿀 때 우변에 더해지는 값이 음수면 그 식은 원이 아니다(허원). 항상 우변이 양수인지 확인해야 한다.

Q227 집합과 명제

전체집합 $U = \{x \mid x$는 10 이하의 자연수$\}$의 두 부분집합 $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{2, 3, 5, 7\}$에 대하여 $n((A \cup B)^c)$의 값은?

①) ① 2
②) ② 3
③) ③ 4
④) ④ 5

🎯 **정답: ③**

📖 먼저 $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$이므로 $n(A \cup B) = 6$. 전체집합의 원소 개수는 $n(U) = 10$. 여집합의 원소 개수 공식 $n(A^c) = n(U) - n(A)$를 적용하면 $n((A \cup B)^c) = 10 - 6 = 4$. 직접 구해도 $(A \cup B)^c = \{4, 6, 8, 10\}$.

💡 드모르간의 법칙 $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$를 사용해도 같은 결과가 나온다. 두 부분집합 어디에도 속하지 않는 원소를 모은 것이다.

Q228 종합 활용

이차함수 $f(x) = x^2 - 2x + 3$에 대하여 방정식 $f(f(x)) = 3$을 만족하는 모든 실수 x의 합을 구하시오.

🎯 **정답:** 1

📖 $f(x) = t$로 치환하면 $f(t) = 3$이다. 먼저 $f(t) = 3$을 푼다. $t^2 - 2t + 3 = 3 \Rightarrow t^2 - 2t = 0 \Rightarrow t(t-2) = 0$. 그러므로 $t = 0$ 또는 $t = 2$. (i) $f(x) = 0$인 경우: $x^2 - 2x + 3 = 0$. 판별식 $D = 4 - 12 = -8 < 0$이므로 실근이 없다. (ii) $f(x) = 2$인 경우: $x^2 - 2x + 3 = 2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0$. 따라서 $x = 1$(중근). 모든 실수 x의 합은 1.

💡 $f(x)$의 최솟값은 $f(1) = 2$이므로 f의 치역은 $[2, \infty)$이다. 그래서 (i)처럼 $f(x) = 0$은 애초에 해가 없다는 것을 그래프를 통해 미리 알 수 있다.

Q229 경우의 수

1부터 9까지의 자연수 중에서 서로 다른 3개를 뽑아 만들 수 있는 세 자리 자연수 중 짝수의 개수는?

①) ① 168

②) ② 196

③) ③ 224

④) ④ 256

정답: ③

📖 세 자리 자연수가 짝수이려면 일의 자리 숫자가 짝수여야 한다. 1~9 중 짝수는 2, 4, 6, 8로 4가지. 일의 자리를 정한 뒤, 백의 자리와 십의 자리는 남은 8개의 숫자에서 서로 다른 2개를 뽑아 순서대로 배열한다(자릿수 위치가 구분되므로 순열). ${}_8P_2 = 8 \times 7 = 56$. 따라서 총 개수는 $4 \times 56 = 224$.

💡 0이 포함되지 않은 1~9 범위라서 백의 자리에 0이 올 걱정이 없어 계산이 깔끔해진다. 만약 0~9였다면 백의 자리에 0이 올 수 없다는 조건을 따로 빼야 한다.

Q230 함수

무리함수 $f(x) = \sqrt{x-1} + 2$의 역함수가 $f^{-1}(x) = (x-a)^2 + b\ (x \geq a)$일 때, $a+b$의 값은?

①) ① 1

②) ② 2

③) ③ 3

④) ④ 4

정답: ③

📖 $y = \sqrt{x-1} + 2$에서 x에 대해 푼다. $y - 2 = \sqrt{x-1}$. 양변을 제곱하면 $(y-2)^2 = x - 1$이므로 $x = (y-2)^2 + 1$. 단, 원함수의 치역은 $y \geq 2$이므로 역함수의 정의역은 $x \geq 2$. x와 y를 바꿔 쓰면 $f^{-1}(x) = (x-2)^2 + 1\ (x \geq 2)$. 따라서 $a = 2,\ b = 1$이므로 $a + b = 3$.

💡 무리함수와 그 역함수인 이차함수의 그래프는 직선 $y = x$에 대하여 대칭이다. 즉 한 그래프를 직선 $y = x$로 접으면 다른 그래프와 정확히 포개진다.

