

고등/올림피아드 사고력

총 40문제 · 문제와 정답·풀이 포함

Q1 정수론 (심화)

3^{100} 을 7로 나눈 나머지를 구하시오.

- ① ① 1
- ② ② 2
- ③ ③ 4
- ④ ④ 5

정답: ③ 4

핵심: 페르마 소정리 $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ (p 소수, $\gcd(a, p) = 1$). 따라서 $3^6 \equiv 1 \pmod{7}$. 지수 분해: $100 = 6 \cdot 16 + 4$ 이므로 $3^{100} = (3^6)^{16} \cdot 3^4 \equiv 1 \cdot 81 \equiv 81 - 11 \cdot 7 = 4 \pmod{7}$.

페르마 소정리는 1640년 페르마가 친구 프레니클에게 보낸 편지에서 처음 등장했고, 증명은 오일러가 100년 뒤에 완성했다.

Q2 조합 (심화)

어느 학교에 학생 10명이 있고, 각 학생은 정확히 3개의 동아리에 가입해 있다. 각 동아리에는 정확히 5명이 가입해 있을 때, 동아리의 개수는?

- ① ① 4
- ② ② 5
- ③ ③ 6
- ④ ④ 7

정답: ③ 6

이중계산(double counting): (학생, 동아리) 가입 쌍 (s, c) 의 개수 N 을 두 가지 방식으로 센다. (1) 학생 기준: $N = 10 \times 3 = 30$. (2) 동아리 기준: $N = k \times 5$ (k = 동아리 수). 두 식이 같으므로 $5k = 30$, $k = 6$.

이중계산은 조합론에서 가장 강력한 도구 중 하나로, 수많은 항등식과 부등식을 단순화한다.

Q3 확률 (조건부)

인구의 1%가 어떤 질병에 걸려 있다. 검사 정확도는 환자일 때 양성 판정 99%, 정상일 때 음성 판정 99%이다. 한 사람이 양성 판정을 받았을 때, 실제로 환자일 확률은?

- ① ① $\frac{1}{100}$
- ② ② $\frac{1}{4}$
- ③ ③ $\frac{1}{2}$
- ④ ④ $\frac{2}{99}$

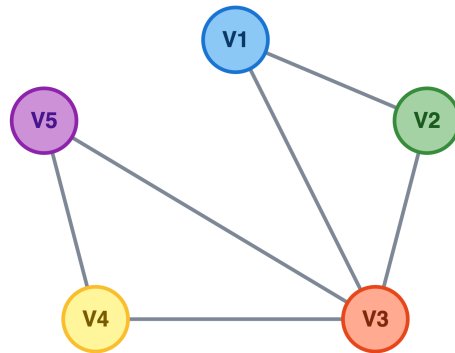
정답: ③ $\frac{1}{2}$

베이즈 정리: $P(D|+) = \frac{P(+|D)P(D)}{P(+|D)P(D) + P(+|-D)P(-D)}$. 대입하면 $\frac{0.99 \times 0.01}{0.99 \times 0.01 + 0.01 \times 0.99} = \frac{1}{2}$. 직관: 분모 두 항이 정확히 같아진다(유병률 \times 민감도 = 정상비율 \times 위양성률).

이를 '베이즈 역설'이라 부르며, 의사들도 자주 틀리는 문제다. 정확도가 높아도 유병률이 낮으면 양성판정의 신뢰도는 낮다.

Q4 그래프 이론

아래 무방향 그래프에서 오일러 회로(모든 간선을 정확히 한 번씩 지나 출발점으로 돌아오는 경로)가 존재하는지 판단하시오.



- ① ① 존재한다
- ② ② 오일러 경로만 존재(회로는 없음)
- ③ ③ 존재하지 않는다
- ④ ④ 정보 부족

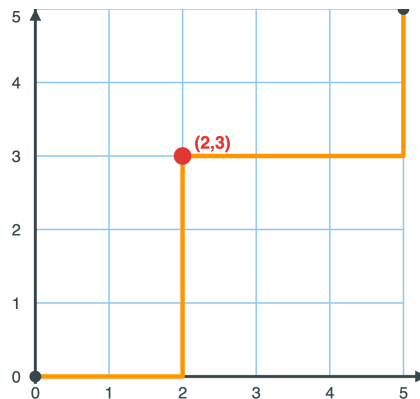
정답: ① 존재한다

오일러 정리: 연결 그래프에서 오일러 회로 \iff 모든 정점의 차수가 짝수. 본 그래프의 차수는 (2, 2, 4, 2, 2)로 모두 짝수이고 연결되어 있으므로 회로 존재. 예: $V_1 \rightarrow V_2 \rightarrow V_3 \rightarrow V_4 \rightarrow V_5 \rightarrow V_3 \rightarrow V_1$.

오일러는 1736년 '쾨니히스베르크 다리 문제'를 풀며 그래프 이론을 창시했다. 7개 다리를 한 번씩만 건너 출발점으로 돌아올 수 없음을 보였다.

Q5 조합 (심화)

좌표평면 (0, 0)에서 (5, 5)까지 오른쪽(→) 또는 위(↑)로만 이동하는 경로 중, 반드시 점 (2, 3)을 지나는 경로의 수는?



- ① ① 80
- ② ② 90
- ③ ③ 100
- ④ ④ 120

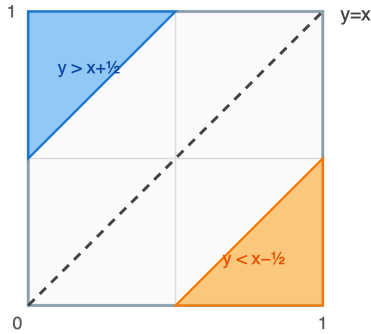
정답: ③ 100

두 구간으로 분할. (0, 0) → (2, 3) 경로 수: 오른쪽 2번 + 위 3번 = $\binom{5}{2} = 10$. (2, 3) → (5, 5) 경로 수: 오른쪽 3번 + 위 2번 = $\binom{5}{2} = 10$. 곱의 법칙으로 총 $10 \times 10 = 100$.

격자경로 수 $\binom{m+n}{m}$ 은 카탈란 수, 모츠킨 수 등 수많은 조합론적 수열의 출발점이다.

Q6 확률 (기하)

단위 정사각형 $[0, 1] \times [0, 1]$ 내부에서 점 (X, Y) 를 균등 무작위로 선택한다. $|X - Y| > \frac{1}{2}$ 일 확률을 구하시오.



- ① ① $\frac{1}{8}$
- ② ② $\frac{1}{4}$
- ③ ③ $\frac{1}{3}$
- ④ ④ $\frac{1}{2}$

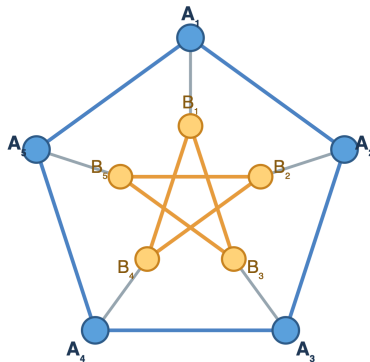
정답: ② $\frac{1}{4}$

기하확률: 확률 = (조건 영역 넓이) / (전체 넓이). 조건은 $Y > X + \frac{1}{2}$ 또는 $Y < X - \frac{1}{2}$. 각 영역은 직각이등변삼각형으로 다리 길이 $\frac{1}{2}$, 넓이 $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$. 두 영역의 합 = $\frac{1}{4}$.

기하확률은 18세기 뷔퐁의 바늘 실험에서 시작되었고, 바늘 던지기로 원주율 π 를 근사할 수 있다.

Q7 그래프 이론

피터슨(Petersen) 그래프의 채색수(chromatic number) χ 를 구하시오.



- ① ① 2
- ② ② 3
- ③ ③ 4
- ④ ④ 5

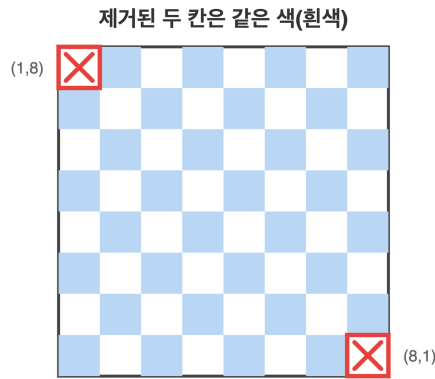
정답: ② 3

하한: 피터슨 그래프에 5각형(홀수 사이클)이 포함되어 있으므로 $\chi \geq 3$ (2색으로는 홀수 사이클 불가). **상한:** 실제 3색 칠하기 존재. 예) 외부 5각형을 1, 2, 1, 2, 3으로, 내부는 충돌을 피해 2, 3, 3, 1, 2 등으로 배정. 따라서 $\chi = 3$.

피터슨 그래프는 '가장 작은 반례'로 유명하다. 해밀턴 회로 없음, 3-에지-채색 불가능 등 그래프 이론 정리의 단골 반례다.

Q8 불변량과 단조량

8 × 8 체스판에서 좌상단과 우하단 두 칸을 제거한 62칸을 1 × 2 도미노 31개로 빈틈없이 덮을 수 있는가?



- ① ① 가능, 유일한 방법
- ② ② 가능, 여러 방법
- ③ ③ 불가능 (색칠 불변량)
- ④ ④ 알 수 없음

정답: ③ 불가능 (색칠 불변량)

불변량 논증: 체스판을 흑백 교대 색칠. 좌상·우하 모서리는 같은 색(예: 둘 다 흰색). 제거 후 남은 칸은 흰색 30개, 검은색 32개. 도미노 하나는 반드시 흰 1칸 + 검은 1칸을 덮으므로 도미노 31개는 흰 31, 검 31을 덮어야 함. 색깔 수가 불일치(30 ≠ 31)하므로 불가능.

이 문제는 1958년 De Bruijn이 'mutilated chessboard problem'으로 대중화했고, AI 정리증명의 난제로도 유명했다.

Q9 디오판티

자연수 순서쌍 (x, y) ($x \leq y$)가 $x^2 + y^2 = 65^2$ 을 만족하는 경우의 수를 구하시오.

- ① ① 2
- ② ② 3
- ③ ③ 4
- ④ ④ 5

정답: ③ 4

65 = 5 × 13이고 두 소인수 모두 $4k + 1$ 형. 원시 피타고라스 트리플과 그 배수 모두 고려: (i) 3-4-5 배 13: (39, 52, 65). (ii) 5-12-13 배 5: (25, 60, 65). (iii) 원시 트리플 1: (16, 63, 65) ($16^2 + 63^2 = 256 + 3969 = 4225$). (iv) 원시 트리플 2: (33, 56, 65) ($33^2 + 56^2 = 1089 + 3136 = 4225$). 총 4쌍.

65는 두 가지 방식으로 두 제곱수의 합이 되는 최소 자연수($65 = 1^2 + 8^2 = 4^2 + 7^2$)다. 가우스 정수 $Z[i]$ 에서 $65 = (2 + i)(2 - i)(3 + 2i)(3 - 2i)$ 로 분해된다.

Q10 비둘기집 응용

1부터 1000까지의 자연수 중에서 2, 3, 5 중 어느 것으로도 나누어 떨어지지 않는 수의 개수를 구하시오.

- ① ① 250
- ② ② 266
- ③ ③ 275
- ④ ④ 300

정답: ② 266

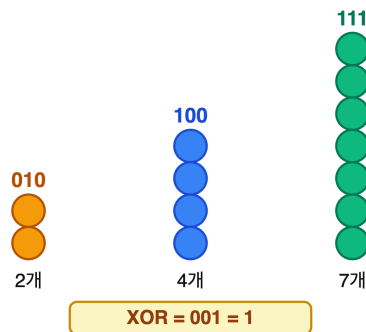
포함배제 원리. $A_k = \{n \leq 1000: k | n\}$ 이라 두면 $|A_2| = 500, |A_3| = 333, |A_5| = 200, |A_6| = 166, |A_{10}| = 100, |A_{15}| = 66, |A_{30}| = 33. |A_2 \cup A_3 \cup A_5| = 500 + 333 + 200 - 166 - 100 - 66 + 33 = 734.$ 따라서 답 = $1000 - 734 = 266.$ 검산: $1000 \times \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{15} \times 1000 \approx 266.67.$

$\frac{4}{15}$ 는 30과 서로소인 수의 비율이며, 일반적으로 n 이하에서 n 과 서로소인 수의 비율은 오일러 토션트 $\frac{\varphi(n)}{n}$ 로 수렴한다.

Q11 게임 이론 (Combinatorial)

세 개의 돌 더미가 각각 2, 4, 7개로 시작하는 Nim 게임에서, 두 플레이어가 번갈아 한 더미에서 1개 이상의 돌을 가져가며 마지막 돌을 가져가는 사람이 이긴다. 첫 번째 플레이어가 이기기 위한 첫수는?

세 더미 Nim 게임 (nim-sum)



- ① ① 7 더미에서 1개 제거
- ② ② 4 더미에서 1개 제거
- ③ ③ 2 더미에서 1개 제거
- ④ ④ 첫 번째 플레이어는 무조건 진다

정답: ① 7 더미에서 1개 제거

Sprague-Grundy 이론: Nim의 승패는 모든 더미 크기의 이진 XOR(nim-sum)으로 결정된다. XOR = 0이면 현재 둘 차례인 사람이 짐(P-position), 아니면 이김. 계산: $2 \oplus 4 \oplus 7 = 010 \oplus 100 \oplus 111 = 001 = 1 \neq 0,$ 따라서 첫 플레이어 승. 이기는 수는 nim-sum을 0으로 만드는 것인데, 각 더미를 $p \rightarrow p \oplus 1$ 로 바꿔 보면 $2 \rightarrow 3, 4 \rightarrow 5$ 는 오히려 커져 불가능하고 오직 $7 \oplus 1 = 6 < 7$ 인 7 더미만 줄일 수 있다. $7 \rightarrow 6$ (1개 제거)하면 $2 \oplus 4 \oplus 6 = 010 \oplus 100 \oplus 110 = 000$ 이 되어, 이것이 유일한 승리 첫수다.


Sprague-Grundy 정리는 모든 공정 게임이 어떤 Nim 게임과 등가임을 보인다. 1930년대 독립적으로 발견된 이 정리는 조합게임이론의 출발점이다.

Q12 정수론 (심화)

10! 을 11 로 나눈 나머지는?

- ①) ①1
- ②) ②5
- ③) ③9
- ④) ④10

 **정답: ④10**

 한 줄 요약: 윌슨 정리로 바로 결정된다.

윌슨 정리: 소수 p 에 대해 $(p - 1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

11 은 소수이므로 $10! \equiv -1 \equiv 10 \pmod{11}$.

검증: 작은 케이스 $p = 5$ 의 경우 $4! = 24 \equiv -1 \pmod{5}$ 임을 확인하면 같은 원리이다.

 윌슨 정리는 18세기 영국의 존 윌슨이 추측하였으나, 첫 증명은 라그랑주가 했다. 역도 성립하여 소수 판정 기준이 된다.

Q13 비둘기집 응용

임의의 서로 다른 정수 n 개를 골랐을 때, 그 중 어떤 두 수의 차가 5의 배수가 되도록 항상 보장되는 최소의 n 은?

- ①) ①4
- ②) ②5
- ③) ③6
- ④) ④7

 **정답: ③6**

 한 줄 요약: 5로 나눈 나머지의 종류는 5 가지이므로 비둘기집 원리를 쓴다.

정수를 5로 나눈 나머지는 $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ 의 5 가지이다.

- $n = 5$ 이면 모든 나머지가 다를 수 있다 (예: 0, 1, 2, 3, 4 자체) — 차가 5의 배수인 쌍이 보장되지 않는다.

- $n = 6$ 이면 비둘기집 원리에 의해 적어도 두 수가 같은 나머지를 가진다. 같은 나머진 두 수의 차는 5의 배수.

따라서 답은 6.

 이 단순한 원리(Dirichlet box principle)는 디리클레가 19 세기에 정형화하였다.

Q14 모듈러·합동식

세 합동식 $x \equiv 2 \pmod{3}$, $x \equiv 3 \pmod{5}$, $x \equiv 2 \pmod{7}$ 을 모두 만족하는 가장 작은 양의 정수 x 는?

- ① ①8
- ② ②23
- ③ ③38
- ④ ④128

정답: ②23

한 줄 요약: 중국인 나머지정리(CRT)로 두 식씩 결합한다.

1단계 ($x \equiv 2 \pmod{3}$, $x \equiv 3 \pmod{5}$): $x = 5k + 3$ 로 놓으면
 $5k + 3 \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow 2k \equiv -1 \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow k \equiv 1 \pmod{3}$. 즉 $x \equiv 8 \pmod{15}$.

2단계 ($x \equiv 8 \pmod{15}$, $x \equiv 2 \pmod{7}$): $x = 15m + 8$ 로 놓으면
 $15m + 8 \equiv 2 \pmod{7} \Rightarrow m + 1 \equiv 2 \pmod{7} \Rightarrow m \equiv 1 \pmod{7}$. 즉 $x = 105n + 23$.

최소 양의 정수: $x = 23$. 검증: $23 = 3 \cdot 7 + 2$, $23 = 5 \cdot 4 + 3$, $23 = 7 \cdot 3 + 2$. 모두 성립.

중국인 나머지정리는 3 세기경 중국 수학서 손자산경에 그 원형이 등장한다.

Q15 극값 문제

양의 실수 x, y 가 $x + y = 10$ 을 만족할 때, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 의 최솟값은?

- ① ① $\frac{1}{5}$
- ② ② $\frac{2}{5}$
- ③ ③ $\frac{1}{2}$
- ④ ④ $\frac{2}{3}$

정답: ② $\frac{2}{5}$

한 줄 요약: 통분 후 AM-GM 으로 xy 의 최댓값을 구한다.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy} = \frac{10}{xy}$$

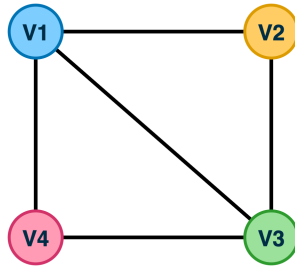
AM-GM: $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} = 5 \Rightarrow xy \leq 25$. 등호는 $x = y = 5$ 에서.

따라서 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$. 최솟값은 $\frac{2}{5}$.

이 결과는 조화평균 \leq 기하평균 \leq 산술평균 부등식의 직접적인 응용이다.

Q16 그래프 이론

네 정점 V_1, V_2, V_3, V_4 가 사각형 모양으로 배치되고, 간선이 $\{V_1V_2, V_2V_3, V_3V_4, V_4V_1, V_1V_3\}$ 인 그래프 G 의 신장트리 (spanning tree) 개수는?



- ① ①5
- ② ②6
- ③ ③8
- ④ ④10

정답: ③8

한 줄 요약: $\binom{5}{3} = 10$ 부분집합에서 사이클을 포함하는 것을 제외한다.

신장트리는 $4 - 1 = 3$ 개의 간선으로 이루어진다. 전체 간선 5 개 중 3 개 고르기: $\binom{5}{3} = 10$.

이 중 사이클을 형성하는 부분집합:

- $\{V_1V_2, V_2V_3, V_1V_3\}$: 삼각형
- $\{V_1V_3, V_3V_4, V_4V_1\}$: 삼각형

사각형 $V_1V_2V_3V_4V_1$ 자체는 4 개 간선이므로 3 개 부분집합으로 사이클을 만들 수 없다.

사이클이 있는 경우 2 가지 제외 $\Rightarrow 10 - 2 = 8$.

참고: 키르히호프 행렬-트리 정리로도 확인 가능하다.

키르히호프의 행렬-트리 정리는 그래프 라플라시안의 임의의 여인자가 신장트리 개수와 같다고 말한다.

Q17 디오판티

디오판투스 방정식 $3x + 7y = 100$ 의 음이 아닌 정수해 (x, y) 의 개수는?

- ① ①4
- ② ②5
- ③ ③6
- ④ ④7

정답: ②5

한 줄 요약: y 범위와 합동조건을 결합한다.

$$x = \frac{100 - 7y}{3} \geq 0 \text{ 이므로 } y \leq 14. \text{ 또한 } 100 - 7y \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow 1 - y \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow y \equiv 1 \pmod{3}.$$

조건 $0 \leq y \leq 14, y \equiv 1 \pmod{3}$ 을 만족하는 y 는 $\{1, 4, 7, 10, 13\}$ 의 5 개.

각각의 x : $(31, 1), (24, 4), (17, 7), (10, 10), (3, 13)$. 모두 비음정수. \therefore 해는 5 개.

일차 디오판투스 방정식 $ax + by = c$ 가 정수해를 가지려면 $\text{gcd}(a, b) \mid c$ 가 필요충분조건이다 (베주).

Q18 불변량과 단조량

5×5 격자의 모든 칸에 동전이 앞면(H)으로 놓여 있다. 한 번의 동작은 임의의 3×3 부분격자를 골라 그 9 개 동전을 모두 뒤집는 것이다. 유한 번의 동작으로 모든 동전을 뒷면(T)으로 만들 수 있는가?



- ① ①가능, 최소 7 번
- ② ②가능, 최소 9 번
- ③ ③가능, 최소 13 번
- ④ ④불가능

정답: ④불가능

한 줄 요약: 코너 분석으로 모든 3×3 동작이 홀수 번 사용되어야 하지만, 중간 셀이 모순을 일으킨다.

3×3 부분격자의 좌상단을 (i, j) ($1 \leq i, j \leq 3$) 라 하고 이를 $A_{i,j}$ 라 한다. 총 9 개의 가능한 동작. 동작 $A_{i,j}$ 를 $a_{i,j} \in \{0, 1\}$ 번 (GF(2)) 적용한다고 보자.

셀 $(1, 1)$ 은 오직 $A_{1,1}$ 에만 속한다. 모든 동전이 뒤집히려면 $a_{1,1} \equiv 1 \pmod{2}$. 마찬가지로 모든 모서리 분석으로 $a_{1,1}, a_{1,3}, a_{3,1}, a_{3,3}$ 모두 $\equiv 1$.

셀 $(1, 3)$ 은 $A_{1,1}, A_{1,2}, A_{1,3}$ 에 속한다. 양 끝이 1 이므로 $a_{1,2} \equiv 1$. 같은 식으로 $a_{2,1}, a_{2,3}, a_{3,2} \equiv 1$.

셀 $(3, 3)$ 은 모든 9 개 부분격자에 속한다. 위에서 8 개가 1 이므로 $a_{2,2} \equiv 1$ 이어야 한다.

그러나 셀 $(2, 2)$ 는 $A_{1,1}, A_{1,2}, A_{2,1}, A_{2,2}$ 의 4 개에만 속하며, 각각 1 이므로 뒤집힌 횟수 $\equiv 4 \equiv 0 \pmod{2}$. 이는 "뒤집힘"이 아니므로 모순. \therefore 불가능.


이러한 GF(2) 선형대수 문제는 "lights out" 퍼즐의 핵심이며, 격자 크기에 따라 해가 존재하는 경우와 그렇지 않은 경우가 결정된다.

Q19 비둘기집 응용

임의로 고른 정수 n 개의 수열 a_1, a_2, \dots, a_n 에 대해, 연속된 부분합 중 어떤 것이 n 의 배수가 되도록 보장된다. 이를 증명하는 핵심 아이디어는?

- ① ① n 개의 수 중 어떤 두 수의 차가 n 의 배수가 됨을 이용
- ② ② 누적합 $S_0 = 0, S_1, S_2, \dots, S_n$ 의 $n + 1$ 개 값에 대해 n 으로 나눈 나머지가 같은 두 개가 비둘기집 원리로 존재한다
- ③ ③ 모든 수의 합을 n 으로 나눈 나머지 활용
- ④ ④ $\binom{n}{2}$ 개의 쌍 중 합이 같은 쌍 활용

 **정답:** ② 누적합 $S_0 = 0, S_1, S_2, \dots, S_n$ 의 $n + 1$ 개 값에 대해 n 으로 나눈 나머지가 같은 두 개가 비둘기집 원리로 존재한다

 한 줄 요약: 누적합과 비둘기집의 고전적 결합.

누적합을 $S_0 = 0, S_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k$ ($k = 1, \dots, n$) 로 정의하면 총 $n + 1$ 개의 값.

n 으로 나눈 나머지는 $\{0, 1, \dots, n - 1\}$ 의 n 가지. 비둘기집 원리로 $0 \leq i < j \leq n$ 인 $S_i \equiv S_j \pmod{n}$ 이 존재.

그러면 $a_{i+1} + a_{i+2} + \dots + a_j = S_j - S_i \equiv 0 \pmod{n}$ 이며, 이는 비공집합 연속 부분합 (또한 부분집합).

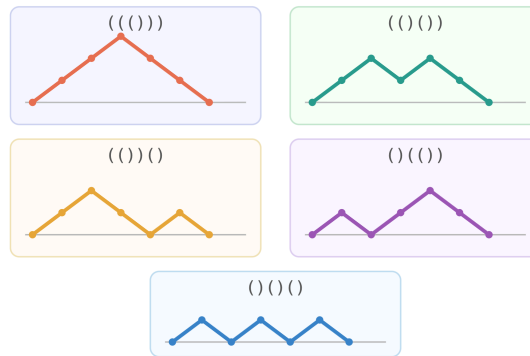
특히 $i = 0$ 이면 시작부터의 누적합 자체가 n 의 배수이다.

 같은 아이디어는 무한 수열의 점근 분포(Weyl 정리)와도 연결된다.

Q20 조합 (심화)

여는괄호 n 개와 닫는괄호 n 개로 이루어진 길이 $2n$ 의 문자열 중, 임의의 접두사에서 여는괄호 수가 닫는괄호 수 이상인 "올바른 괄호열"의 개수를 C_n (카탈란 수) 이라 한다. C_5 의 값은?

카탈란 수 $C_5 = 5$: 디크 경로



- ① ①14
- ② ②30
- ③ ③42
- ④ ④132

정답: ③42

한 줄 요약: 카탈란 수의 닫힌 형식을 적용한다.

카탈란 수: $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$.

$C_5 = \frac{1}{6} \binom{10}{5} = \frac{252}{6} = 42$.

반사 원리 (Andre's reflection)의 증명: 전체 길이 $2n$ 의 ± 1 수열 중 0에서 끝나는 것은 $\binom{2n}{n}$. "나쁜" 수열 (어느 시점에 -1 도달)은 첫 -1 시점에서 반사하면 $\binom{2n}{n-1}$ 와 일대일 대응. 따라서 좋은 수열 수 = $\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$.


💡 카탈란 수는 이진트리 개수, 다각형 삼각분할 수, 비교차 현 짝짓기 수 등 200 가지 이상의 서로 다른 조합 객체를 센다 (Stanley의 Catalan Numbers 책).

Q21 함수방정식 (입문)

함수 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 가 모든 실수 x, y 에 대해 $f(x + y) = f(x) + f(y) + 2xy$ 를 만족하고 $f(1) = 3$ 이다. $f(10)$ 의 값은?

- ① ①100
- ② ②110
- ③ ③120
- ④ ④130

 **정답:** ③120

 한 줄 요약: $g(x) = f(x) - x^2$ 로 치환하면 코시 함수방정식이 된다.


$g(x) = f(x) - x^2$ 로 놓자. 그러면

$$g(x + y) = f(x + y) - (x + y)^2 = (f(x) + f(y) + 2xy) - (x^2 + 2xy + y^2) = (f(x) - x^2) + (f(y) - y^2) = g(x) + g(y).$$

따라서 g 는 가법함수. 양의 정수에 대해 귀납으로 $g(n) = n \cdot g(1) = n(f(1) - 1) = 2n$. 즉 $f(n) = n^2 + 2n$.

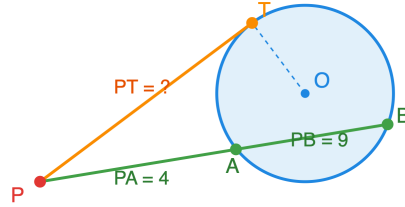
검증 (귀납): $f(1) = 1 + 2 = 3$. $f(n + 1) = f(n) + f(1) + 2n = (n^2 + 2n) + 3 + 2n = (n + 1)^2 + 2(n + 1)$. ✓

$\therefore f(10) = 100 + 20 = 120$.

 순수 가법함수 $g(x + y) = g(x) + g(y)$ 는 측정 가능성 없이는 매우 "거친" 해도 허용한다 (Hamel basis). 다행히 정수 입력에서는 일의적으로 결정된다.

Q22 올림피아드 기하

원 O 의 외부에 점 P 가 있다. P 에서 원 O 에 그은 접선의 접점을 T , P 를 지나는 다른 직선이 원과 만나는 두 점을 A, B ($PA < PB$) 라 한다. $PA = 4, PB = 9$ 일 때 PT 의 값은?



- ① ①5
- ② ②6
- ③ ③ $3\sqrt{5}$
- ④ ④ $6\sqrt{2}$

정답: ②6

한 줄 요약: 멱점 정리 $PT^2 = PA \cdot PB$ 직접 적용.

점 P 의 원 O 에 대한 멱(power)은 $\text{pow}(P) = PA \cdot PB = PT^2$ (접선의 제곱) 으로 정의되며 두 표현은 같다.

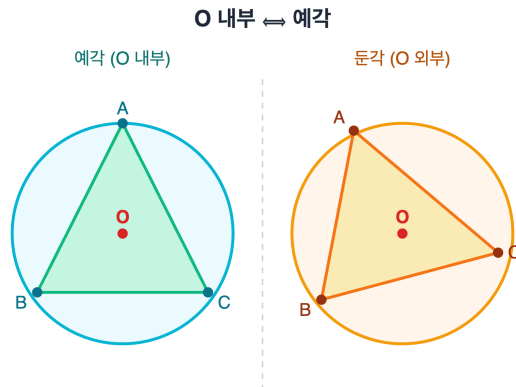
증명 스케치: 삼각형 PTA 와 PBT 는 닮음 (접선-현 사이 각 = 원주각). 즉 $\angle PTA = \angle PBT$ (접현각 정리), $\angle P$ 공통. AA 닮음으로 $\frac{PT}{PB} = \frac{PA}{PT}$, 즉 $PT^2 = PA \cdot PB$.

대입: $PT^2 = 4 \cdot 9 = 36. \therefore PT = 6$.

💡 멱점 정리는 야콥 슈타이너가 19 세기에 일반화하여 원의 좌표 기하에서 "멱원"(power line, radical axis)이라는 개념으로 확장하였다.

Q23 확률 (조건부·기하)

원 위에서 균일하게 독립적으로 세 점 A, B, C 를 고를 때, 삼각형 ABC 가 **예각삼각형**일 확률은?



- ① ① $\frac{1}{8}$
- ② ② $\frac{1}{4}$
- ③ ③ $\frac{1}{3}$
- ④ ④ $\frac{1}{2}$

☞ 정답: ② $\frac{1}{4}$

☞ 한 줄 요약: 예각 ⇔ 세 호의 길이가 모두 반원 미만.

핵심 관찰: 삼각형 ABC 가 예각 ⇔ 원의 중심 O 가 삼각형 내부 ⇔ A, B, C 가 나누는 세 호 모두 길이가 원주의 절반 미만 (반원 미만).

계산: 원주를 1로 정규화하고 $A = 0$ 으로 고정. B, C 의 위치를 X, Y 라 하면 (X, Y) 는 $[0, 1]^2$ 균일분포.

세 호의 길이를 $u, v - u, 1 - v$ (단, $u = \min(X, Y), v = \max(X, Y)$) 로 쓰면 모두 $< 1/2$ 인 영역:
 $u < 1/2, v - u < 1/2, 1 - v < 1/2$ 즉 $1/2 < v$ 와 $v - 1/2 < u < 1/2$.

순서통계량의 결합밀도 (순서 있는 경우) 는 2.

$$P = \int_{1/2}^1 \int_{v-1/2}^{1/2} 2 \, du \, dv = \int_{1/2}^1 2(1-v) \, dv = 2 \cdot \left[v - \frac{v^2}{2} \right]_{1/2}^1 = 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{4}.$$

∴ $P(\text{예각}) = \frac{1}{4}$.

💡 이 고전 결과는 베르트랑(Bertrand)이 19 세기에 다룬 기하확률 문제군의 일부이며, "임의의 삼각형은 둔각일 확률이 더 높다"는 직관에 반하는 결론을 준다.

Q24 점화식

수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 2, a_{n+1} = 3a_n - 2$ 로 정의될 때, a_5 의 값을 구하시오.

- ① ① 80
- ② ② 82
- ③ ③ 84
- ④ ④ 86

정답: ②

핵심 아이디어: 일계 비제차 점화식 $a_{n+1} = 3a_n - 2$ 를 $a_{n+1} - 1 = 3(a_n - 1)$ 형태로 변형한다.

[단계 1] 고정점 찾기: $L = 3L - 2 \Rightarrow L = 1$.

[단계 2] 치환 $b_n = a_n - 1$. 그러면 $b_{n+1} = 3b_n, b_1 = 1$.

[단계 3] 등비수열이므로 $b_n = 3^{n-1}$, 즉 $a_n = 3^{n-1} + 1$.

[단계 4] $a_5 = 3^4 + 1 = 81 + 1 = 82$.

검산: $a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 10, a_4 = 28, a_5 = 82$. ✓

고정점(불동점)을 평행이동으로 0으로 옮기면 비제차 점화식은 등비수열로 바뀐다.

Q25 귀납법

수학적 귀납법으로 모든 자연수 n 에 대해 $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$ 임을 증명할 수 있다. 이를 이용해 $51 + 53 + 55 + \dots + 99$ 의 값을 구하시오.

- ① ① 1825
- ② ② 1850
- ③ ③ 1875
- ④ ④ 1900

정답: ③

핵심 아이디어: "부분 = 전체 - 앞부분" 으로 분해.

[단계 1] $1 + 3 + \dots + 99$ 는 처음 50개의 홀수 합. 공식에 의해 $50^2 = 2500$.

[단계 2] $1 + 3 + \dots + 49$ 는 처음 25개의 홀수 합. $25^2 = 625$.

[단계 3] 따라서 $51 + 53 + \dots + 99 = 2500 - 625 = 1875$.

(귀납법 증명) $n = 1$ 일 때 $1 = 1^2$. $n = k$ 가정 시 $1 + \dots + (2k - 1) = k^2$ 이면, $n = k + 1$ 일 때 $k^2 + (2k + 1) = (k + 1)^2$. ■

연속된 홀수의 합이 항상 완전제곱수가 되는 것은 정사각형을 L자 모양 격자로 분해한 그림과 정확히 대응한다.

Q26 재미 두뇌

어느 가족에 두 자녀가 있다. "적어도 한 명은 남자아이"라는 정보를 들었을 때, 두 자녀가 모두 남자아이일 확률은? (남아·여아 출생 확률은 각각 1/2로 독립)

- ① ① $\frac{1}{4}$
- ② ② $\frac{1}{3}$
- ③ ③ $\frac{1}{2}$
- ④ ④ $\frac{2}{3}$

🎯 정답: ②

📖 핵심 아이디어: 표본공간을 출생 순서를 포함해 나열한 뒤 조건부 확률 정의를 적용.

[단계 1] 표본공간: $\{BB, BG, GB, GG\}$, 각 확률 1/4.

[단계 2] 사건 $A =$ "적어도 한 명 남아" $= \{BB, BG, GB\}$, $P(A) = 3/4$.

[단계 3] 사건 $B =$ "둘 다 남아" $= \{BB\}$, $P(A \cap B) = 1/4$.

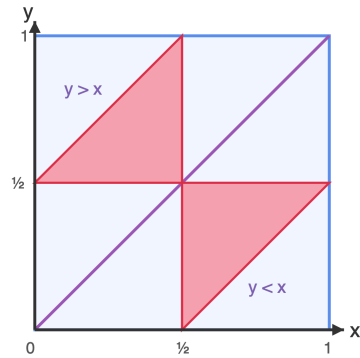
[단계 4] $P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$.

직관 함정: "나머지 한 명도 남아일 확률 1/2"라고 답하기 쉽지만, 정보가 "특정한 한 명"이 아니라 "적어도 한 명"이므로 표본공간이 달라진다.

💡 "화요일에 태어난 남아" 같은 정보가 추가되면 답이 13/27로 바뀌는 가드너의 역설로 확장된다.

Q27 확률 (기하)

길이 1인 막대를 서로 독립적으로 균등하게 분포된 두 점에서 잘라 세 조각을 만든다. 이 세 조각으로 삼각형을 만들 수 있을 확률은?



빨강 넓이 합 = 1/4

- ① ① $\frac{1}{8}$
- ② ② $\frac{1}{4}$
- ③ ③ $\frac{1}{3}$
- ④ ④ $\frac{1}{2}$

정답: ②

핵심 아이디어: 두 절단점 (x, y) 를 단위정사각형 위의 점으로 보고, 삼각형 조건을 좌표 부등식으로 환원.

[단계 1] 가정 $y > x$. 세 조각의 길이는 $x, y - x, 1 - y$.

[단계 2] 삼각형 조건은 "가장 긴 변 < 나머지 두 변의 합" 즉 모든 조각이 1/2 미만이어야 한다.

$$- x < 1/2$$

$$- y - x < 1/2$$

$$- 1 - y < 1/2 \Rightarrow y > 1/2$$

[단계 3] 이 영역은 꼭짓점 $(0, 1/2), (1/2, 1/2), (1/2, 1)$ 인 삼각형, 넓이 1/8.

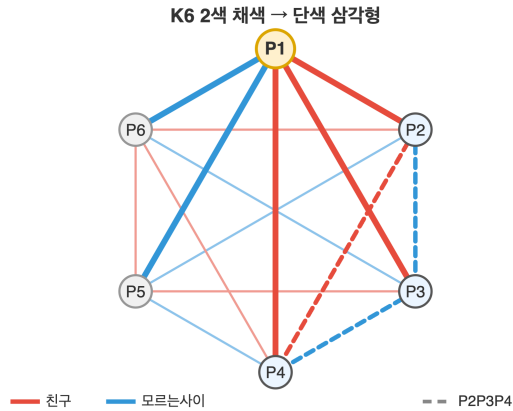
[단계 4] $y < x$ 영역도 대칭이므로 똑같이 1/8. 합 = 1/4.

결론: 확률 = 1/4.

💡 막대를 "한 점에서 자르고 긴 쪽을 다시 한 점에서 자르는" 변형 문제에서는 답이 $\ln 2$ 가까이 (약 0.193)로 바뀐다.

Q28 그래프 이론

파티에 모인 사람들이 있다. 임의의 두 사람은 "서로 친구"이거나 "서로 모르는 사이" 둘 중 하나이다. "서로 모두 친구인 3명" 또는 "서로 모두 모르는 3명"이 반드시 존재함이 보장되는 최소 인원수 n 은? (람지수 $R(3, 3)$)



- ①) ① 5
- ②) ② 6
- ③) ③ 7
- ④) ④ 8

정답: ②

핵심 아이디어: 비둘기집 원리 + 케이스 분석.

[단계 1] $n \geq 6$ 이면 항상 가능성을 보임. 임의의 한 사람 A 를 잡으면, 나머지 5명과의 관계는 "친구"/"모르는사이" 둘 중 하나. 비둘기집에 의해 적어도 $\lceil 5/2 \rceil = 3$ 명이 같은 종류 (예: 모두 A 의 친구).

[단계 2] 그 3명을 B, C, D 라 하자. B, C, D 중 어떤 두 명이 친구라면, 그들과 A 로 친구 3인조 형성. 셋 다 서로 모르는 사이면, $\{B, C, D\}$ 가 서로 모르는 3인조.

[단계 3] $n = 5$ 로는 부족한 예시: 5명을 정오각형 정점에, 5개 변은 빨간색(친구), 5개 대각선은 파란색(모르는사이). 어떤 단색 삼각형도 없음. (오각형 그래프 C_5 와 그 보그래프 모두 삼각형 free.)

결론: 최소값은 6. 즉 $R(3, 3) = 6$.

램지수 $R(4, 4) = 18$ 은 알려져 있지만 $R(5, 5)$ 는 아직 미해결로 $43 \leq R(5, 5) \leq 46$ 만 알려져 있다.

Q29 불변량

칠판에 수 1, 2, 3, ..., 100이 적혀 있다. 매 단계마다 임의의 두 수 a, b 를 지우고 그 자리에 $a + b + ab$ 를 적는다. 99번 후 칠판에 남는 한 수는?