Q231 복소수와 이차방정식

$i^{50} + i^{100} + i^{150}$의 값을 구하시오. (단, $i = \sqrt{-1}$)

①) ① -1

②) ② 0

③) ③ 1

④) ④ i

정답: ① -1

📖 i의 거듭제곱은 4주기를 갖는다. $i^1 = i,\ i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1$

- $i^{50} = i^{4 \cdot 12 + 2} = i^2 = -1$
- $i^{100} = i^{4 \cdot 25} = 1$
- $i^{150} = i^{4 \cdot 37 + 2} = i^2 = -1$

따라서 $i^{50} + i^{100} + i^{150} = -1 + 1 - 1 = -1$

💡 i의 거듭제곱이 주기 4를 갖는 성질은 복소평면에서 i를 곱할 때마다 반시계방향으로 90° 회전하기 때문이다.

Q232 함수

함수 f가 모든 실수 x에 대하여 $f(x+1) = 2x - 1$을 만족할 때, $f(3)$의 값을 구하시오.

①) ① 1

②) ② 3

③) ③ 5

④) ④ 7

🎯 **정답:** ② 3

📖 $f(3)$의 값을 구하려면 $x + 1 = 3$이 되도록 x를 정해야 한다.

$x + 1 = 3 \Rightarrow x = 2$

주어진 식에 $x = 2$를 대입하면

$f(3) = 2 \cdot 2 - 1 = 3$

💡 이런 유형의 문제는 변수 치환의 기초로, 미적분에서 다루는 합성함수 미분의 기본 아이디어와도 연결된다.

Q233 복소수와 이차방정식

복소수 $z = 2 - 3i$에 대하여 $z + \bar{z} + z\bar{z}$의 값을 구하시오. (단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수)

①) ① 13

②) ② 15

③) ③ 17

④) ④ 19

🎯 **정답:** ③ 17

📖 $z = 2 - 3i$이므로 $\bar{z} = 2 + 3i$이다.

• $z + \bar{z} = (2 - 3i) + (2 + 3i) = 4$

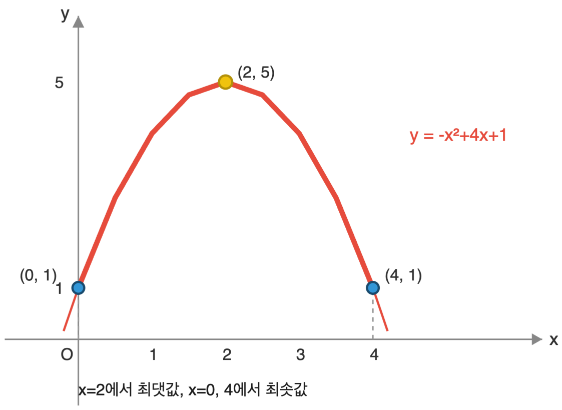
• $z\bar{z} = (2 - 3i)(2 + 3i) = 2^2 - (3i)^2 = 4 - (-9) = 13$

따라서 $z + \bar{z} + z\bar{z} = 4 + 13 = 17$

💡 $z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}(z)$, $z\bar{z} = |z|^2$ 공식은 복소해석학과 양자역학에서 핵심적으로 활용된다.

Q234 이차함수와 이차부등식

$0 \le x \le 4$에서 함수 $f(x) = -x^2 + 4x + 1$의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오.



①) ① 4
②) ② 5
③) ③ 6
④) ④ 7

정답: ③ 6

$f(x) = -x^2 + 4x + 1 = -(x-2)^2 + 5$로 표준형 변환.
포물선이 위로 볼록하고 꼭짓점은 $(2, 5)$이다. $x = 2$는 정의역 $[0, 4]$ 내부에 있다.
• 꼭짓점에서 최댓값: $f(2) = 5$
• 경계값 비교: $f(0) = 1,\ f(4) = -16 + 16 + 1 = 1$
따라서 최솟값은 1.
최댓값 $+$ 최솟값 $= 5 + 1 = 6$

닫힌구간에서 연속함수의 최댓값과 최솟값은 반드시 존재한다(최대최소 정리).

Q235 함수

두 함수 $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x - 3$에 대하여 $(g \circ f)(2) - (f \circ g)(2)$의 값을 구하시오.

①) ① 1
②) ② 2
③) ③ 3
④) ④ 4

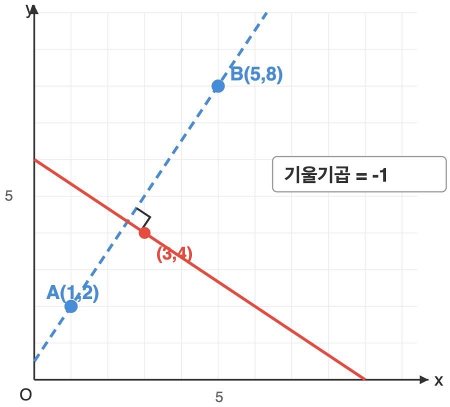
정답: ③ 3

합성함수의 정의에 따라 차례로 계산한다.
• $(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(2 \cdot 2 + 1) = g(5) = 5 - 3 = 2$
• $(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(2-3) = f(-1) = 2 \cdot (-1) + 1 = -1$
따라서 $(g \circ f)(2) - (f \circ g)(2) = 2 - (-1) = 3$

일반적으로 $f \circ g \ne g \circ f$이며, 이는 함수의 합성이 교환법칙을 만족하지 않음을 보여준다.

Q236 도형의 방정식

두 점 $A(1,2)$, $B(5,8)$을 지나는 직선과 수직이고 점 $(3,4)$를 지나는 직선의 방정식을 구하시오.



①) ① $y = -\frac{2}{3}x + 6$

②) ② $y = \frac{2}{3}x + 2$

③) ③ $y = -\frac{3}{2}x + \frac{17}{2}$

④) ④ $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$

🎯 **정답:** ① $y = -\frac{2}{3}x + 6$

📖 직선 AB의 기울기 $m_1 = \frac{8-2}{5-1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

수직 조건: $m_1 \cdot m_2 = -1$이므로 $m_2 = -\frac{2}{3}$

점 $(3,4)$를 지나고 기울기 $-\frac{2}{3}$인 직선:

$y - 4 = -\frac{2}{3}(x-3)$

$y = -\frac{2}{3}x + 2 + 4 = -\frac{2}{3}x + 6$

💡 두 직선이 수직일 때 기울기의 곱이 -1이라는 사실은 회전 행렬의 성질에서 자연스럽게 유도된다.

Q237 방정식과 부등식 활용

삼차방정식 $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$의 값을 구하시오.

①) ① $\frac{5}{6}$

②) ② $\frac{7}{6}$

③) ③ $\frac{11}{6}$

④) ④ $\frac{13}{6}$

🎯 **정답:** ③ $\frac{11}{6}$

📖 삼차방정식 $x^3 + px^2 + qx + r = 0$의 근과 계수의 관계에 의해

- $\alpha + \beta + \gamma = 6$
- $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 11$
- $\alpha\beta\gamma = 6$

역수의 합을 통분하면

$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta}{\alpha\beta\gamma} = \frac{11}{6}$

💡 이 삼차방정식은 인수분해하면 $(x-1)(x-2)(x-3) = 0$으로 세 근이 $1, 2, 3$이다. 직접 계산해도 $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$이다.

Q238 이차함수와 이차부등식

모든 실수 x에 대하여 부등식 $kx^2 + 2(k-1)x + k + 2 > 0$이 성립하도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

①) ① $k > 0$

②) ② $k > \frac{1}{4}$

③) ③ $k \geq \frac{1}{4}$

④) ④ $k > \frac{1}{2}$

🎯 **정답:** ② $k > \frac{1}{4}$

📖 (i) $k = 0$일 때: $-2x + 2 > 0 \Rightarrow x < 1$. 모든 실수에서 성립하지 않으므로 부적합.

(ii) $k \neq 0$일 때: 모든 실수 x에서 부등식이 성립하려면 이차항 계수가 양수이고 판별식이 음수여야 한다.