- ① ① $100! - 1$
- ② ② $100!$
- ③ ③ $101! - 1$
- ④ ④ $101!$

정답: ③

핵심 아이디어: $a + b + ab = (1 + a)(1 + b) - 1$ 이라는 항등식. 따라서 $\prod_i (1 + a_i)$ 가 불변량.

[단계 1] 두 수 a, b 를 $a + b + ab$ 로 바꾸면 $1 + (a + b + ab) = (1 + a)(1 + b)$.

[단계 2] 즉 칠판 위 모든 수에 1을 더한 값들의 곱은 매 단계마다 동일하다 (두 인자가 한 인자로 합쳐질 뿐 곱은 같음).

[단계 3] 초기 곱: $(1 + 1)(1 + 2)(1 + 3) \cdots (1 + 100) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots 101 = 101!$.

[단계 4] 99번 후 한 수 x 만 남으면 $1 + x = 101!$, 즉 $x = 101! - 1$.

💡 이 유형은 "변환을 따라 보존되는 양"을 찾는 불변량 문제의 대표 예시로, 수능·KMO 모두에서 단골이다.

Q30 극값

양의 실수 a, b, c 가 $a + b + c = 1$ 을 만족할 때, 다음 식의 최솟값은?

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b}$$

- ① ① $\frac{1}{4}$
- ② ② $\frac{1}{3}$
- ③ ③ $\frac{1}{2}$
- ④ ④ 1

정답: ③

핵심 아이디어: 코시-슈바르츠 부등식의 엥겔(Titu) 형태 $\sum \frac{x_i^2}{y_i} \geq \frac{(\sum x_i)^2}{\sum y_i}$.

[단계 1] 분모들의 합: $(b + c) + (c + a) + (a + b) = 2(a + b + c) = 2$.

[단계 2] 분자들의 합: $a + b + c = 1$.

[단계 3] 엥겔 형태에 의해 $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)} = \frac{1}{2}$.

[단계 4] 등호는 $\frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b}$, 즉 $a = b = c = 1/3$ 일 때 성립.

결론: 최솟값 = $1/2$.

💡 이 부등식은 IMO 1995 Nesbitt 부등식 ($a + b + c = 1$ 정규화 형태)의 표준 코시-슈바르츠 증명이다.

Q31 조합

{1, 2, 3, ..., 20}에서 어떤 두 수도 연속하지 않도록 (즉 차가 1인 두 수가 없도록) 5개의 수를 선택하는 방법의 수는?

- ① ① 3060
- ② ② 4368
- ③ ③ 6188
- ④ ④ 8568

정답: ②

책심 아이디어: 선택된 5개의 수 $a_1 < a_2 < \dots < a_5$ 에 대해 $b_i = a_i - (i - 1)$ 로 치환하면 연속 금지 조건이 단순한 "서로 다름"으로 환원된다 (격자점-비연속 \leftrightarrow 격자점-자유 일대일 대응).

[단계 1] $a_{i+1} \geq a_i + 2$ 조건은 $b_{i+1} = a_{i+1} - i \geq a_i + 2 - i = b_i + 1$, 즉 $b_1 < b_2 < \dots < b_5$.

[단계 2] 또한 $b_1 = a_1 \geq 1$, $b_5 = a_5 - 4 \leq 20 - 4 = 16$. 따라서 $b_i \in \{1, 2, \dots, 16\}$ 이고 서로 다르며 증가.

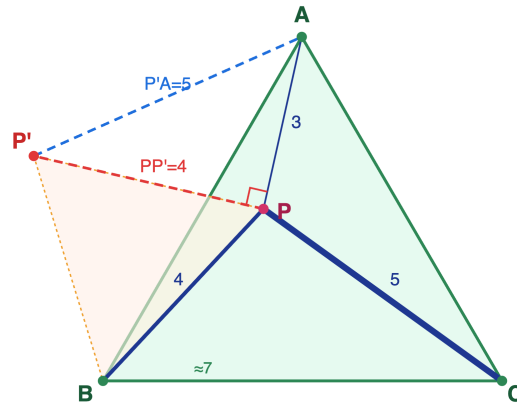
[단계 3] 이는 $\{1, \dots, 16\}$ 에서 5개를 고르는 방법과 일대일 대응: $\binom{16}{5} = 4368$.

일반 공식: n 중 k 개를 연속하지 않게 뽑는 방법은 $\binom{n-k+1}{k}$.

같은 치환 트릭으로 "피보나치 수와 부분집합 개수"의 유명한 관계 (n 원소 집합의 연속 비포함 부분집합 수 = F_{n+2})가 유도된다.

Q32 올림피아드 기하

정삼각형 ABC 내부의 점 P 에 대해 $PA = 3, PB = 4, PC = 5$ 이다. 정삼각형 ABC 의 한 변의 길이의 제곱 AB^2 의 값은?



- ① ① $25 + 12\sqrt{2}$
- ② ② $25 + 12\sqrt{3}$
- ③ ③ $25 + 6\sqrt{3}$
- ④ ④ 50

정답: ②

핵심 아이디어: B 를 중심으로 60° 회전하여 세 길이 3, 4, 5를 한 삼각형에 모은다 (페르마 점 회전 트릭).

[단계 1] $\triangle BPC$ 를 점 B 를 중심으로 시계반대방향 60° 회전. 정삼각형이므로 $C \mapsto A, P \mapsto P'$ 라 하면 $BP' = BP = 4, P'A = PC = 5$.

[단계 2] $\triangle BPP'$: $BP = BP' = 4, \angle PBP' = 60^\circ$, 따라서 정삼각형. $PP' = 4$.

[단계 3] $\triangle APP'$: 세 변 $PA = 3, PP' = 4, P'A = 5$. $3^2 + 4^2 = 5^2$ 이므로 $\angle APP' = 90^\circ$ (피타고라스 역).

[단계 4] $\angle APB = \angle APP' + \angle P'PB = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$.

[단계 5] $\triangle APB$ 에 코사인 법칙 적용:

$$AB^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos 150^\circ = 9 + 16 - 24 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 25 + 12\sqrt{3} .$$

결론: $AB^2 = 25 + 12\sqrt{3}$.

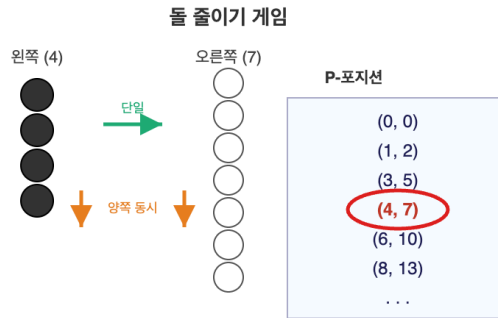
이 회전 트릭은 "페르마 점" (세 꼭짓점까지 거리합이 최소인 점) 문제와 본질적으로 같은 발상이며, 17세기 페르마-토리첼리 작도로 거슬러 올라간다.

Q33 게임 이론

두 무더기에 각각 돌이 a 개, b 개 있다. 두 사람이 번갈아 가며 다음 둘 중 하나를 한다.

- (i) 한 무더기에서 양의 정수개의 돌을 가져간다.
- (ii) 두 무더기에서 같은 양의 양의 정수개의 돌을 가져간다.

마지막 돌을 가져가는 사람이 승리한다. 시작 위치 $(a, b) = (4, 7)$ 에서 어느 쪽이 필승 전략을 갖는가? (와이트프 게임)



(4, 7)은 P-포지션

- ① ① 첫 번째 사람 (선공)
- ② ② 두 번째 사람 (후공)
- ③ ③ 첫 수에 따라 다름
- ④ ④ 항상 무승부

정답: ②

핵심 아이디어: 와이트프 게임의 P-포지션(이전 플레이어 필승 = 차례인 사람 필패)은 황금비 $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ 를 이용해 $(\lfloor n\varphi \rfloor, \lfloor n\varphi^2 \rfloor)$ (단, $n = 0, 1, 2, \dots$)로 표현된다 (베티 정리).

[단계 1] 작은 P-포지션 나열: $n = 0: (0, 0)$, $n = 1: (1, 2)$, $n = 2: (3, 5)$, $n = 3: (4, 7)$, $n = 4: (6, 10)$, $n = 5: (8, 13)$, ...

[단계 2] (4, 7)이 정확히 $n = 3$ 의 P-포지션. P-포지션에서 시작하면 어떤 합법 수를 두어도 N-포지션(차례인 사람 필승)으로 옮겨가고, 상대는 항상 P-포지션으로 되돌려 놓을 수 있다.

[단계 3] 따라서 (4, 7)에서 차례인 첫 번째 사람은 무엇을 하든 패배하고, 두 번째 사람이 필승.

[검증] 한 가지 수순 예: 선공이 $(4, 7) \rightarrow (4, 3)$ (오른쪽 무더기에서 4개)으로 두면, 후공은 두 무더기에서 2개씩 가져가 $(4, 3) \rightarrow (2, 1) = (1, 2)$ 로 P-포지션에 복귀한다. 이어 선공이 $(1, 2)$ 에서 무엇을 두든(예: $(1, 2) \rightarrow (1, 1)$) 후공은 두 무더기에서 같은 수를 가져가 $(0, 0)$ 으로 만들어 마지막 돌을 가져간다. 선공이 다른 첫수를 두어도 후공은 같은 원리로 늘 가장 가까운 P-포지션으로 되돌릴 수 있다.

결론: 두 번째 사람 필승.

💡 P-포지션을 직접 찾는 방법: 작은 값부터 "아직 등장하지 않은 가장 작은 자연수" a_n 을 잡고 $b_n = a_n + n$. 황금비는 이 절차의 점근적 비율로 자연스럽게 나타난다.

Q34 정수론-모듈러

2^{100} 을 13으로 나눈 나머지는?

- ① ① 1
- ② ② 3
- ③ ③ 4
- ④ ④ 9

정답: ②

핵심: 13이 소수이므로 페르마 소정리에 의해 $2^{12} \equiv 1 \pmod{13}$.

단계 1) $100 = 12 \cdot 8 + 4$ 이므로 $2^{100} = (2^{12})^8 \cdot 2^4 \equiv 1^8 \cdot 16 \pmod{13}$.

단계 2) $16 = 13 + 3$ 이므로 $16 \equiv 3 \pmod{13}$. 따라서 나머지는 3.

💡 페르마 소정리는 RSA 암호의 토대가 된다. 소수 p 만 알면 a^{p-1} 의 나머지는 자동으로 1.

Q35 다이오판티

방정식 $7x + 11y = 100$ 을 만족하는 양의 정수 (x, y) 쌍의 개수는?

- ① ① 1
- ② ② 2
- ③ ③ 3
- ④ ④ 4

정답: ①

핵심: $\gcd(7, 11) = 1$ 이 100을 나누므로 정수해 존재.

단계 1) $7x \equiv 100 \pmod{11}$, 즉 $7x \equiv 1 \pmod{11}$.

단계 2) $7 \cdot 8 = 56 \equiv 1 \pmod{11}$ 이므로 $x \equiv 8 \pmod{11}$.

단계 3) 일반해 $x = 8 + 11t, y = 4 - 7t$.

단계 4) 양정수 조건 $x \geq 1, y \geq 1$ 에서 $t \geq 0$ 이면서 $t \leq 3/7$. 즉 $t = 0$. 해는 (8, 4) 단 하나.

💡 디오판투스는 3세기 알렉산드리아의 수학자. 그의 묘비에 적힌 나이 방정식이 가장 유명한 일차 다이오판티이다.

Q36 점화식

한 걸음에 1, 2, 또는 3칸을 오를 수 있는 계단이 있다. 정확히 5칸을 오르는 서로 다른 방법의 수는?

- ① ① 7
- ② ② 10
- ③ ③ 13
- ④ ④ 16

정답: ③

핵심: T_n 을 n 칸 오르는 방법 수라 하면 마지막 한 걸음이 1·2·3 중 하나이므로 $T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3}$ (트리보나치 점화).

단계 1) 초기값: $T_1 = 1, T_2 = 2, T_3 = 4$.

단계 2) $T_4 = 4 + 2 + 1 = 7$.

단계 3) $T_5 = 7 + 4 + 2 = 13$.

💡 피보나치(1, 2 칸)는 황금비, 트리보나치(1, 2, 3 칸)는 약 1.8393의 트리보나치 상수에 수렴한다.

Q37 확률 (조건부)

양면이 [빨강/빨강], [빨강/파랑], [파랑/파랑]으로 칠해진 카드 3장이 들어 있다. 한 장을 무작위로 꺼내 한 면이 위로 오도록 놓는다. 그 면이 빨강일 때, 반대편 면도 빨강일 확률은?



- ① ① $\frac{1}{2}$
- ② ② $\frac{2}{3}$
- ③ ③ $\frac{3}{4}$
- ④ ④ $\frac{1}{3}$

정답: ②

핵심: 면 단위로 표본공간을 정의한다 (카드 단위 아님!).

단계 1) 총 6개의 면 중 빨강 면은 3개.

단계 2) 그 3개의 빨강 면 중 '반대편도 빨강'인 것은 카드A의 두 면, 즉 2개.

단계 3) 조건부확률 $P(\text{반대편 빨강} \mid \text{보이는 면 빨강}) = \frac{2}{3}$.

흔한 오답 $\frac{1}{2}$ 은 '카드'를 표본공간으로 잘못 잡았기 때문.

💡 이 문제는 '베르트랑 박스 패러독스'(1889)의 카드 버전. 직관과 표본공간의 미세한 차이를 보여주는 고전.

Q38 모듈러·합동식

7^{2026} 의 마지막 두 자리 수는?

- ① ① 01
- ② ② 07
- ③ ③ 43
- ④ ④ 49

정답: ④

핵심: '마지막 두 자리'는 $(\text{mod } 100)$ 의 나머지.

단계 1) $7^1 = 7, 7^2 = 49, 7^3 \equiv 43, 7^4 = 2401 \equiv 1 \pmod{100}$. 따라서 7의 100에 대한 위수는 4.

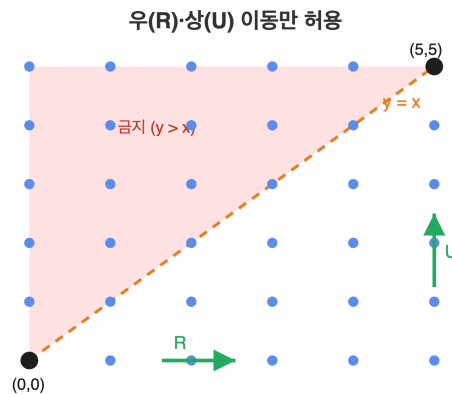
단계 2) $2026 = 4 \cdot 506 + 2$ 이므로 $7^{2026} \equiv 7^2 = 49 \pmod{100}$.

참고: 오일러 토션트 $\phi(100) = 40$ 도 같은 결론을 주지만, 실제 위수는 4로 더 작다.

💡 $\phi(n)$ 은 1부터 n 까지 중 n 과 서로소인 정수의 개수. $\phi(100) = 40$. 오일러는 $a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ 을 1763년에 증명했다.

Q39 조합 (격자경로)

5 × 5 격자에서 좌하점 (0, 0)에서 우상점 (5, 5)까지 오른쪽 또는 위로만 이동한다. 도중에 직선 $y = x$ 의 위쪽 영역 ($y > x$)을 지나지 않는 경로의 수는?



- ① ① 14
- ② ② 28
- ③ ③ 42
- ④ ④ 126

정답: ③

핵심: 이 조건의 경로 수는 카탈란 수 $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$.

단계 1) 총 자유 경로 수는 $\binom{10}{5} = 252$.

단계 2) 거울 원리(반사 보조정리): $y > x$ 를 침범한 경로는 시작점을 $y = x + 1$ 에 대해 반사하여 $(-1, 1)$ 에서 $(5, 5)$ 로 가는 경로와 1대1 대응 — 그 수는 $\binom{10}{4} = 210$.

단계 3) $252 - 210 = 42 = C_5$.

💡 카탈란 수는 n 각형의 삼각분할 수, 균형잡힌 괄호 수, 이진트리 수 등 60가지 이상의 조합 구조를 동시에 센다.

Q40 다이오판티

방정식 $x^2 - 5y^2 = 4$ 의 양의 정수 해를 작은 순서로 나열하면 (3, 1), (7, 3), ... 이다. 세 번째로 작은 양의 정수 해 (x, y) 에 대해 $x + y$ 의 값은?

- ① ① 18
- ② ② 22
- ③ ③ 26
- ④ ④ 32

정답: ③

핵심: 이 방정식은 펠 방정식의 변형으로, 해는 점화 관계로 생성된다.

단계 1) 단위 해 $(x_1, y_1) = (3, 1)$ 에서 다음 해는 점화

$$x_{n+1} = \frac{3x_n + 5y_n}{2}, \quad y_{n+1} = \frac{x_n + 3y_n}{2}$$

단계 2) $(3, 1) \rightarrow (7, 3) \rightarrow \left(\frac{21+15}{2}, \frac{7+9}{2}\right) = (18, 8)$.

단계 3) 검산: $18^2 - 5 \cdot 8^2 = 324 - 320 = 4 \checkmark$.

단계 4) $x + y = 18 + 8 = 26$.

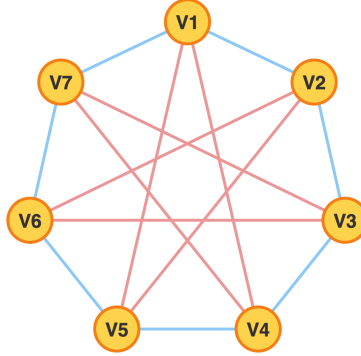
💡 이 점화는 사실 피보나치 수와 깊이 연관된다 — 실제로 모든 해 (x, y) 는 어떤 k 에 대해 $x = L_k, y = F_k$ (루카스/피보나치 수)이다.

🧠 고등/올림피아드 사고력

총 40문제 · 문제와 정답·풀이 포함

Q41 그래프 이론

7명이 모인 자리에서 각 사람이 정확히 4명과 악수를 했다. 일어난 악수의 총 횟수는?



- ① ① 12
- ② ② 14
- ③ ③ 16
- ④ ④ 28

🎯 정답: ②

📖 핵심: 악수 정리 — 모든 정점의 차수의 합은 간선 수의 2배.

단계 1) 각 사람을 정점, 악수를 간선으로 보는 그래프 G 에서 모든 정점의 차수는 4.

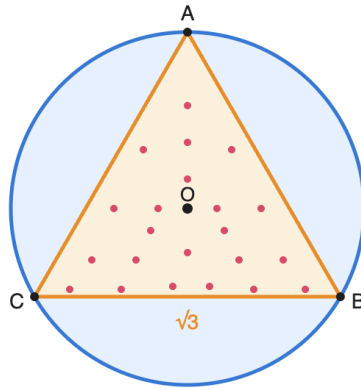
단계 2) 차수합 = $7 \cdot 4 = 28$.

단계 3) $\sum \deg(v) = 2|E|$ 이므로 $|E| = 14$. 따라서 악수는 총 14회.

💡 악수 정리는 '홀수 차수 정점은 짝수 개'라는 따름정리를 낳는다. 그래서 '모든 사람이 홀수 명과 악수'한 모임은 사람 수가 짝수여야 한다.

Q42 확률 (기하)

반지름이 1인 원에 정삼각형이 내접해 있다. 원 내부에서 무작위로 한 점을 균등분포로 선택할 때, 그 점이 정삼각형 내부에 놓일 확률은?



- ① ① $\frac{\sqrt{3}}{4\pi}$
- ② ② $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$
- ③ ③ $\frac{3}{4\pi}$
- ④ ④ $\frac{\sqrt{3}}{\pi}$

정답: ②

핵심: 균등분포에서 확률 = (호의 면적 비) = (정삼각형 넓이) / (원 넓이).

단계 1) 단위원에 내접하는 정삼각형의 한 변 길이는 $a = \sqrt{3}$ (외접원 반지름 공식 $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$ 에서 $a = R\sqrt{3} = \sqrt{3}$).

단계 2) 정삼각형 넓이 = $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 3 = \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

단계 3) 원 넓이 = π .

단계 4) 확률 = $\frac{3\sqrt{3}/4}{\pi} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \approx 0.4135$.


💡 원 안의 정삼각형 넓이 비 $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$ 는 정육각형 넓이 비 $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$ 의 정확히 절반.

Q43 점화식

수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 1$ 이고 모든 자연수 n 에 대해 $a_{n+1} = 2a_n + n$ 을 만족한다. a_6 의 값은?

- ① ① 47
- ② ② 57
- ③ ③ 89
- ④ ④ 109

 **정답: ③**

 **핵심:** 직접 단계 계산 + 일반항 검증.

단계 1) $a_1 = 1$.

단계 2) $a_2 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$.


단계 3) $a_3 = 2 \cdot 3 + 2 = 8$.

단계 4) $a_4 = 2 \cdot 8 + 3 = 19$.

단계 5) $a_5 = 2 \cdot 19 + 4 = 42$.

단계 6) $a_6 = 2 \cdot 42 + 5 = 89$.

검증(일반항): 풀이하면 $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} - n - 1$. $n = 6$: $3 \cdot 32 - 6 - 1 = 96 - 7 = 89 \checkmark$.

 이런 형태의 점화는 '특수해+일반해' 분해로도 풀 수 있는데, 다항 비제차항 n 은 일차 다항으로 시도하면 깔끔하게 떨어진다.

Q44 정수론·합동식

양의 정수 n 에 대하여 $n^2 + n + 41$ 이 41의 배수가 되는 가장 작은 n 은?

- ① ① 39
- ② ② 40
- ③ ③ 41
- ④ ④ 42


 **정답: ②**

 **핵심:** (mod 41)로 인수분해.

단계 1) $n^2 + n + 41 \equiv 0 \pmod{41} \iff n^2 + n \equiv 0 \pmod{41}$.

단계 2) $n(n+1) \equiv 0 \pmod{41}$. 41이 소수이므로 $n \equiv 0$ 또는 $n \equiv -1 \equiv 40 \pmod{41}$.

단계 3) 양의 정수 중 최소는 $n = 40$. (확인: $40^2 + 40 + 41 = 1681 = 41^2$. 정말로 41의 배수.)

 $f(n) = n^2 + n + 41$ 은 오일러의 '소수 생성 다항식'으로 유명. $n = 0, 1, 2, \dots, 39$ 에서 모두 소수! 그러나 $n = 40$ 에서 처음 소수성이 깨진다.

Q45 함수방정식

함수 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 이 모든 실수 x, y 에 대해

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)f(y)$$

를 만족하고 $f(0) = 1, f(1) = 0$ 이다. $f(2)$ 의 값은?

- ① ① -1
- ② ② 0
- ③ ③ $\frac{1}{2}$
- ④ ④ 1

정답: ①

핵심: 대입을 통한 배각 공식 유도.

단계 1) 주어진 식에 $y = x$ 대입:

$$f(2x) + f(0) = 2f(x)^2.$$

단계 2) $f(0) = 1$ 이므로 $f(2x) = 2f(x)^2 - 1$.

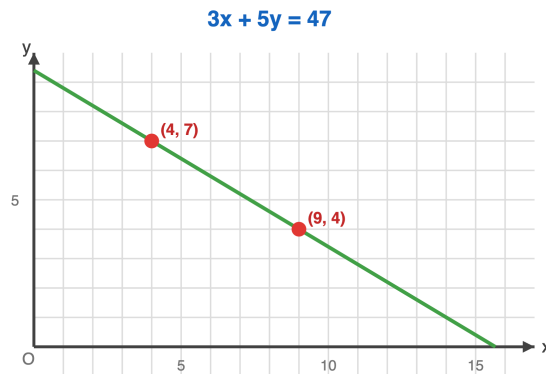
단계 3) $x = 1$ 대입: $f(2) = 2f(1)^2 - 1 = 2 \cdot 0 - 1 = -1$.

참고: 이 함수방정식은 코사인 형태 $f(x) = \cos(\theta x)$ 를 일반화하며, 실제로 $f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ 가 한 해이다.

💡 이 함수방정식은 다랑베르 방정식이라 불리며, 1747년에 진동하는 현(string)의 방정식 연구에서 처음 등장했다.

Q46 다이오판티

방정식 $3x + 5y = 47$ 의 양의 정수해 (x, y) 의 개수는?



- ① ① 2개
- ② ② 3개
- ③ ③ 4개
- ④ ④ 5개

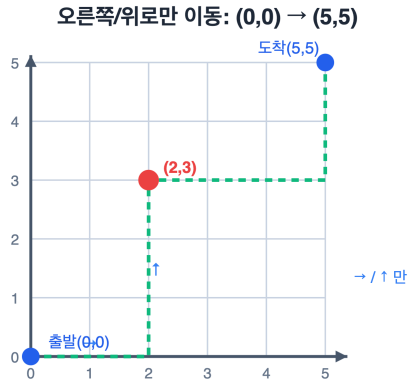
정답: ② 3개

핵심: 합동식으로 y 의 후보 좁히기. $3x = 47 - 5y > 0$ 이므로 $y < 9.47 \equiv 2, 5y \equiv 2y \pmod{3}$ 이므로 $2y \equiv 2 \pmod{3}$, 즉 $y \equiv 1 \pmod{3}$. 따라서 $y \in \{1, 4, 7\}$ 이고 각각 $x = 14, 9, 4$. 총 3개.

💡 1차 다이오판티스 방정식의 양의 해들은 항상 등차수열을 이룬다.

Q47 조합 (심화)

5 × 5 격자에서 점 (0, 0) 에서 (5, 5) 로 오른쪽 또는 위로만 이동하는 최단경로 중, 반드시 점 (2, 3) 을 지나야 하는 경로의 수는?



- ① ① 50
- ② ② 80
- ③ ③ 100
- ④ ④ 200

정답: ③ 100

핵심: 두 구간으로 쪼개어 곱한다. (0, 0) → (2, 3) 경로 수는 $\binom{2+3}{2} = \binom{5}{2} = 10$. (2, 3) → (5, 5) 경로 수는 $\binom{3+2}{3} = \binom{5}{2} = 10$. 두 구간이 독립이므로 $10 \times 10 = 100$.

💡 같은 식이 격자점을 지나는 임의 경로의 개수 계산에 일반화된다.

Q48 정수론 (심화)

$1! + 2! + 3! + \dots + 100!$ 의 일의 자리 숫자는?

- ① ① 1
- ② ② 3
- ③ ③ 7
- ④ ④ 9

정답: ② 3

핵심: $n \geq 5$ 이면 $n!$ 은 10 의 배수이므로 일의 자리는 0. 따라서 일의 자리는 $1! + 2! + 3! + 4! = 1 + 2 + 6 + 24 = 33$ 의 일의 자리 3. 답: 3.

💡 5! 부터 일의 자리가 0이 되어 무한히 더해도 끝자리는 영향 없음.

Q49 함수방정식 (입문)

함수 $f: N \rightarrow N$ 이 모든 자연수 x, y 에 대해 $f(xy) = f(x) + f(y)$ 를 만족한다. $f(2) = 1, f(3) = 2$ 일 때 $f(72)$ 의 값은?

- ① ① 5
- ② ② 6
- ③ ③ 7
- ④ ④ 8

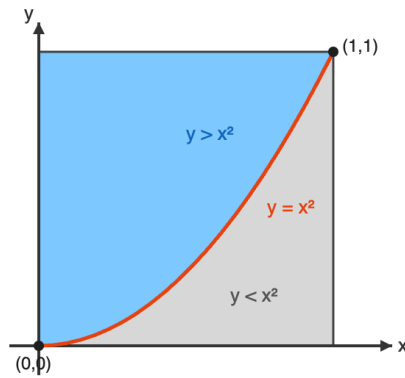
정답: ③ 7

핵심: f 는 곱셈을 덧셈으로 바꾸므로 로그와 유사하게 작용. $72 = 2^3 \cdot 3^2$. $f(2^3) = 3f(2) = 3, f(3^2) = 2f(3) = 4$. 따라서 $f(72) = f(2^3) + f(3^2) = 3 + 4 = 7$.

💡 이 형태의 함수는 로그함수의 산술적 사촌, 소인수의 차수 함수가 대표적.

Q50 확률 (조건부·기하)

단위 정사각형 $\{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ 내부에서 점을 균등하게 무작위로 고를 때, $y > x^2$ 일 확률은?



- ① ① $\frac{1}{3}$
- ② ② $\frac{1}{2}$
- ③ ③ $\frac{2}{3}$
- ④ ④ $\frac{3}{4}$

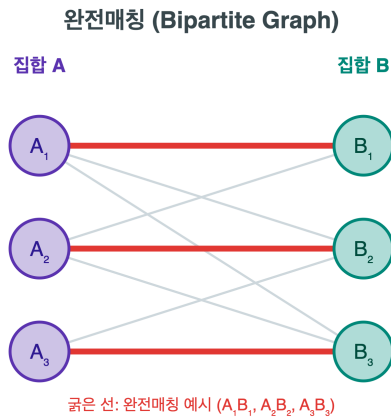
정답: ③ $\frac{2}{3}$

핵심: 면적비. 곡선 $y = x^2$ 위쪽 영역의 면적 $= \int_0^1 (1 - x^2) dx = \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. 정사각형 면적이 1이므로 확률은 $\frac{2}{3}$.

💡 기하확률에서는 면적/부피 계산이 확률 그 자체가 된다.

Q51 그래프 이론

완전이분그래프 $K_{3,3}$ 에서 완전매칭(perfect matching)의 개수는?



- ① ① 3
- ② ② 6
- ③ ③ 9
- ④ ④ 36

정답: ② 6

핵심: 완전매칭은 A_1, A_2, A_3 을 B_1, B_2, B_3 와 일대일로 짝짓는 방법. 즉 $\{B_1, B_2, B_3\}$ 의 순열 수와 같다. 따라서 $3! = 6$.

💡 $K_{n,n}$ 의 완전매칭 수는 $n!$ 이고, 이는 영구식(permanent)의 가장 간단한 예이다.

Q52 조합 (심화)

4쌍의 괄호 () 를 사용해 만들 수 있는 올바른(매칭이 맞는) 괄호 배열의 수는? 예: ((())), ((()())) 등.

- ① ① 8
- ② ② 12
- ③ ③ 14
- ④ ④ 16

정답: ③ 14

핵심: 카탈란 수 $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$. $n = 4$ 일 때 $C_4 = \frac{1}{5} \binom{8}{4} = \frac{70}{5} = 14$. 또는 격자경로 (x 축 위에서 $(0, 0) \rightarrow (4, 4)$ 인 단조 경로 중 대각선 아래로 내려가지 않는 것) 해석으로도 같은 값.

💡 카탈란 수는 이진트리, 다각형 분할, 산악 그림 등 수십 가지 조합문제에서 나타난다.

Q53 정수론 (심화)

메르센 수 $M_{11} = 2^{11} - 1 = 2047$ 은 소수인가?

- ① ① 소수이다
- ② ② 소수가 아니다, $2047 = 23 \times 89$
- ③ ③ 소수가 아니다, $2047 = 31 \times 67$
- ④ ④ 소수가 아니다, $2047 = 17 \times 121$

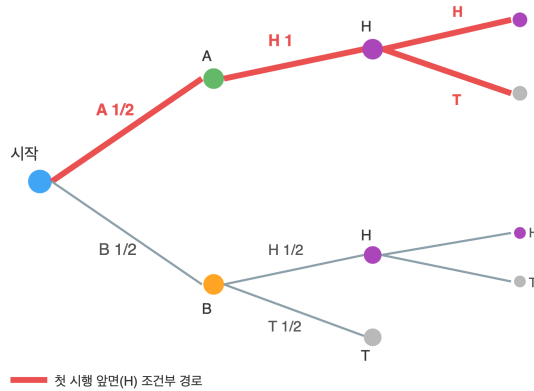
정답: ② 소수가 아니다, $2047 = 23 \times 89$

핵심: 지수 $p = 11$ 이 소수라도 M_p 가 소수임은 보장되지 않는다. $2047 \div 23 = 89$ 이고 23, 89 모두 소수. 즉 $2047 = 23 \cdot 89$. 메르센 소수는 $M_2, M_3, M_5, M_7, M_{13}, \dots$ 등이며 M_{11} 은 첫 반례.

💡 메르센 수가 소수가 되려면 지수 p 가 소수여야 하지만 그것만으론 충분치 않다.

Q54 확률 (조건부·기하)

동전 A 는 양면이 모두 앞면(HH), 동전 B 는 정상 동전(HT) 이다. 두 동전 중 하나를 무작위로 골라 던졌더니 앞면이 나왔다. 같은 동전을 한 번 더 던졌을 때, 다시 앞면이 나올 확률은?



- ① ① $\frac{1}{2}$
- ② ② $\frac{2}{3}$
- ③ ③ $\frac{3}{4}$
- ④ ④ $\frac{5}{6}$

정답: ④ $\frac{5}{6}$

핵심: 첫 시행 앞면이라는 조건 하에 동전 A 일 확률 $P(A | H) = \frac{P(H | A)P(A)}{P(H)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1/2}{3/4} = \frac{2}{3}$. 따라서 두 번째도 앞면 일 확률은 $\frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4+1}{6} = \frac{5}{6}$.

한 번의 결과가 동전 정체를 부분적으로 드러내 다음 시행 분포를 비대칭으로 만든다.

Q55 조합 (심화)

네 사람이 각자 자기 이름이 적힌 종이를 모자에 넣고 잘 섞은 뒤, 한 장씩 무작위로 꺼낸다. 네 사람 모두 자기 이름이 적힌 종이를 뽑지 않을 확률은?

- ① ① $\frac{1}{4}$
- ② ② $\frac{1}{3}$
- ③ ③ $\frac{3}{8}$
- ④ ④ $\frac{5}{12}$

정답: ③ $\frac{3}{8}$

핵심: 어떤 원소도 자기 자리에 있지 않은 순열을 착란순열(*derangement*) 이라 한다. 포함배제로 $D_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$. $D_4 = 4! \left(1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24}\right) = 24 \cdot \frac{9}{24} = 9$. 전체 순열 $4! = 24$ 이므로 확률 $= \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$.

$n \rightarrow \infty$ 일 때 착란순열 확률은 $1/e \approx 0.368$ 로 수렴한다.

Q56 극값 문제

양수 a, b, c 가 $a + b + c = 6$ 을 만족할 때, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ 의 최솟값은?

- ① ① 1
- ② ② $\frac{3}{2}$
- ③ ③ 2
- ④ ④ $\frac{9}{4}$

정답: ② $\frac{3}{2}$

핵심: 코시-슈바르츠 부등식의 엔겔(Engel) 형: $(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq (1 + 1 + 1)^2 = 9$. 따라서

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a + b + c} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$. 등호는 $a = b = c = 2$ 일 때 성립.

💡 $\left(\sum \frac{x_i^2}{y_i}\right)\left(\sum y_i\right) \geq \left(\sum x_i\right)^2$ 이 코시-슈바르츠의 가장 유용한 산술 변형.

Q57 귀납법

모든 자연수 n 에 대하여 $\sum_{k=1}^n k \cdot k! = (n + 1)! - 1$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 보일 수 있다. 이때 $n = 6$ 에서 좌변 $\sum_{k=1}^6 k \cdot k!$ 의 값은?

- ① ① 5039
- ② ② 5040
- ③ ③ 720
- ④ ④ 4319

정답: ① 5039

핵심 아이디어: $k \cdot k! = (k + 1)! - k!$. 망원합(telescoping)으로 $\sum_{k=1}^n k \cdot k! = \sum_{k=1}^n ((k + 1)! - k!) = (n + 1)! - 1!$.

귀납 단계: $n = 1$ 이면 $1 \cdot 1! = 1 = 2! - 1$. n 에서 성립한다고 가정하면 $n + 1$ 항을 더했을 때 $((n + 1)! - 1) + (n + 1)(n + 1)! = (n + 2)(n + 1)! - 1 = (n + 2)! - 1$.

따라서 $n = 6$ 의 값은 $7! - 1 = 5040 - 1 = 5039$.

💡 이 항등식은 컴퓨터 과학에서 팩토리얼 진법(factorial number system)의 정당화 근거가 된다.

Q58 모듈러-합동식

7^{2026} 을 10으로 나눈 나머지는?

- ① ① 1
- ② ② 3
- ③ ③ 7
- ④ ④ 9

정답: ④ 9

핵심 아이디어: 7의 거듭제곱의 일의 자리는 주기 4로 순환한다.

계산: $7^1 \equiv 7, 7^2 \equiv 49 \equiv 9, 7^3 \equiv 7 \cdot 9 = 63 \equiv 3, 7^4 \equiv 7 \cdot 3 = 21 \equiv 1 \pmod{10}$. 이후 다시 7, 9, 3, 1 반복.

지수 축약: $2026 = 4 \cdot 506 + 2$ 이므로 $7^{2026} \equiv 7^2 \equiv 9 \pmod{10}$.


💡 오일러 정리에 의하면 $\gcd(a, n) = 1$ 일 때 $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ 이며, $\varphi(10) = 4$ 가 위 주기와 일치한다.

Q59 재미 두뇌

100명의 학생이 1번부터 100번까지 닫혀 있는 사물함 앞에 차례로 줄 선다. k 번째 학생 ($k = 1, 2, \dots, 100$)은 번호가 k 의 배수인 모든 사물함을 토글(열려 있으면 닫고, 닫혀 있으면 연다)한다. 모두 지나간 뒤 열려 있는 사물함의 개수는?

- ① ① 7
- ② ② 10
- ③ ③ 25
- ④ ④ 50

 **정답: ② 10**

 **핵심 아이디어:** 사물함 n 이 토글되는 횟수는 n 의 양의 약수의 개수 $d(n)$ 이다. 처음에 닫혀 있었으므로 마지막에 열려 있을 조건은 $d(n)$ 이 홀수.

약수의 개수가 홀수인 자연수의 특징: 약수는 보통 쌍 ($d, n/d$)로 짝지어지지만, $d = n/d$ 즉 n 이 완전제곱수일 때만 짝이 안 맞아 홀수 개가 된다.

1 이상 100 이하의 완전제곱수: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100의 10개.


 이 사물함 문제는 1980년대 IBM의 면접 문제로 유명해진 고전이다.

Q60 게임 이론 (Combinatorial)

21개의 돌이 한 무더기에 있다. 두 사람이 번갈아 가며 1개 또는 2개를 가져간다. 마지막 돌을 가져가는 사람이 **지는** 규칙 (misère 룰)이다. 선공이 확실히 이기려면 첫 수에 몇 개를 가져가야 하는가?

- ① ① 0
- ② ② 1
- ③ ③ 2
- ④ ④ 선공은 어떻게 두어도 패배

 **정답: ③ 2**

 **핵심 아이디어:** 진다는 패배 위치(P-position)를 역추적한다.

돌이 1개 남으면 가져갈 수밖에 없고 그 사람이 패. 즉 $n = 1$ 은 P(이동할 차례인 자가 짐).

$n = 2$: 1개 가져가 $n = 1$ 을 상대에게 넘기면 승. W.

$n = 3$: 2개 가져가 $n = 1$ 넘기면 승. W.

$n = 4$: 1 또는 2 어느 쪽이나 $n = 2$ 또는 $n = 3$ (둘 다 W)이 상대에게. P.

패턴: P-position은 $n \equiv 1 \pmod{3}$, 즉 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, ...

21 = 3 · 7이므로 W. 첫 수로 2개를 가져가면 $19 \equiv 1 \pmod{3}$ 를 상대에게 남겨 패배 위치로 만든다.

 같은 게임에서 마지막 돌을 가져가는 쪽이 **이기는** 정상 규칙이라면 P-position은 $n \equiv 0 \pmod{3}$ 로 정반대가 된다.

Q61 귀납법

n 개의 작은 정사각형이 한 줄로 붙은 직사각형 초콜릿이 있다 ($n \geq 1$). 한 번에 **한 조각을 두 조각으로** 직선으로 자를 수 있다. 모든 1×1 조각으로 분리할 때까지 필요한 절단 횟수의 최소값과 최대값을 모두 구하면 $n = 2026$ 일 때 어떤 값인가?

- ① ① 최소 1013, 최대 2025
- ② ② 항상 정확히 2024
- ③ ③ 항상 정확히 2025
- ④ ④ 최소 11, 최대 2025 (이분법)

정답: ③ 항상 정확히 2025

핵심 아이디어(강귀납법): 절단 한 번은 항상 **조각의 개수를 정확히 1 증가**시킨다.