- 조건 1: $k > 0$
- 조건 2: $D/4 = (k-1)^2 - k(k+2) < 0$

$k^2 - 2k + 1 - k^2 - 2k < 0$

$-4k + 1 < 0 \Rightarrow k > \frac{1}{4}$

두 조건의 공통 범위는 $k > \frac{1}{4}$

💡 이차식이 항상 양수가 되는 조건은 '아래로 볼록 + 판별식 < 0'이며, 이는 양의 정부호(positive definite) 이차형식의 기본 성질이다.

Q239 함수

함수 $f(x) = \sqrt{x+3} - 1$의 역함수 $f^{-1}(x)$를 구하시오.

①) ① $f^{-1}(x) = (x-1)^2 - 3\ (x \geq 1)$

②) ② $f^{-1}(x) = (x+1)^2 - 3\ (x \geq -1)$

③) ③ $f^{-1}(x) = (x+1)^2 + 3\ (x \geq -1)$

④) ④ $f^{-1}(x) = x^2 - 3\ (x \geq 0)$

🎯 **정답:** ② $f^{-1}(x) = (x+1)^2 - 3\ (x \geq -1)$

📖 $y = \sqrt{x+3} - 1$로 놓고 x에 대해 푼다.

$y + 1 = \sqrt{x+3}$ (단, 좌변이 0 이상이려면 $y \geq -1$)

양변 제곱: $(y+1)^2 = x + 3$

$x = (y+1)^2 - 3$

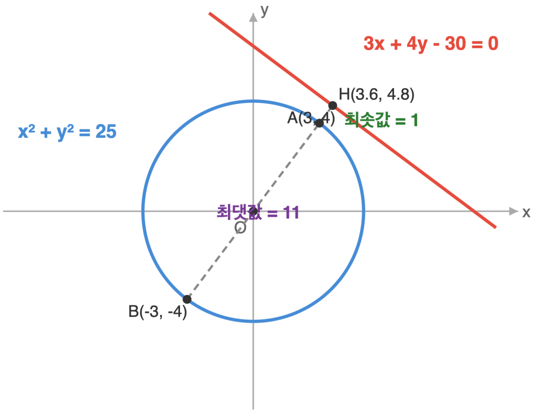
x와 y를 바꾸면 $f^{-1}(x) = (x+1)^2 - 3$

원함수 f의 치역이 $\{y \mid y \geq -1\}$이므로 역함수의 정의역은 $x \geq -1$

💡 무리함수와 그 역함수는 직선 $y = x$에 대해 대칭이며, 정의역과 치역이 서로 뒤바뀐다.

Q240 도형의 방정식

원 $x^2+y^2=25$ 위의 점 P와 직선 $3x+4y-30=0$ 사이의 거리의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오.



①) ① 10

②) ② 11

③) ③ 12

④) ④ 13

🎯 **정답:** ③ 12

📖 원의 중심 $O(0,0)$에서 직선 $3x+4y-30=0$까지의 거리:

$$d=\frac{|3\cdot 0+4\cdot 0-30|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{30}{5}=6$$

반지름 $r=5$이고 $d=6>r=5$이므로 원과 직선은 만나지 않는다.

원 위의 점에서 직선까지 거리는

- 최댓값: $d+r=6+5=11$
- 최솟값: $d-r=6-5=1$

따라서 합은 $11+1=12$

💡 원 위 점에서 외부 직선까지의 최단/최장 거리는 항상 중심을 지나는 수선 위에 놓이며, 이는 등거리집합 개념의 응용이다.

📝 고1 수학 일반

총 10문제 · 문제와 정답·풀이 포함

Q241 경우의 수

문자 P, A, R, A, L, L, E, L 8개를 일렬로 나열하는 경우의 수를 구하시오.

①) ① 1680

②) ② 3360

③) ③ 6720

④) ④ 40320

🎯 **정답:** ② 3360

📖 단어 'PARALLEL'에는 다음 문자가 있다.

• A: 2개

• L: 3개

• P, R, E: 각 1개

총 8개의 문자 중 같은 것이 있는 순열의 수는

$\frac{8!}{2!\cdot 3!} = \frac{40320}{2\cdot 6} = \frac{40320}{12} = 3360$

💡 같은 것이 있는 순열 공식 $\frac{n!}{p!\,q!\,r!\,\cdots}$은 다항계수의 한 형태로, 이항계수의 일반화이다.

Q242 종합 활용

이차함수 $y = x^2 - 2x + a$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나고, 그 두 교점 사이의 거리가 4일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

①) ① -5

②) ② -3

③) ③ -1

④) ④ 1

🎯 **정답:** ② -3

📖 이차방정식 $x^2 - 2x + a = 0$의 두 실근을 α, β $(\alpha < \beta)$라 하자.

근과 계수의 관계: $\alpha + \beta = 2,\ \alpha\beta = a$

두 교점 사이의 거리는 $|\beta - \alpha| = 4$이므로

$(\beta - \alpha)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 4 - 4a = 16$

$-4a = 12 \Rightarrow a = -3$

검증: $a = -3$일 때 판별식 $D = 4 - 4(-3) = 16 > 0$이므로 서로 다른 두 실근 존재. ✓

💡 두 근의 차의 제곱 공식 $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$는 대칭식 변형의 가장 기본적인 예이다.

Q243 함수

두 함수 $f(x) = 3x + 1$과 $g(x) = x - 2$에 대하여 $(g \circ f)(x)$를 구하시오.

①) ① $3x - 1$

②) ② $3x + 3$

③) ③ $3x + 1$

④) ④ $3x - 3$

🎯 **정답:** ① $3x - 1$

📖 합성함수의 정의에 의해 $(g \circ f)(x) = g(f(x))$이다. $f(x) = 3x + 1$이므로 g의 입력 자리에 $3x + 1$을 대입한다. 따라서 $g(3x + 1) = (3x + 1) - 2 = 3x - 1$이다.

💡 합성함수에서는 순서가 매우 중요해. 일반적으로 $(g \circ f)(x)$와 $(f \circ g)(x)$는 같지 않아!

Q244 집합과 명제

두 집합 A, B에 대하여 $n(A) = 12,\ n(B) = 8,\ n(A \cap B) = 3$일 때, $n(A \cup B)$의 값은?

①) ① 15

②) ② 17

③) ③ 20

④) ④ 23

🎯 **정답:** ② 17

📖 합집합의 원소 개수 공식 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$를 이용한다. 값을 대입하면 $n(A \cup B) = 12 + 8 - 3 = 17$이다. 공통원소를 두 번 더했으므로 한 번 빼주는 것이 핵심이다.

💡 이 공식을 '포함과 배제의 원리'라고 해. 세 집합으로 확장하면 $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$로 더 복잡해져!

Q245 방정식과 부등식 활용

절댓값 방정식 $|2x - 3| = 5$의 두 근의 합은?

①) ① 1

②) ② 2

③) ③ 3

④) ④ 5

🎯 **정답:** ③ 3

📖 $|2x - 3| = 5$이므로 $2x - 3 = 5$ 또는 $2x - 3 = -5$로 두 경우로 나누어 푼다. 첫째 경우: $2x = 8,\ x = 4$. 둘째 경우: $2x = -2,\ x = -1$. 따라서 두 근의 합은 $4 + (-1) = 3$이다.

💡 절댓값 방정식 $|ax + b| = c\ (c > 0)$의 두 근의 합은 항상 $-\frac{2b}{a}$가 돼. 이 문제에서는 $-\frac{2 \cdot (-3)}{2} = 3$이지!

Q246 집합과 명제

명제 '$x = 2$이면 $x^2 = 4$이다'의 역, 이, 대우 중 참인 것을 모두 고르시오.

①) ① 역만 참

②) ② 대우만 참

③) ③ 이와 대우

④) ④ 역, 이, 대우 모두 거짓

🎯 **정답: ② 대우만 참**

📖 원명제 '$x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$'는 참이다. 역: '$x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$'는 거짓이다 ($x = -2$일 때 $x^2 = 4$이지만 $x \neq 2$). 이: '$x \neq 2 \Rightarrow x^2 \neq 4$'는 거짓이다 ($x = -2$이면 $x \neq 2$이지만 $x^2 = 4$). 대우: '$x^2 \neq 4 \Rightarrow x \neq 2$'는 참이다 (원명제와 진리값이 같음).

💡 어떤 명제든 그것의 대우와 항상 같은 진리값을 가져. 그래서 어려운 명제를 증명할 때 대우를 증명하는 '대우법'이 자주 쓰여!