증명: n 개 조각 짜리 초콜릿을 분리하는 데 필요한 횟수를 $f(n)$ 이라 하자. $f(1) = 0$. $n \geq 2$ 일 때, 첫 절단으로 크기 a, b ($a + b = n$, $a, b \geq 1$) 두 조각이 생기고 각각 $f(a), f(b)$ 회의 절단이 필요. 강귀납 가정에서 $f(a) = a - 1, f(b) = b - 1$ 이라 가정하면 $f(n) = 1 + (a - 1) + (b - 1) = n - 1$.

초기 1조각, 매 절단마다 +1이므로 n 조각 도달엔 항상 $n - 1$ 회. 따라서 최소·최대 모두 $n - 1$.

$n = 2026 \Rightarrow 2025$ 회.

이 **조각이 1 증가** 라는 불변 관찰은 절단 순서나 모양에 무관한 보존량(invariant)의 좋은 예다.

Q62 정수론 (심화)

모든 자연수 n 에 대해 $n^5 - n$ 은 30의 배수이다. 이를 증명하면, $n = 7$ 일 때 $\frac{n^5 - n}{30}$ 의 값은?

- ① ① 280
- ② ② 560
- ③ ③ 1120
- ④ ④ 16800

정답: ② 560

핵심 아이디어: $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ 로 소인수 분해하여 각 소수로의 가분성을 따로 보인다.

인수분해: $n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1) = (n - 1)n(n + 1)(n^2 + 1)$.

- 2의 배수: $(n - 1)n(n + 1)$ 중 연속 정수에 항상 짝수.
- 3의 배수: $n - 1, n, n + 1$ 중 하나는 3의 배수.
- 5의 배수: 페르마 소정리에서 $n^5 \equiv n \pmod{5}$, 즉 $5 \mid n^5 - n$.

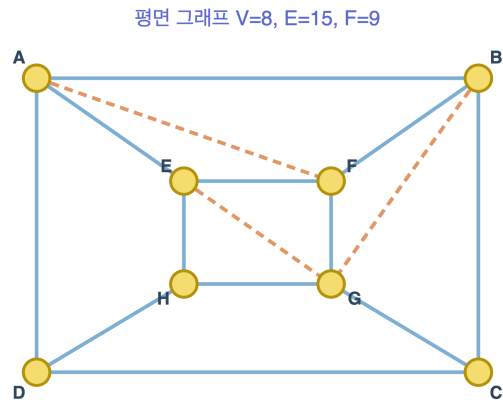
2, 3, 5가 서로소이므로 $30 \mid n^5 - n$.

$n = 7$ 계산: $7^5 = 16807, 7^5 - 7 = 16800, 16800/30 = 560$.

같은 방법으로 $n^7 - n$ 이 42 = 2 · 3 · 7의 배수, $n^{13} - n$ 이 2730의 배수임을 보일 수 있다.

Q63 그래프 이론

평면에 그려진(교차 없는) 연결 단순 그래프 G 의 정점 수가 $V = 8$, 간선 수가 $E = 15$ 이다. 이 그래프가 평면을 나누는 면의 개수(바깥 무한 면 포함) F 는?



- ① ① 7
- ② ② 8
- ③ ③ 9
- ④ ④ 10

정답: ③ 9

핵심 아이디어: 연결 평면 그래프에 대해 오일러 공식이 성립한다.

오일러 공식: $V - E + F = 2$.

대입: $F = 2 - V + E = 2 - 8 + 15 = 9$.

참고 부등식 검증: 단순 평면 그래프는 $V \geq 3$ 에서 $E \leq 3V - 6$ 를 만족해야 한다. $3 \cdot 8 - 6 = 18 \geq 15$ 이므로 그릴 수 있는 평면 그래프이다.

💡 오일러는 1750년 다면체(정육면체, 정십이면체 등)에서 이 공식을 발견했다. 정십이면체는 $V = 20, E = 30, F = 12$ 로 $V - E + F = 2$ 성립.

Q64 확률 (조건부·기하)

세 상자가 있다. 상자 A에는 흰 공 2개, 상자 B에는 흰 공 1개와 검은 공 1개, 상자 C에는 검은 공 2개가 들어 있다. 무작위로 하나의 상자를 골라 공 하나를 꺼냈더니 흰색이었다. 같은 상자에 남아 있는 **다른 공도 흰색**일 확률은?

- ① $\frac{1}{3}$
- ② $\frac{1}{2}$
- ③ $\frac{2}{3}$
- ④ $\frac{3}{4}$

정답: ③ $\frac{2}{3}$

핵심 아이디어: 베이즈 정리(또는 표본 공간 재구성).

표본 공간: 6개의 공에 라벨을 붙인다. 상자 A: W_1, W_2 (둘 다 흰), 상자 B: W_3 (흰), B_1 (검), 상자 C: B_2, B_3 .

조건 **꺼낸 공이 흰색**에 해당하는 공: W_1, W_2, W_3 (각 상자 선택 확률 $1/3$, 그 안에서 공 선택은 $1/2$ 로 균등하므로 세 공의 확률은 모두 같음).

그중 다른 공도 흰색인 경우: W_1, W_2 (상자 A에 있을 때, 2개).

구하는 확률 = $\frac{2}{3}$.

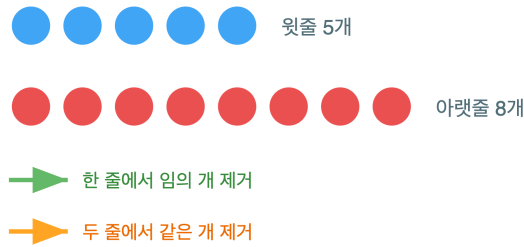
Bayes 공식 검증:
$$P(A | W) = \frac{P(W | A)P(A)}{P(W)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{1 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}.$$

이 문제는 베르트랑(Bertrand)의 **세 상자 역설**로 1889년 처음 제시되어 직관($1/2$)과 정답($2/3$)의 차이를 보여주었다.

Q65 게임 이론 (Combinatorial)

두 무더기에 각각 5개, 8개의 돌이 있다. 두 사람이 번갈아 다음 두 가지 중 **하나**를 행한다: (i) 한 무더기에서 양의 정수 개를 가져간다, (ii) 두 무더기에서 **같은** 양의 정수 개를 동시에 가져간다. 마지막 돌을 가져가는 사람이 이기는 **위토프 (Wythoff)** 게임에서 선공이 이기는 첫 수의 예 하나는?

돌 무더기 (Nim)



- ① ① 첫째 무더기에서 2개를 가져간다
- ② ② 둘째 무더기에서 5개를 가져간다
- ③ ③ 양쪽 무더기에서 2개씩 가져간다
- ④ ④ 선공은 어떤 수를 두어도 패배

정답: ② 둘째 무더기에서 5개를 가져간다

핵심 아이디어: 위토프 게임의 **차가운 위치**(P-position, 이동할 차례인 사람이 짐)는 황금비 $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ 를 이용한 **Beatty 수열**로 주어진다.

P-position: $(\lfloor k\varphi \rfloor, \lfloor k\varphi^2 \rfloor), k = 0, 1, 2, \dots$

- $k = 0$: (0, 0)
- $k = 1$: (1, 2)
- $k = 2$: (3, 5)
- $k = 3$: (4, 7)
- $k = 4$: (6, 10)
- $k = 5$: (8, 13)

(5, 8)은 위 목록에 없으므로 W(이동자 승리). P-position에 도달하는 수를 찾자.

- 둘째 무더기에서 5 가져가 (5, 3): 정렬하면 (3, 5)로 P. ✓
- 양쪽에서 1씩 가져가 (4, 7): P. ✓ (이 선택지는 보기에 없음)

따라서 답은 ②.

💡 위토프 위치는 **모든 양의 정수가 $\lfloor n\varphi \rfloor$ 또는 $\lfloor n\varphi^2 \rfloor$ 로 정확히 한 번씩 나타난다**는 베이티(Beatty)의 정리와 직결된다.

Q66 모듈러·합동식

$S = 1! + 2! + 3! + \dots + 100!$ 이라 할 때, S 를 12로 나눈 나머지는?

- ① ① 0
- ② ② 3
- ③ ③ 6
- ④ ④ 9

정답: ④ 9

핵심 아이디어: 큰 n 에서 $n!$ 이 12를 나누는 점을 이용해 합을 절단한다.

$4! = 24 = 12 \cdot 2$ 이므로 $12 \mid 4!$. $n \geq 4$ 이면 $n!$ 은 4!을 인수로 가져 $12 \mid n!$, 따라서 $n! \equiv 0 \pmod{12}$.

그러므로 $S \equiv 1! + 2! + 3! \pmod{12}$.

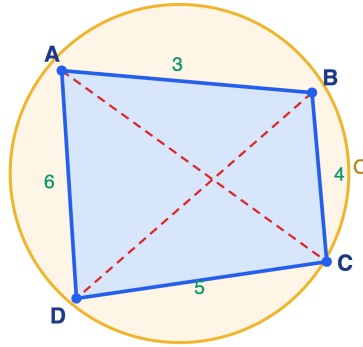
계산: $1! + 2! + 3! = 1 + 2 + 6 = 9$.

결론: $S \equiv 9 \pmod{12}$.

💡 $1! + 2! + \dots + n!$ 이 완전제곱수가 되는 자연수 n 은 $n = 1 (= 1)$ 과 $n = 3 (= 9)$ 두 경우뿐이라는 미해결에 가까운 결과(Brown-Brocard 형 문제)도 있다.

Q67 올림피아드 기하

원에 내접하는 사각형 $ABCD$ 에서 $AB = 3$, $BC = 4$, $CD = 5$, $DA = 6$ 일 때, 두 대각선의 곱 $AC \cdot BD$ 의 값은?



- ① ① 30
- ② ② 36
- ③ ③ 39
- ④ ④ 42

정답: ③ 39

핵심 아이디어: 원에 내접하는 사각형에 대해 **톨레미(Ptolemy) 정리**.

톨레미 정리: 원에 내접하는 사각형 $ABCD$ 에서

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA.$$

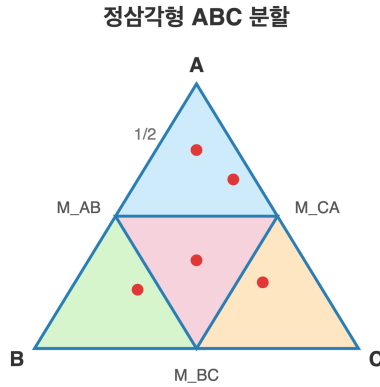
증명 스케치: 대각선 BD 위의 점 K 를 $\angle BAK = \angle CAD$ 가 되도록 잡으면 $\triangle ABK \sim \triangle ACD$, $\triangle AKD \sim \triangle ABC$ 가 되고 (원주각 일치), 각 닮음에서 $BK \cdot AC = AB \cdot CD$, $KD \cdot AC = AD \cdot BC$. 두 식을 더하면 좌변이 $(BK + KD) \cdot AC = BD \cdot AC$.

대입: $AC \cdot BD = 3 \cdot 5 + 4 \cdot 6 = 15 + 24 = 39$.

💡 톨레미 정리의 부등식 형태 $AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + BC \cdot DA$ 는 임의의 볼록 사각형에서 성립하며, 등호 조건이 바로 **원에 내접**.

Q68 비둘기집 응용

한 변의 길이가 1인 정삼각형 내부(경계 포함)에 점 5개를 임의로 배치한다. 이때 두 점 사이의 거리가 $\frac{1}{2}$ 이하인 두 점이 반드시 존재함을 보일 수 있는가?



- ① ① 항상 존재한다
- ② ② 점 배치에 따라 존재하지 않을 수도 있다
- ③ ③ 정확히 한 쌍만 존재한다
- ④ ④ 거리가 $\frac{1}{2}$ 보다 작은 두 점만 존재한다

정답: ① 항상 존재한다

핵심 아이디어: 정삼각형 분할 + 비둘기집 원리. 세 변의 중점을 연결하면 한 변 $\frac{1}{2}$ 인 작은 정삼각형 4개로 분할된다. 점 5개를 영역 4개에 배치하므로 비둘기집 원리에 의해 어느 한 작은 정삼각형에 적어도 2개의 점이 들어간다. 한 변 $\frac{1}{2}$ 인 정삼각형 내부 두 점 사이의 최대 거리는 그 변의 길이 $\frac{1}{2}$ 이다. 따라서 거리가 $\frac{1}{2}$ 이하인 두 점이 반드시 존재한다.

💡 이 방식은 '디리클레 분할'이라 불리는 고전 기법으로, 한붓그리기 없이 영역을 잘게 쪼개 비둘기집을 만드는 대표적 사례.

Q69 조합 (심화)

1부터 100까지의 정수 중에서 2, 3, 5 중 어느 것으로도 나누어떨어지지 않는 수의 개수는?

- ① ① 24
- ② ② 26
- ③ ③ 28
- ④ ④ 30

정답: ② 26

핵심: 포함배제 원리. A_k 를 ' k 의 배수인 수의 집합'이라 하면

$$|A_2| = 50, |A_3| = 33, |A_5| = 20, |A_6| = 16, |A_{10}| = 10, |A_{15}| = 6, |A_{30}| = 3.$$

$$|A_2 \cup A_3 \cup A_5| = 50 + 33 + 20 - 16 - 10 - 6 + 3 = 74. \text{ 따라서 어느 것으로도 나누어떨어지지 않는 수의 개수} = 100 - 74 = 26.$$

💡 1 이상 n 이하 정수 중 n 과 서로소인 것의 개수는 오일러 토션트 $\varphi(n)$ 이며, 같은 포함배제로 일반화된다.

Q70 함수방정식 (입문)


다항함수 f 가 모든 실수 x, y 에 대하여 $f(x + y) = f(x) + f(y) + xy$ 를 만족하고 $f(1) = 1$ 일 때, $f(10)$ 의 값은?

- ① ① 45
- ② ② 50
- ③ ③ 55
- ④ ④ 60

 **정답: ③ 55**

 **핵심 아이디어:** 적절한 치환으로 코시형 함수방정식으로 환원. $g(x) = f(x) - \frac{x^2}{2}$ 로 놓으면

$g(x + y) = f(x + y) - \frac{(x + y)^2}{2} = f(x) + f(y) + xy - \frac{x^2 + 2xy + y^2}{2} = g(x) + g(y)$. f 가 다항함수이므로 g 도 다항이며 코시방정식의 다항해는 $g(x) = cx$. $f(1) = \frac{1}{2} + c = 1$ 에서 $c = \frac{1}{2}$. 따라서 $f(x) = \frac{x(x+1)}{2}$ 이고 $f(10) = \frac{10 \cdot 11}{2} = 55$.


 $f(x) = \frac{x(x+1)}{2}$ 는 삼각수 T_x 의 공식. $f(x + y) - f(x) - f(y) = xy$ 는 '곱의 잔차'를 측정.


Q71 모듈러·합동식

합동식 $x^2 \equiv 2 \pmod{7}$ 의 모든 해 x ($0 \leq x < 7$)의 합은?

- ① ① 0
- ② ② 3
- ③ ③ 7
- ④ ④ 해가 존재하지 않는다

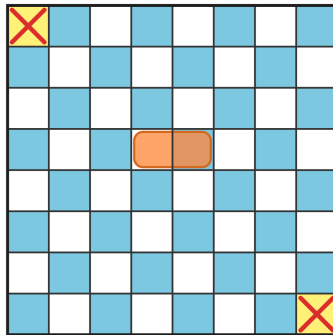
 **정답: ③ 7**

 **핵심:** 유한 잉여계에서 제곱표 작성. $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ 에 대해 $x^2 \pmod{7}$ 은 차례로 0, 1, 4, 2, 2, 4, 1. $x^2 \equiv 2 \pmod{7}$ 인 해는 $x = 3$ 과 $x = 4$ 의 두 개. 합 = 3 + 4 = 7. 일반적으로 x_0 가 해이면 $-x_0 \equiv p - x_0$ 도 해이므로 해의 합은 $\equiv 0 \pmod{p}$ 임에 주목.

 2가 소수 p 의 이차잉여(QR)일 조건은 $p \equiv \pm 1 \pmod{8}$. $7 \equiv -1 \pmod{8}$ 이므로 2는 $\pmod{7}$ 의 이차잉여.

Q72 그래프 이론

8 × 8 체스판에서 두 대각 모서리 칸(왼쪽 위와 오른쪽 아래)을 잘라낸다. 남은 62 칸을 1 × 2 도미노 31 개로 완전히 덮을 수 있는가?



□ 흰칸 ■ 검칸 ■ 도미노=흰+검 ✕ 둘 다 흰칸 제거

- ① ① 가능, 구체적 구성 존재
- ② ② 불가능, 색칠 불변량에 의해 모순
- ③ ③ 도미노 30개로는 가능
- ④ ④ 경우에 따라 다르다

정답: ② 불가능, 색칠 불변량에 의해 모순

핵심 아이디어: 색칠 불변량. 체스판을 흑백으로 칠하면 두 대각 모서리는 동색(예: 둘 다 흰색). 따라서 남은 칸의 색 구성은 흰 30, 검 32. 한편 1 × 2 도미노는 인접한 두 칸을 덮으므로 항상 흰 1, 검 1 을 덮는다. 31 개의 도미노로 모두 덮으려면 흰 31 + 검 31 이 필요. 모순. 따라서 불가능.

💡 이 '훼손된 체스판 문제'는 1958년 Max Black이 제시. 색칠 불변량은 '그래프의 이분(bipartite) 구조'와 본질적으로 같다.

Q73 불변량과 단조량

칠판에 정수 1, 2, 3, ..., 100 이 모두 적혀 있다. 한 번의 조작은 임의의 두 수 a, b 를 지우고 $|a - b|$ 를 새로 적는 것이다. 99 번의 조작 후 칠판에 남은 한 수의 짝수/홀수 여부는?

- ① ① 항상 짝수
- ② ② 항상 홀수
- ③ ③ 짝수 또는 홀수 모두 가능
- ④ ④ 항상 0

정답: ① 항상 짝수

핵심: '수들의 합의 패리티'가 불변. $|a - b|$ 와 $a + b$ 는 같은 패리티를 가지므로 ($\because |a - b| = a + b - 2\min(a, b)$), 한 번의 조작 후 칠판 위 수들의 합 S 의 패리티는 바뀌지 않는다. 초기 합 $S_0 = 1 + 2 + \dots + 100 = \frac{100 \cdot 101}{2} = 5050$ 으로 짝수. 따라서 마지막 남은 한 수도 짝수.

💡 이런 '합의 모듈러 불변량'은 올림피아드 게임 문제에서 자주 등장. 더 강하게 gcd 의 보존도 살펴볼 가치 있음.

Q74 다이오판티

방정식 $x^2 + y^2 = 2025$ 의 정수해 (x, y) 의 개수는? (단, x, y 는 음수도 포함한 정수)

- ① ① 4
- ② ② 8
- ③ ③ 12
- ④ ④ 16

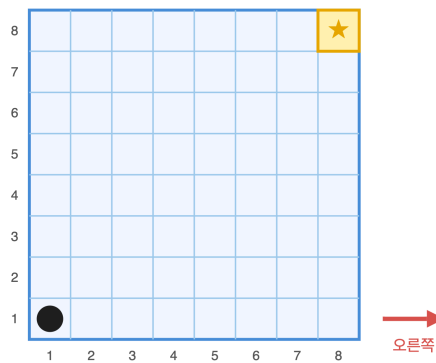
정답: ③ 12

책 핵심: 본질적 표현 찾기 + 부호/순서 대칭. $2025 = 3^4 \cdot 5^2 = 45^2$. 본질적 분해: $2025 = 0^2 + 45^2 = 27^2 + 36^2$ ($27^2 + 36^2 = 729 + 1296 = 2025$). 다른 분해는 $0 \leq a \leq b$ 의 범위에서 b 를 45 이하로 차례 검증하여 없음을 확인. 이제 부호와 순서: $(0, \pm 45), (\pm 45, 0) \rightarrow 4$ 개. $(\pm 27, \pm 36), (\pm 36, \pm 27) \rightarrow 8$ 개. 총 12개. (페르마 두 제곱수 정리 $r_2(n) = 4(d_1(n) - d_3(n))$ 로도 $4(9 - 6) = 12$.)

💡 $45^2 = 27^2 + 36^2$ 는 9 배 한 $(3, 4, 5)$ 피타고라스 삼중. 합성수 n 이 두 제곱수 합으로 표현되는 횟수는 약수의 모듈러 4 분포로 정해진다.

Q75 게임 이론 (Combinatorial)

8×8 격자판의 왼쪽 아래 칸 $(1, 1)$ 에 말이 놓여 있다. 두 사람이 번갈아 말을 오른쪽 한 칸 또는 위로 한 칸 움직인다. 더 이상 움직일 수 없는 사람이 진다. 누가 필승하는가? (두 사람 모두 최선의 수를 둔다.)



- ① ① 첫 번째 사람 필승
- ② ② 두 번째 사람 필승
- ③ ③ 시작 위치에 따라 결정
- ④ ④ 비길 수 있다

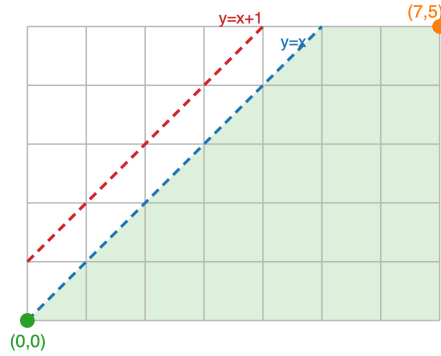
정답: ② 두 번째 사람 필승

책 핵심 아이디어: '도달 거리'가 고정되어 패리티가 결정됨. 종착 칸은 $(8, 8)$ 로, 여기 도달한 다음 사람은 움직일 수 없어 진다. 즉 $(8, 8)$ 에 도착하는 사람이 이긴다. $(1, 1) \rightarrow (8, 8)$ 까지는 오른쪽 7 번 + 위 7 번 = 총 14 번의 이동이 강제된다 (어떤 경로든 합이 일정). 첫 번째 사람은 1, 3, ..., 13 번째 이동 (7 번), 두 번째 사람은 2, 4, ..., 14 번째 이동 (7 번). 따라서 14 번째 (마지막) 이동은 항상 두 번째 사람이 두며 $(8, 8)$ 에 도달. 결과: 두 번째 사람이 항상 필승.

💡 이 게임의 P-위치(이전 사람 승)는 좌표 합 $i + j$ 가 짝수인 칸. $(1, 1)$ 은 합 2 로 P-위치이므로 first player loses.

Q76 조합 (심화)

(0, 0) 에서 (7, 5) 까지 오른쪽 또는 위로만 이동하는 격자경로 중, 모든 중간 격자점 (x, y) 에서 $y \leq x$ 를 만족하는 경로의 개수는?



- ① ① 231
- ② ② 297
- ③ ③ 396
- ④ ④ 495

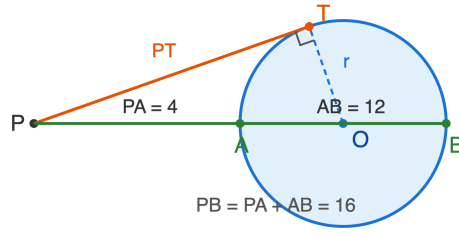
정답: ② 297

핵심 아이디어: 반사 원리(reflection principle). 전체 경로 수 = $\binom{7+5}{5} = \binom{12}{5} = 792$. '나쁜 경로'는 어느 시점에서 $y = x + 1$ 선 (위쪽 경계 너머)에 닿는 경로. 첫 닿는 순간 이전 부분을 $y = x + 1$ 직선에 대해 반사하면, 시작점 (0, 0) 이 (-1, 1) 로 옮겨지고 이는 (-1, 1) → (7, 5) 로 가는 격자경로와 일대일 대응. 그 수는 오른쪽 8, 위 4 이동이므로 $\binom{12}{4} = 495$. 따라서 좋은 경로 수 = $792 - 495 = 297$.

💡 이 형태는 카탈란 수 $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ 의 일반화 (Cycle/Reflection lemma).

Q77 올림피아드 기하

원 O 의 외부 점 P 에서 원에 접하는 접선의 접점을 T , 한 할선이 원과 만나는 두 점을 A, B (A 가 P 에 더 가까움) 라 한다. $PA = 4, AB = 12$ 일 때 PT 의 길이는?



- ① ① $4\sqrt{2}$
- ② ② $4\sqrt{3}$
- ③ ③ 8
- ④ ④ $4\sqrt{5}$

정답: ③ 8

핵심: 점 P 에 대한 원의 멱 (Power of a Point). 외부 점 P 에서의 접선의 길이의 제곱은 임의의 할선이 원과 만나는 두 점까지의 거리의 곱과 같다: $PT^2 = PA \cdot PB$. $PB = PA + AB = 4 + 12 = 16$. 따라서 $PT^2 = 4 \cdot 16 = 64$, $PT = 8$. (증명 약식:

$\triangle PTA \sim \triangle PBT$, 접현각 = 원주각 이용.)

💡 점의 '멱' $\text{pow}(P) = |PO|^2 - r^2$ 는 외부에서 양수, 내부에서 음수, 원 위에서 0. 두 원의 멱이 같은 점들의 자취가 '근축 (radical axis)'.

Q78 점화식

수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 1, a_2 = 5$, 그리고 모든 $n \geq 1$ 에 대해 $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ 을 만족한다. a_n 의 일반항은?

- ① ① 3^{n-1}
- ② ② $3^n - 2^n$
- ③ ③ $5 \cdot 2^{n-1}$
- ④ ④ $2 \cdot 3^n - 3 \cdot 2^n$

정답: ② $3^n - 2^n$

핵심: 선형 점화식의 특성방정식. 특성방정식 $x^2 - 5x + 6 = 0$, 즉 $(x - 2)(x - 3) = 0$ 의 근은 $x = 2, 3$. 일반해 형태 $a_n = A \cdot 2^n + B \cdot 3^n$. 초기조건: $a_1 = 2A + 3B = 1$, $a_2 = 4A + 9B = 5$. 첫 식 $\times 2$ 를 둘째에서 빼면 $3B = 3$, 즉 $B = 1$, $A = -1$. 따라서 $a_n = 3^n - 2^n$. 검증: $a_3 = 27 - 8 = 19 = 5 \cdot 5 - 6 \cdot 1 \checkmark$.

💡 $3^n - 2^n$ 은 $\frac{3^n - 2^n}{3 - 2}$ 의 형태로, 메르센 수 $2^n - 1$ 의 일반화인 'repunit base (3, 2)' 의 한 예.

Q79 정수론 (심화)

오일러 피 함수 $\varphi(n)$ 은 1 이상 n 이하의 정수 중 n 과 서로소인 것의 개수다. $\varphi(36)$ 의 값은?

- ① ① 10
- ② ② 12
- ③ ③ 18
- ④ ④ 24

정답: ② 12

핵심: φ 는 곱셈적 함수이고 소인수분해에서 바로 계산된다. $36 = 2^2 \cdot 3^2$ 이므로

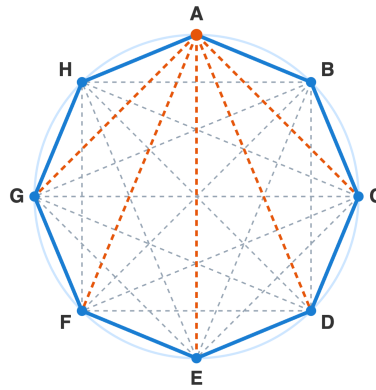
$$\varphi(36) = 36 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 36 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = 12.$$

실제로 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 35 의 12개가 36과 서로소다.

💡 $\varphi(n)$ 은 n 보다 작은 분수 k/n 중 기약분수의 개수와도 같다.

Q80 조합 (심화)

정팔각형의 대각선(꼭짓점을 잇되 변이 아닌 선분)의 개수는?



- ① ① 16
- ② ② 20
- ③ ③ 24
- ④ ④ 28

정답: ② 20

핵심: 두 꼭짓점을 잇는 모든 선분에서 변을 빼면 된다. 꼭짓점 8개 중 2개를 고르는 선분은 $\binom{8}{2} = 28$ 개, 이 중 변이 8개이므로 대각선은 $28 - 8 = 20$ 개. 일반식은 $\frac{n(n-3)}{2} = \frac{8 \cdot 5}{2} = 20$.

💡 한 꼭짓점에서는 자기 자신과 양 옆을 제외한 $n - 3$ 개로 대각선이 나간다.

🧠 고등/올림피아드 사고력

총 40문제 · 문제와 정답·풀이 포함

Q81 확률 (조건부·기하)

5명이 자신의 모자를 벗어 한곳에 모은 뒤 무작위로 하나씩 다시 집는다. 자기 모자를 집는 사람 수의 기댓값은?

- ① ① $\frac{1}{5}$
- ② ② 1
- ③ ③ $\frac{5}{2}$
- ④ ④ 5

🎯 정답: ② 1

📖 핵심: 기댓값의 선형성과 지시확률변수를 쓰면 분포 전체를 구할 필요가 없다. i 번째 사람이 자기 모자를 집는 사건의 지시변수 X_i 는 $E[X_i] = \Pr(X_i = 1) = \frac{1}{5}$. 전체 수 $X = \sum_{i=1}^5 X_i$ 이므로

$$E[X] = \sum_{i=1}^5 E[X_i] = 5 \cdot \frac{1}{5} = 1.$$

사람 수 n 에 무관하게 항상 1 이다.

💡 아무도 자기 모자를 못 집을 확률(완전 교란)은 n 이 커지면 $1/e \approx 0.368$ 로 수렴한다.

Q82 극값 문제

실수 x, y, z 가 $x + y + z = 12$ 를 만족할 때 $x^2 + y^2 + z^2$ 의 최솟값은?

- ① ① 16
- ② ② 36
- ③ ③ 48
- ④ ④ 144

🎯 정답: ③ 48

📖 핵심: 코시-슈바르츠 부등식 $(1^2 + 1^2 + 1^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x + y + z)^2$ 를 적용한다.

$$3(x^2 + y^2 + z^2) \geq 12^2 = 144 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq 48.$$

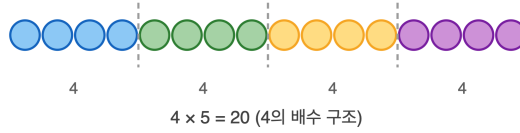
등호는 $x = y = z = 4$ 일 때 성립하므로 최솟값은 48. (제공평균-산술평균 관계와 동치.)

💡 합이 고정될 때 제곱합은 모든 값이 같을 때 가장 작다 - 이는 분산이 0일 때다.

Q83 게임 이론 (Combinatorial)

돌 20개가 있고 두 사람이 번갈아 1, 2, 3 개 중 원하는 만큼 가져간다. 마지막 돌을 가져가는 사람이 이긴다. 양쪽이 최선을 다하면 누가 이기는가?

님(Nim) 게임 - 돌 20개



한 번에 1 - 3개 제거
마지막을 가져가면 승

- ① ① 선공(첫 번째)
- ② ② 후공(두 번째)
- ③ ③ 항상 비긴다
- ④ ④ 돌 개수와 무관하게 선공

정답: ② 후공(두 번째)

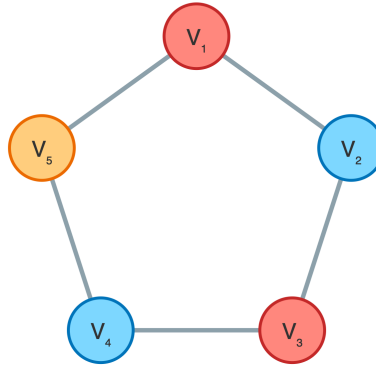
핵심: 그룬디(Grundy) 분석에서 $g(n) = n \bmod 4$ 이고, 4의 배수가 패배(P) 위치다. 후공은 '선공이 k 개 가져가면 자신은 $4 - k$ 개 가져가기' 전략으로 매 라운드 정확히 4개를 줄여, 항상 4의 배수를 상대에게 넘긴다. $20 = 4 \cdot 5$ 가 4의 배수이므로 선공이 P위치에서 시작 → 후공 필승.

💡 뽀빠리 집합이 $\{1, 2, \dots, k\}$ 이면 패배 위치는 항상 $(k + 1)$ 의 배수다.

Q84 그래프 이론

인접한 두 꼭짓점은 서로 다른 색이어야 한다. 정오각형 모양의 사이클 그래프 C_5 를 칠하는 데 필요한 최소 색의 수(채색수)는?

5-사이클 그래프 (인접 = 다른 색)



- ① ① 2
- ② ② 3
- ③ ③ 4
- ④ ④ 5

정답: ② 3

핵심: 사이클의 채색수는 짝수 길이면 2, 홀수 길이면 3이다. C_5 는 홀수 사이클이라 2색으로는 칠할 수 없다(2색이면 색이 번갈아 나타나야 하는데 홀수 둘레에서 시작과 끝이 충돌). $V_1=a, V_2=b, V_3=a, V_4=b, V_5=c$ 처럼 3색이면 가능하므로 채색수는 3. 홀수 사이클을 포함하면 그래프는 이분그래프가 아니다.

💡 그래프가 이분(2색 가능)일 필요충분조건은 홀수 길이 사이클이 하나도 없는 것이다.

Q85 확률 (조건부·기하)

두 자녀를 둔 가정이 있다. 각 아이는 독립적으로 남/여가 같은 확률이다. '적어도 한 명은 남자'라는 정보가 주어졌을 때, 두 아이가 모두 남자일 조건부확률은?

- ① ① $\frac{1}{4}$
- ② ② $\frac{1}{3}$
- ③ ③ $\frac{1}{2}$
- ④ ④ $\frac{2}{3}$

정답: ② $\frac{1}{3}$

핵심: 표본공간을 출생 순서까지 구분하면 $\{BB, BG, GB, GG\}$ 로 각 확률 $\frac{1}{4}$. '적어도 한 명 남자' 조건은 GG 를 제거해 $\{BB, BG, GB\}$ 세 경우만 남긴다. 이 중 모두 남자는 BB 한 가지뿐이므로

$$\Pr(BB \mid \text{적어도 한 명 남}) = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}.$$

💡 만약 '첫째가 남자'라는 더 강한 정보였다면 답은 $\frac{1}{2}$ 로 달라진다 - 조건의 표현이 확률을 바꾼다.

Q86 점화식

$a_0 = 0, a_1 = 1$ 이고 $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} (n \geq 2)$ 일 때 a_4 의 값은?

- ① ① 60
- ② ② 65
- ③ ③ 72
- ④ ④ 81

정답: ② 65

핵심: 특성방정식으로 일반항을 구한다. $x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = 2, 3$ 이므로 $a_n = A \cdot 2^n + B \cdot 3^n$. 초기조건 $a_0 = A + B = 0, a_1 = 2A + 3B = 1$ 에서 $B = 1, A = -1$, 즉 $a_n = 3^n - 2^n$. 따라서 $a_4 = 81 - 16 = 65$. (직접 계산: $a_2 = 5, a_3 = 19, a_4 = 5 \cdot 19 - 6 \cdot 5 = 95 - 30 = 65$ 로 확인.)

특성근이 서로 다른 실수이면 일반항은 두 등비수열의 합으로 깔끔히 분리된다.

Q87 귀납법

모든 양의 정수 n 에 대하여 $4^n + 15n - 1$ 은 항상 어떤 자연수의 배수이다. 보장되는 가장 큰 그 수는?

- ① ① 3
- ② ② 6
- ③ ③ 9
- ④ ④ 18

정답: ③ 9

핵심: 수학적 귀납법으로 $9 \mid 4^n + 15n - 1$ 을 증명한다. 기저 $n = 1: 4 + 15 - 1 = 18 = 9 \cdot 2 \checkmark$. 귀납 가정 $9 \mid f(n)$ 에서 $f(n) = 4^n + 15n - 1$ 라 하면

$$f(n+1) - 4f(n) = (4^{n+1} + 15n + 14) - (4^{n+1} + 60n - 4) = -45n + 18 = 9(2 - 5n)$$

은 9의 배수. 따라서 $f(n+1) = 4f(n) + 9(2 - 5n)$ 도 9의 배수다. $n = 1, 2, 3$ 에서 값은 18, 45, 108 이고 $\gcd = 9$ 이므로 18은 보장 되지 않는다(18 \nmid 45). 답은 9.

$4 \equiv 1 + 3 \pmod{9}$ 이라 $4^n = (1 + 3)^n$ 을 이항전개하면 9 가분성이 자동으로 드러난다.

Q88 함수방정식 (입문)

모든 실수 x, y 에 대해 $f(x + y) = f(x) + f(y) + 2xy$ 이고 $f(1) = 1$ 이다. $f(5)$ 의 값은?

- ① ① 11
- ② ② 15
- ③ ③ 25
- ④ ④ 30

정답: ③ 25

핵심: $y = 1$ 을 넣어 점화식을 만든다. $f(x + 1) = f(x) + f(1) + 2x = f(x) + 2x + 1$. 이는 $f(x + 1) - f(x) = 2x + 1$ 로, 차분이 홀수열이다. $f(1) = 1$ 에서 출발해 누적하면

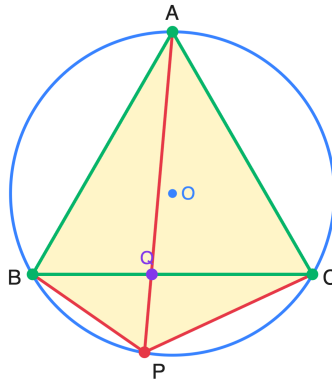
$$f(n) = f(1) + \sum_{k=1}^{n-1} (2k + 1) = 1 + (n^2 - 1) = n^2.$$

실제로 $f(x) = x^2$ 는 $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$ 로 원식을 만족한다. 따라서 $f(5) = 25$.

$g(x) = f(x) - x^2$ 로 치환하면 $g(x + y) = g(x) + g(y)$ 인 코시 방정식으로 환원된다.

Q89 올림피아드 기하

정삼각형 ABC 가 한 원에 내접한다. 점 P 가 꼭짓점 A 를 포함하지 않는 호 BC 위에 있을 때 $PB = 3, PC = 5$ 이다. 선분 PA 의 길이는?



- ① ① 4
- ② ② 8
- ③ ③ $\sqrt{34}$
- ④ ④ 15

정답: ② 8

핵심: 원에 내접하는 사각형 $ABPC$ 에 톨레미(Ptolemy) 정리를 적용한다.

$$PA \cdot BC = PB \cdot AC + PC \cdot AB.$$

정삼각형이라 $AB = BC = CA$ 이므로 양변을 변의 길이로 나누면 $PA = PB + PC = 3 + 5 = 8$. (호 BC 위의 점에서 가장 먼 꼭짓점까지의 거리는 나머지 두 거리의 합.)

💡 이 결과는 '반 스호턴 정리'로도 불리며, 톨레미 정리의 가장 우아한 특수 사례 중 하나다.

Q90 비둘기집 응용

1 부터 100 까지의 정수 중에서 몇 개를 고른다. '고른 수 중 한 수가 다른 수의 배수가 되는 쌍이 반드시 존재'하도록 보장하려면, 최소 몇 개를 골라야 하는가?

- ① ① 50
- ② ② 51
- ③ ③ 76
- ④ ④ 100

정답: ② 51

핵심: 각 정수를 $2^k \cdot m$ (m 은 홀수)로 쓰면, 홀수 부분 m 이 같은 두 수는 한쪽이 다른 쪽을 나눈다. 1 - 100 의 홀수는 1, 3, 5, ..., 99 로 정확히 50개(비둘기집의 '집'). 51개를 고르면 비둘기집 원리로 같은 홀수 부분을 가진 두 수가 생겨 배수 관계가 강제된다. 한편 $\{51, 52, \dots, 100\}$ 의 50개는 어느 두 수도 배수 관계가 없다($2 \times 51 = 102 > 100$). 따라서 50개로는 피할 수 있고, 답은 51.


💡 이 문제는 에르되시가 즐겨 낸 고전으로, '홀수 부분'이라는 한 줄짜리 분류가 핵심을 꿰뚫는다.

Q91 불변량과 단조량

칠판에 1, 2, 3, 4, 5가 적혀 있다. 매 번 임의의 두 수 a, b 를 지우고 그 자리에 $a + b + ab$ 를 적는다. 이 과정을 반복하여 수가 하나만 남았을 때, 남는 수는?