Q247 종합 활용

연립부등식 $\begin{cases} x^2 - 3x - 4 < 0 \\ x^2 - 1 > 0 \end{cases}$ 을 만족하는 정수 x의 개수는?

①) ① 1

②) ② 2

③) ③ 3

④) ④ 4

🎯 **정답:** ② 2

📖 첫째 부등식을 푼다. $x^2 - 3x - 4 < 0 \Rightarrow (x - 4)(x + 1) < 0 \Rightarrow -1 < x < 4$. 둘째 부등식을 푼다. $x^2 - 1 > 0 \Rightarrow (x - 1)(x + 1) > 0 \Rightarrow x < -1$ 또는 $x > 1$. 두 해의 공통 범위는 $1 < x < 4$이다. 이 범위 안의 정수는 $x = 2, 3$이므로 총 2개이다.

💡 연립부등식의 해는 각 부등식 해의 교집합이야. 수직선에 두 해를 함께 그려보면 공통부분이 한눈에 보여!

Q248 함수

일차함수 $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$의 역함수 $f^{-1}(x)$를 구하시오.

①) ① $f^{-1}(x) = 2x - 6$

②) ② $f^{-1}(x) = 2x + 6$

③) ③ $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$

④) ④ $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - 3$

🎯 **정답:** ① $f^{-1}(x) = 2x - 6$

📖 $y = \frac{1}{2}x + 3$으로 놓고 x에 대하여 푼다. $\frac{1}{2}x = y - 3 \Rightarrow x = 2(y - 3) = 2y - 6$. 이제 x와 y를 서로 바꾸어 쓰면 $y = 2x - 6$이다. 따라서 $f^{-1}(x) = 2x - 6$.

💡 일차함수 $f(x) = ax + b$ $(a \neq 0)$의 역함수는 $f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$로 일반화돼. f와 f^{-1}의 그래프는 항상 직선 $y = x$에 대해 대칭이지!

Q249 종합 활용

두 집합 $A = \{x | x^2 - 8x + 7 \le 0\}$, $B = \{x | (x-a)^2 \le 4\}$에 대하여 $B \subset A$를 만족하는 실수 a의 값의 범위를 구하시오.

①) ① $1 \le a \le 5$
②) ② $3 \le a \le 5$
③) ③ $1 \le a \le 7$
④) ④ $-1 \le a \le 9$

🎯 **정답:** ② $3 \le a \le 5$

📖 집합 A를 구한다. $x^2 - 8x + 7 \le 0 \Rightarrow (x-1)(x-7) \le 0 \Rightarrow 1 \le x \le 7$. 집합 B를 구한다. $(x-a)^2 \le 4 \Rightarrow -2 \le x - a \le 2 \Rightarrow a - 2 \le x \le a + 2$. $B \subset A$이려면 구간 $[a-2, a+2]$가 구간 $[1, 7]$에 포함되어야 한다. 따라서 양 끝 조건 $a - 2 \ge 1$이고 $a + 2 \le 7$, 즉 $a \ge 3$이고 $a \le 5$이므로 $3 \le a \le 5$이다.

💡 부분집합 조건은 보통 양 끝점의 위치를 비교해서 풀어. 끝점 포함 여부(부등호에 등호가 있는지)도 빠뜨리지 않고 따져야 해!

Q250 함수

일차함수 $f(x) = ax + b$ $(a > 0)$가 모든 실수 x에 대하여 $(f \circ f)(x) = 9x + 4$를 만족할 때, $a + b$의 값은?

①) ① 3
②) ② 4
③) ③ 5
④) ④ 6

🎯 **정답: ② 4**

📖 1단계: $f(x) = ax + b$이므로 $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = a(ax + b) + b = a^2x + ab + b$. 2단계: 항등식 $a^2x + (ab + b) = 9x + 4$에서 계수 비교. 3단계: $a^2 = 9$이고 $a > 0$이므로 $a = 3$. 4단계: $ab + b = b(a + 1) = 4b = 4$이므로 $b = 1$. 5단계: 따라서 $a + b = 3 + 1 = 4$.

💡 일차함수의 자기 자신과의 합성은 또 다른 일차함수가 되며, 기울기는 원래 기울기의 제곱이 됩니다.