- ① ①719
- ② ②720
- ③ ③721
- ④ ④순서에 따라 달라진다

 **정답: ①719**

 **핵심:** $a + b + ab + 1 = (a + 1)(b + 1)$. 따라서 모든 수에 1을 더한 값들의 곱 $\prod (x_i + 1)$ 이 연산에 대해 불변이다. 처음 값은 $(1 + 1)(2 + 1)(3 + 1)(4 + 1)(5 + 1) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$. 마지막 남는 수 x 에 대해 $x + 1 = 720$ 이므로 $x = 719$. 연산 순서와 무관하다.


 이 '+1 변환' 트릭은 덧셈처럼 보이는 연산 속에 숨은 곱셈 구조를 드러내 불변량을 만든다.

Q92 비둘기집 응용

1부터 100까지의 정수 중에서 몇 개를 고르면, 고른 수들 중 한 수가 다른 수의 배수가 되는 쌍이 반드시 존재함을 보장할 수 있는가? (그런 쌍이 없도록 고를 수 있는 최대 개수보다 1 큰 값)

- ① ①50
- ② ②51
- ③ ③76
- ④ ④100

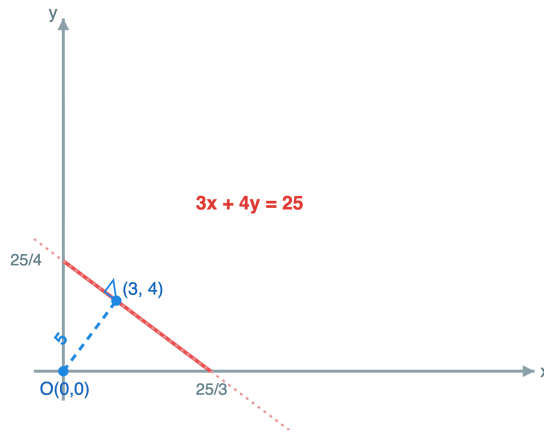
 **정답: ②51**

 각 수를 $2^k \cdot m$ (m 홀수)로 쓰면 홀수 부분 $m \in \{1, 3, 5, \dots, 99\}$ 로 50가지뿐이다. 51개를 고르면 비둘기집 원리로 같은 홀수 부분을 갖는 두 수가 존재하고, 둘 중 하나는 다른 하나의 2의 거듭제곱 배이므로 배수 쌍이 생긴다. 한편 $\{51, 52, \dots, 100\}$ 의 50개는 어떤 수의 2배도 100을 넘으므로 배수 쌍이 없다. 따라서 보장에 필요한 최소 개수는 51.

 '홀수 부분이 같다'는 동치류로 묶는 발상이 비둘기집 응용의 핵심이다.

Q93 극값 문제

직선 $3x + 4y = 25$ 위의 점 중에서 원점 $O(0,0)$ 에 가장 가까운 점까지의 거리는?



- ① ①4
- ② ②5
- ③ ③6
- ④ ④ $5\sqrt{2}$

정답: ②5

점과 직선 사이 거리 공식: $d = \frac{|3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 - 25|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{25}{5} = 5$. 코시-슈바르츠로도: $(3x + 4y)^2 \leq (3^2 + 4^2)(x^2 + y^2)$ 에서

$25^2 \leq 25(x^2 + y^2)$, 즉 $x^2 + y^2 \geq 25$ 이고 등호는 $(x, y) = (3, 4)$ 일 때. 최단거리는 5.

등호 조건 $(3, 4)$ 가 정확히 수선의 발과 일치한다 - 부등식의 최적점이 곧 기하적 최단점이다.

Q94 모듈러·합동식

7^{2024} 의 마지막 두 자리(십의 자리와 일의 자리)를 구하여라.

- ① ①01
- ② ②07
- ③ ③43
- ④ ④49

정답: ①01

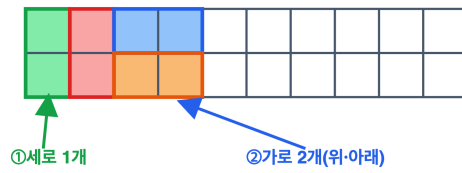
100을 법으로 7의 거듭제곱을 보면 $7^1 \equiv 07$, $7^2 \equiv 49$, $7^3 \equiv 43$, $7^4 \equiv 01 \pmod{100}$ 으로 주기가 4다. $2024 = 4 \cdot 506$ 이므로 $7^{2024} \equiv (7^4)^{506} \equiv 1^{506} \equiv 1 \pmod{100}$. 따라서 마지막 두 자리는 01.

mod 100에서 7의 위수(차수)가 4라는 사실이 모든 계산을 결정한다.

Q95 점화식

2×10 직사각형을 1×2 도미노(가로 또는 세로)로 빈틈없이 덮는 방법의 수는?

2 × 10 격자 도미노 덮기



왼쪽 옆을 세로 1개 또는 가로 2개로 시작
→ 두 경우로 나누어 세어 본다

- ① ①55
- ② ②89
- ③ ③144
- ④ ④1024

정답: ②89

$2 \times n$ 을 덮는 방법 수를 a_n 이라 하자. 맨 왼쪽 옆을 세로 도미노 1개로 채우면 나머지는 a_{n-1} , 가로 도미노 2개로 채우면 나머지는 a_{n-2} . 따라서 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$. 수열은 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89이고 $a_{10} = 89$ (피보나치수열).

타일링 개수가 피보나치수가 되는 것은 '맨 끝 조각의 경우를 나누는' 점화 구조 때문이다.

Q96 조합 (심화)

$x + y + z = 10$ 을 만족하는 음이 아닌 정수해 (x, y, z) 의 개수는?

- ① ①36
- ② ②45
- ③ ③66
- ④ ④78

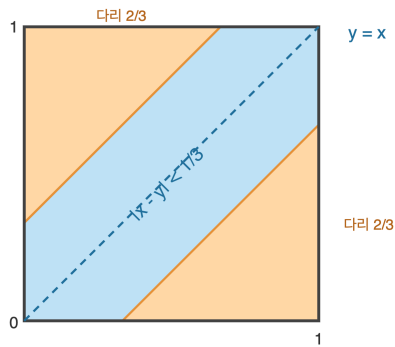
정답: ③66

음이 아닌 정수해의 개수는 '별과 막대(stars and bars)' 방법으로 센다. 10개의 별을 3묶음으로 나누려면 칸막이 2개가 필요하고, 별 10개와 칸막이 2개를 일렬로 배열하는 경우의 수와 같다: $\binom{10+2}{2} = \binom{12}{2} = 66$.

변수 개수를 k 로 늘리면 답은 $\binom{n+k-1}{k-1}$ - 중복조합의 일반식이다.

Q97 확률 (조건부·기하)

구간 $[0, 1]$ 에서 두 실수 x, y 를 서로 독립으로 균등하게 택한다. $|x - y| < \frac{1}{3}$ 일 확률은?



두 직각삼각형 넓이 합 = $\frac{4}{9}$

- ①) ① $\frac{4}{9}$
- ②) ② $\frac{1}{2}$
- ③) ③ $\frac{5}{9}$
- ④) ④ $\frac{2}{3}$

정답: ③ $\frac{5}{9}$

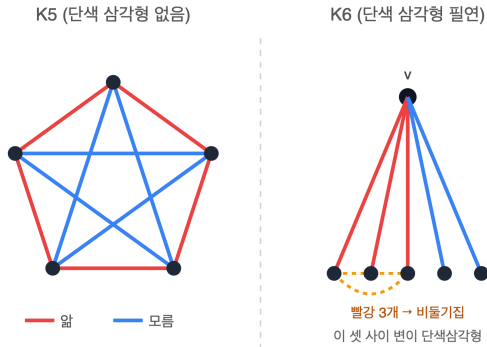
표본공간은 넓이 1인 단위정사각형. 여사건 $|x - y| \geq \frac{1}{3}$ 은 좌상·우하의 두 직각삼각형이고, 각 삼각형의 두 다리는 길이 $\frac{2}{3}$ 이므로 넓이 합은 $2 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$. 따라서 구하는 확률은 $1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$.

연속확률은 '넓이의 비'로 환원된다 - 기하확률의 출발점이다.

Q98 그래프 이론

어떤 모임에서든 '서로 모두 아는 3명' 또는 '서로 모두 모르는 3명'이 반드시 존재하려면 모임 인원이 최소 몇 명이어야 하는가? (즉 K_n 의 변을 두 색으로 칠할 때 단색 삼각형이 강제되는 최소 n .)

램지 수: K_5 반례 vs K_6



- ① ①5
- ② ②6
- ③ ③7
- ④ ④9

정답: ②6

한 사람 A에서 나가는 5개의 관계를 두 종류(알/모름)로 나누면 비둘기집 원리로 같은 종류가 3개 이상 있다. 그 상대 3명을 B, C, D라 하자. 이들 셋 사이에 A와 같은 종류의 변이 하나라도 있으면 그 둘과 A가 단색삼각형을 이루고, 하나도 없으면 B, C, D끼리는 모두 반대 종류라 그 자체가 단색삼각형이다. 따라서 $n = 6$ 에서 강제된다. $n = 5$ 에서는 오각형(빨강)+오각별(파랑) 칠하기로 단색삼각형 없는 예가 있으므로 최소값은 6 (램지수 $R(3, 3) = 6$).

이것이 가장 작은 비자명 램지수 $R(3, 3) = 6$ - '6명만 모이면 친구 셋 또는 낯선이 셋'이라는 유명한 결과다.

Q99 게임 이론 (Combinatorial)

$m \times n$ 격자 모양의 초콜릿을 두 사람이 번갈아 쪼갬다. 한 번의 차례에는 한 조각을 골라 격자선을 따라 직선으로 한 번에 둘로 나눈다. 모든 조각이 1×1 이 되어 더 쪼갤 수 없는 사람이 진다. 4×7 일 때 선공이 항상 이기는가, 후공이 항상 이기는가?



카운터
쪼갤 때마다 조각 수 +1
1 → 28 까지 총 27회

- ① ①선공 승
- ② ②후공 승
- ③ ③무승부
- ④ ④초기 쪼개기에 따라 다름

🎯 **정답: ①선공 승**

📖 **핵심 불변량:** 쪼개기 1회마다 전체 조각 수가 정확히 1 증가한다. 처음 1조각에서 시작해 끝에는 모두 1×1 이 되어 mn 조각이 되므로, 게임 종료까지 쪼개는 총 횟수는 전략과 무관하게 항상 $mn - 1$ 로 고정된다. 4×7 이면 $28 - 1 = 27$ 회. 27은 홀수이므로 마지막(27번째) 쪼개기를 선공이 하고, 그다음 차례인 후공은 움직일 수 없어 패배. 따라서 선공이 항상 이긴다.

💡 이 게임은 사실상 '전략이 없는 게임'이다 - 승패가 오직 mn 의 패리티로만 결정된다.

Q100 디오판티

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6}$ 을 만족하는 양의 정수 순서쌍 (x, y) 의 개수는?

- ① ①5
- ② ②8
- ③ ③9
- ④ ④10

🎯 **정답: ③9**

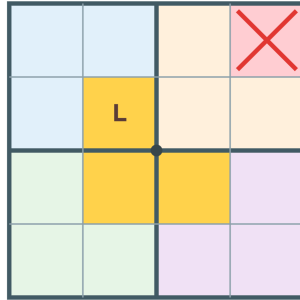
📖 양변에 $6xy$ 를 곱하면 $6y + 6x = xy$, 즉 $xy - 6x - 6y = 0$. 양변에 36을 더해 인수분해하면 $(x - 6)(y - 6) = 36$. $x, y > 0$ 이고 $\frac{1}{x} < \frac{1}{6}$ 이므로 $x > 6$, 마찬가지로 $y > 6$ 이라 $x - 6, y - 6$ 은 36의 양의 약수다. 36의 양의 약수는 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36로 9개이며, 각 약수 선택이 하나의 순서쌍을 주므로 해는 9개.

💡 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{n}$ 의 양의 정수해 개수는 항상 n^2 의 약수 개수와 같다.

Q101 귀납법

$2^n \times 2^n$ 정사각형 격자판에서 어느 한 칸을 제거한 판을, 1×1 칸 세 개를 L자로 붙인 'L-트로미노'로 빈틈없이 덮으려 한다. 가능한 경우는?

4x4 격자 · L-트로미노 분할



- ① ① n 이 짝수일 때만
- ② ②제거한 칸이 중앙일 때만
- ③ ③모든 $n \geq 1$ 에서 제거 위치와 무관하게 항상
- ④ ④항상 불가능

정답: ③모든 $n \geq 1$ 에서 제거 위치와 무관하게 항상

강귀납법. ($n = 1$) 2×2 에서 한 칸을 제거하면 남은 3칸이 곧 L-트로미노다. (귀납) $2^n \times 2^n$ 에서 항상 가능하다고 가정하고 $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ 판을 $2^n \times 2^n$ 사분면 4개로 나눈다. 제거된 칸은 한 사분면에 속한다. 정중앙에 L-트로미노 하나를 놓아 나머지 세 사분면에서 중심에 닿는 칸을 하나씩 덮으면, 네 사분면 모두 '한 칸이 빠진 $2^n \times 2^n$ '이 되어 귀납 가정으로 각각 덮인다. 따라서 모든 $n \geq 1$, 임의의 제거 위치에서 가능하다. (칸 수 $4^n - 1$ 이 항상 3의 배수라는 점도 이와 일치한다.)

이 정리는 분할정복(divide and conquer)의 교과서적 예 - 문제를 자기 자신의 작은 복사본 4개로 환원한다.

Q102 함수방정식 (입문)

모든 정수 x, y 에 대해 $f(x + y) = f(x) + f(y) + xy$ 를 만족하고 $f(1) = 1$ 인 함수 f 가 있다. $f(10)$ 의 값은?

- ① ①45
- ② ②50
- ③ ③55
- ④ ④100

정답: ③55

$y = 1$ 을 대입하면 $f(n + 1) = f(n) + f(1) + n = f(n) + (n + 1)$, 즉 $f(n + 1) - f(n) = n + 1$. $f(1) = 1$ 에서 차분을 누적하면 $f(n) = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$. 따라서 $f(10) = \frac{10 \cdot 11}{2} = 55$ (삼각수와 일치).

이 정리는 $g(x) = f(x) - \frac{x^2}{2}$ 로 치환하면 g 는 코시 함수방정식 $g(x + y) = g(x) + g(y)$ 를 만족한다 - 'xy 항'을 떼어내는 표준 기법이다.

Q103 불변량과 단조량

주머니에 흰 공 7개와 검은 공 8개가 들어 있다. 다음 연산을 공이 1개 남을 때까지 반복한다.

- 임의로 두 공을 꺼낸다.
- 두 공의 색이 같으면 검은 공 1개를 새로 넣는다.
- 두 공의 색이 다르면 흰 공 1개를 새로 넣는다.

매 연산마다 공의 총 개수는 1개씩 줄어든다. 마지막에 남는 공의 색은?



핵심: 불변량 (invariant)
어떤 규칙을 써도
흰 공 개수의 홀짝(홀수/짝수)은 변하지 않는다

- ① ① 흰 공
- ② ② 검은 공
- ③ ③ 마지막 공의 색은 연산 순서에 따라 달라진다
- ④ ④ 흰 공과 검은 공이 같은 확률로 남는다

정답: ① 흰 공

핵심: 흰 공의 개수의 홀짝(패리티)이 불변량이다.

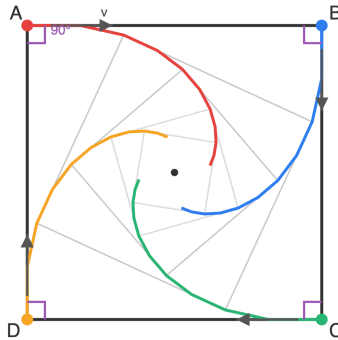
- 흰+흰: 흰 2개 제거, 검 1개 추가 → 흰 개수 -2 (홀짝 보존)
- 검+검: 검 2개 제거, 검 1개 추가 → 흰 개수 불변
- 흰+검: 흰·검 1개씩 제거, 흰 1개 추가 → 흰 개수 불변

모든 경우에서 흰 공 개수의 홀짝은 변하지 않는다. 처음 흰 공은 7개(홀수)이므로 끝까지 흰 공 개수는 항상 홀수이다. 마지막에 공은 1개 남고, 그 개수가 짝수(0)일 수 없으므로 남는 공은 흰 공이다.

💡 이런 '색의 홀짝 보존'은 도미노 덮기, 15퍼즐 등 수많은 불변량 논증의 원형이다.

Q104 재미 두뇌

한 변의 길이가 1인 정사각형의 네 꼭짓점에 개미 A, B, C, D 가 한 마리씩 있다. 시작과 동시에 A 는 B 를, B 는 C 를, C 는 D 를, D 는 A 를 향해 같은 일정한 속력으로 끊임없이 방향을 바꾸며 추격한다. 네 개미는 결국 중심에서 만난다. 만날 때까지 개미 한 마리가 이동한 거리는?



- ① ① 1
- ② ② $\sqrt{2}$
- ③ ③ $\frac{\pi}{2}$
- ④ ④ 무한히 커서 만나지 않는다

정답: ① 1

핵심: 인접한 두 개미의 운동방향은 항상 수직이므로, 추격하는 개미는 표적 개미에게 '옆으로' 접근하는 성분이 없다. A 가 B 를 향해 속력 v 로 다가갈 때, B 의 속도는 항상 선분 AB 에 수직(\angle 가 90°)이다. 따라서 B 의 운동은 거리 AB 를 늘이거나 줄이지 않고, 거리 AB 는 오직 A 의 접근 때문에 속력 v 로 줄어든다. 처음 $AB = 1$ 이므로 만나기까지 걸리는 시간은 $t = \frac{1}{v}$. 그동안 각 개미가 이동한 거리는 $v \cdot t = 1$. 경로 자체는 무한히 감기는 나선이지만 그 '길이'는 유한하며 정확히 한 변의 길이와 같다. 이 곡선을 등각나선(로그나선)이라 하며, '추격 문제(pursuit curve)'의 가장 유명한 예다.

Q105 비둘기집 응용

1부터 100까지의 정수 중에서 임의로 서로 다른 51개의 수를 골랐다. 이때 반드시 성립하는 것은?

- ① ① 차가 1인 두 수(연속한 두 수)가 반드시 존재한다
- ② ② 모든 수가 짝수일 수 있다
- ③ ③ 합이 100인 두 수가 반드시 존재한다
- ④ ④ 세 수의 합이 3의 배수가 되는 경우는 없을 수 있다

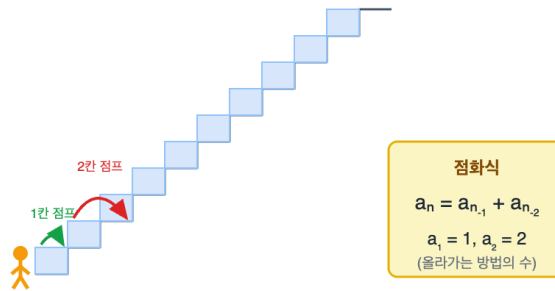
정답: ① 차가 1인 두 수(연속한 두 수)가 반드시 존재한다

핵심: $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \dots, \{99, 100\}$ 의 50개 묶음을 비둘기집으로 본다. 1부터 100까지를 연속한 두 수로 묶으면 정확히 50개의 묶음이 생긴다. 51개의 수를 고르면 비둘기집 원리에 의해 어떤 한 묶음에서 두 수가 동시에 선택되며, 그 두 수의 차는 1이다. (②는 짝수가 50개뿐이라 51개 불가능, ③은 $\{1, \dots, 49\}$ 에 50을 더해 합이 100인 짝을 피할 수 있어 거짓, ④도 반례 존재.) 따라서 항상 참인 것은 ①. '묶음을 어떻게 설계하느냐'가 비둘기집 문제의 전부다. 여기서 연속쌍이 정답을 만든다.

Q106 점화식

계단이 10칸 있다. 한 번에 1칸 또는 2칸씩 올라갈 수 있을 때, 맨 아래에서 맨 위(10칸째)까지 올라가는 서로 다른 방법의 수는?

10칸 계단 오르기



- ① ① 55
- ② ② 89
- ③ ③ 100
- ④ ④ 144

정답: ② 89

핵심: n 칸을 오르는 마지막 동작이 1칸이면 앞의 a_{n-1} 가지, 2칸이면 a_{n-2} 가지이므로 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.
초기값 $a_1 = 1, a_2 = 2$ 에서 차례로
 $a_3 = 3, a_4 = 5, a_5 = 8, a_6 = 13, a_7 = 21, a_8 = 34, a_9 = 55, a_{10} = 89$.

이는 피보나치 수열이며 $a_n = F_{n+1}$ 꼴이다. 따라서 10칸은 89가지.

💡 계단 오르기, $2 \times n$ 도미노 덮기, 토끼 번식이 모두 같은 점화식으로 귀결된다.

Q107 극값 문제

$x > 0$ 일 때

$$f(x) = \frac{(x+1)(x+4)}{x}$$

의 최솟값을 구하시오.

- ① ① 5
- ② ② 8
- ③ ③ 9
- ④ ④ 10

정답: ③ 9

핵심: 식을 전개해 ' $x + \frac{4}{x}$ ' 꼴을 만들고 두 양수의 합에 부등식 $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ 를 적용한다.

$$f(x) = \frac{x^2 + 5x + 4}{x} = x + \frac{4}{x} + 5.$$

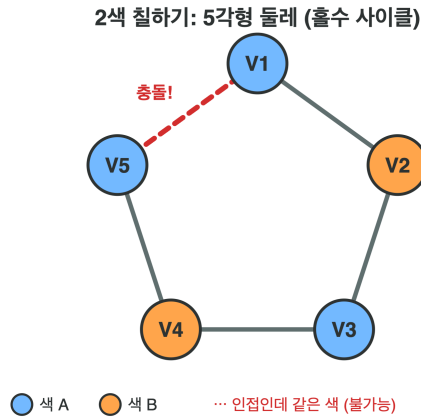
$x > 0$ 이므로 $x + \frac{4}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{4}{x}} = 2 \cdot 2 = 4$, 등호는 $x = \frac{4}{x}$ 즉 $x = 2$ 일 때.

따라서 $f(x) \geq 4 + 5 = 9$, 최솟값은 $x = 2$ 에서 9.

💡 $x + \frac{k}{x}$ 형태는 광학·물리의 최소시간·최소비용 문제에서 끊임없이 등장한다.

Q108 그래프 이론

정점이 5개인 사이클 그래프 C_5 (정점 $V_1V_2V_3V_4V_5$ 가 오각형처럼 차례로 연결)가 있다. 변으로 직접 연결된 두 정점은 서로 다른 색을 갖도록 모든 정점을 칠하려 한다. 필요한 색의 최소 개수는?



- ① ① 2
- ② ② 3
- ③ ③ 4
- ④ ④ 5

정답: ② 3

핵심: 그래프가 2색으로 칠해진다는 것은 이분그래프(홀수 길이 사이클이 없음)와 동치다.

C_5 는 길이 5의 홀수 사이클이므로 2색으로 칠할 수 없다. (V_1 에 색 A, 둘레를 따라 A,B,A,B,A로 칠하면 $V_5(A)$ 와 $V_1(A)$ 가 인접해 충돌.)

반면 $V_1=A, V_2=B, V_3=A, V_4=B, V_5=C$ 처럼 3색이면 모든 인접쌍이 다른 색이 된다. 따라서 채색수(chromatic number)는 3.

일반적으로 홀수 사이클 C_{2k+1} 의 채색수는 3, 짝수 사이클은 2이다.

💡 '2색 가능 = 홀수 사이클 없음'은 이분그래프 판정의 핵심 정리다.

Q109 모듈러·합동식

3^{1000} 을 7로 나눈 나머지를 구하시오.

- ① ① 1
- ② ② 2
- ③ ③ 4
- ④ ④ 6

정답: ③ 4

핵심: 3의 거듭제곱을 7로 나눈 나머지가 주기적으로 순환함(위수)을 이용한다.

$$3^1 \equiv 3, 3^2 \equiv 2, 3^3 \equiv 6, 3^4 \equiv 4, 3^5 \equiv 5, 3^6 \equiv 1 \pmod{7}.$$

나머지는 주기 6으로 순환한다(3의 법 7에 대한 위수는 6). $1000 = 6 \cdot 166 + 4$ 이므로

$$3^{1000} \equiv 3^4 \equiv 4 \pmod{7}.$$

💡 위수가 $p-1 (= 6)$ 과 같으면 3을 법 7의 '원시근'이라 부른다. 3은 실제로 원시근이다.

Q110 조합 (심화)

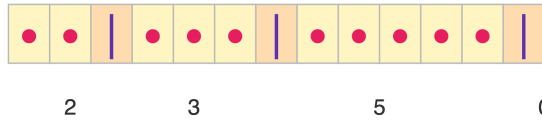
방정식

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$$

을 만족하는 음이 아닌 정수해 (x_1, x_2, x_3, x_4) 의 개수를 구하시오.

별 10개 + 칸막이 3개 = 13자리

13칸 중 칸막이 3개의 위치 고르기



•• | ••• | ••••• | → (2, 3, 5, 0)

• 별 10개 | 칸막이 3개

- ① ① 120
- ② ② 220
- ③ ③ 286
- ④ ④ 1000

☞ 정답: ③ 286

📖 핵심: '별과 막대(stars and bars)' - 10개의 별을 3개의 칸막이로 4구역에 나눈다.

별 10개와 칸막이 3개, 총 13개의 자리 중 칸막이가 놓일 3자리를 고르면 되므로

$$\binom{10 + 4 - 1}{4 - 1} = \binom{13}{3} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{6} = 286.$$

각 배열이 하나의 음이 아닌 정수해와 일대일 대응되므로 답은 286이다.

💡 같은 원리로 'n개를 k명에게 나눠 주는 법의 수'가 곧바로 계산된다.

Q111 귀납법

모든 정수 n 에 대하여 $n^3 + 2n$ 이 항상 어떤 양의 정수 d 의 배수가 된다. 이러한 d 중 가장 큰 값은?

- ① ① 2
- ② ② 3
- ③ ③ 5
- ④ ④ 6

☞ 정답: ② 3

📖 핵심: 식을 연속한 세 정수의 곱 꼴로 변형하거나 수학적 귀납법으로 $3 \mid n^3 + 2n$ 을 보인다.

변형: $n^3 + 2n = (n^3 - n) + 3n = (n - 1)n(n + 1) + 3n$. 연속한 세 정수의 곱 $(n - 1)n(n + 1)$ 은 항상 3의 배수이고 $3n$ 도 3의 배수이므로 합은 항상 3의 배수.

귀납법: $n = 1$ 이면 3. $n = k$ 에서 $k^3 + 2k$ 가 3의 배수라 하면

$$(k + 1)^3 + 2(k + 1) = k^3 + 2k + 3k^2 + 3k + 3,$$

뒤의 $3(k^2 + k + 1)$ 이 3의 배수이므로 $n = k + 1$ 에서도 성립.

한편 $n = 1$ 일 때 값이 3이므로 모든 n 의 공약수는 3을 넘을 수 없다. 따라서 최대 $d = 3$.

💡 $n^3 - n$ 이 항상 6의 배수라는 사실과 짝을 이루는 고전 정수론 연습이다.

Q112 게임 이론 (Combinatorial)


두 무더기에 돌이 각각 a 개, b 개 있다. 두 사람이 번갈아 다음 중 하나를 한다.

- 한 무더기에서 원하는 만큼(1개 이상) 가져간다.
- 두 무더기에서 같은 개수만큼(1개 이상) 동시에 가져간다.

마지막 돌을 가져가는 사람이 이긴다. 다음 시작 상태 중 "두는 사람(선수)이 반드시 지는" 패배 위치(P-위치)인 것은?

- ① ① (2, 3)
- ② ② (3, 5)
- ③ ③ (4, 6)
- ④ ④ (5, 7)

 **정답: ② (3, 5)**

 **핵심:** 이 게임은 비토프(Wythoff) 게임이며, 패배 위치(P-위치)는 황금비 $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 를 이용한 $([n\varphi], [n\varphi^2])$ ($n = 0, 1, 2, \dots$)

으로 (0, 0), (1, 2), (3, 5), (4, 7), (6, 10), ... 이다.

$n = 2$: $[2\varphi] = 3$, $[2\varphi^2] = 5$ 이므로 (3, 5)가 P-위치.

검증(다른 보기는 모두 한 수로 P-위치에 도달 가능 → 승리 위치):

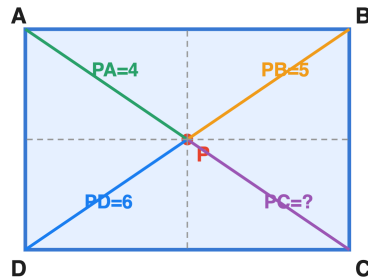
- (2, 3) → (1, 2) [양쪽 1개]
- (4, 6) → (3, 5) [양쪽 1개]
- (5, 7) → (3, 5) [양쪽 2개]

반면 (3, 5)에서는 어떤 합법수로도 다른 P-위치에 갈 수 없으므로 두는 사람이 진다.

 비토프 게임의 패배 위치는 황금비로 정의되는 비티(Beatty) 수열로 정확히 기술된다.

Q113 올림피아드 기하

직사각형 $ABCD$ 의 내부(또는 평면 위)의 한 점 P 가 있다(A, C 는 대각, B, D 는 대각). $PA = 4, PB = 5, PD = 6$ 일 때 PC 의 값을 구하시오.



$$PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$$

- ① ① $\sqrt{27}$
- ② ② $3\sqrt{5}$
- ③ ③ $\sqrt{61}$
- ④ ④ 7

정답: ② $3\sqrt{5}$

핵심: 직사각형에서 한 점에서 네 꼭짓점까지 거리에 대한 '영국 국기 정리' $PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$ 를 쓴다.

증명 아이디어: P 에서 두 쌍의 변에 수선을 내려 거리들을 가로·세로 성분으로 분해하면, 대각으로 마주 보는 두 꼭짓점 거리 제곱의 합이 양쪽에서 같은 (가로성분²+세로성분²의 전체 합)으로 일치한다.

따라서

$$PC^2 = PB^2 + PD^2 - PA^2 = 25 + 36 - 16 = 45,$$

$$PC = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} .$$

💡 이 정리는 영국 국기(Union Jack)의 대각선 모양에서 이름을 따왔다.

Q114 정수론 (심화)

$n!$ 을 십진법으로 썼을 때 끝에 0이 정확히 100개 붙는 가장 작은 양의 정수 n 을 구하시오.

- ① ① 400
- ② ② 404
- ③ ③ 405
- ④ ④ 500

정답: ③ 405

핵심: 끝의 0의 개수는 $n!$ 에 들어 있는 소인수 5의 개수와 같고, 르장드르 공식으로 센다.

$$Z(n) = \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{25} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{125} \right\rfloor + \dots$$

(2의 개수는 항상 5의 개수보다 많아 5의 개수가 0의 개수를 결정한다.)

$$Z(400) = 80 + 16 + 3 = 99, \quad Z(405) = 81 + 16 + 3 = 100.$$

401 ~ 404는 $\lfloor n/5 \rfloor$ 가 아직 80이라 $Z = 99$ 이고, $n = 405$ 에서 처음으로 100이 된다. 따라서 가장 작은 $n = 405$.

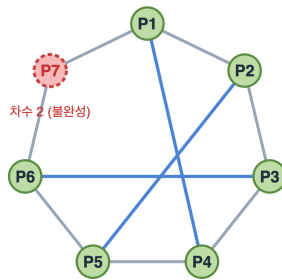
(참고로 끝의 0이 정확히 100개인 n 은 405, 406, 407, 408, 409이며, '정확히 101개'로 넘어가는 건 410이다.)

💡 이런 이유로 끝의 0 개수는 1, 2, 3, ... 모든 값을 갖지 못한다(예: 0이 정확히 5개인 $n!$ 은 존재하지 않는다 - '잃어버린 0').

Q115 그래프 이론

어느 모임에서 7 명이 서로 악수를 했는데, 각 사람이 **정확히** 3 명과 악수했다고 한다. 이런 상황이 가능한가? 그 근거로 가장 옳은 것은?

3-정규 그래프 시도 (정점 7개)



차수 합 = 7×3
= 21 (홀수)

메모:
간선 하나는
차수를 2 증가
→ 차수 합은 짝수

- ① ① 가능하다, 정칠각형 변과 대각선으로 만들 수 있다
- ② ② 불가능하다, 차수의 합 $7 \times 3 = 21$ 이 홀수이기 때문
- ③ ③ 불가능하다, 7이 소수이기 때문
- ④ ④ 가능하다, 각자 양옆과 맞은편 1명과 악수하면 된다

정답: ② 불가능하다, 차수의 합 $7 \times 3 = 21$ 이 홀수이기 때문

핵심(악수 정리): 모든 정점의 차수 합은 간선 수의 2배이므로 항상 짝수다. 각 정점의 차수가 3이고 정점이 7개면 차수 합은 $7 \times 3 = 21$ 로 홀수가 되어 2배일 수 없다. 따라서 홀수 차수를 가진 정점은 항상 짝수 개여야 하는데, 7개 모두 홀수 차수가 될 수 없다. 그러므로 불가능하다.

💡 '홀수 차수 정점의 개수는 항상 짝수' 라는 사실을 '악수 보조정리(Handshake Lemma)' 라 부른다.

Q116 비둘기집 응용

서로 다른 정수를 골라 그 중 어떤 두 수의 차가 반드시 5의 배수가 되도록 하려면, 최소 몇 개를 고르면 충분한가?

- ① ① 5
- ② ② 6
- ③ ③ 10
- ④ ④ 11

정답: ② 6

핵심: 두 수의 차가 5의 배수 \iff 두 수가 5로 나눈 나머지가 같다($a \equiv b \pmod{5}$). 나머지는 0, 1, 2, 3, 4의 다섯 종류(비둘기집) 뿐이므로, 정수를 6개 고르면 비둘기집 원리에 의해 같은 나머지를 갖는 두 수가 반드시 존재하고 그 차는 5의 배수다. 한편 5개만 고르면 각 나머지를 하나씩 골라(0, 1, 2, 3, 4) 차가 5의 배수인 쌍을 피할 수 있어 5개로는 보장되지 않는다. 따라서 답은 6.

💡 이처럼 '나머지'를 비둘기집으로 삼는 발상은 정수론 증명의 단골 도구다.

Q117 조합 (심화)

집합 $\{1, 2, \dots, 10\}$ 의 모든 부분집합(공집합 포함)에 대하여 각 부분집합의 원소 개수를 전부 더하면 그 총합은?

- ① ① 2560
- ② ② 5120
- ③ ③ 10240
- ④ ④ 5110

정답: ② 5120

핵심(이중 계산): 총합을 '원소별 기여'로 바꿔 센다. 고정된 원소 k 가 몇 개의 부분집합에 들어가는가? 나머지 9개 원소를 자유롭게 넣고 뺄 수 있으므로 2^9 개의 부분집합에 포함된다. 따라서 각 원소는 총합에 2^9 만큼 기여하고, 원소가 10개이므로

$$\text{총합} = 10 \cdot 2^9 = 10 \cdot 512 = 5120.$$

일반적으로 n 원소 집합에서는 $n \cdot 2^{n-1}$.

같은 양을 두 방식으로 세어 항등식을 얻는 '이중 계산'은 조합론의 핵심 전략이다.

Q118 정수론 (심화)

윌슨 정리에 따르면 소수 p 에 대해 $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$ 이다. 이를 이용하여 15! 을 17 로 나눈 나머지를 구하면?

- ① ① 1
- ② ② 8
- ③ ③ 15
- ④ ④ 16

정답: ① 1

핵심: 윌슨 정리에서 $16! \equiv -1 \pmod{17}$. 그런데 $16! = 16 \cdot 15!$ 이고 $16 \equiv -1 \pmod{17}$ 이므로 $-1 \equiv 16! \equiv (-1) \cdot 15! \pmod{17}$.

양변에 -1 을 곱하면 $15! \equiv 1 \pmod{17}$. 따라서 나머지는 1.

윌슨 정리는 ' $(n-1)! \equiv -1 \pmod{n}$ 일 필요충분조건은 n 이 소수' 라는 소수 판정 기준이기도 하다(실용성은 낮지만 이론적으로 우아하다).

Q119 모듈러·합동식

다음 연립 합동식을 만족하는 가장 작은 양의 정수 x 는?

$$x \equiv 2 \pmod{3}, \quad x \equiv 3 \pmod{5}, \quad x \equiv 2 \pmod{7}.$$

- ① ① 23
- ② ② 37
- ③ ③ 52
- ④ ④ 128

정답: ① 23

핵심(중국인 나머지정리): 법이 서로소(3, 5, 7)이므로 mod 105 에서 유일한 해가 있다. 먼저 $x \equiv 2 \pmod{3}$, $x \equiv 3 \pmod{5}$ 를 합치면 $x \equiv 8 \pmod{15}$ (8 은 3 으로 나뉘 2, 5 로 나뉘 3). 이제 $x = 8 + 15k$ 를 셋째 식에 대입: $8 + 15k \equiv 2 \pmod{7}$.

$15 \equiv 1, 8 \equiv 1 \pmod{7}$ 이므로 $1 + k \equiv 2$, 즉 $k \equiv 1 \pmod{7}$. 최소 $k = 1$ 이면 $x = 23$. 검사:

$23 = 3 \cdot 7 + 2, 23 = 5 \cdot 4 + 3, 23 = 7 \cdot 3 + 2$ 로 모두 성립.


이 정리는 3 - 4세기 중국 수학서 '손자산경'의 '물건 세기' 문제에서 유래했다.

Q120 다이오판티


7 원짜리와 9 원짜리 동전만으로(개수 제한 없이) 정확히 만들 수 **없는** 금액 중 가장 큰 것은? (음수 개수는 불가)

- ① ① 41
- ② ② 47
- ③ ③ 52
- ④ ④ 56

 **정답: ② 47**

 **핵심(프로베니우스 수):** 서로소인 두 자연수 a, b 로 표현 불가능한 가장 큰 수는 $ab - a - b$ 이다. $\gcd(7, 9) = 1$ 이므로 $7 \cdot 9 - 7 - 9 = 63 - 16 = 47$.

검증의 아이디어: $48 = 7 \cdot 3 + 9 \cdot 3$ 처럼 48 이상은 모두 표현 가능하고, 47 은 7, 9 의 비음수 조합으로 만들 수 없다($47 = 9 \cdot 0.5$ 각 경우 남는 수가 7의 배수가 아님). 따라서 47.

 이 문제의 일반형은 동전이 2종일 때만 깔끔한 공식이 있고, 3종 이상이면 일반 공식이 알려져 있지 않은 미해결 영역이다('치킨 너깃 수' 라고도 부른다).

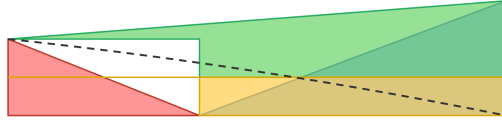
고등/올림피아드 사고력

총 40문제 · 문제와 정답·풀이 포함

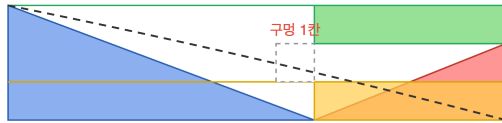
Q121 재미 두뇌

직각삼각형을 4 조각으로 나눈 뒤 재배치했더니 같은 외곽 안에 빈 칸 1개가 생겼다. 조각의 넓이는 그대로인데 어떻게 칸이 '사라졌'을까? 가장 옳은 설명은?

위: 빈틈 없음 / 아래: 가운데 1칸 구멍



밑변 13, 높이 5 (빈틈 없음)



자리바꿈 → 가운데 1칸 구멍

- ① ① 재배치하면 실제로 넓이가 1만큼 줄어든다
- ② ② 빨강·파랑 삼각형의 기울기가 $\frac{2}{5} = 0.4$ 와 $\frac{3}{8} = 0.375$ 로 달라, 전체 '빗변'이 직선이 아니다
- ③ ③ 조각을 뒤집을 때 두께가 변한다
- ④ ④ 큰 도형이 진짜 직각삼각형이라서 생기는 필연적 오차다

정답: ② 빨강·파랑 삼각형의 기울기가 $\frac{2}{5} = 0.4$ 와 $\frac{3}{8} = 0.375$ 로 달라, 전체 '빗변'이 직선이 아니다

핵심(착시의 정체): 두 직각삼각형의 빗변 기울기가 $\frac{2}{5} = 0.4$ 와 $\frac{3}{8} = 0.375$ 로 미세하게 다르다. 따라서 전체 외곽의 '빗변'은 실제로는 직선이 아니라 위 배치에서는 살짝 안쪽으로 휘 사변형, 아래 배치에서는 바깥으로 휘 사변형이다. 두 흰 영역의 넓이 차이가 정확히 1칸이며, 그것이 구멍처럼 보일 뿐 조각 넓이의 합은 변하지 않는다(불변량은 넓이). 넓이는 보존되고, 변하는 것은 '직선처럼 보이던' 경계의 실제 모양이다.

이 그림은 '커리의 역설(Curry's Paradox)' 또는 '사라지는 사각형' 퍼즐로 유명하며, 5, 8, 13 같은 피보나치 수가 등장하는 것이 우연이 아니다.

Q122 극값 문제

양의 실수 x, y, z 가 $x + y + z = 1$ 을 만족할 때,

$$\frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{9}{z}$$

의 최솟값은?

- ① ① 14
- ② ② 36
- ③ ③ 49
- ④ ④ 100

정답: ② 36

핵심(코시-슈바르츠 / 티투 보조정리): $\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \frac{a_3^2}{b_3} \geq \frac{(a_1 + a_2 + a_3)^2}{b_1 + b_2 + b_3}$ 를 $a_i = 1, 2, 3, b_i = x, y, z$ 에 적용하면

$$\frac{1^2}{x} + \frac{2^2}{y} + \frac{3^2}{z} \geq \frac{(1 + 2 + 3)^2}{x + y + z} = \frac{36}{1} = 36.$$

등호는 $\frac{1}{x} = \frac{2}{y} = \frac{3}{z}$ 즉 $x:y:z = 1:2:3$ 일 때, 곧 $x = \frac{1}{6}, y = \frac{2}{6}, z = \frac{3}{6}$ 에서 성립한다. 따라서 최솟값은 36.

티투 보조정리는 코시-슈바르츠 부등식의 'Engel 형태'로, 분수 합의 하한을 구할 때 매우 강력하다.

Q123 불변량과 단조량

4 × 4 슬라이딩 퍼즐(15퍼즐)에서, 빈 칸은 오른쪽 아래 구석에 그대로 있고 14 번과 15 번 타일만 서로 바뀐 상태가 주어졌다. 빈 칸을 다시 구석에 둔 채 모든 타일을 올바른 순서로 맞출 수 있는가?

4×4 슬라이드 퍼즐

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	빈칸

메모
 슬라이드 1회 = 빈칸과 이웃 타일의 자리 맞바꿈(전위)
 * 14·15 자리 뒤바꿈

- ① ① 가능하다, 충분히 많이 움직이면 된다
- ② ② 불가능하다, 단일 전위는 홀치환이라 빈칸 복귀와 양립하지 않는다
- ③ ③ 가능하다, 14와 15를 시계방향으로 돌리면 된다
- ④ ④ 불가능하다, 14와 15가 서로 인접하지 않기 때문

정답: ② 불가능하다, 단일 전위는 홀치환이라 빈칸 복귀와 양립하지 않는다

핵심(순열 패리티 불변량): 한 번의 슬라이드는 빈 칸과 이웃 타일의 위치를 맞바꾸는 '전위(transposition)'이며, 전위 한 번마다 타일 배열의 순열 부호가 뒤집힌다. 빈 칸이 원래 자리(구석)로 돌아오려면 상·하·좌·우 이동 수가 균형을 이뤄 짝수 번 움직여야 한다 (격자를 체스판처럼 색칠하면 빈칸은 짝수 번 이동해야 같은 색 칸으로 복귀). 따라서 도달 가능한 타일 배열은 항상 짝치환(부호 +1)뿐이다. 그런데 14와 15만 바꾸는 것은 단 한 번의 전위 = 홀치환(부호 -1)이므로 불변량과 모순된다. 그러므로 절대 맞출 수 없다.

💡 이 사실은 1880년대 샘 로이드가 '14-15 퍼즐'에 상금 \$1000을 걸었지만 아무도 못 톤 유명한 일화의 수학적 정체다.

Q124 재미 두뇌

어떤 가정에 두 명의 자녀가 있고, 각 자녀가 아들일 확률과 딸일 확률은 각각 $\frac{1}{2}$ 로 서로 독립이다. '적어도 한 명은 아들'이라는 사실을 알았을 때, 두 자녀가 모두 아들일 확률은?

두 자녀 표본공간

첫째 \ 둘째	남	녀
남	(남,남) 1/4	(남,녀) 1/4
녀	(녀,남) 1/4	(녀,녀) 1/4

적어도 한 명 아들
 둘 다 아들

- ① ① $\frac{1}{4}$
- ② ② $\frac{1}{3}$
- ③ ③ $\frac{1}{2}$
- ④ ④ $\frac{2}{3}$

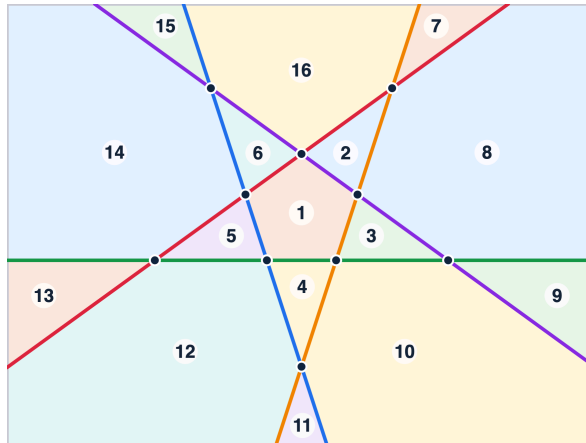
정답: ② $\frac{1}{3}$

핵심: 조건부확률은 '남은 표본'의 비율이다. 표본공간 {남남, 남녀, 녀남, 녀녀}는 각 확률 $\frac{1}{4}$. '적어도 한 명 아들' 조건은 녀녀를 제외한 3가지로 좁혀진다. 그중 '모두 아들'은 남남 1가지뿐이므로 $\frac{1}{3}$. 한 명을 꼭 집어 '아들'이라 한 것이 아니라 '적어도 한 명'이라는 정보임에 주의(직관적 답 $\frac{1}{2}$ 는 틀림).

💡 여기에 '그 아들이 화요일에 태어났다'는 정보를 추가하면 답이 $\frac{13}{27}$ 로 바뀌는 유명한 '화요일에 태어난 아들' 역설로 확장된다.

Q125 귀납법

평면 위에 어떤 두 직선도 평행하지 않고 어떤 세 직선도 한 점에서 만나지 않는('일반위치') n 개의 직선이 평면을 나누는 영역의 최대 개수를 $R(n)$ 이라 하자. 점화식 $R(n) = R(n-1) + n$ 을 귀납적으로 세워 $R(5)$ 를 구하면?



- ① ①11
- ② ②14
- ③ ③16
- ④ ④22

정답: ③16

핵심: 새 직선 한 개를 추가할 때 늘어나는 영역 수를 센다. n 번째 직선은 기존 $n-1$ 개 직선과 서로 다른 $n-1$ 개 점에서 만나므로 그 직선은 n 개의 조각으로 나뉘고, 각 조각이 기존 영역을 하나씩 둘로 가른다 → 영역이 n 개 증가. 따라서 $R(0) = 1$, $R(n) = R(n-1) + n$. 풀면 $R(n) = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$. $R(5) = 1 + \frac{5 \cdot 6}{2} = 1 + 15 = 16$.

💡 같은 논리를 평면이 아닌 원판 경계 위 점들을 잇는 현(弦)에 적용하면, 점 개수에 따라 1, 2, 4, 8, 16로 가다가 6번째에서 31로 꺾이는 유명한 '원분할의 합정' 수열이 나온다.

Q126 정수론

두 자연수 a, b 에 대하여 $\gcd(a, b) = 6$, $\text{lcm}(a, b) = 36$ 이다. $a = 12$ 일 때 b 의 값은?

- ① ①9
- ② ②18
- ③ ③24
- ④ ④36

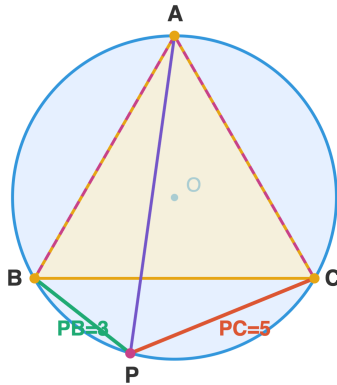
정답: ②18

핵심: 항등식 $\gcd(a, b) \cdot \text{lcm}(a, b) = ab$. $6 \cdot 36 = 12 \cdot b \rightarrow 216 = 12b \rightarrow b = 18$. **검산:** $\gcd(12, 18) = 6$, $\text{lcm}(12, 18) = 36$. 모두 성립.

💡 이 곱셈 항등식은 소인수분해에서 각 소수의 지수에 대해 $\min + \max =$ 두 지수의 합이 성립하기 때문에 나온다.

Q127 올림피아드 기하

한 원에 내접하는 정삼각형 ABC 가 있다. 점 A 를 포함하지 않는 호 BC 위의 임의의 점 P 에 대하여 항상 $PA = PB + PC$ 가 성립한다(톨레미 정리). $PB = 3, PC = 5$ 일 때 PA 의 값은?



- ① $\sqrt{34}$
- ② 27
- ③ 38
- ④ 415

정답: ③8

핵심: 원에 내접하는 사각형 $ABPC$ 에 톨레미 정리 $PA \cdot BC = PB \cdot AC + PC \cdot AB$ 를 적용한다. 정삼각형이므로 $AB = BC = CA$ 이고 양변을 그 길이로 나누면 $PA = PB + PC = 3 + 5 = 8$.

💡 톨레미 정리는 코사인 덧셈정리를 도형으로 증명하는 도구로도 쓰인다.

Q128 함수방정식

유리수 전체에서 정의된 함수 $f: Q \rightarrow Q$ 가 모든 유리수 x, y 에 대하여 $f(x + y) = f(x) + f(y)$ 를 만족하고 $f(1) = 3$ 이다. $f\left(\frac{5}{2}\right)$ 의 값은?

- ① $\frac{15}{2}$
- ② $\frac{5}{2}$
- ③ 36
- ④ $\frac{17}{2}$

정답: ① $\frac{15}{2}$

핵심: 코시 함수방정식은 유리수에서 반드시 $f(x) = cx$ 꼴이다. 먼저 $f(0) = 0$, 정수 n 에 대해 $f(n) = nf(1)$. 또 $f(1) = f\left(q \cdot \frac{1}{q}\right) = qf\left(\frac{1}{q}\right)$ 이므로 $f\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{f(1)}{q}$, 따라서 $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}f(1)$. $c = f(1) = 3$ 이므로 $f\left(\frac{5}{2}\right) = 3 \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{2}$.

💡 실수 전체로 정의역을 넓히면 연속성 같은 조건이 없을 때 측정 불가능한 '괴물 해'가 무수히 존재한다(하멜 기저).

Q129 조합

서로 다른 5통의 편지를 각각 주인이 정해진 5개의 봉투에 무작위로 하나씩 넣었다. 모든 편지가 자기 봉투가 아닌 곳에 들어갈 경우의 수(교란순열 D_5)는?

- ① ①40
- ② ②44
- ③ ③53
- ④ ④120

정답: ②44

핵심: 어떤 원소도 제자리에 있지 않은 순열(교란순열)의 수. 점화식 $D_n = (n - 1)(D_{n-1} + D_{n-2})$, $D_1 = 0$, $D_2 = 1$.

$D_3 = 2(1 + 0) = 2$, $D_4 = 3(2 + 1) = 9$, $D_5 = 4(9 + 2) = 44$. 또는 포함배제로 $D_5 = 5! \left(1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} \right) = 44$.

n 이 커지면 모든 편지가 어긋날 확률 $D_n/n!$ 이 $\frac{1}{e} \approx 0.3679$ 로 수렴한다.

Q130 정수론

소수 $p = 17$ 에 대하여 윌슨 정리는 $(p - 1)! \equiv -1 \pmod{p}$ 임을 말한다. 이를 이용하여 $15!$ 을 17 로 나눈 나머지를 구하면?

- ① ①1
- ② ②8
- ③ ③15
- ④ ④16

정답: ①1

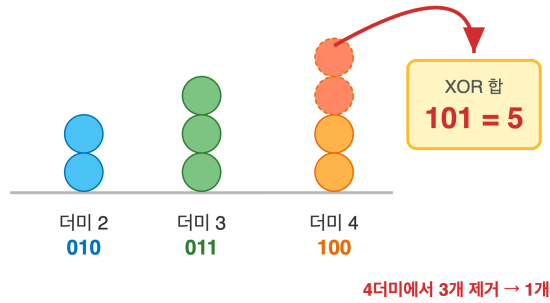
핵심: 윌슨 정리에서 $16! \equiv -1 \pmod{17}$. 그런데 $16! = 16 \cdot 15!$ 이고 $16 \equiv -1 \pmod{17}$ 이므로 $16! \equiv (-1) \cdot 15! \pmod{17}$. 따라서 $-15! \equiv -1 \pmod{17} \rightarrow 15! \equiv 1 \pmod{17}$. 나머지는 1.

윌슨 정리의 역도 성립한다: $(n - 1)! \equiv -1 \pmod{n}$ 이면 n 은 반드시 소수다. 그래서 이 식 자체가 소수 판정의 정의가 될 수 있다.

Q131 게임 이론

돌 더미가 각각 2, 3, 4개인 님(Nim) 게임을 한다. 두 사람이 번갈아 한 더미를 골라 1개 이상 가져가며, 마지막 돌을 가져가는 사람이 이긴다. 선공이 이기기 위한 첫 수로 옳은 것은? (이진 XOR 이용)

님(Nim) 게임 - XOR



- ① ①2 더미에서 1개
- ② ②3 더미에서 2개
- ③ ③4 더미에서 3개
- ④ ④선공은 이길 수 없다

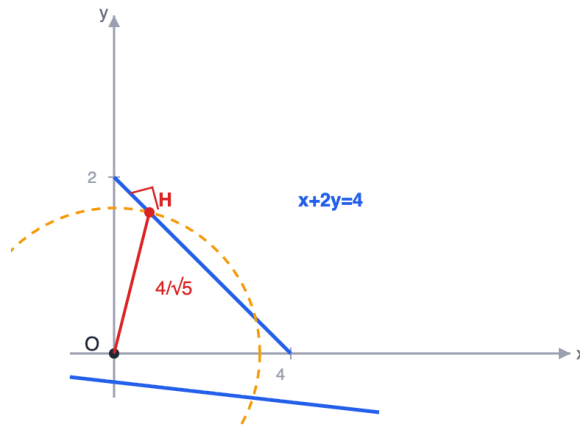
정답: ③4 더미에서 3개

핵심: 님함(이진 XOR) $2 \oplus 3 \oplus 4$ 를 계산한다. $010 \oplus 011 \oplus 100 = 101 = 5 \neq 0$ 이므로 선공 필승. 이기려면 님함을 0으로 만들어야 한다. 각 더미를 (현재값) $\oplus 5$ 와 비교하면, $4 \oplus 5 = 1 < 4$ 이므로 4 더미를 1개로 줄이면 된다(즉 3개 제거). 그러면 (2, 3, 1), 님함 $2 \oplus 3 \oplus 1 = 0$ 이 되어 상대를 패배 위치로 몬다.

스프라그-그런디 정리에 의해 모든 공정 조합게임은 적당한 크기의 단일 님 더미와 동치이며, 이 XOR 규칙이 그 모든 게임 분석의 뼈대가 된다.

Q132 극값

실수 x, y 가 $x + 2y = 4$ 를 만족할 때 $x^2 + y^2$ 의 최솟값은? (코시-슈바르츠 부등식 이용)



- ① $\frac{16}{5}$
- ② 24
- ③ $\frac{8}{5}$
- ④ 45

정답: ① $\frac{16}{5}$

핵심: 코시-슈바르츠 $(x^2 + y^2)(1^2 + 2^2) \geq (x \cdot 1 + y \cdot 2)^2$. 우변은 $(x + 2y)^2 = 16$ 이므로 $5(x^2 + y^2) \geq 16 \rightarrow x^2 + y^2 \geq \frac{16}{5}$. 등

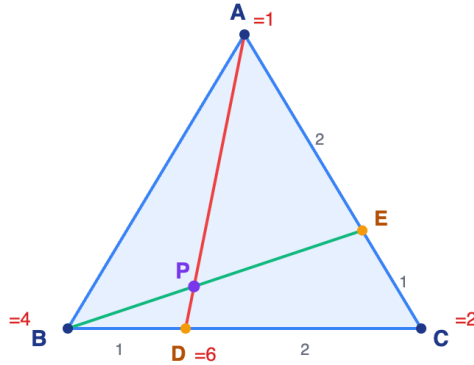
호는 $\frac{x}{1} = \frac{y}{2}$ 일 때, 즉 $x = \frac{4}{5}$, $y = \frac{8}{5}$. 기하적으로는 $x^2 + y^2$ 이 원점에서 직선까지 거리의 제곱이고, 그 거리는 $\frac{|-4|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$, 제곱하면

$\frac{16}{5}$.

💡 코시-슈바르츠의 등호 조건 '두 벡터가 평행'은 사실 점-직선 거리 공식과 완전히 같은 내용을 대수적으로 말한 것이다.

Q133 올림피아드 기하

삼각형 ABC 에서 점 D 는 변 BC 위 $BD:DC = 1:2$ 인 점, 점 E 는 변 CA 위 $CE:EA = 1:2$ 인 점이다. 두 체바선 AD 와 BE 의 교점을 P 라 할 때 $AP:PD$ 는? (질량점 기법 이용)



- ① ①2: 1
- ② ②3: 1
- ③ ③6: 1
- ④ ④5: 2

정답: ③6: 1

핵심: 질량점은 분점 비의 '역수'로 무게를 준다. $BD:DC = 1:2$ 이므로 무게 $m_B:m_C = DC:BD = 2:1$. $CE:EA = 1:2$ 이므로 $m_C:m_A = EA:CE = 2:1$. C 를 공통으로 맞추려 $m_C = 2$ 로 두면 $m_B = 4$, $m_A = 1$. D 는 B, C 의 평형점이라 $m_D = m_B + m_C = 6$. 체바선 AD 위에서 P 는 A 와 D 의 평형점이므로 $AP:PD = m_D:m_A = 6:1$.

💡 질량점 기법은 지렛대 평형(모멘트)이라는 물리 원리를 도형 비례에 빌려 온 것으로, 복잡한 체바선 교점 비를 연립방정식 없이 한눈에 본다.

Q134 정수론 (심화)

13으로 나눈 $12!$ 의 나머지를 구하라. (윌슨 정리 이용)

- ① ① 1
- ② ② 6
- ③ ③ 11
- ④ ④ 12

정답: ④ 12

핵심: 소수 p 에 대해 윌슨 정리 $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$ 가 성립한다. $p = 13$ 이므로 $12! \equiv -1 \equiv 12 \pmod{13}$. 따라서 나머지는 12.


💡 윌슨 정리의 역도 성립하여, $(n-1)! \equiv -1 \pmod{n}$ 은 n 이 소수일 필요충분조건이다.

Q135 모듈러·합동식

3으로 나누면 2, 5로 나누면 3, 7로 나누면 2가 남는 가장 작은 양의 정수는? (중국인 나머지 정리)

- ① 23
- ② 37
- ③ 48
- ④ 68

 **정답: ① 23**


 **핵심:** $x \equiv 2 \pmod{3}$ 와 $x \equiv 2 \pmod{7}$ 을 합치면 $x \equiv 2 \pmod{21}$. 후보 2, 23, 44, ... 중 $x \equiv 3 \pmod{5}$ 를 만족하는 최소값을 찾는다. $2 \equiv 2, 23 \equiv 3 \pmod{5}$ 이므로 23. **검산:** $23 = 3 \cdot 7 + 2, 23 = 5 \cdot 4 + 3, 23 = 7 \cdot 3 + 2$ 모두 성립.

Q136 극값 문제

$x > 0$ 일 때 $x + \frac{9}{x}$ 의 최솟값은? (산술-기하 평균)

- ① 3
- ② 6
- ③ 9
- ④ 최솟값이 존재하지 않는다

 **정답: ② 6**

 **핵심:** 산술-기하 평균 부등식에 의해 $x + \frac{9}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{9}{x}} = 2\sqrt{9} = 6$. 등호는 $x = \frac{9}{x}$, 즉 $x = 3$ 일 때 성립하므로 최솟값은 6.

Q137 확률 (조건부·기하)

유병률 1% 인 질병이 있다. 검사는 병이 있으면 99% 확률로 양성, 병이 없어도 5% 확률로 양성(위양성)이 나온다. 양성 판정을 받은 사람이 실제로 병에 걸렸을 확률은? (베이즈 정리)



- ① ① 약 1%
- ② ② 약 16.7%
- ③ ③ 약 50%
- ④ ④ 약 99%

정답: ② 약 16.7%

핵심(베이즈 정리): $P(\text{병} | +) = \frac{P(+ | \text{병})P(\text{병})}{P(+)}$. 분자 = $0.99 \times 0.01 = 0.0099$. 분모

$P(+)$ = $0.99 \times 0.01 + 0.05 \times 0.99 = 0.0099 + 0.0495 = 0.0594$. 따라서 $\frac{0.0099}{0.0594} = \frac{1}{6} \approx 16.7\%$. 검사 정확도가 높아도 유병률이 낮으면 양성 판정의 대부분이 위양성임에 주의.

💡 이 직관 오류(기저율 무시, base rate fallacy)는 의료 통계 해석에서 흔한 실수의 원인이다.

Q138 불변량과 단조량

빨강 13, 초록 15, 파랑 17 마리의 카멜레온이 있다. 서로 다른 색의 두 마리가 만나면 둘 다 나머지 한 색으로 변한다. 모든 카멜레온을 같은 색으로 만들 수 있는가?

색별 개수와 mod 3



변환 규칙



(빨강, 초록) 만남 → 둘 다 파랑

- ① ① 모두 빨강 가능
- ② ② 모두 초록 가능
- ③ ③ 모두 파랑 가능
- ④ ④ 어떤 색으로도 불가능

정답: ④ 어떤 색으로도 불가능

핵심 불변량: 두 색 개수의 차를 3으로 나눈 나머지는 보존된다. 한 번의 변환에서 두 색은 1씩 줄고 한 색은 2늘어, 임의의 두 색 개수 차는 0 또는 ± 3 만큼만 변하므로 (mod 3)으로 불변이다. 처음 개수는 $13 \equiv 1, 15 \equiv 0, 17 \equiv 2 \pmod{3}$ 으로 셋이 모두 다르다. 모두 한 색이 되려면 나머지 두 색의 개수가 0으로 같아야 하니 그 두 색 개수 차가 $\equiv 0 \pmod{3}$ 이어야 하는데, 어떤 두 색도 (mod 3)이 같지 않으므로 불가능.

💡 이 '색 개수 차 mod 3' 불변량은 카멜레온 문제의 고전적 풀이다.

Q139 다이오판티

$x^2 - y^2 = 60$ 을 만족하는 양의 정수쌍 (x, y) 의 개수는?

- ① ① 1
- ② ② 2
- ③ ③ 3
- ④ ④ 4

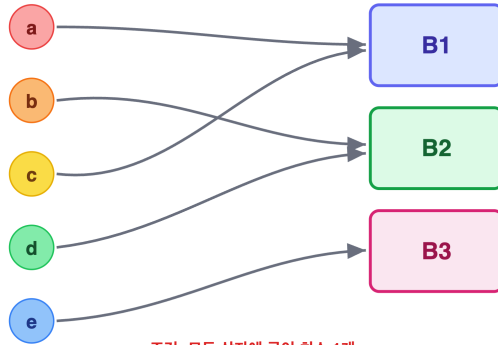
정답: ② 2

핵심: $(x - y)(x + y) = 60$. x, y 가 정수이려면 $x - y$ 와 $x + y$ 는 같은 홀짝성을 가져야 하는데, 곱 60이 짝수이므로 둘 다 짝수여야 한다. $x - y = 2a, x + y = 2b$ ($a < b$) 로 놓으면 $4ab = 60$, 즉 $ab = 15$. 가능한 $(a, b) = (1, 15), (3, 5)$ 두 가지뿐이고, 각각 $(x, y) = (16, 14), (8, 2)$ 로 모두 양의 정수다. 따라서 2 쌍.

Q140 조합 (심화)

서로 다른 공 5 개를 서로 다른 상자 3 개에 넣을 때, 빈 상자가 하나도 없는 경우의 수는? (포함배제)

공 5개 → 상자 3개



- ① ① 90
- ② ② 150
- ③ ③ 180
- ④ ④ 243

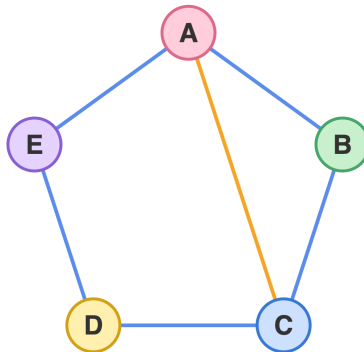
정답: ② 150

핵심: 전체 배치 3^5 에서 비어 있는 상자가 생기는 경우를 포함배제로 뺀다.

$$3^5 - \binom{3}{1}2^5 + \binom{3}{2}1^5 = 243 - 3 \cdot 32 + 3 \cdot 1 = 243 - 96 + 3 = 150. \text{ (이는 전사함수의 개수 } 3!S(5, 3) = 6 \cdot 25 = 150 \text{ 과 일치한다.)}$$

Q141 그래프 이론

아래 그래프에서 모든 간선을 정확히 한 번씩 지나는 오일러 경로가 존재하는가? 정점 차수로 판정하라.



- ① ① 오일러 경로가 존재하지 않는다
- ② ② 오일러 회로가 존재한다
- ③ ③ A 와 C 를 양 끝으로 하는 오일러 경로가 존재한다
- ④ ④ B 에서 시작하는 경로만 가능하다

정답: ③ A 와 C 를 양 끝으로 하는 오일러 경로가 존재한다

핵심: 연결그래프에서 오일러 경로는 홀수 차수 정점이 0 개(회로) 또는 정확히 2 개일 때만 존재하며, 후자에서는 그 두 정점이 경로의 양 끝이 된다. 차수는 $\deg A = 3, \deg C = 3$ 이고 $\deg B = \deg D = \deg E = 2$. 홀수 차수 정점이 A, C 둘뿐이므로 A 와 C 를 양 끝으로 하는 오일러 경로가 존재한다. 예: $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow A \rightarrow C$ (간선 6개를 모두 한 번씩 사용).

Q142 비둘기집 응용

임의의 정수 a_1, a_2, \dots, a_7 에 대해, 연속한 몇 개의 합 $a_i + a_{i+1} + \dots + a_j$ 가 7의 배수가 되는 (i, j) 가 반드시 존재한다. 이 명제는?

- ① ① 항상 참
- ② ② 일곱 수가 모두 같을 때만 참
- ③ ③ 거짓 (반례가 존재한다)
- ④ ④ 일곱 수가 모두 홀수일 때만 참

정답: ① 항상 참

핵심(비둘기집): 부분합 $S_0 = 0, S_k = a_1 + \dots + a_k (k = 1, \dots, 7)$ 의 8 개 값을 7로 나눈 나머지를 본다. 나머지는 $\{0, 1, \dots, 6\}$ 의 7 종류뿐이므로 비둘기집 원리에 의해 $S_p \equiv S_q (p < q)$ 인 두 값이 존재한다. 그러면 $S_q - S_p = a_{p+1} + \dots + a_q$ 가 7의 배수다. 따라서 항상 참.

Q143 게임 이론 (Combinatorial)

두 무더기에 돌이 (5, 8) 개 있다. 한 수에 (⌋) 한 무더기에서 원하는 만큼 가져가거나, (⌋) 두 무더기에서 같은 개수만큼 가져갈 수 있다. 마지막 돌을 가져가는 사람이 이긴다. 선공의 최선의 결과는? (위토프 게임)



- ① ① 선공 필패
- ② ② 선공 필승, (4, 7) 로 이동
- ③ ③ 선공 필승, (3, 5) 로 이동
- ④ ④ 항상 무승부

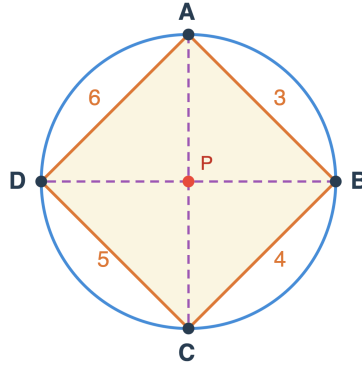
정답: ② 선공 필승, (4, 7) 로 이동

핵심: 위토프 게임의 패배 위치(P-포지션)는 $(\lfloor n\varphi \rfloor, \lfloor n\varphi^2 \rfloor)$, $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 로 (0, 0), (1, 2), (3, 5), (4, 7), (6, 10), ... 이다. (5, 8) 은 이 목록에 없으므로 선공이 이기는 위치다. 두 무더기에서 1 개씩 가져가면 (4, 7) 이 되고 이는 P-포지션이므로, 이후 상대가 어떤 수를 두어도 다시 P-포지션으로 되돌릴 수 있어 선공이 승리한다.

💡 P-포지션의 두 좌표 차는 0, 1, 2, ... 로 황금비(비티 수열)와 직접 연결된다.

Q144 올림피아드 기하

원에 내접하는 사각형 $ABCD$ 에서 $AB = 3$, $BC = 4$, $CD = 5$, $DA = 6$ 이다. 두 대각선 길이의 곱 $AC \cdot BD$ 의 값은? (톨레미 정리)



- ① ① 27
- ② ② 35
- ③ ③ 39
- ④ ④ 42

정답: ③ 39

핵심(톨레미 정리): 원에 내접하는 사각형에서 $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA$ 가 성립한다. 대입하면 $AC \cdot BD = 3 \cdot 5 + 4 \cdot 6 = 15 + 24 = 39$.

💡 톨레미 부등식은 일반 사각형에서 $AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + BC \cdot DA$ 이고, 등호는 내접사각형일 때만 성립한다.

Q145 점화식

수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 2$, $a_2 = 6$ 이고 $a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2}$ ($n \geq 3$) 을 만족한다. 일반항 a_n 은?

- ① ① $2 \cdot 3^{n-1}$
- ② ② $3^n - 1$
- ③ ③ $2^n + (-1)^n$
- ④ ④ $\frac{3^n + 1}{2}$

정답: ① $2 \cdot 3^{n-1}$

핵심: 선형 점화식은 특성방정식의 근으로 일반항을 잡는다. 특성방정식 $x^2 - 4x + 3 = 0$ 의 근은 $x = 1$, $x = 3$ 이므로 $a_n = A \cdot 1^n + B \cdot 3^n = A + B \cdot 3^n$. 초기조건: $a_1 = A + 3B = 2$, $a_2 = A + 9B = 6$. 두 식을 빼면 $6B = 4$ 이지만 다시 정리하면 $A + 3B = 2$, $A + 9B = 6 \Rightarrow 6B = 4 \dots$ 실제로 $9B - 3B = 6B$, $6 - 2 = 4$ 이므로 $B = \frac{2}{3}$, $A = 0$. 따라서 $a_n = \frac{2}{3} \cdot 3^n = 2 \cdot 3^{n-1}$.
검산: $a_1 = 2$, $a_2 = 6$, $a_3 = 18$ 이고 $4 \cdot 6 - 3 \cdot 2 = 18 \checkmark$.

💡 근이 1 이면 상수항이 살아남고, 근이 중복되면 $n \cdot r^n$ 꼴 항이 추가된다.

Q146 함수방정식 (입문)

모든 실수 x, y 에 대해 $f(x + y) = f(x) + f(y)$ 를 만족하는 함수 f 가 $f(3) = 12$ 일 때, $f(7)$ 의 값은?

- ① ① 21
- ② ② 24
- ③ ③ 28
- ④ ④ 35

정답: ③ 28

핵심: 코시 방정식 $f(x + y) = f(x) + f(y)$ 에서 정수·유리수 점은 $f(n) = n f(1)$ 로 강제된다. $\forall y = x$ 를 반복하면 임의의 양의 정수 n 에 대해 $f(nx) = n f(x)$. 특히 $f(3) = 3 f(1) = 12$ 이므로 $f(1) = 4$. 따라서 $f(7) = 7 f(1) = 7 \cdot 4 = 28$.

💡 연속성이나 단조성 같은 약한 조건만 추가하면 코시 방정식의 해는 반드시 $f(x) = cx$ 꼴로 확정된다. 그 조건이 없으면 (선택공리 아래) 괴상한 비선형 해도 존재한다.

Q147 점화식

수열이 $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + a_n}$ 으로 정의될 때 a_{10} 의 값은?

- ① ① $\frac{1}{9}$
- ② ② $\frac{1}{10}$
- ③ ③ $\frac{1}{11}$
- ④ ④ $\frac{1}{55}$

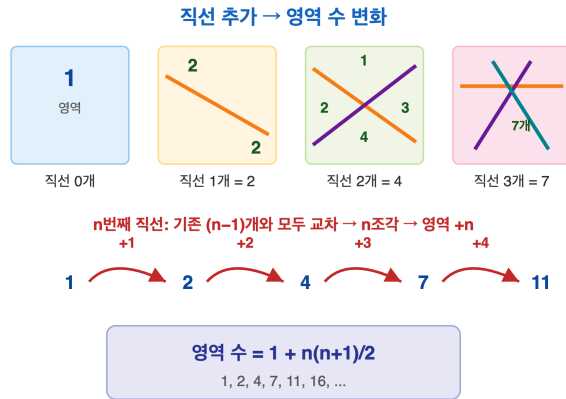
정답: ② $\frac{1}{10}$

핵심: 역수를 취하면 비선형 점화식이 등차수열로 선형화된다. n 양변의 역수를 취하면 $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1 + a_n}{a_n} = \frac{1}{a_n} + 1$. 따라서 $\left\{ \frac{1}{a_n} \right\}$ 은 공차 1 인 등차수열이고 $\frac{1}{a_1} = 1$ 이므로 $\frac{1}{a_n} = n$, 즉 $a_n = \frac{1}{n}$. 그러므로 $a_{10} = \frac{1}{10}$.

💡 $x \mapsto \frac{x}{1+x}$ 같은 일차분수변환(모비우스 변환)은 거의 항상 적절한 치환으로 선형화할 수 있다.

Q148 조합 (심화)

평면 위에 직선 10 개를 그릴 때(어느 두 직선도 평행하지 않고, 어느 세 직선도 한 점에서 만나지 않음), 평면이 나뉘는 영역의 최대 개수는?



- ① ① 46
- ② ② 55
- ③ ③ 56
- ④ ④ 66

정답: ③ 56

핵심: n 번째 직선은 앞선 $n-1$ 개와 모두 만나 n 개의 조각으로 나뉘고, 각 조각이 영역을 하나씩 추가한다. n 영역 수를 R_n 이라 하면 $R_0 = 1, R_n = R_{n-1} + n$. 따라서 $R_n = 1 + (1 + 2 + \dots + n) = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$. $n = 10$ 이면

$$R_{10} = 1 + \frac{10 \cdot 11}{2} = 1 + 55 = 56.$$

💡 이 수 $1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2}$ 는 직선 배열의 '레이저 수열'로, 평면에서 점·선이 만드는 조합 기하의 출발점이다.

Q149 귀납법

$\sum_{k=1}^5 k \cdot k!$ 의 값은? (단 $k! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k$)

- ① ① 119
- ② ② 719
- ③ ③ 720
- ④ ④ 5039

정답: ② 719

핵심: $k \cdot k! = (k+1)! - k!$ 라는 망원(telescoping) 항등식을 귀납적으로 활용한다. $(k+1)! - k! = k!(k+1-1) = k \cdot k!$ 이

므로 $\sum_{k=1}^n k \cdot k! = \sum_{k=1}^n [(k+1)! - k!] = (n+1)! - 1!$. n 즉 합은 $(n+1)! - 1$. (귀납법으로도: $n=1$ 일 때 $1 = 2! - 1$ 성립, 가정

후 $n \rightarrow n+1$ 에서 $(n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)! = (n+2)! - 1$ ✓.) $n = 5: 6! - 1 = 720 - 1 = 719$.

💡 $\sum k \cdot k! = (n+1)! - 1$ 은 계승의 '자리수 진법(factorial base)'에서 가장 큰 n 자리 수가 $(n+1)! - 1$ 임을 뜻한다.

Q150 함수방정식 (입문)

0 이 아닌 모든 실수 x 에 대해 $f(x) - 2f\left(\frac{1}{x}\right) = x$ 를 만족하는 함수 f 가 있다. $f(2)$ 의 값은?

- ① ① -1
- ② ② 1
- ③ ③ $-\frac{3}{2}$
- ④ ④ $-\frac{1}{3}$

정답: ① -1

핵심: x 와 $\frac{1}{x}$ 를 서로 바꾼 두 식을 연립하여 $f(x)$ 를 소거 없이 풀어낸다. 주어진 식 $f(x) - 2f(1/x) = x \dots (1)$. $x \rightarrow 1/x$ 대

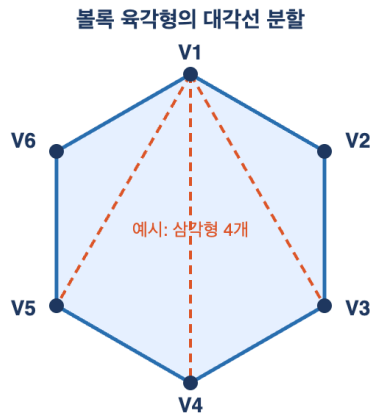
입: $f(1/x) - 2f(x) = \frac{1}{x} \dots (2)$. $(1) + 2 \times (2)$: $f(x) - 2f(1/x) + 2f(1/x) - 4f(x) = x + \frac{2}{x}$, 즉 $-3f(x) = x + \frac{2}{x}$. 따라서

$$f(x) = -\frac{1}{3}\left(x + \frac{2}{x}\right) = -\frac{x^2 + 2}{3x}. \quad f(2) = -\frac{4 + 2}{6} = -1.$$

💡 '미지 함수가 서로 다른 인수로 두 번 나타나면, 인수를 치환해 또 하나의 방정식을 만들어 연립한다'는 함수방정식의 표준 전략이다.

Q151 조합 (심화)

볼록 육각형(꼭짓점 6개)의 내부를 서로 교차하지 않는 대각선으로 나누어 삼각형 4개로 분할하는 방법의 수는? (꼭짓점에 번호가 매겨져 있어 회전·반사를 서로 다른 것으로 본다.)



- ① ① 12
- ② ② 14
- ③ ③ 16
- ④ ④ 42

정답: ② 14

핵심: 볼록 $(n + 2)$ 각형의 삼각분할 수는 카탈란 수 $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$. 육각형은 $n = 4$ 이므로 $C_4 = \frac{1}{5} \binom{8}{4} = \frac{70}{5} = 14$.

💡 카탈란 수는 균형 잡힌 괄호, 이진트리, 격자경로 등 수십 가지 문제에서 동시에 등장한다.

Q152 정수론 (심화)

100! 을 십진법으로 나타냈을 때 끝에 연속으로 나오는 0의 개수는?

- ① ① 20
- ② ② 24
- ③ ③ 25
- ④ ④ 26

정답: ② 24

핵심: 끝의 0 개수는 100! 의 소인수분해에서 5의 지수와 같다(2의 지수가 더 크므로). 르장드르 공식으로

$$\sum_{k \geq 1} [100/5^k] = [100/5] + [100/25] = 20 + 4 = 24.$$

💡 일반적으로 $n!$ 에 들어있는 소수 p 의 지수는 $\frac{n - s_p(n)}{p-1}$ 로, $s_p(n)$ 은 n 의 p 진법 자릿수 합이다.

Q153 모듈러·합동식

$2^n \equiv 1 \pmod{11}$ 을 만족하는 가장 작은 양의 정수 n (즉 11을 법으로 한 2의 위수)은?

- ① ① 4
- ② ② 5
- ③ ③ 10
- ④ ④ 11

정답: ③ 10

핵심: 거듭제곱을 차례로 계산한다. $2^4 \equiv 5, 2^5 \equiv 10 \equiv -1 \pmod{11}$ 이므로 $2^{10} \equiv 1$. 위수는 $\varphi(11) = 10$ 의 약수여야 하는데 $2^1, 2^2, 2^5$ 모두 1이 아니므로 위수는 10. 즉 2는 11의 원시근.

💡 위수가 $p-1$ 인 수를 원시근이라 하며, 11에는 원시근이 $\varphi(10) = 4$ 개 있다.

Q154 극값 문제

삼각형의 세 내각 A, B, C 에 대해 $\sin A + \sin B + \sin C$ 가 가질 수 있는 최댓값은?

- ① ① $\sqrt{3}$
- ② ② $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
- ③ ③ 2
- ④ ④ 3

정답: ② $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

핵심: \sin 은 구간 $(0, \pi)$ 에서 오목함수이므로 Jensen 부등식에 의해 $\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3} \leq \sin \frac{A+B+C}{3} = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 따라서 합의 최댓값은 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 이고 정삼각형에서 달성된다.

💡 Jensen 부등식은 볼록함수에서는 부등호 방향이, 오목함수에서는 그 반대 방향이 성립한다.

Q155 극값 문제

수열 1, 2, 3, 4 와 또 다른 1, 2, 3, 4 를 일대일로 짝지어 곱한 뒤 더한 값 $\sum_{i=1}^4 a_i b_{\sigma(i)}$ 을 생각한다. 가능한 모든 대응 σ 중 이 합이 최소값은?

- ① ① 20
- ② ② 24
- ③ ③ 26
- ④ ④ 30

정답: ① 20

핵심: 재배열 부등식에 의해 같은 순서(증가-증가)로 곱해 더하면 최대, 역순(증가-감소)으로 짝지으면 최소가 된다. 역순 배열은 $1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 4 + 6 + 6 + 4 = 20$.

재배열 부등식은 체비쇼프 합 부등식과 여러 고전 부등식의 출발점이 된다.

Q156 점화식

삼차방정식 $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라 할 때 $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ 의 값은?

- ① ① 11
- ② ② 14
- ③ ③ 22
- ④ ④ 36

정답: ② 14

핵심: 비에트(근과 계수의 관계)로 $\alpha + \beta + \gamma = 6, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 11$. 따라서 $\sum \alpha^2 = (\sum \alpha)^2 - 2 \sum \alpha\beta = 36 - 22 = 14$. (실제 근은 1, 2, 3)

비에트 공식은 근을 직접 구하지 않고도 근의 대칭식을 계수만으로 계산하게 해준다.

Q157 조합 (심화)

$\binom{6}{0} + \binom{6}{3} + \binom{6}{6}$ 의 값은? (즉 6개 원소 중 개수가 3의 배수가 되도록 고르는 경우의 수)

- ① ① 20
- ② ② 21
- ③ ③ 22
- ④ ④ 32

정답: ③ 22

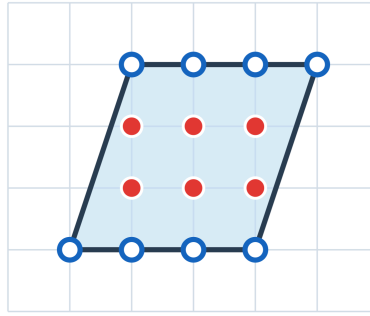
핵심: 단위근 여과(roots of unity filter). $\omega = e^{2\pi i/3}$ 일 때 $\sum_{k \equiv 0 \pmod{3}} \binom{n}{k} = \frac{1}{3}((1+1)^n + (1+\omega)^n + (1+\omega^2)^n)$. $n = 6$ 이면 $1 + \omega = -\omega^2$ 이라 $(1 + \omega)^6 = \omega^{12} = 1$, 마찬가지로 $(1 + \omega^2)^6 = 1$. 따라서 $\frac{64+1+1}{3} = 22$. (직접 계산: $1 + 20 + 1 = 22$)

단위근 여과는 특정 잉여류에 속하는 항만 골라 합산하는 표준 기법이다.

Q158 올림피아드 기하

꼭짓점이 모두 격자점인 단순 다각형이 내부에 격자점 $I = 6$ 개, 변(경계) 위에 격자점 $B = 8$ 개를 가진다. 이 다각형의 넓이는?

격자다각형의 넓이 $A = ?$



- 내부 격자점(채운 점) $I = 6$
- 경계 격자점(빈 점) $B = 8$

- ① ① 8
- ② ② 9
- ③ ③ 10
- ④ ④ 12

정답: ② 9

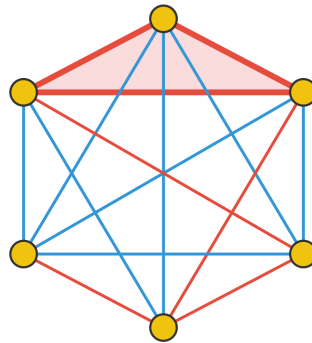
핵심: 픽의 정리 $A = I + \frac{B}{2} - 1$. 대입하면 $A = 6 + \frac{8}{2} - 1 = 6 + 4 - 1 = 9$.

💡 픽의 정리는 변이 격자점을 있는 모든 단순 다각형에 성립하지만, 곡선으로 된 도형에는 적용되지 않는다.

Q159 그래프 이론

어떤 모임에서든 '서로 모두 아는 3명' 또는 '서로 모두 모르는 3명'이 반드시 존재하도록 보장하는 최소 인원수는?

K6: 빨강/파랑 색칠 → 같은 색 삼각형 필연



▲ 빨강 삼각형 (예시)

- ① ① 5
- ② ② 6
- ③ ③ 9
- ④ ④ 17

정답: ② 6

핵심: 램지 수 $R(3, 3) = 6$. 6명을 정점으로, 친구 관계를 간선 색으로 두면 한 사람의 5개 관계 중 같은 색이 최소 3개(비둘기집)이고, 이로부터 단색 삼각형이 강제된다. 5명일 때는 정오각형 모양의 반례가 있어 보장되지 않는다.

💡 $R(4, 4) = 18$ 임은 알려져 있으나 $R(5, 5)$ 의 정확한 값은 지금도 미해결이다.

Q160 귀납법

$a^2 = 2b^2$ 을 만족하는 양의 정수 쌍 (a, b) 의 개수는?

- ① ① 0
- ② ② 1
- ③ ③ 2
- ④ ④ 무한히 많다

🎯 정답: ① 0

📖 핵심: 무한강하법. $a^2 = 2b^2$ 이면 a 는 짝수이므로 $a = 2a_1$. 대입하면 $4a_1^2 = 2b^2$, 즉 $b^2 = 2a_1^2$ 이라 b 도 짝수 $b = 2b_1$, 다시 $a_1^2 = 2b_1^2$ 로 같은 형태가 더 작은 양의 정수에서 반복된다. 양의 정수는 무한히 작아질 수 없으므로 모순, 해는 존재하지 않는다(이는 $\sqrt{2}$ 가 무리수임과 동치).

💡 무한강하법은 페르마가 즐겨 쓴 기법으로, $x^4 + y^4 = z^4$ 의 양의 정수해가 없음을 증명하는 핵심 도구다.

🧠 고등/올림피아드 사고력

총 40문제 · 문제와 정답·풀이 포함

Q161 그래프 이론

다음 차수수열 중 단순그래프(자기루프와 다중간선이 없는 그래프)로 실현할 수 없는 것은?

- ① ① (2, 2, 2, 2)
- ② ② (1, 1, 2, 2, 2)
- ③ ③ (5, 3, 2, 2, 2, 1)
- ④ ④ (3, 3, 2, 2, 2)

🎯 정답: ③ (5, 3, 2, 2, 2, 1)

📖 핵심: 약수 보조정리에 의해 모든 정점의 차수 합은 간선 수의 2배, 즉 반드시 짝수여야 한다. ③의 합은 $5 + 3 + 2 + 2 + 2 + 1 = 15$ 로 홀수이므로 어떤 그래프로도 실현 불가능하다. (나머지는 합이 짝수이고 에르되시-갈라이 조건도 만족한다.)

💡 차수수열이 단순그래프로 실현 가능한지는 에르되시-갈라이 정리로 완전히 판정된다.

Q162 조합 (심화)

원소가 4개인 집합 $\{1, 2, 3, 4\}$ 를 공집합이 아닌 부분집합들로 분할하는(부분집합의 순서는 무시) 방법의 수는?

- ① ① 8
- ② ② 14
- ③ ③ 15
- ④ ④ 24

🎯 정답: ③ 15

📖 핵심: 집합의 분할 수는 벨 수 B_4 . 부분 개수별 제2종 스텔링 수의 합으로 $S(4, 1) + S(4, 2) + S(4, 3) + S(4, 4) = 1 + 7 + 6 + 1 = 15$.

💡 벨 수는 점화식 $B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k$ 로 계산되며 '벨 삼각형'으로도 구할 수 있다.

Q163 조합 (심화)

$a + b + c = 10$ 을 만족하고 $0 \leq a, b, c \leq 4$ 인 정수해 (a, b, c) 의 개수는?

- ① ① 6
- ② ② 9
- ③ ③ 15
- ④ ④ 27

🎯 정답: ① 6

📖 핵심: 생성함수 $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)^3 = \left(\frac{1-x^5}{1-x}\right)^3$ 에서 x^{10} 의 계수를 구한다. $(1-x^5)^3 = 1 - 3x^5 + 3x^{10} - \dots$ 와 $(1-x)^{-3} = \sum_k \binom{k+2}{2} x^k$ 를 곱하면 계수는 $\binom{12}{2} - 3\binom{7}{2} + 3\binom{2}{2} = 66 - 63 + 3 = 6$.

💡 상한이 있는 분배 문제는 생성함수의 $(1-x^{m+1})$ 인자로 깔끔하게 처리된다.

Q164 게임 이론 (Combinatorial)

님(Nim) 게임에서 돌 더미가 각각 2, 4, 6 개 있다. 두 사람이 번갈아 한 더미에서 1개 이상 가져가며 마지막 돌을 가져가는 쪽이 이긴다. 둘 다 최선을 다하면 누가 이기는가?

님 게임: 돌 더미와 XOR



- ① ① 선공
- ② ② 후공
- ③ ③ 비김
- ④ ④ 돌 배치에 따라 다르다

정답: ② 후공

핵심: 님 게임은 모든 더미 크기의 이진 XOR(님-합)이 0이면 후공 필승이다. $2 \oplus 4 \oplus 6 = 010 \oplus 100 \oplus 110 = 000$ 이므로 님-합이 0. 선공은 어떤 수를 두어도 님-합을 0이 아닌 상태로 만들어 후공에게 넘기게 되고, 후공은 다시 0으로 되돌릴 수 있어 결국 선공이 진다.

💡 모든 공평게임(impartial game)은 스프라그-그런디 정리에 의해 적당한 크기의 단일 님 더미와 동치다.

Q165 조합 (심화)

4명이 각자 모자를 벗어 한데 섞은 뒤 무작위로 하나씩 다시 받는다. 아무도 자기 모자를 받지 않는 경우의 수는?

- ① ① 6
- ② ② 8
- ③ ③ 9
- ④ ④ 12

정답: ③ 9

핵심: 교란순열(derangement) 수 $D_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$. $D_4 = 24 \left(1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} \right) = 24 \cdot \frac{9}{24} = 9$. 포함배제로도 같은 값을 얻는다.

💡 $D_n/n! \rightarrow 1/e$ 이므로 사람이 많아져도 '아무도 자기 것을 못 받을' 확률은 약 36.8%로 수렴한다.

Q166 함수방정식 (입문)

양의 실수에서 정의된 함수 f 가 모든 $x, y > 0$ 에 대해 $f(xy) = f(x) + f(y)$ 를 만족하고 $f(2) = 1$ 이다. $f(32)$ 의 값은?

- ① ① 5
- ② ② 16
- ③ ③ 25
- ④ ④ 32

정답: ① 5

핵심: 관계식에서 $f(2^n) = n f(2)$ 임을 귀납적으로 얻는다($f(2^2) = 2f(2)$ 등). $32 = 2^5$ 이므로 $f(32) = 5f(2) = 5$. 이 성질은 로그 함수 $f(x) = \log_2 x$ 의 특징이다.

💡 연속성 조건을 추가로 주면 이런 f 는 반드시 $f(x) = \log_a x$ 꼴로 유일하게 결정된다.

Q167 확률 (조건부·기하)

n 명이 각자 모자를 벗어 무작위로 다시 하나씩 받을 때, 자기 모자를 받는 사람 수의 기댓값은? (단 $n \geq 1$)

- ① ① $\frac{1}{n}$
- ② ② 1
- ③ ③ \sqrt{n}
- ④ ④ $\frac{n}{2}$

정답: ② 1

핵심: 기댓값의 선형성. 사람 i 가 자기 모자를 받으면 1, 아니면 0인 지시확률변수를 X_i 라 하면 $P(X_i = 1) = \frac{1}{n}$ 이므로 $E[X_i] = \frac{1}{n}$. 따라서 $E\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = n \cdot \frac{1}{n} = 1$ 로 n 과 무관하다(변수들의 독립성도 필요 없다).

💡 기댓값의 선형성은 확률변수들이 서로 종속이어도 언제나 성립한다는 점이 강력하다.

Q168 정수론 (심화)

다음 연립합동식을 만족하는 가장 작은 양의 정수 x 를 구하시오.

$$x \equiv 2 \pmod{3}, \quad x \equiv 3 \pmod{5}, \quad x \equiv 2 \pmod{7}$$

- ① ① 23
- ② ② 53
- ③ ③ 68
- ④ ④ 128

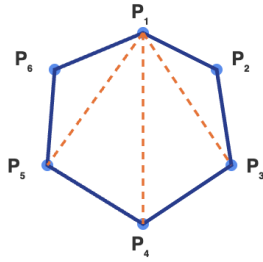
정답: ① 23

핵심: 같은 나머지를 묶고 중국인 나머지정리(CRT)로 결합. $x \equiv 2 \pmod{3}$ 과 $x \equiv 2 \pmod{7}$ 은 함께 $x \equiv 2 \pmod{21}$. 따라서 $x = 2 + 21k$. 이를 $x \equiv 3 \pmod{5}$ 에 대입하면 $2 + 21k \equiv 3 \pmod{5}$, 즉 $k \equiv 1 \pmod{5}$ ($\because 21 \equiv 1$). 최소 $k = 1$ 이면 $x = 23$. **검산:** $23 = 7 \cdot 3 + 2, 4 \cdot 5 + 3, 3 \cdot 7 + 2$ 모두 성립. 전체 해는 $x \equiv 23 \pmod{105}$.

💡 세 법이 서로소이므로 해는 $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$ 를 주기로 유일하게 반복된다.

Q169 조합 (심화)

볼록 육각형의 내부를, 서로 교차하지 않는 대각선으로 잘라 삼각형들로 완전히 나누는(삼각분할) 방법의 수는?



이런 분할이 모두 몇 가지?

- ① ① 5
- ② ② 14
- ③ ③ 16
- ④ ④ 42

정답: ② 14

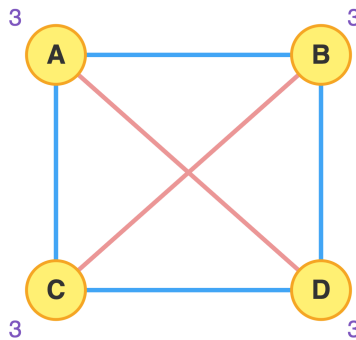
핵심: 볼록 $(n + 2)$ 각형의 삼각분할 수는 카탈란 수 C_n . 육각형은 $n + 2 = 6$ 이므로 $n = 4$, $C_4 = \frac{1}{5} \binom{8}{4} = \frac{70}{5} = 14$. (점화

$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}$ 로도 $C_0=1, C_1=1, C_2=2, C_3=5, C_4=14$.)

💡 카탈란 수는 괄호 짝짓기, 격자경로, 이진트리 등 셀 수 없이 많은 조합 구조에서 똑같이 등장한다.

Q170 그래프 이론

네 정점 A, B, C, D 가 모두 서로 연결된 완전그래프 K_4 가 있다. 모든 간선을 정확히 한 번씩 지나는 경로(오일러 경로 또는 회로)가 존재하는가?



- ① ① 오일러 회로가 존재한다
- ② ② 오일러 경로는 존재하지만 회로는 없다
- ③ ③ 오일러 경로도 회로도 존재하지 않는다
- ④ ④ 간선 하나를 추가하면 가능하다

정답: ③ 오일러 경로도 회로도 존재하지 않는다

핵심: 오일러 판정은 '홀수 차수 정점의 개수'로 결정. 오일러 회로 \Leftrightarrow 모든 정점 차수 짝수, 오일러 경로 \Leftrightarrow 홀수 차수 정점이 정확히 0 개 또는 2개. K_4 는 모든 정점의 차수가 3(홀수)이라 홀수 차수 정점이 4개. 따라서 둘 다 불가능.

💡 쾨니히스베르크 다리 문제도 같은 원리로 불가능이 증명됐다. 오일러가 1736년에 그래프 이론을 사실상 창시한 순간이다.

Q171 불변량과 단조량

칠판에 1부터 20까지의 정수가 적혀 있다. 매 단계에서 임의의 두 수 a, b 를 지우고 그 자리에 $|a - b|$ 를 적는다. 19번 반복하면 수가 하나 남는다. 마지막에 남는 수에 대해 항상 옳은 것은?

- ① ① 항상 홀수이다
- ② ② 항상 짝수이다
- ③ ③ 홀수일 수도 짝수일 수도 있다
- ④ ④ 항상 0이다

정답: ② 항상 짝수이다

핵심: 전체 합이 홀짝성이 불변량. $|a - b| \equiv a + b \pmod{2}$ 이므로 두 수를 차로 바꿔도 칠판 위 모든 수의 합이 홀짝성은 변하지 않는다. 처음 합은 $1 + 2 + \dots + 20 = 210$ (짝수). 따라서 마지막 한 수도 짝수.

💡 이런 '연산해도 변하지 않는 양(불변량)'은 도달 가능/불가능을 가르는 가장 강력한 도구다. 무엇이 보존되는지를 찾는 것이 핵심.

Q172 비둘기집 응용

임의의 정수 a_1, a_2, \dots, a_7 이 일렬로 주어졌다. 어떤 정수들이든, '연속한 몇 개의 항의 합'이 7의 배수가 되는 경우가 반드시 존재함을 비둘기집 원리로 보이려 한다. 이때 고려해야 하는 부분합 S_0, S_1, \dots 의 개수는?

- ① ① 6개
- ② ② 7개
- ③ ③ 8개
- ④ ④ 14개

정답: ③ 8개

핵심: 누적합을 mod 7로 보고 비둘기집. $S_0 = 0, S_k = a_1 + \dots + a_k (k = 1, \dots, 7)$ 로 총 8개의 부분합을 둔다. 이들을 7로 나누어 나머지는 0, 1, ..., 6의 7가지뿐이므로, 8개 중 적어도 두 개 $S_i, S_j (i < j)$ 의 나머지가 같다. 그러면

$S_j - S_i = a_{i+1} + \dots + a_j \equiv 0 \pmod{7}$, 즉 연속한 항들의 합이 7의 배수. 비둘기 8마리, 둥지 7개.

💡 $S_0 = 0$ 을 포함하는 것이 결정적이다. 그래야 '맨 앞부터의 합'도 후보가 되어 빈틈이 없다.

Q173 극값 문제

양의 실수 x, y 가 $x + y = 10$ 을 만족한다. $\frac{4}{x} + \frac{9}{y}$ 의 최솟값은?

- ① ① $\frac{5}{2}$
- ② ② $\frac{13}{10}$
- ③ ③ 3
- ④ ④ $\frac{25}{2}$

정답: ① $\frac{5}{2}$

핵심: 코시-슈바르츠의 엡겔 형태(Titu 보조정리) $\frac{a^2}{p} + \frac{b^2}{q} \geq \frac{(a+b)^2}{p+q}$. 여기서 $\frac{2^2}{x} + \frac{3^2}{y} \geq \frac{(2+3)^2}{x+y} = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}$. 등호는 $\frac{2}{x} = \frac{3}{y}$, 즉

$x = 4, y = 6$ 일 때 성립하며 실제로 $\frac{4}{4} + \frac{9}{6} = 1 + 1.5 = 2.5$.


💡 엡겔 형태는 분모가 양수이지만 하면 바로 적용돼 올림피아드 부등식에서 거의 만능 열쇠로 쓰인다.


Q174 모듈러·합동식

7^{2026} 의 일의 자리 숫자는?

- ① ① 1
- ② ② 3
- ③ ③ 7
- ④ ④ 9

 **정답: ④ 9**


 **핵심:** 일의 자리(mod 10)의 거듭제곱 주기. $7^1 = 7, 7^2 = 49, 7^3 = 343, 7^4 = 2401$ 로 일의 자리가 7, 9, 3, 1이 주기 4로 반복. $2026 = 4 \cdot 506 + 2$ 이므로 주기에서 두 번째인 9.


 이는 7이 mod 10에서 위수(order) 4를 가진다는 뜻으로, 오일러 정리 $7^{\varphi(10)} = 7^4 \equiv 1$ 의 구체적 사례다.

Q175 귀납법

방정식 $x^2 + y^2 = 3z^2$ 의 정수해를 모두 구한 것으로 옳은 것은?

- ① ① 무수히 많다
- ② ② $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ 뿐이다
- ③ ③ $(1, 1, 1)$ 을 포함한 유한개
- ④ ④ $x = y$ 인 해만 존재한다

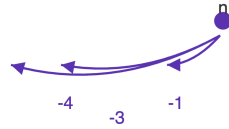
 **정답: ② $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ 뿐이다**

 **핵심:** mod 3 분석 + 무한강하법. 제곱수는 mod 3으로 0 또는 1. $x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod{3}$ 이 되려면 $x^2 \equiv y^2 \equiv 0$, 즉 $3 \mid x, 3 \mid y$. $x = 3x', y = 3y'$ 를 대입하면 $9x'^2 + 9y'^2 = 3z^2 \Rightarrow z^2 = 3(x'^2 + y'^2)$ 이므로 $3 \mid z, z = 3z'$. 그러면 $x'^2 + y'^2 = 3z'^2$ 로 같은 형태의 더 작은 해가 나온다. 0이 아닌 해가 있다면 무한히 작아지는 양의 정수열을 얻어 모순(무한강하). 따라서 자명해뿐.

 페르마가 즐겨 쓴 무한강하법은 '0이 아닌 해가 있으면 더 작은 해가 항상 존재한다'는 모순으로 비존재를 증명한다.

Q176 게임 이론 (Combinatorial)

돌 더미 하나에 돌이 n 개 있다. 두 사람이 번갈아 1개, 3개, 또는 4개를 가져가며, 마지막 돌을 가져가는 사람이 이긴다. $n = 2026$ 일 때 선공의 승패는?



L은 $n = 0, 2 \pmod{7}$

한 위치에서 -1, -3, -4 만큼 이동 가능

- ① ① 선공 승
- ② ② 후공 승
- ③ ③ 비긴다
- ④ ④ 돌 개수와 무관하게 후공 승

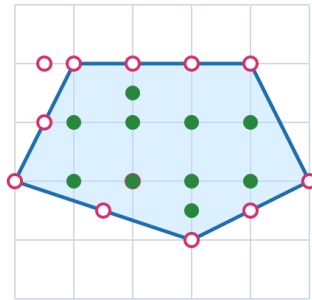
정답: ① 선공 승

핵심: P-위치(차례인 사람이 지는 위치) 분류. $n = 0$ 은 L. 어떤 위치에서 $-1, -3, -4$ 중 하나로 L에 보낼 수 있으면 W, 모든 이동이 W로만 가면 L. 계산하면 L은 $n \equiv 0$ 또는 $2 \pmod{7}$. (예: 0, 2, 7, 9, 14, 16, ...) $2026 = 7 \cdot 289 + 3$ 이므로 $2026 \equiv 3$, 즉 L이 아니라 W. 선공이 적절히 가져가 상대를 L 위치로 보낼 수 있어 선공 승.

💡 뽀빠 게임의 P-위치는 항상 결국 주기적으로 반복된다. 여기서는 주기 7로 규칙적이다.

Q177 올림피아드 기하

모든 꼭짓점이 격자점 위에 있는 단순 다각형이 있다. 변 위(꼭짓점 포함)의 격자점이 $B = 12$ 개, 내부의 격자점이 $I = 10$ 개일 때, 이 다각형의 넓이는?



- 경계 격자점 $B = 12$
- 내부 격자점 $I = 10$

픽의 정리

$$A = I + B/2 - 1$$

- ① ① 15
- ② ② 16
- ③ ③ 21
- ④ ④ 27

정답: ① 15

핵심: 픽의 정리 $A = I + \frac{B}{2} - 1$. 대입하면 $A = 10 + \frac{12}{2} - 1 = 10 + 6 - 1 = 15$. 격자점 다각형의 넓이를 내부점과 경계점 개수만으로 정확히 준다.

💡 픽의 정리는 넓이를 한 번도 '재지' 않고 점만 세서 정확한 값을 주는 보기 드문 공식이다.

Q178 함수방정식 (입문)

모든 실수 x, y 에 대해 $f(x + y) = f(x) + f(y) + 2xy$ 가 성립하고 $f(1) = 3$ 이다. $f(4)$ 의 값은?

- ① ① 24
- ② ② 12
- ③ ③ 18
- ④ ④ 20

정답: ① 24

핵심: 우변의 $2xy$ 항을 보고 이차형 $f(x) = x^2 + cx$ 를 시도(치환). 그러면

$f(x + y) = (x + y)^2 + c(x + y) = x^2 + 2xy + y^2 + cx + cy = f(x) + f(y) + 2xy$ 로 항등식이 성립. $f(1) = 1 + c = 3 \Rightarrow c = 2$, 즉 $f(x) = x^2 + 2x$. 따라서 $f(4) = 16 + 8 = 24$. (또는 $g(x) = f(x) - x^2$ 로 두면 g 가 코시 가법함수가 되어 $g(x) = cx$.)

💡 $g(x) = f(x) - x^2$ 치환으로 '뒤틀린' 함수방정식을 표준 코시 방정식 $g(x + y) = g(x) + g(y)$ 로 환원하는 것이 정석 기법이다.

Q179 재미 두뇌

카드 3장이 있다. 한 장은 양면이 모두 빨강(RR), 한 장은 양면이 모두 파랑(BB), 한 장은 한 면이 빨강 한 면이 파랑(RB)이다. 임의로 한 장을 뽑아 한 면을 보니 빨강이었다. 이때 반대 면도 빨강일 확률은?

- ① ① $\frac{1}{2}$
- ② ② $\frac{2}{3}$
- ③ ③ $\frac{1}{3}$
- ④ ④ $\frac{3}{4}$

정답: ② $\frac{2}{3}$

핵심: '카드'가 아니라 '빨강 면'을 세는 조건부확률(베르트랑 상자). 빨강 면은 모두 3개: RR 카드의 두 면, RB 카드의 한 면. 보인 빨강 면이 이 셋 중 무엇이든 동등하게 가능하므로, 그 면이 RR 카드일 확률은 $\frac{2}{3}$. 직관적으로 '1/2'로 답하기 쉽지만, RR 카드는 빨강 면을 보일 기회가 두 배라 갱신이 필요하다.

💡 이 문제는 '두 자녀 문제'와 본질이 같다. 관측 자체가 어떤 경우를 더 자주 만들어내는지를 따져야 한다.

Q180 조합 (심화)

네 사람이 각자 자기 모자를 벗어 한데 섞은 뒤 임의로 하나씩 잡는다. 아무도 자기 모자를 잡지 않을 확률은?

- ① ① $\frac{3}{8}$
- ② ② $\frac{1}{4}$
- ③ ③ $\frac{11}{24}$
- ④ ④ $\frac{1}{6}$

정답: ① $\frac{3}{8}$

핵심: 교란순열(완전순열) 수 D_n 을 포함배제로. $D_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$. $D_4 = 24 \left(1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} \right) = 24 \cdot \frac{9}{24} = 9$. 전체 경우는 $4! = 24$ 이므로 확률 $\frac{9}{24} = \frac{3}{8}$.

💡 사람 수가 늘수록 이 확률은 $1/e \approx 0.3679$ 로 빠르게 수렴한다. 100명이든 1000명이든 거의 같다.

Q181 정수론 (심화)

$100!$ ($= 1 \times 2 \times \dots \times 100$)을 10진법으로 적었을 때, 끝에 연속으로 나오는 0의 개수는?

- ① ① 20
- ② ② 24
- ③ ③ 10
- ④ ④ 12

정답: ② 24

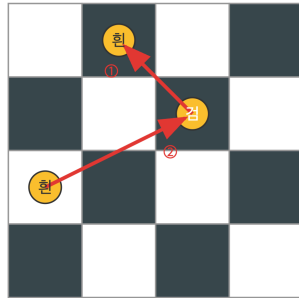
핵심: 끝의 0 개수는 $10 = 2 \times 5$ 에서 더 부족한 소인수 5의 지수와 같다(2는 항상 더 많다). 르장드르 공식으로 $100!$ 속 5의 지수 $= \left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{25} \right\rfloor = 20 + 4 = 24$. ($125 > 100$ 이라 거기서 멈춤.)

💡 25, 50, 75, 100은 5를 두 개씩 품고 있어 추가로 4를 더해준다. 이 '윗자리 항'을 빠뜨리는 실수가 흔하다.

Q182 불변량과 단조량

체스판 위에서 나이트(기사)는 한 번 이동할 때마다 칸의 색(흑/백)이 반드시 바뀐다. 나이트가 출발한 칸으로 정확히 되돌아오는 닫힌 경로의 이동 횟수에 대해 항상 옳은 것은?

나이트 이동과 칸 색



같은 색 = 짝수 번 이동 (매 이동마다 색 바뀜)

- ① ① 항상 홀수
- ② ② 항상 짝수
- ③ ③ 항상 3의 배수
- ④ ④ 어떤 수든 가능

정답: ② 항상 짝수

핵심: 칸의 색이 이동마다 반전되는 패리티 불변량. 나이트가 한 번 움직이면 색이 흑↔백으로 바뀐다. 출발 칸과 도착 칸이 같으면 색도 같으므로, 색이 짝수 번 바뀌어야 한다. 즉 닫힌 경로의 이동 횟수는 항상 짝수.

💡 이 색칠 논증 덕분에, 8×8 판의 모든 칸을 한 번씩 도는 '나이트 투어' 중 닫힌 투어는 칸 수가 짝수(64)일 때만 가능하다.

Q183 재미 두뇌

어떤 모임에서 사람들이 서로 악수를 했다(같은 두 사람은 많아야 한 번). 이 모임에서 "홀수 번" 악수한 사람의 수는 항상 어떠한가?

- ① ① 항상 짝수
- ② ② 항상 홀수
- ③ ③ 참가자 수에 따라 달라진다
- ④ ④ 항상 0이다

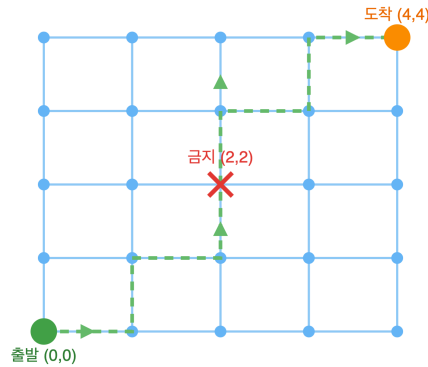
정답: ① 항상 짝수

핵심 아이디어: 악수의 총 횟수를 두 번 센다(이중계산). 각 악수는 두 사람의 악수 횟수에 각각 1씩 기여하므로, 모든 사람의 악수 횟수의 합 = $2 \times$ (악수의 수) 로 짝수다. 이 합을 "짝수 번 악수한 사람들의 합"과 "홀수 번 악수한 사람들의 합"으로 나누면, 앞부분은 짝수이므로 뒷부분도 짝수여야 한다. 홀수들의 합이 짝수하려면 그 항의 개수가 짝수여야 하므로, 홀수 번 악수한 사람의 수는 항상 짝수다 (악수 보조정리).

💡 이것이 그래프 이론의 첫 정리인 "차수 합 정리"이며, 어떤 그래프에서도 홀수 차수의 정점은 짝수 개다.

Q184 조합 (심화)

4 × 4 격자에서 좌하단 (0, 0) 에서 우상단 (4, 4) 까지 오른쪽 또는 위로만 이동한다. 점 (2, 2) 를 지나지 않는 경로의 수는?



- ① ① 34
- ② ② 36
- ③ ③ 44
- ④ ④ 70

정답: ① 34

핵심: 전체 경로에서 금지점을 지나는 경로를 뺀다(여사건-이중계산). 전체 경로 수는 $\binom{8}{4} = 70$. 점 (2, 2) 를 지나는 경로는 $(0, 0) \rightarrow (2, 2)$ 가 $\binom{4}{2} = 6$ 가지, $(2, 2) \rightarrow (4, 4)$ 가 $\binom{4}{2} = 6$ 가지이므로 $6 \times 6 = 36$. 따라서 (2, 2) 를 피하는 경로는 $70 - 36 = 34$.

중요: 중앙을 강제로 지나게 하면 가장 많은 경로가 그 점에 몰린다(대칭성).

Q185 비둘기집 응용

1 부터 100 사이의 서로 다른 정수 10 개를 임의로 고르면, 원소의 합이 서로 같은 두 개의 (서로 다른) 부분집합이 항상 존재한다. 이를 보장하는 비교로 옳은 것은?

- ① ① 공집합이 아닌 부분집합의 수 1023 가 가능한 합의 가짓수 (≤ 955)보다 많다
- ② ② 부분집합의 수가 정확히 합의 가짓수와 같다
- ③ ③ 원소가 10 개이므로 합도 10 가지뿐이다
- ④ ④ 항상 두 원소가 배수 관계이기 때문

정답: ① 공집합이 아닌 부분집합의 수 1023 가 가능한 합의 가짓수 (≤ 955)보다 많다

핵심: 비둘기집 원리. 공집합이 아닌 부분집합은 $2^{10} - 1 = 1023$ 개. 어떤 부분집합의 합도 가장 큰 10 개

$91 + 92 + \dots + 100 = 955$ 를 넘지 못하므로, 가능한 합은 많아야 955 가지(비둘기 구멍). 부분집합(1023 마리) 이 합의 가짓수 (≤ 955)보다 많으므로, 합이 같은 두 부분집합이 존재한다. 겹치는 공통 원소를 제거하면 서로소이면서 합이 같은 두 부분집합도 얻는다.

이 한계 덕분에 "합이 모두 다른 집합(Sidon-류)"을 만들 때 원소를 매우 크게 잡아야 함을 알 수 있다.

Q186 불변량과 단조량

칠판에 1, 2, 3, 4, 5 가 적혀 있다. 매 단계마다 두 수 a, b 를 지우고 $a + b + ab$ 를 적는다. 이 과정을 반복해 수가 하나만 남았을 때, 그 수는?

- ① ① 719
- ② ② 720
- ③ ③ 121
- ④ ④ 임의로 달라진다

정답: ① 719

해설: 보존되는 곱(불변량)을 찾는다. $1 + (a + b + ab) = (1 + a)(1 + b)$ 이므로, 칠판의 모든 수 x_i 에 대해 $\prod (1 + x_i)$ 는 연산을 해도 변하지 않는다. 처음 값은 $(1 + 1)(1 + 2)(1 + 3)(1 + 4)(1 + 5) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$. 마지막 한 수 N 에 대해 $1 + N = 720$ 이므로 $N = 719$. 어떤 순서로 지워도 답은 같다.

💡 $a + b + ab$ 는 $a \oplus b = (1 + a)(1 + b) - 1$ 형태로, 1 을 더한 좌표에서 곱셈으로 바뀐다.

Q187 다이오판티

$3^x - 2^y = 1$ 을 만족하는 양의 정수 순서쌍 (x, y) 의 개수는?

- ① ① 1
- ② ② 2
- ③ ③ 3
- ④ ④ 무수히 많다

정답: ② 2

해설: 모듈러 분석으로 경우를 한정한다. $(1, 1): 3 - 2 = 1, (2, 3): 9 - 8 = 1$ 은 해다. $y \geq 2$ 이면 $3^x \equiv 1 \pmod{4}$ 이므로 x 는 짝수, $x = 2k$. 그러면 $2^y = 3^{2k} - 1 = (3^k - 1)(3^k + 1)$. 두 인수는 차가 2 이면서 모두 2 의 거듭제곱이어야 하므로 $\{2, 4\}$, 즉 $3^k = 3 \Rightarrow k = 1, x = 2, y = 3$. $y = 1$ 이면 $3^x = 3 \Rightarrow x = 1$. 따라서 해는 $(1, 1), (2, 3)$ 두 개뿐이다.

💡 이것은 카탈란 추측(미하일레스쿠 정리)의 가장 작은 사례로, 8 과 9 가 유일하게 연속하는 완전 거듭제곱이다.

Q188 점화식

길이 10 인 0/1 문자열 중 "1 이 연속해서 나오지 않는" 것의 개수는?

- ① ① 89
- ② ② 144
- ③ ③ 128
- ④ ④ 233

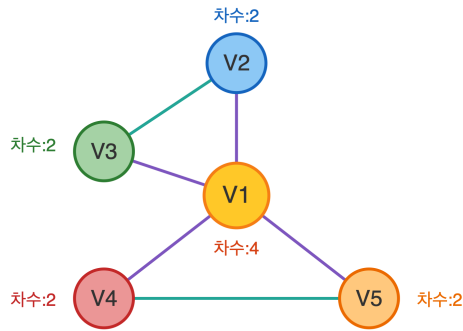
정답: ② 144

해설: 마지막 글자로 경우를 나눠 점화식을 세운다. 길이 n 인 조건 만족 문자열 수를 a_n 이라 하면, 끝이 0 이면 앞 $n - 1$ 자리는 자유(a_{n-1}), 끝이 1 이면 그 앞은 반드시 0 이고 그 앞 $n - 2$ 자리는 자유(a_{n-2}). 따라서 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ (피보나치형), $a_1 = 2, a_2 = 3$. 차례로 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144 이므로 $a_{10} = 144$.

💡 이 수열은 $a_n = F_{n+2}$ 로 피보나치 수와 정확히 맞물린다.

Q189 그래프 이론

아래 그래프에서 모든 간선을 정확히 한 번씩 지나는 한붓그리기(오일러 경로/회로)가 가능한가?



- ① ① 가능하다 (오일러 회로가 존재)
- ② ② 오일러 경로만 가능 (회로는 불가)
- ③ ③ 불가능하다
- ④ ④ 그래프가 연결되어 있지 않다

정답: ① 가능하다 (오일러 회로가 존재)

핵심: 오일러 정리. 연결 그래프에서 모든 정점의 차수가 짝수이면 오일러 회로(출발점=도착점)가 존재한다. 차수를 세면 $\deg(V_1) = 4$, $\deg(V_2) = \deg(V_3) = \deg(V_4) = \deg(V_5) = 2$ 로 모두 짝수이고 그래프는 연결되어 있다. 따라서 홀수 차수 정점이 0 개이므로 오일러 회로가 존재한다(예: $V_1V_2V_3V_1V_4V_5V_1$).

💡 홀수 차수 정점이 정확히 2 개면 그 둘을 양 끝으로 하는 오일러 경로가 있고, 4 개 이상이면 한붓그리기는 불가능하다.

Q190 극값 문제

실수 a, b, c 가 $a + b + c = 12$ 를 만족할 때, $a^2 + b^2 + c^2$ 의 최솟값은?

- ① ① 36
- ② ② 48
- ③ ③ 144
- ④ ④ 12

정답: ② 48

핵심: 코시-슈바르츠(또는 제곱평균-산술평균). $(1^2 + 1^2 + 1^2)(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2$ 이므로

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{(a + b + c)^2}{3} = \frac{144}{3} = 48. \text{ 등호는 } a = b = c = 4 \text{ 일 때 성립하므로 최솟값은 } 48.$$

💡 합이 고정될 때 제곱합은 모든 값이 평균으로 같아질 때 최소가 된다(분산 = 0).

Q191 함수방정식 (입문)

함수 $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ 가 모든 양의 정수 m, n 에 대해 $f(m+n) = f(m)f(n)$ 을 만족하고 $f(1) = 3$ 이다. $f(4)$ 의 값은?

- ① ① 12
- ② ② 27
- ③ ③ 64
- ④ ④ 81

정답: ④ 81

핵심: 귀납으로 일반항을 구한다. $f(n+1) = f(n)f(1) = 3f(n)$ 이고 $f(1) = 3$ 이므로 $f(n) = 3^n$. 따라서 $f(4) = 3^4 = 81$ (또는 $f(2) = 9, f(4) = f(2)f(2) = 81$).

💡 덧셈을 곱셈으로 바꾸는 이 방정식의 연속 버전 해는 지수함수 $f(x) = e^{cx}$ 뿐이다.

Q192 확률 (조건부·기하)

인구의 1% 가 어떤 질병을 가지고 있다. 검사는 환자에게 99% 확률로 양성, 건강한 사람에게도 5% 확률로 (거짓) 양성을 보인다. 검사 결과가 양성인 사람이 실제 환자일 확률에 가장 가까운 값은?

- ① ① 약 99%
- ② ② 약 67%
- ③ ③ 약 17%
- ④ ④ 약 1%

정답: ③ 약 17%

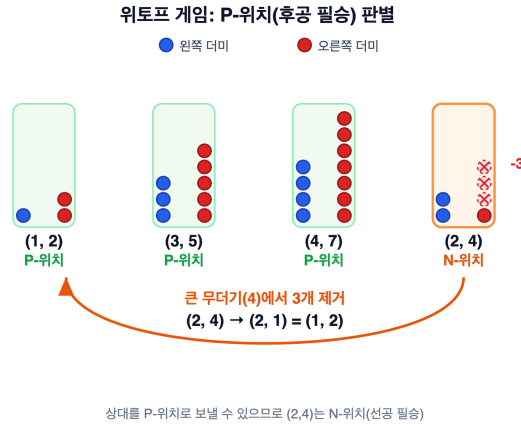
핵심: 베이즈 정리. $P(\text{환자} | \text{양성}) = \frac{P(\text{양성} | \text{환자})P(\text{환자})}{P(\text{양성})}$. 분자 = $0.99 \times 0.01 = 0.0099$. 분모

= $0.0099 + \underbrace{0.05 \times 0.99}_{0.0495} = 0.0594$. 따라서 $\frac{0.0099}{0.0594} \approx 0.167 \approx 17\%$. 검사 정확도가 높아도 기저 발병률이 낮으면 거짓양성이 압도해 사후확률이 작다.

💡 이 '기저율 무시' 오류는 의료 진단에서 추가 검사(2차 검사)를 하는 통계적 이유다.

Q193 게임 이론 (Combinatorial)

두 무더기에 돌이 있다. 한 번에 (i) 한 무더기에서 원하는 만큼 가져가거나, (ii) 두 무더기에서 "같은 수"만큼 가져갈 수 있다(최소 1개). 마지막 돌을 가져가는 사람이 승리. 다음 위치 중 후공(두 번째로 두는 사람)이 필승인 P-위치 "아닌" 것은?



- ① ① (1, 2)
- ② ② (3, 5)
- ③ ③ (4, 7)
- ④ ④ (2, 4)

정답: ④ (2, 4)

핵심: 이 게임은 위토프(Wythoff) 게임이다. P-위치(둘 차례에 둔 사람이 지는, 즉 후공 필승)는 $(\lfloor n\varphi \rfloor, \lfloor n\varphi^2 \rfloor)$, $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 로 $(0, 0), (1, 2), (3, 5), (4, 7), (6, 10), \dots$ 이다. $(1, 2), (3, 5), (4, 7)$ 은 모두 P-위치. 그러나 $(2, 4)$ 에서는 큰 무더기에서 3 개를 빼 $(2, 1) = (1, 2)$ 로 갈 수 있어 상대를 P-위치에 빠뜨릴 수 있으므로 $(2, 4)$ 는 N-위치(선공 필승)다. (두 무더기에서 1 씩 빼면 $(1, 3)$ 이 되어 P-위치가 아니다.) 따라서 P-위치가 아닌 것은 $(2, 4)$.

위토프 P-위치의 두 좌표열은 모든 양의 정수를 정확히 한 번씩 분할하는 '베티 수열'을 이룬다.

Q194 정수론 (심화)

$100!$ 을 십진법으로 썼을 때, 끝에 연속으로 붙는 0 의 개수는?

- ① ① 20
- ② ② 24
- ③ ③ 10
- ④ ④ 25

정답: ② 24

핵심: 끝의 0 의 개수 = $10 = 2 \cdot 5$ 의 지수 = $\min(v_2, v_5)$ 인데 2 가 5 보다 훨씬 많으므로 $v_5(100!)$ 만 세면 된다(르장드르 공식).

$$v_5(100!) = \left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{25} \right\rfloor = 20 + 4 = 24. \quad (125 > 100 \text{ 이므로 다음 항은 } 0.)$$

르장드르 공식 $v_p(n!) = \frac{n - s_p(n)}{p - 1}$ 에서 $s_p(n)$ 은 n 의 p 진법 자릿수 합이다.

Q195 다이오판티

양의 정수 (x, y) 가 $x^2 + y^2 + 1 = 3xy$ 를 만족한다. 다음 순서쌍 중 이 방정식의 해가 아닌 것은?

- ① ① (1, 1)
- ② ② (1, 2)
- ③ ③ (2, 5)
- ④ ④ (3, 7)

정답: ④ (3, 7)

핵심: 비에트 점프(Vieta jumping). $(1, 1)$ 은 $1 + 1 + 1 = 3 = 3 \cdot 1$ 로 해. y 를 고정하면 $x^2 - 3yx + (y^2 + 1) = 0$ 이고 근과 계수 관계로 다른 근은 $x' = 3y - x = \frac{y^2 + 1}{x}$ (정수). 이로써 $(1, 1) \rightarrow (1, 2) \rightarrow (2, 5) \rightarrow (5, 13) \rightarrow \dots$ 가 모두 해다.
 $(1, 2): 1 + 4 + 1 = 6 = 3 \cdot 2$, $(2, 5): 4 + 25 + 1 = 30 = 3 \cdot 10$. 한편 $(3, 7)$ 은 $9 + 49 + 1 = 59 \neq 3 \cdot 21 = 63$ 이므로 해가 아니다.
 이 방정식의 해는 홀수 번째 피보나치 수의 연속쌍 (F_{2k-1}, F_{2k+1}) 으로 나타난다.

Q196 확률 (조건부·기하)

문 3개 중 하나 뒤에 자동차, 나머지 둘 뒤엔 염소가 있다. 당신이 1번 문을 고른 뒤, 정답을 아는 사회자가 남은 두 문 중 염소가 있는 문 하나를 열어 보여준다. 이제 남은 닫힌 문으로 ****바꾸는 전략****의 당첨 확률은?



- ① ① $\frac{1}{2}$ (바뀌어도 차이 없다)
- ② ② $\frac{2}{3}$ (바꾸는 것이 유리)
- ③ ③ $\frac{1}{3}$ (바꾸면 불리)
- ④ ④ $\frac{3}{4}$

정답: ② $\frac{2}{3}$ (바꾸는 것이 유리)

핵심: 처음 선택이 맞을 확률은 $\frac{1}{3}$, 틀릴 확률은 $\frac{2}{3}$. 처음에 틀렸을 때(확률 $\frac{2}{3}$) 사회자가 나머지 염소 문을 제거하므로 '바꾸기'는 반드시 자동차로 이어진다. 처음에 맞았을 때(확률 $\frac{1}{3}$)만 바꾸기가 실패한다. 따라서 바꾸기 당첨 확률은 $\frac{2}{3}$, 유지의 $\frac{1}{3}$ 의 두 배다. 사회자가 정보를 가지고 행동했다는 점이 직관과 어긋나는 부분이다.

이 문제는 1990년 칼럼니스트 매릴린 보스 사번트가 정답을 발표하자 수학 박사들조차 반박 편지를 보냈을 만큼 논쟁이 컸다.

Q197 귀납법

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ 임이 수학적 귀납법으로 증명된다. 이 공식을 이용해 $1^3 + 2^3 + \dots + 10^3$ 의 값을 구하라.

- ① ① 2025
- ② ② 3025
- ③ ③ 3850
- ④ ④ 5050

정답: ② 3025

핵심: 세제곱의 합은 '처음 n 개 자연수 합의 제곱'과 같다. $\sum_{k=1}^{10} k = \frac{10 \cdot 11}{2} = 55$ 이므로 $\sum_{k=1}^{10} k^3 = 55^2 = 3025$. (귀납 단계:

$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$ 가 전개로 확인된다.)

이 항등식 때문에 세제곱 합은 항상 완전제곱수가 된다.

Q198 재미 두뇌

겉보기 똑같은 동전 9개 중 단 1개만 다른 동전들보다 무겁다. 양팔 저울만으로 무거운 동전을 **반드시** 찾아내려면 최소 몇 번 달아야 하는가?

- ① ① 2번
- ② ② 3번
- ③ ③ 4번
- ④ ④ 8번

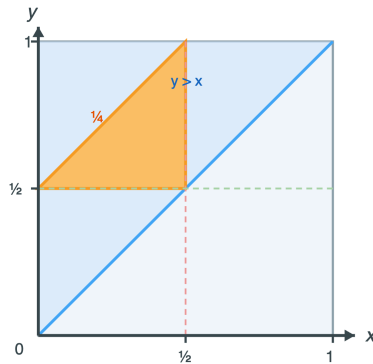
정답: ① 2번

핵심: 양팔 저울 한 번은 (원>오, 원<오, 균형) 3가지 정보를 주므로 한 번에 후보를 $\frac{1}{3}$ 로 줄일 수 있다. 9개를 3-3-3으로 나눠 두 묶음을 올린다. 균형이면 무거운 동전은 남은 3개 중에, 기울면 내려간 쪽 3개 중에 있다. 그 3개를 다시 1-1-1로 비교하면 두 번째 측정에서 확정. $3^2 = 9$ 이므로 2번이 한계이자 충분.

일반적으로 n 개 중 무거운 1개는 $\lceil \log_3 n \rceil$ 번에 찾을 수 있다.

Q199 확률 (조건부·기하)

길이 1인 막대에서 서로 독립적이고 균등하게 두 점을 골라 세 조각으로 자른다. 이 세 조각으로 삼각형을 만들 수 있을 확률은?



- ① ① $\frac{1}{2}$
- ② ② $\frac{1}{3}$
- ③ ③ $\frac{1}{4}$
- ④ ④ $\frac{2}{3}$

정답: ③ $\frac{1}{4}$

핵심: 세 조각이 삼각형을 이루려면 어떤 조각도 $\frac{1}{2}$ 를 넘지 않아야 한다. 두 절단점을 (x, y) 로 보면 표본공간은 넓이 1인 단위정사각형이고, 세 조각의 길이는 $\min(x, y)$, $|x - y|$, $1 - \max(x, y)$ 이다. '가장 긴 조각이 $\frac{1}{2}$ 초과'인 사건은 서로 배타적인 세 경우로 갈라진다.

- $\min(x, y) > \frac{1}{2}$ (x, y 가 모두 $> \frac{1}{2}$): 넓이 $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

- $1 - \max(x, y) > \frac{1}{2}$ (x, y 가 모두 $< \frac{1}{2}$): 넓이 $\frac{1}{4}$.

- $|x - y| > \frac{1}{2}$ ($x - y > \frac{1}{2}$ 와 $y - x > \frac{1}{2}$, 두 모서리 삼각형): 각 $\frac{1}{8}$, 합 $\frac{1}{4}$.

세 사건은 동시에 일어날 수 없으므로 삼각형이 안 되는 넓이는 $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. 따라서 삼각형이 되는 확률은 $1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.

그림은 대칭성을 이용해 $y > x$ 인 절반(넓이 $\frac{1}{2}$)만 나타낸 것으로, 그 안에서 삼각형 조건 $x < \frac{1}{2}$, $y > \frac{1}{2}$, $y - x < \frac{1}{2}$ 을 만족하는 음영 삼각형(꼭짓점 $(0, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, 1)$)의 넓이는 $\frac{1}{8}$ 이고 이는 그 절반 영역의 $\frac{1}{4}$ 이다. 대칭인 $y < x$ 쪽도 같으므로 전체 확률은 $\frac{1}{4}$ 로 일치한다 (그림의 $\frac{1}{4}$ 은 $y > x$ 영역 대비 비율).

💡 막대를 임의의 한 점에서 둘로 자른 뒤 긴 쪽을 다시 자르는 방식이면 확률은 $\ln 2 - \frac{1}{2} \approx 0.193$ 으로 달라진다.

Q200 다이오판티

$5x + 8y = 100$ 을 만족하는 **음이 아닌 정수** 순서쌍 (x, y) 의 개수는?

- ① ① 2개
- ② ② 3개
- ③ ③ 4개
- ④ ④ 무수히 많다

정답: ② 3개

핵심: $8y \equiv 0 \pmod{5} \Rightarrow 3y \equiv 0 \pmod{5} \Rightarrow y \equiv 0 \pmod{5}$. 따라서 $y \in \{0, 5, 10\}$ (그 이상은 $8y > 100$). 각각 $x = 20, 12, 4$ 로 모두 음이 아닌 정수. 그러므로 해는 $(20, 0)$, $(12, 5)$, $(4, 10)$ 의 3개.

💡 $ax + by = c$ 의 음이 아닌 해의 개수는 대략 $\frac{c}{ab}$ 근처이며 ± 1 오차로 결정된다.

🧠 고등/올림피아드 사고력

총 40문제 · 문제와 정답·풀이 포함

Q201 모듈러·합동식

3^{100} 을 7로 나눈 나머지는? (페르마의 소정리: p 가 소수이고 $\gcd(a, p) = 1$ 이면 $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.)

- ① ① 1
- ② ② 2
- ③ ③ 4
- ④ ④ 6

🎯 정답: ③ 4

📖 핵심: $3^6 \equiv 1 \pmod{7}$ (페르마). $100 = 6 \cdot 16 + 4$ 이므로 $3^{100} = (3^6)^{16} \cdot 3^4 \equiv 3^4 \pmod{7}$. $3^4 = 81 = 7 \cdot 11 + 4 \equiv 4 \pmod{7}$. 따라서 나머지는 4.

💡 3은 법 7에서 위수가 정확히 6인 '원시근'이라, $3^1, \dots, 3^6$ 의 나머지가 1~6을 모두 한 번씩 훑는다.

Q202 확률 (조건부·기하)

인구의 1%가 어떤 병에 걸려 있다. 검사는 환자를 99%로 양성 판정하고(민감도), 건강한 사람을 5%로 잘못 양성 판정한다(위양성). 양성 판정을 받은 사람이 실제로 병에 걸렸을 확률에 가장 가까운 값은?

- ① ① 약 99%
- ② ② 약 50%
- ③ ③ 약 17%
- ④ ④ 약 5%

🎯 정답: ③ 약 17%

📖 핵심(베이즈): $P(\text{병} | +) = \frac{0.01 \times 0.99}{0.01 \times 0.99 + 0.99 \times 0.05} = \frac{0.0099}{0.0099 + 0.0495} = \frac{0.0099}{0.0594} = \frac{1}{6} \approx 16.7\%$. 민감도가 99%라도 기저율(유병률)이 낮으면 양성의 대부분은 위양성이라 사후확률이 의외로 작다.

💡 이 '기저율 무시' 오류는 의사들조차 자주 범해, 같은 문제를 빈도(자연빈도)로 제시하면 정답률이 크게 오른다.

Q203 다이오판티

$13x + 7y = 2$ 의 모든 정수해 중에서 x 가 **가장 작은 양의 정수**가 되는 경우의 x 값은?

- ① ① 1
- ② ② 5
- ③ ③ 7
- ④ ④ 12

🎯 정답: ② 5

📖 핵심: $13x \equiv 2 \pmod{7} \Rightarrow 6x \equiv 2 \pmod{7} \Rightarrow 3x \equiv 1 \pmod{7}$. $3 \cdot 5 = 15 \equiv 1$ 이므로 $x \equiv 5 \pmod{7}$. 일반해 $x = 5 + 7t, y = -9 - 13t$. 양의 정수 중 최소는 $t = 0$ 일 때 $x = 5$ (이때 $y = -9$). 확인: $13 \cdot 5 + 7 \cdot (-9) = 65 - 63 = 2$.

💡 이런 일차부정방정식의 한 해는 확장 유클리드 호제법으로 기계적으로 뽑아낼 수 있다.

Q204 귀납법

$F_1 = F_2 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ 인 피보나치 수열에서 $F_1 + F_2 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$ 이 성립한다. 이를 이용해 $F_1 + F_2 + \dots + F_{10}$ 을 구하라. (단 $F_{12} = 144$.)

- ① ① 88
- ② ② 143
- ③ ③ 144
- ④ ④ 232

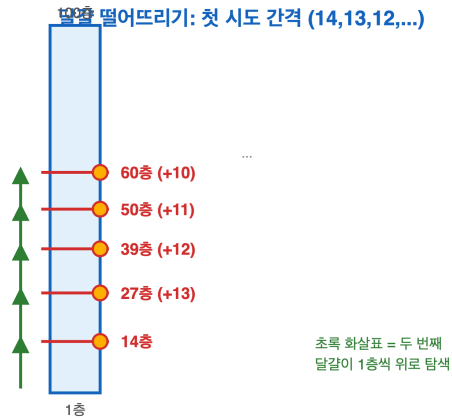
정답: ② 143

핵심: 부분합 공식 $\sum_{k=1}^n F_k = F_{n+2} - 1$. $n = 10$ 이면 $F_{12} - 1 = 144 - 1 = 143$. (귀납: 가정 $\sum_{k=1}^n F_k = F_{n+2} - 1$ 에 F_{n+1} 을 더하면 $F_{n+2} - 1 + F_{n+1} = F_{n+3} - 1$, 정의에 의해 성립.)

💡 비슷하게 홀수 번째 합 $F_1 + F_3 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n}$ 같은 깔끔한 항등식이 줄줄이 존재한다.

Q205 재미 두뇌

100층 건물과 똑같은 달걀 2개가 있다. 어떤 층 k 이상에서 떨어뜨리면 달걀이 깨지고 그 미만이면 안 깨진다(k 는 미지). 달걀이 깨지면 그 달걀은 못 쓴다. ****최악의 경우 떨어뜨리는 횟수를 최소화****할 때, 보장 가능한 최소 횟수는?



- ① ① 10
- ② ② 14
- ③ ③ 50
- ④ ④ 99

정답: ② 14

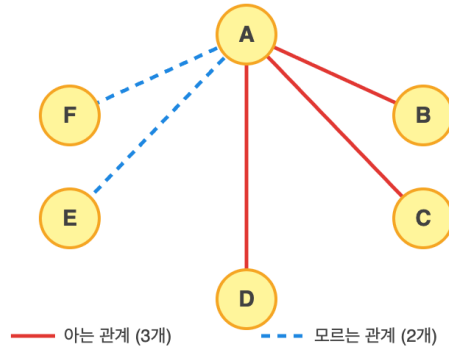
핵심: 첫 달걀을 처음에 m 층, 다음 $m - 1$ 층 위, 그다음 $m - 2$ 층 위... 식으로 간격을 1씩 줄여 떨어뜨린다. 첫 달걀이 어디서 깨지든 남은 구간을 둘째 달걀이 한 층씩 올라가며 검사하면 총 횟수가 항상 $\leq m$. 100층을 덮으려면 $\frac{m(m+1)}{2} \geq 100$, 즉 $m \geq 14$ ($\frac{14 \cdot 15}{2} = 105$). 따라서 최소 보장 횟수는 14.

💡 달걀이 e 개로 늘면 답은 이항계수 합 $\sum \binom{m}{i} \geq$ 층수 조건으로 일반화된다.

Q206 그래프 이론

6명이 모인 자리에서 임의의 두 사람은 '서로 아는 사이' 또는 '서로 모르는 사이' 중 하나다. 다음 중 항상 참인 것은?

6명의 아는/모르는 관계 (비둘기집)



- ① ① 서로 아는 3명 또는 서로 모르는 3명이 반드시 존재한다
- ② ② 6명 전원이 서로 아는 경우만 가능하다
- ③ ③ 서로 아는 3명도, 서로 모르는 3명도 없도록 배치할 수 있다
- ④ ④ 항상 서로 아는 4명이 존재한다

☞ 정답: ① 서로 아는 3명 또는 서로 모르는 3명이 반드시 존재한다

📖 핵심(람지 수 $R(3, 3) = 6$): 한 사람 A 에게서 나머지 5명으로 향하는 관계는 두 종류뿐이라, 비둘기집에 의해 같은 종류가 최소 3명(B, C, D) 있다. 이 셋이 그 종류로 서로 한 쌍이라도 연결되면 A 와 함께 단색 삼각형, 셋이 모두 반대 종류면 B, C, D 자체가 단색 삼각형. 어느 경우든 동색 삼각형이 존재.

💡 $R(3, 3) = 6$ 은 손쉽게 증명되지만 $R(5, 5)$ 의 정확한 값은 아직 아무도 모른다.

Q207 게임 이론 (Combinatorial)

돌 21개 더미에서 두 사람이 번갈아 1개, 2개, 또는 3개를 가져간다. 마지막 돌을 가져가는 사람이 이긴다. 최선을 다할 때의 결과는?



- ① ① 선공이 이긴다. 첫 수로 1개를 가져가면 된다
- ② ② 후공이 이긴다
- ③ ③ 선공이 이긴다. 첫 수로 3개를 가져가야 한다
- ④ ④ 비길 수 있다

정답: ① 선공이 이긴다. 첫 수로 1개를 가져가면 된다

핵심(뺄셈 게임): 4의 배수 개수가 남으면 그 차례 사람이 진다(P-포지션). 상대가 1 ~ 3 을 가져가면 나는 합이 4가 되도록 맞춰주면 되기 때문. $21 = 4 \cdot 5 + 1$ 이므로 선공이 1개를 가져가 20(=4의 배수)을 남기면 이후 항상 4 맞춤 전략으로 승리.

💡 이 게임의 그룬디(Grundy) 값은 $n \bmod 4$ 와 같아, 0일 때만 패배 위치다.

Q208 모듈러·합동식

$x \equiv 2 \pmod{3}$, $x \equiv 3 \pmod{5}$, $x \equiv 2 \pmod{7}$ 을 모두 만족하는 $0 \leq x < 105$ 인 정수 x 는?

- ① ① 17
- ② ② 23
- ③ ③ 52
- ④ ④ 98

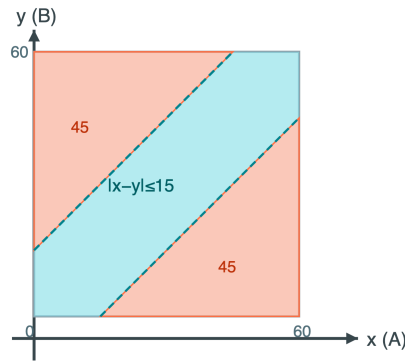
정답: ② 23

핵심(중국인 나머지정리): 3, 5, 7 이 서로소라 $\bmod 105$ 에서 해가 유일하게 존재. $x \equiv 2 \pmod{3}$ 과 $x \equiv 2 \pmod{7}$ 을 합치면 $x \equiv 2 \pmod{21}$, 즉 $x \in \{2, 23, 44, 65, 86\}$. 이 중 $\bmod 5$ 가 3 인 것은 23 ($23 = 4 \cdot 5 + 3$). 계산: $23 \bmod 3 = 2$, $\bmod 5 = 3$, $\bmod 7 = 2$. 모두 만족.

💡 중국인 나머지정리는 3 - 5세기 중국 수학서 '손자산경'의 닭·토끼 비슷한 문제에서 기원을 찾는다.

Q209 확률 (조건부·기하)

두 친구가 12시부터 1시 사이 임의의(균등·독립) 시각에 도착해 정확히 15분만 기다린 뒤 떠난다. 두 사람이 만날 확률은?



- ① ① $\frac{1}{4}$
- ② ② $\frac{7}{16}$
- ③ ③ $\frac{1}{2}$
- ④ ④ $\frac{9}{16}$

정답: ② $\frac{7}{16}$

핵심(기하확률): 도착 시각을 $(x, y) \in [0, 60]^2$ 로 두면 만남 조건은 $|x - y| \leq 15$. 여사건은 $|x - y| > 15$, 즉 양쪽 직각삼각형 두 개로 넓이 $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 45^2 = 45^2$. 따라서 만날 확률 $= 1 - \frac{45^2}{60^2} = 1 - \frac{2025}{3600} = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$.

💡 대기 시간을 w 로 두면 일반식은 $1 - \left(\frac{60-w}{60}\right)^2$ 로, 약속 시간 설계에 쓰인다.

Q210 다이오판티

펠 방정식 $x^2 - 2y^2 = 1$ 의 양의 정수해 중 ****가장 작은**** (x, y) 는? (단 $x, y \geq 1$.)

- ① ① (2, 1)
- ② ② (3, 2)
- ③ ③ (5, 3)
- ④ ④ (7, 5)

정답: ② (3, 2)

핵심: $y = 1$ 이면 $x^2 = 3$ (불가), $y = 2$ 이면 $x^2 = 1 + 2 \cdot 4 = 9$, $x = 3 \checkmark$. 따라서 기본해는 (3, 2). 이후 모든 해는 $x_n + y_n\sqrt{2} = (3 + 2\sqrt{2})^n$ 으로 생성된다(예: 다음 해 (17, 12)).

💡 $\frac{x}{y}$ 의 값 $\frac{3}{2}, \frac{17}{12}, \dots$ 는 $\sqrt{2}$ 의 연분수 근사이며 점점 정밀해진다.

Q211 귀납법

방정식 $x^3 + 2y^3 = 4z^3$ 의 정수해를 모두 찾는 문제다. 무한강하법(infinite descent)으로 도달하는 결론은?

- ① ① 자명해 (0, 0, 0) 뿐이다
- ② ② 무수히 많은 해가 있다
- ③ ③ (2, 1, 1) 이 유일한 양의 해다
- ④ ④ 해가 전혀 없다

정답: ① 자명해 (0, 0, 0) 뿐이다

핵심(무한강하): $x^3 = 4z^3 - 2y^3$ 이 짝수이므로 x 도 짝수, $x = 2x_1$. 대입해 $8x_1^3 + 2y^3 = 4z^3 \Rightarrow 4x_1^3 + y^3 = 2z^3$. 다시 y 가 짝수, $y = 2y_1$, 정리하면 $2x_1^3 + 4y_1^3 = z^3$ 꼴로 z 도 짝수. 이렇게 x, y, z 가 모두 무한히 2로 나뉘지므로 양의 해는 존재할 수 없고 (0, 0, 0) 만 남는다.

💡 페르마가 $n = 4$ 인 페르마의 마지막 정리를 증명할 때 쓴 바로 그 무한강하 기법이다.

Q212 재미 두뇌

봉투 두 개에 돈이 들어 있고 한쪽이 다른 쪽의 정확히 2배다. 당신이 한 봉투를 열어 X 원을 봤다. '바꾸면 기댓값이

$\frac{1}{2}(2X) + \frac{1}{2}(\frac{X}{2}) = \frac{5X}{4} > X$ 라 무조건 이득'이라는 논리의 허점은?

- ① ① 두 봉투에 균등한 사전분포를 줄 수 없어 '절반 확률' 가정이 부당하다
- ② ② 기댓값 계산의 곱셈이 틀렸다
- ③ ③ 봉투를 바꾸면 실제로 항상 손해다
- ④ ④ X 가 짝수일 때만 성립한다

정답: ① 두 봉투에 균등한 사전분포를 줄 수 없어 '절반 확률' 가정이 부당하다

핵심: '본 금액 X 가 작은 쪽일 확률 = 큰 쪽일 확률 = $\frac{1}{2}$ ' 라는 가정은 모든 금액에 동시에 성립할 수 없다. 만약 항상 그렇다면 봉투 안 금액의 사전분포가 양의 실수 전체에 균등해야 하는데, 그런 확률분포는 존재하지 않는다(전체 합이 1이 될 수 없음). 실제 사전분포를 고정하면 큰 X 일수록 '이미 큰 쪽을 봤을' 확률이 높아져 $\frac{5}{4}$ 이득이 사라진다.

💡 이 역설은 '부적절한 사전분포(improper prior)'를 무심코 쓰면 어떤 모순이 생기는지 보여주는 대표 사례다.

Q213 정수론 (심화)

100! 을 십진법으로 적었을 때 끝에 연속으로 나오는 0 의 개수는? (르장드르 공식: 소수 p 가 $n!$ 을 나누는 지수는 $\sum_{i \geq 1} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor$.)

- ① ① 20
- ② ② 24
- ③ ③ 25
- ④ ④ 50

정답: ② 24

핵심: 끝 0의 개수는 100! 의 소인수 $10 = 2 \cdot 5$ 의 개수, 즉 $\min(2$ 의 지수, 5 의 지수)인데 2가 훨씬 많으므로 5의 지수가 답.

$\left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{25} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{125} \right\rfloor = 20 + 4 + 0 = 24$. 따라서 끝의 0은 24개.


💡 이 '5를 세는' 계산은 p 진 가치(르장드르)의 가장 기초적 응용으로, 팩토리얼의 소인수 구조를 한눈에 준다.


Q214 점화식

수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 2, a_{n+1} = 2a_n + 1$ 로 정의될 때 a_6 의 값은?

- ① ① 63
- ② ② 95
- ③ ③ 127
- ④ ④ 191

 **정답: ② 95**

 **핵심:** 비제차 선형점화는 양변에 1을 더해 등비수열로 바꾼다. $a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$ 이므로 $b_n = a_n + 1$ 은 $b_1 = 3$, 공비 2 인 등비수열. 따라서 $a_n + 1 = 3 \cdot 2^{n-1}$, 즉 $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$. $a_6 = 3 \cdot 32 - 1 = 95$.


 이 수열은 2진법으로 보면 10, 101, 1011, ... 처럼 자릿수가 한 칸씩 늘며 패턴이 반복된다.

Q215 비둘기집 응용

$\{1, 2, \dots, 100\}$ 에서 수를 고른다. 고른 수 중에 반드시 '연속한 두 수'(차가 1)가 존재하도록 하려면 최소 몇 개를 골라야 하는가?

- ① ① 50
- ② ② 51
- ③ ③ 52
- ④ ④ 99

 **정답: ② 51**


 **핵심:** 비둘기집을 위한 적절한 칸(쌍) 분할. $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \dots, \{99, 100\}$ 의 50개 쌍으로 나눈다. 51개를 고르면 비둘기집 원리로 어떤 쌍에서 두 수를 모두 고르게 되어 연속한 두 수가 생긴다. 반면 홀수 50개 $\{1, 3, \dots, 99\}$ 는 연속쌍이 없으므로 50개로는 보장 못 한다. 따라서 최소 51.

Q216 모듈러·합동식

7^{2026} 의 일의 자리 숫자는?

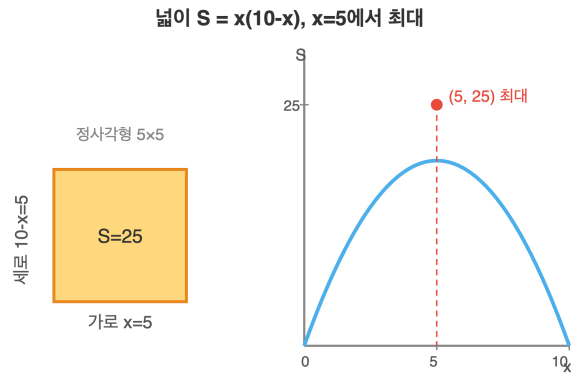
- ① ① 1
- ② ② 3
- ③ ③ 7
- ④ ④ 9

 **정답: ④ 9**

 **핵심:** 일의 자리는 $(\text{mod } 10)$ 의 거듭제곱 주기. $7^1 \equiv 7, 7^2 \equiv 9, 7^3 \equiv 3, 7^4 \equiv 1 \pmod{10}$ 으로 주기 4. $2026 = 4 \cdot 506 + 2$ 이므로 $7^{2026} \equiv 7^2 \equiv 9 \pmod{10}$.

Q217 극값 문제

둘레의 길이가 20 으로 고정된 직사각형의 넓이의 최댓값은?



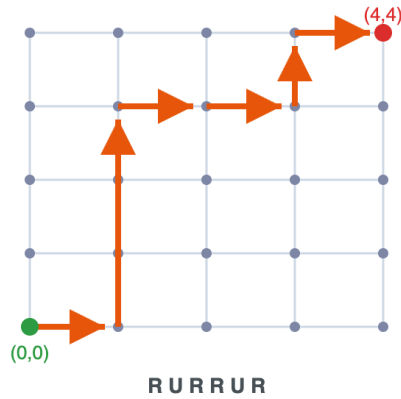
- ① ① 16
- ② ② 24
- ③ ③ 25
- ④ ④ 30

정답: ③ 25

핵심: 합이 일정할 때 곱은 두 수가 같을 때 최대(AM-GM). 가로 x , 세로 $10 - x$ 이면 넓이 $S = x(10 - x) = 25 - (x - 5)^2 \leq 25$, 등호는 $x = 5$. 즉 정사각형 5×5 일 때 넓이 25 가 최대.

Q218 조합 (심화)

4×4 격자의 좌하단 꼭짓점에서 우상단 꼭짓점까지, 오른쪽 또는 위로만 한 칸씩 이동하는 최단 경로의 수는?



- ① ① 35
- ② ② 56
- ③ ③ 70
- ④ ④ 126

정답: ③ 70

핵심: 오른쪽 R 4번, 위 U 4번의 배열 순서를 고르는 문제. 전체 8번의 이동 중 어디에 R 을 놓을지 고르면 되므로 $\binom{8}{4} = 70$.

Q219 불변량과 단조량

칠판에 1, 2, 3, ..., 2026 이 적혀 있다. 매번 두 수 a, b 를 지우고 그 자리에 $|a - b|$ 를 적는 연산을 반복한다. 수가 하나 남을 때까지 진행했을 때, 마지막에 남는 수의 홀짝은?

칠판: 1, 2, 3, ..., 2025, 2026
두 수 a, b 를 지우고 $|a - b|$ 를 적기

a

b

→

|a - b|

불변량: 전체 합 홀짝(패리티)

a + b 와 |a - b| 의 홀짝은 같음
⇒ 합 홀짝은 연산 후에도 변하지 않음

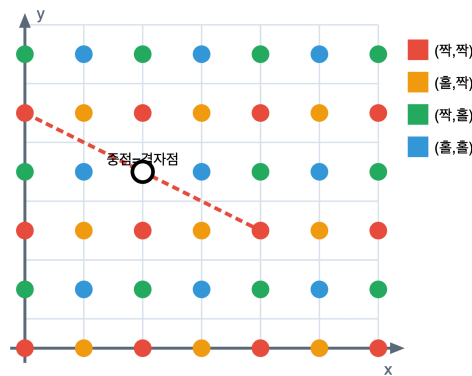
- ① ① 짝수
- ② ② 홀수
- ③ ③ 항상 0
- ④ ④ 진행 순서에 따라 다르다

☞ **정답: ② 홀수**

📖 **핵심 불변량:** 모든 수의 합 홀짝. a, b 를 $|a - b|$ 로 바꾸면 합은 $a + b$ 만큼 줄고 $|a - b|$ 만큼 늘어 변화량 $a + b - |a - b| = 2\min(a, b)$ 로 항상 짝수 변화 → 합 홀짝 보존. 처음 합 $1 + 2 + \dots + 2026 = \frac{2026 \cdot 2027}{2} = 1013 \cdot 2027$ 은 (홀) × (홀) = 홀수. 따라서 마지막 한 수도 홀수.

Q220 비둘기집 응용

평면의 격자점(두 좌표가 모두 정수인 점) 5 개를 임의로 고르면, 그중 어떤 두 점의 중점도 격자점이 되는 쌍이 항상 존재한다. 이 명제는 참인가?



- ① ① 참 - 좌표 홀짝 4가지로 비둘기집
- ② ② 거짓 - 반례가 존재
- ③ ③ 점이 6개 이상이어야 참
- ④ ④ 점들이 일직선일 때만 참

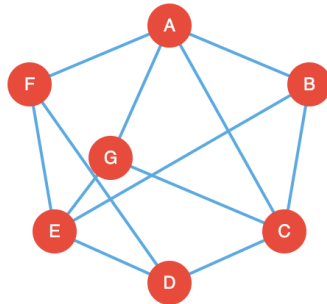
☞ **정답: ① 참 - 좌표 홀짝 4가지로 비둘기집**

📖 **핵심:** 두 점 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 의 중점이 격자점일 필요충분조건은 $x_1 \equiv x_2, y_1 \equiv y_2 \pmod{2}$. 좌표의 홀짝쌍은 (짝, 짝), (짝, 홀), (홀, 짝), (홀, 홀) 의 4종류. 점 5개 중 두 점은 같은 종류(비둘기집)이고, 그 두 점의 중점은 격자점이다.

Q221 그래프 이론

7 명이 모인 모임에서 모든 사람이 '정확히 3 명'과 악수했다고 한다. 이런 상황이 가능한가?

정점 7개, 각 정점 차수 3



차수 합 $7 \times 3 = 21$ (홀수!) 불가능

- ① ① 가능하다
- ② ② 불가능하다
- ③ ③ 짝수 명일 때만 가능
- ④ ④ 정보가 부족하다

정답: ② 불가능하다

핵심: 악수 정리(차수 합 = 간선 수의 2배). 모든 차수가 3 이면 차수 총합 = $7 \times 3 = 21$ 인데, 이는 간선 수의 두 배여야 하므로 짝수여야 한다. 21 은 홀수이므로 모순. 따라서 불가능.

Q222 확률 (조건부·기하)

1, 2, 3, 4 가 적힌 카드 네 장을 한 줄로 임의로 배열할 때, 어떤 위치에도 그 위치의 번호와 같은 숫자가 오지 않을(완전한 어긋남, 교란순열) 확률은?

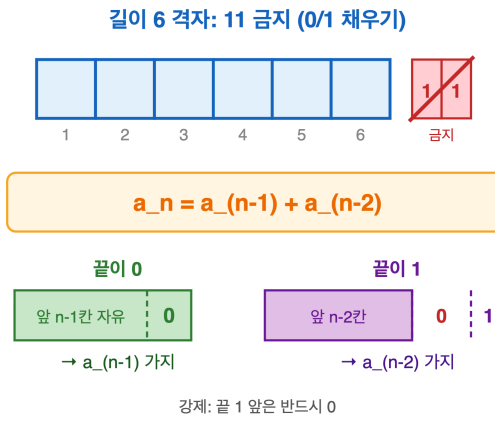
- ① ① $\frac{1}{3}$
- ② ② $\frac{3}{8}$
- ③ ③ $\frac{1}{2}$
- ④ ④ $\frac{5}{12}$

정답: ② $\frac{3}{8}$

핵심: 교란순열 수 $D_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$. $D_4 = 4! \left(1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24}\right) = 9$. 전체 배열 $4! = 24$ 이므로 확률 = $\frac{9}{24} = \frac{3}{8}$.

Q223 점화식

0 과 1 로 이루어진 길이 6 의 수열 중, 1 이 연속해서 두 번 이상 나오지 않는 것의 개수는?



- ① ① 13
- ② ② 21
- ③ ③ 32
- ④ ④ 34

정답: ② 21

핵심: 길이 n 의 그런 수열 수를 a_n 이라 하면, 마지막 칸이 0 이면 앞 $n - 1$ 칸은 자유(a_{n-1}), 1 이면 그 앞 칸은 반드시 0 이고 그 앞 $n - 2$ 칸 자유(a_{n-2}). 따라서 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ (피보나치). $a_1 = 2, a_2 = 3$ 에서 $a_3 = 5, a_4 = 8, a_5 = 13, a_6 = 21$.

💡 이 수는 피보나치 수 F_{n+2} 와 정확히 일치한다.

Q224 다이오판티

자연수 n 에 대해 $n^4 + 4$ 가 소수가 되는 n 을 모두 구하면?

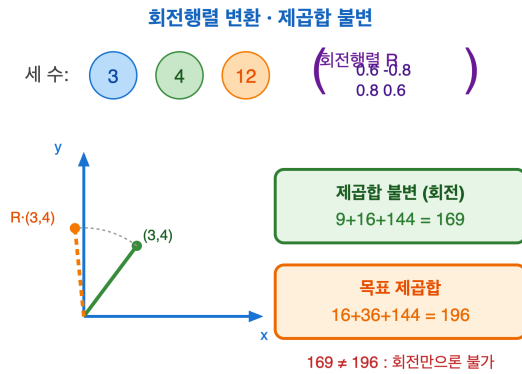
- ① ① $n = 1$ 뿐
- ② ② 모든 자연수
- ③ ③ 소수 n 일 때
- ④ ④ 그런 n 은 없다

정답: ① $n = 1$ 뿐

핵심: 소피 제르맹 항등식. $n^4 + 4 = n^4 + 4n^2 + 4 - 4n^2 = (n^2 + 2)^2 - (2n)^2 = (n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2)$. 두 인수가 모두 1 보다 크면 합성수다. 작은 인수 $n^2 - 2n + 2 = (n - 1)^2 + 1 = 1$ 이 되는 경우는 $n = 1$ 뿐이고 이때 $n^4 + 4 = 5$ (소수). $n \geq 2$ 이면 두 인수 모두 ≥ 2 라 합성수. 따라서 $n = 1$.

Q225 불변량과 단조량

칠판에 세 수 3, 4, 12 가 적혀 있다. 매번 두 수 a, b 를 골라 $(0.6a - 0.8b, 0.8a + 0.6b)$ 로 동시에 바꾼다. 이 연산을 반복해서 세 수를 4, 6, 12 로 만들 수 있는가?



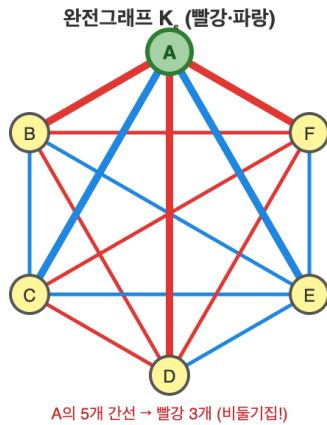
- ① ① 가능하다
- ② ② 불가능하다
- ③ ③ 한 번이면 가능
- ④ ④ 처음 두 수 선택에 따라 다르다

정답: ② 불가능하다

핵심 불변량: 세 수의 제곱합. $(0.6a - 0.8b)^2 + (0.8a + 0.6b)^2 = a^2 + b^2$ (회전이라 노름 보존)이므로 손대지 않은 수까지 합치면 세 수의 제곱합은 항상 일정하다. 시작값 $3^2 + 4^2 + 12^2 = 169$, 목표값 $4^2 + 6^2 + 12^2 = 196$. $169 \neq 196$ 이므로 불가능.

Q226 그래프 이론

6 명의 사람이 모이면, 서로 모두 아는 3 명이 있거나, 서로 모두 모르는 3 명이 반드시 존재한다. 이 명제는 항상 참인가?



- ① ① 항상 참 (람지 수 $R(3, 3) = 6$)
- ② ② 거짓 - 6명으로는 부족
- ③ ③ 사람이 홀수일 때만 참
- ④ ④ 9명 이상이어야 참

정답: ① 항상 참 (람지 수 $R(3, 3) = 6$)

핵심: 한 사람 P 에서 나머지 5명과 관계를 두 색(아는/모르는)으로 보면, 비둘기집에 의해 같은 색이 3명 이상 있다. 그 색이 '아는 사이'라 하자(다른 경우도 대칭). 그 3명끼리 한 쌍이라도 '아는 사이'면 P 와 함께 3명 친구 완성, 아무도 아니면 그 3명이 서로 모르는 3명. 어느 경우든 단색 삼각형이 생긴다. 즉 $R(3, 3) = 6$.

Q227 조합 (심화)

$\sum_{k=0}^{10} k \binom{10}{k}$ 의 값은?

- ① ① 5110
- ② ② 5120
- ③ ③ 5210
- ④ ④ 10240

정답: ② 5120

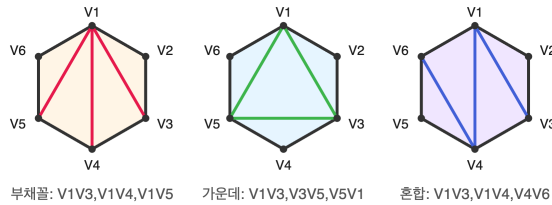
핵심(이중계산/위원장 논법): n 명에서 위원회를 뽑고 그중 위원장 1 명을 정하는 방법을 두 가지로 센다. (위원회 크기 k 먼저)

$\sum_k k \binom{n}{k}$, (위원장 먼저) 위원장 n 가지 \times 나머지 각자 포함여부 2^{n-1} . 따라서 $\sum_k k \binom{n}{k} = n 2^{n-1}$. $n = 10$ 이면 $10 \cdot 2^9 = 10 \cdot 512 = 5120$.

Q228 점화식

볼록 육각형의 꼭짓점을 잇는 대각선으로 내부를 삼각형 4 개로 나누는 '삼각분할'의 가짓수는? (대각선들은 서로 교차하지 않음)

볼록 육각형의 삼각분할 (대각선 3개 \rightarrow 삼각형 4개)



전체 삼각분할 가짓수 = 카탈란 수
 $C_4 = (1/5) \cdot C(8,4) = 14$ 가지

- ① ① 5
- ② ② 14
- ③ ③ 42
- ④ ④ 132

정답: ② 14

핵심: 볼록 $(n + 2)$ 각형의 삼각분할 수는 카탈란 수 C_n . 육각형은 $n + 2 = 6 \Rightarrow n = 4$. C_n 은 점화 $C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-1-i}$ 또는 $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ 로 $C_4 = \frac{1}{5} \binom{8}{4} = \frac{70}{5} = 14$.

같은 카탈란 수는 괄호 짝짓기, 격자경로, 이진트리 개수 등 수십 가지 조합 문제에서 똑같이 등장한다.

Q229 정수론 (심화)

소수 $p = 17$ 에 대하여 $15! \pmod{17}$ 의 값을 구하여라. (힌트: 윌슨 정리 $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$)

- ① ① 1
- ② ② 16
- ③ ③ 8
- ④ ④ 15

정답: 1

윌슨 정리에 의해 $16! \equiv -1 \pmod{17}$. 한편 $16! = 16 \times 15!$ 이고 $16 \equiv -1 \pmod{17}$ 이므로 $-15! \equiv -1 \pmod{17}$, 즉 $15! \equiv 1 \pmod{17}$.

윌슨 정리는 역도 성립하여 $(n-1)! \equiv -1 \pmod{n}$ 이면 n 은 소수다. 이론적 소수 판정 기준이지만 계산량이 커 실용적이진 않다.

Q230 정수론 (심화)

36 이하의 양의 정수 중 36 과 서로소인 것의 개수를 구하여라. (오일러 토션트 $\varphi(36)$)

- ① ① 12
- ② ② 18
- ③ ③ 11
- ④ ④ 24

정답: 12

$36 = 2^2 \cdot 3^2$. 오일러 토션트 함수의 곱셈성과 $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$ 에 의해 $\varphi(36) = \varphi(4)\varphi(9) = (4-2)(9-3) = 2 \cdot 6 = 12$. 또는 $36 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 12$.

$\varphi(n)$ 은 n 미만에서 n 과 서로소인 수의 개수로, 오일러 정리 $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ 의 지수로 등장한다.

Q231 모듈러·합동식

다음은 모두 만족하는 가장 작은 양의 정수를 구하여라.

$$x \equiv 2 \pmod{3}, \quad x \equiv 3 \pmod{5}, \quad x \equiv 2 \pmod{7}$$

- ① ① 23
- ② ② 128
- ③ ③ 17
- ④ ④ 58

정답: 23

$x \equiv 2 \pmod{3}$ 와 $x \equiv 2 \pmod{7}$ 에서 $x \equiv 2 \pmod{21}$. $x = 21k + 2$ 를 $x \equiv 3 \pmod{5}$ 에 대입하면 $21k + 2 \equiv k + 2 \equiv 3$, 즉 $k \equiv 1 \pmod{5}$. 최소 $k = 1$ 에서 $x = 23$. (중국인 나머지정리)

세 법 3, 5, 7 이 서로소이므로 중국인 나머지정리는 mod 105 에서 유일한 해를 보장한다.

Q232 조합 (심화)

$$\sum_{k=1}^{99} \frac{1}{k(k+1)}$$

의 값을 구하여라.

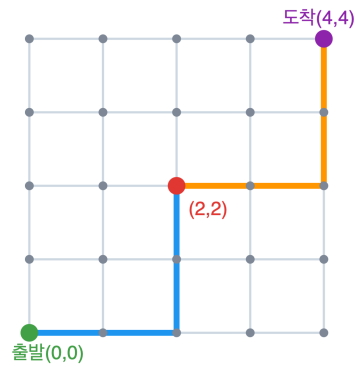
- ① ① $\frac{99}{100}$
- ② ② $\frac{1}{100}$
- ③ ③ $\frac{100}{99}$
- ④ ④ 1

정답: $\frac{99}{100}$

부분분수 분해 $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ 를 쓰면 합이 망원경(텔레스코핑)으로 소거되어 $(1 - \frac{1}{2}) + \dots + (\frac{1}{99} - \frac{1}{100}) = 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}$.

Q233 조합 (심화)

아래 격자에서 좌하단 (0, 0) 에서 우상단 (4, 4) 까지 오른쪽 또는 위로만 이동한다. 중간점 (2, 2) 를 반드시 지나는 경로의 수는?



- ① ① 36
- ② ② 70
- ③ ③ 20
- ④ ④ 16

정답: 36

(0, 0) → (2, 2) 경로는 오른쪽 2번, 위 2번을 배열하는 $\binom{4}{2} = 6$ 가지. (2, 2) → (4, 4) 도 같은 이유로 $\binom{4}{2} = 6$ 가지. 두 구간은 독립이므로 곱의 법칙에 의해 $6 \times 6 = 36$.

한 점을 반드시 통과시키는 조건은 전체 경로 수 $\binom{8}{4} = 70$ 을 그 점 기준으로 분해하는 전형적 기법이다.

Q234 비둘기집 응용

임의의 정수 a_1, a_2, \dots, a_7 이 주어졌다. 다음 중 항상 참인 것은?

- ① ① 어떤 연속한 항들의 합 $a_i + a_{i+1} + \dots + a_j$ 가 7의 배수다
- ② ② 모든 a_i 가 서로 다르다
- ③ ③ 합 $a_1 + \dots + a_7$ 이 항상 7의 배수다
- ④ ④ 어떤 항이 반드시 7의 배수다

정답: ① 어떤 연속한 항들의 합 $a_i + a_{i+1} + \dots + a_j$ 가 7의 배수다

해설: 부분합과 비둘기집. 부분합 $S_0 = 0, S_k = a_1 + \dots + a_k (k = 1, \dots, 7)$ 의 8개 값을 7로 나눈 나머지를 본다. 나머지는 $0 \sim 6$ 의 7종류뿐이므로 비둘기집 원리로 $S_i \equiv S_j (i < j)$ 인 두 값이 존재한다. 그러면 $S_j - S_i = a_{i+1} + \dots + a_j$ 가 7의 배수다.

💡 이 논법은 '임의의 정수 n 개 중 합이 n 의 배수인 연속 구간이 반드시 존재한다'로 일반화된다.

Q235 극값 문제

$x > 0$ 일 때 $x + \frac{4}{x}$ 의 최솟값을 구하여라.

- ① ① 4
- ② ② 2
- ③ ③ 8
- ④ ④ $\sqrt{2}$

정답: 4

해설: 산술-기하 평균 부등식 $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ 에서 $x + \frac{4}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{4}{x}} = 2\sqrt{4} = 4$. 등호는 $x = \frac{4}{x}$, 즉 $x = 2$ 에서 성립.

Q236 극값 문제

실수 a, b, c 가 $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ 을 만족할 때 $a + 2b + 2c$ 의 최댓값을 구하여라.

- ① ① 3
- ② ② $\sqrt{5}$
- ③ ③ 9
- ④ ④ 5

정답: 3

해설: 코시-슈바르츠 부등식 $(a + 2b + 2c)^2 \leq (1^2 + 2^2 + 2^2)(a^2 + b^2 + c^2) = 9 \cdot 1 = 9$ 이므로 $a + 2b + 2c \leq 3$. 등호는 (a, b, c) 가 $(1, 2, 2)$ 와 평행, 즉 $a = \frac{1}{3}, b = c = \frac{2}{3}$ 에서 성립.

Q237 극값 문제

삼각형의 세 내각 A, B, C 에 대하여 $\sin A + \sin B + \sin C$ 의 최댓값을 구하여라.

- ① $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
- ② 3
- ③ $\sqrt{3}$
- ④ $\frac{3}{2}$

정답: $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

해설: \sin 은 구간 $(0, \pi)$ 에서 위로 볼록(오목)이다. Jensen 부등식에 의해 $\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3} \leq \sin \frac{A+B+C}{3} = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 따라서 합은 $\leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$ 이고 등호는 정삼각형 $A = B = C = \frac{\pi}{3}$ 에서 성립.

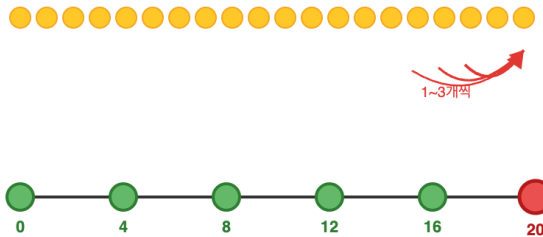
Tip: 이 최댓값은 반지름이 고정된 외접원에서 정삼각형의 둘레가 가장 길다는 사실과 연결된다.

Q238 게임 이론 (Combinatorial)

돌 20 개가 있다. 두 사람이 번갈아 1, 2, 또는 3 개를 가져가고, 마지막 돌을 가져가는 사람이 이긴다. 최선을 다할 때 누가 이기는가?

돌 20개 - 님(Nim) 게임

한 번에 1~3개 제거



초록 = P-포지션 (직전에 둔 사람이 이김)

20 = 4의 배수 → 후공 필승

4의 배수 자리마다 P-포지션

- ① 후공(두 번째 사람)
- ② 선공(첫 번째 사람)
- ③ 항상 비긴다
- ④ 첫 수에 따라 다르다

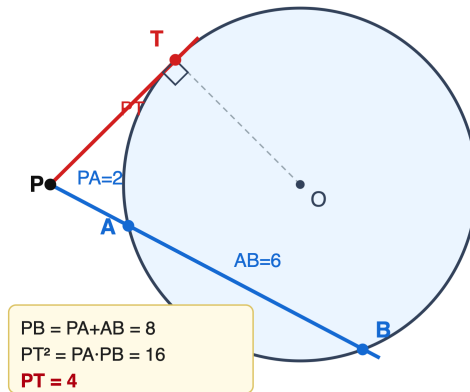
정답: ① 후공(두 번째 사람)

해설: 4의 배수가 패배 위치(P-포지션). 한 번에 1 ~ 3 개를 가져가므로 상대가 k 개를 가져가면 나는 $4 - k$ 개를 가져가 남은 돌 수를 항상 4의 배수로 유지할 수 있다. 시작값 20 은 4의 배수라서 둘 차례인 선공이 진다. 즉 후공이 이 전략으로 승리한다. (그런디값 $g(n) = n \bmod 4, g(20) = 0$ 이 패배 위치)

Tip: 이런 '뱀셈 게임'의 P-포지션은 항상 (가져갈 수 있는 최댓값 +1)의 배수가 된다.

Q239 올림피아드 기하

원 밖의 점 P 에서 원에 그은 접선의 접점을 T , 한 할선이 원과 만나는 두 점을 A, B 라 하자(P 에 가까운 쪽이 A). $PA = 2, AB = 6$ 일 때 접선의 길이 PT 를 구하여라.



- ① ① 4
- ② ② $\sqrt{12}$
- ③ ③ 6
- ④ ④ $2\sqrt{2}$

정답: 4

방역(접선-할선) 정리: $PT^2 = PA \cdot PB$. 여기서 $PB = PA + AB = 2 + 6 = 8$ 이므로 $PT^2 = 2 \cdot 8 = 16$, 따라서 $PT = 4$.

점 P 의 원에 대한 멍은 $PA \cdot PB$ 로 할선의 선택과 무관하게 일정하며, 외부 점에서는 항상 양수다.

Q240 함수방정식 (입문)

양의 실수에서 정의된 함수 f 가 모든 양의 실수 x, y 에 대해 $f(xy) = f(x) + f(y)$ 를 만족하고 $f(2) = 1$ 이다. $f(8)$ 의 값은?

- ① ① 3
- ② ② 1
- ③ ③ 8
- ④ ④ $\log 8$

정답: 3

$f(4) = f(2 \cdot 2) = 2f(2), f(8) = f(2 \cdot 4) = f(2) + f(4) = 3f(2) = 3$. (이 곱셈형 함수방정식의 연속해는 로그함수 $f(x) = \log_2 x$ 이며 실제로 $f(8) = \log_2 8 = 3$.)

덧셈을 곱셈으로 바꾸는 이 관계가 바로 로그의 본질이며, 코시 방정식 $g(u + v) = g(u) + g(v)$ 와 $x = e^u$ 치환으로 연결된다.

🧠 고등/올림피아드 사고력

총 40문제 · 문제와 정답·풀이 포함

Q241 불변량과 단조량

동전 3 개가 모두 앞면이다. 한 번의 조작에서 정확히 2 개의 동전을 뒤집는다. 이 조작을 여러 번 반복하여 3 개 모두 뒷면으로 만들 수 있는가?

- ① ① 불가능하다
- ② ② 가능하다
- ③ ③ 짝수 번이면 가능
- ④ ④ 동전 배치에 따라 다르다

🎯 정답: ① 불가능하다

📖 불변량: 앞면 개수의 홀짝성. 한 번 조작할 때 앞면 개수는 +2, 0, -2 중 하나만큼만 변하므로 홀짝성이 보존된다. 처음 앞면 개수는 3(홀수)이고 목표인 모두 뒷면은 앞면 0 개(짝수)다. 홀짝이 다르므로 도달할 수 없다.

💡 동전이 짝수 개(2, 4, ...)이면 같은 조작으로 전부 뒤집기가 가능해진다. 핵심은 시작과 목표의 홀짝 일치 여부다.

Q242 귀납법

방정식 $x^2 = 2y^2$ 을 만족하는 양의 정수 쌍 (x, y) 의 개수는?

- ① ① 0
- ② ② 1
- ③ ③ 무한히 많다
- ④ ④ 2

🎯 정답: 0

📖 무한강하법(무한하강). 해가 존재한다면 x 가 가장 작은 해를 택하자. $x^2 = 2y^2$ 에서 x^2 이 짝수이므로 x 는 짝수, $x = 2m$. 대입하면 $4m^2 = 2y^2 \Rightarrow y^2 = 2m^2$ 이라 (y, m) 역시 해이고 $y < x$. 더 작은 해가 끝없이 나오는 모순. 따라서 양의 정수해는 없다.

💡 이 결과는 $\sqrt{2}$ 가 무리수임과 동치이며, 페르마가 즐겨 쓴 무한강하법의 원형이다.

Q243 점화식

이차방정식 $x^2 - 7x + 11 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때 $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값을 구하여라.

- ① ① 27
- ② ② 49
- ③ ③ 25
- ④ ④ 38

🎯 정답: 27

📖 근과 계수의 관계(비에트): $\alpha + \beta = 7, \alpha\beta = 11$. 따라서 $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 49 - 22 = 27$.

💡 거듭제곱 합 $p_n = \alpha^n + \beta^n$ 은 점화식 $p_n = 7p_{n-1} - 11p_{n-2}$ 로 계산되어, 근과 계수의 관계가 선형 점화식으로 이어진다.

Q244 확률 (조건부·기하)

어떤 질병의 유병률은 1% 다. 검사는 환자를 99% 확률로 양성 판정하고(민감도), 건강한 사람을 2% 확률로 양성 판정한다(위양성). 한 사람이 양성 판정을 받았을 때 실제로 질병이 있을 확률은?

- ① ① $\frac{1}{3}$
- ② ② 0.99
- ③ ③ $\frac{1}{2}$
- ④ ④ 0.01

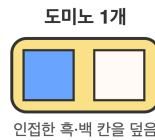
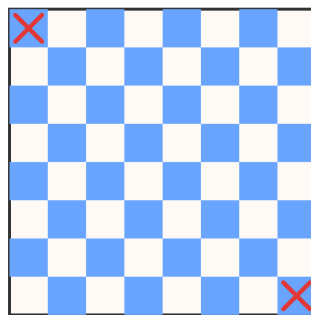
🎯 정답: $\frac{1}{3}$

📖 베이즈 정리. $P(\text{병} | +) = \frac{P(+ | \text{병})P(\text{병})}{P(+)}$. 분자 = $0.99 \times 0.01 = 0.0099$. 분모
 = $0.0099 + \underbrace{0.02 \times 0.99}_{\text{위양성}} = 0.0099 + 0.0198 = 0.0297$. 따라서 $\frac{0.0099}{0.0297} = \frac{1}{3} \approx 33\%$.

💡 유병률이 낮으면 정확도 높은 검사라도 양성예측도가 의외로 낮다 - '기저율의 오류'의 대표 사례다.

Q245 재미 두뇌

8 × 8 체스판에서 서로 마주보는 두 모서리 칸(둘 다 같은 색)을 제거했다. 남은 62칸을 1 × 2 도미노 31개로 빈틈없이 덮을 수 있는가?



- ① ① 항상 가능
- ② ② 항상 불가능
- ③ ③ 제거 위치에 따라 다르다
- ④ ④ 30개만 덮을 수 있다

🎯 정답: ② 항상 불가능

📖 핵심: 색칠 불변량. 흑백으로 칠하면 도미노 하나는 반드시 흑1·백1을 덮는다. 마주보는 두 모서리 칸은 같은 색(예: 둘 다 흑)이므로 제거 후 흑 30칸·백 32칸이 남는다. 도미노 31개는 흑31·백31을 요구하므로 색 개수가 맞지 않아 덮기가 불가능하다.

💡 이 문제는 '불변량으로 불가능을 증명'하는 고전 예제로, 단순 시행착오로는 결코 결론을 못 내린다.

Q246 불변량과 단조량

칠판에 $1, 2, \dots, n$ 이 적혀 있다. 매번 두 수 a, b 를 지우고 $a + b + ab$ 를 적는다. $n - 1$ 번 반복하면 한 수만 남는다. 마지막에 남는 수는?

- ① ① $(n + 1)! - 1$
- ② ② $n! - 1$
- ③ ③ 지우는 순서에 따라 달라진다
- ④ ④ $2^n - 1$

정답: ① $(n + 1)! - 1$

핵심: $a + b + ab = (a + 1)(b + 1) - 1$. 따라서 칠판의 각 수에 1을 더한 값들의 곱은 연산 동안 변하지 않는다(불변량). 처음 그 곱은 $\prod_{k=1}^n (k + 1) = (n + 1)!$. 마지막에 남는 수를 S 라 하면 $S + 1 = (n + 1)!$ 이므로 $S = (n + 1)! - 1$. 순서와 무관하다.

Q247 함수방정식 (입문)

0이 아닌 모든 실수 x 에 대해 $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x$ 를 만족하는 함수 f 가 있다. $f(2)$ 의 값은?

- ① ① -1
- ② ② 1
- ③ ③ 4
- ④ ④ 3

정답: ① -1

핵심: $x \rightarrow \frac{1}{x}$ 대입 후 연립. 주어진 식 $f(x) + 2f(1/x) = 3x \dots(1)$. x 대신 $1/x$ 를 넣으면 $f(1/x) + 2f(x) = 3/x$, 즉 $2f(x) + f(1/x) = 3/x \dots(2)$. $(2) \times 2 - (1): 3f(x) = \frac{6}{x} - 3x$, 따라서 $f(x) = \frac{2}{x} - x$. 그러므로 $f(2) = 1 - 2 = -1$.

Q248 조합 (심화)

$\sum_{k=1}^n k \cdot k!$ 을 닫힌 형(closed form)으로 나타내면? (단 n 은 양의 정수)

- ① ① $(n + 1)! - 1$
- ② ② $n! - 1$
- ③ ③ $(n + 1)!$
- ④ ④ $n \cdot n!$

정답: ① $(n + 1)! - 1$

핵심: 텔레스코핑. $k \cdot k! = (k + 1)! - k!$. 따라서 $\sum_{k=1}^n k \cdot k! = \sum_{k=1}^n [(k + 1)! - k!] = (n + 1)! - 1! = (n + 1)! - 1$. 중간 항이 모두 소거된다.

Q249 비둘기집 응용

집합 $\{1, 2, \dots, 2n\}$ 에서 임의로 $n + 1$ 개의 수를 고르면, 항상 그 중 한 수가 다른 수를 나눈다. 이를 보장하는 핵심 논증은?

- ① ① 각 수의 홀수 부분으로 분류하는 비둘기집
- ② ② 소인수분해의 유일성
- ③ ③ 수학적 귀납법
- ④ ④ 우연일 뿐 항상 보장되지는 않는다

정답: ① 각 수의 홀수 부분으로 분류하는 비둘기집

핵심: 각 수를 $2^a \cdot m$ (m 은 홀수)로 쓰면 $m \in \{1, 3, 5, \dots, 2n - 1\}$ 로 n 가지뿐이다. $n + 1$ 개를 고르면 비둘기집 원리에 의해 같은 홀수 부분 m 을 갖는 두 수 $2^a m, 2^b m$ ($a < b$)이 반드시 존재하고, 이때 작은 쪽이 큰 쪽을 나눈다.

Q250 극값 문제

양의 실수 a, b, c 에 대해 $(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$ 의 최솟값은?

- ① ① 6
- ② ② 9
- ③ ③ 3
- ④ ④ 최솟값이 없다

정답: ② 9

핵심: 산술-기하 평균. $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$ 이고 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{abc}}$. 두 식을 곱하면 $(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$. 등호는 $a = b = c$ 일 때 성립하므로 최솟값은 9.

Q251 모듈러·합동식

방정식 $x^2 + y^2 = 2023$ 을 만족하는 정수쌍 (x, y) 가 존재하는가?

- ① ① 존재한다
- ② ② 존재하지 않는다
- ③ ③ 유일하게 존재한다
- ④ ④ 무한히 많다

정답: ② 존재하지 않는다

핵심: (mod 4) 분석. 모든 정수에 대해 $n^2 \equiv 0$ 또는 $1 \pmod{4}$ 이므로 두 제곱의 합은 $0, 1, 2 \pmod{4}$ 만 가능하다. 그런데 $2023 = 4 \cdot 505 + 3$ 이므로 $2023 \equiv 3 \pmod{4}$. 따라서 정수해가 존재할 수 없다.

Q252 다이오판티

$x^2 - y^2 = 2024$ 를 만족하는 양의 정수쌍 (x, y) 의 개수는?

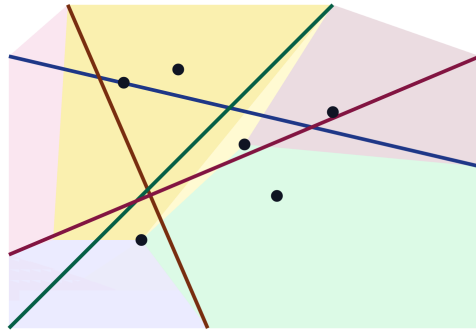
- ① ① 4
- ② ② 6
- ③ ③ 2
- ④ ④ 8

정답: ① 4

핵심: $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$. 두 인수 $x - y, x + y$ 는 합·차가 짝수여야 하므로 같은 패리티이고, 곱이 짝수 2024이므로 둘 다 짝수여야 한다. $x - y = 2a, x + y = 2b$ 로 두면 $ab = 506 = 2 \cdot 11 \cdot 23$. 506의 약수는 8개이므로 $a < b$ 인 쌍은 4개이고, 각 쌍이 양의 정수해 (x, y) 를 하나씩 준다. 따라서 4개.

Q253 조합 (심화)

평면 위에 n 개의 직선이 있고, 어느 두 직선도 평행하지 않으며 어느 세 직선도 한 점에서 만나지 않는다. 이때 평면이 나뉘는 영역의 최대 개수는?



- ① ① $1 + n + \binom{n}{2}$
- ② ② 2^n
- ③ ③ n^2
- ④ ④ $1 + \binom{n}{2}$

☞ 정답: ① $1 + n + \binom{n}{2}$

책 핵심: 차분 점화. k 번째 직선은 앞선 $k-1$ 개의 직선과 서로 다른 $k-1$ 개의 점에서 만나 자신이 k 개의 조각으로 나뉘고, 각 조각이 기존 영역 하나를 둘로 가른다. 즉 영역 수 $R_k = R_{k-1} + k, R_0 = 1$. 따라서 $R_n = 1 + \sum_{k=1}^n k = 1 + n + \binom{n}{2}$.

Q254 귀납법

방정식 $x^2 + y^2 = 3z^2$ 의 정수해가 $x = y = z = 0$ 뿐임을 증명하려 한다. 핵심 논법은?

- ① ① 무한강하법 (mod 3)
- ② ② 산술-기하 평균
- ③ ③ 비둘기집 원리
- ④ ④ 가우스 정수 분해

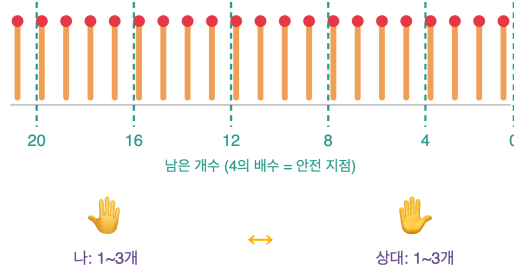
☞ 정답: ① 무한강하법 (mod 3)

책 핵심: (mod 3)에서 제곱수는 0, 1뿐이다. $x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod{3}$ 이라면 $x \equiv y \equiv 0 \pmod{3}$ 이어야 한다. 그러면 좌변이 9의 배수이므로 $3z^2$ 도 9의 배수, 즉 $3 \mid z$. $x = 3x_1, y = 3y_1, z = 3z_1$ 로 두면 $x_1^2 + y_1^2 = 3z_1^2$ 로 같은 형태의 더 작은 해를 얻는다. 0이 아닌 최소 양의 해가 존재한다는 가정에 모순(무한강하)이므로 자명해뿐이다.

Q255 게임 이론 (Combinatorial)

성냥개비 21개가 있다. 두 사람이 번갈아 1개 - 3개를 가져가고, 마지막 성냥을 가져가는 사람이 이긴다. 선공이 이기려면 첫 수에서 몇 개를 가져가야 하는가?

성냥개비 21개 (한 번에 1~3개)



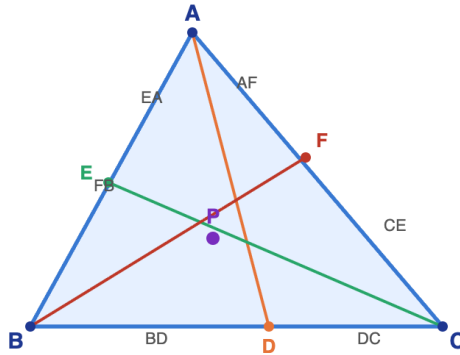
- ① ① 1개
- ② ② 2개
- ③ ③ 3개
- ④ ④ 선공은 반드시 진다

🎯 정답: ① 1개

📖 핵심: 상대에게 항상 '4의 배수'를 남기면 이긴다. 내가 남긴 더미가 4의 배수일 때, 상대가 k 개($1 \leq k \leq 3$)를 가져가면 나는 $4 - k$ 개를 가져가 매 라운드 정확히 4개씩 줄일 수 있다. $21 = 4 \cdot 5 + 1$ 이므로 선공이 먼저 1개를 가져가 20(4의 배수)을 남기면 이 전략으로 필승한다.

Q256 올림피아드 기하

삼각형 ABC 에서 변 BC, CA, AB 위에 각각 점 D, E, F 가 있다. 세 선분(체비안) AD, BE, CF 가 한 점에서 만날 필요충분조건은?



- ① ① $\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$
- ② ② 세 비가 모두 1일 때만
- ③ ③ $BD + CE + AF = 0$
- ④ ④ 항상 한 점에서 만난다

정답: ① $\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$

핵심: 체바(Ceva) 정리. AD, BE, CF 가 한 점에서 만날 필요충분조건은 $\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$ 이다. 넓이비(같은 높이를 갖는 삼각형의 밑변비)나 메넬라우스 정리로 증명할 수 있다. 무게중심(세 중선)은 세 비가 모두 1인 특수한 경우.

체바 정리에서 점들이 변의 '연장선' 위에 있으면 부호를 붙인 비의 곱이 -1인 메넬라우스 정리로 자연스럽게 이어진다.

Q257 함수방정식 (입문)

모든 실수 x, y 에 대해 $f(x)f(y) - f(xy) = x + y$ 를 만족하는 함수 $f: R \rightarrow R$ 를 구하면?

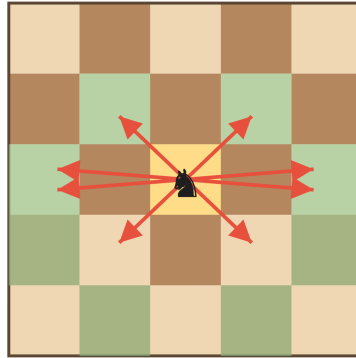
- ① ① $f(x) = x + 1$
- ② ② $f(x) = x$
- ③ ③ $f(x) = x^2 + 1$
- ④ ④ 그러한 함수는 없다

정답: ① $f(x) = x + 1$

핵심: 특수값 대입. $x = y = 0$ 을 넣으면 $f(0)^2 - f(0) = 0$ 이므로 $f(0) \in \{0, 1\}$. 다음 $y = 0$ 을 넣으면 $f(x)f(0) - f(0) = x$. 만약 $f(0) = 0$ 이면 $0 = x$ 가 모든 x 에서 성립해야 하므로 모순. 따라서 $f(0) = 1$ 이고 $f(x) - 1 = x$, 즉 $f(x) = x + 1$. 원식에 대입하면 $(x + 1)(y + 1) - (xy + 1) = x + y$ 로 성립한다.

Q258 재미 두뇌

체스판에서 나이트(기사)가 어떤 칸에서 출발하여 여러 번 이동한 뒤 처음 칸으로 정확히 돌아왔다. 이때 이동 횟수는 항상 어떤 성질을 갖는가?



출발 칸과 8개 도착 칸은 모두 같은 색

- ① ① 항상 짝수
- ② ② 항상 홀수
- ③ ③ 항상 3의 배수
- ④ ④ 아무 값이나 가능

정답: ① 항상 짝수

핵심: 색 불변량. 나이트는 한 번 움직일 때마다 칸의 색이 반드시 흑↔백으로 바뀐다. 출발 칸과 도착 칸이 같으면 색도 같아야 하므로 색이 짝수 번 바뀌어야 한다. 따라서 이동 횟수는 항상 짝수이다.

Q259 조합 (심화)

$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \dots + \binom{10}{2}$ 의 값은?

- ① ① 165
- ② ② 120
- ③ ③ 210
- ④ ④ 330

정답: ① 165

핵심: 하키스틱(hockey stick) 항등식 $\sum_{k=r}^n \binom{k}{r} = \binom{n+1}{r+1}$. 여기서 $r = 2, n = 10$ 이므로 합은 $\binom{11}{3} = 165$. (조합론적으로: $\{1, \dots, 11\}$ 에서 세 수를 고를 때 가장 큰 수 $k + 1$ 로 분류하면 각 경우의 수가 $\binom{k}{2}$ 이 되는 이중계산.)

Q260 정수론 (심화)

3^{1000} 의 끝 두 자리 수(즉 $3^{1000} \pmod{100}$)는? (오일러 정리 활용)

- ① ① 01
- ② ② 43
- ③ ③ 49
- ④ ④ 81

정답: ① 01

핵심: 100 에 대한 3 의 위수를 찾는다. $3^{10} \equiv 49, 49^2 = 2401 \equiv 1 \pmod{100}$ 이므로 $3^{20} \equiv 1 \pmod{100}$ (위수 20, $\phi(100) = 40$ 의 약수). $1000 = 20 \times 50$ 이므로 $3^{1000} \equiv (3^{20})^{50} \equiv 1 \pmod{100}$. 끝 두 자리는 01.

💡 실제 위수가 $\phi(n)$ 보다 작은 약수일 때, 거듭제곱이 더 빨리 순환한다.

Q261 조합 (심화)

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$ 를 만족하는 음이 아닌 정수해 (x_1, x_2, x_3, x_4) 의 개수는? (막대와 별)

- ① ① 455
- ② ② 364
- ③ ③ 560
- ④ ④ 220

정답: ① 455

핵심: 동일한 공 12 개를 칸 4 개에 나누기. 공 12 개 사이에 칸막이 막대 3 개를 배치하는 방법 수이므로 $\binom{12+3}{3} = \binom{15}{3} = 455$.

Q262 조합 (심화)

$\sum_{k=1}^{99} \frac{1}{k(k+1)}$ 의 값은? (텔레스코핑/망원합)

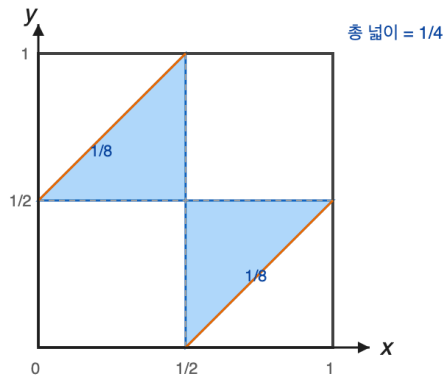
- ① ① $\frac{99}{100}$
- ② ② $\frac{1}{100}$
- ③ ③ $\frac{100}{99}$
- ④ ④ $\frac{49}{50}$

정답: ① $\frac{99}{100}$

핵심: 부분분수 분해 후 소거. $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ 이므로 합은 $(1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \dots + (\frac{1}{99} - \frac{1}{100}) = 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}$.

Q263 확률 (조건부·기하)

길이 1 인 막대를 서로 독립인 임의의 두 점에서 잘라 세 조각으로 나눈다. 이 세 조각으로 삼각형을 만들 수 있을 확률은? (기하확률)



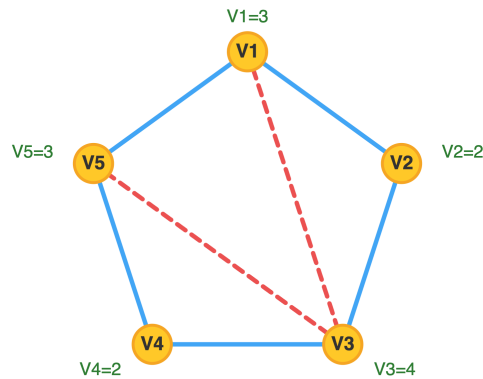
- ① ① $\frac{1}{4}$
- ② ② $\frac{1}{2}$
- ③ ③ $\frac{2}{3}$
- ④ ④ $\frac{1}{8}$

정답: ① $\frac{1}{4}$

핵심: 두 절단점 x, y 를 단위정사각형 위 균등 분포로 보고 삼각부등식(가장 긴 조각 $< \frac{1}{2}$)을 만족하는 영역의 넓이를 구한다. 그 영역은 넓이 $\frac{1}{8}$ 인 두 삼각형으로 전체의 $\frac{1}{4}$. 따라서 확률은 $\frac{1}{4}$.

Q264 그래프 이론

아래 그래프에서 오일러 회로(모든 간선을 정확히 한 번씩 지나 출발점으로 복귀)와 오일러 경로(열린 경로)의 존재 여부로 옳은 것은?



- ① ① 회로는 없고 경로는 존재
- ② ② 오일러 회로 존재
- ③ ③ 회로·경로 모두 없음
- ④ ④ 해밀턴 회로만 존재

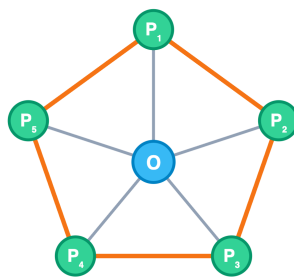
정답: ① 회로는 없고 경로는 존재

핵심: 차수의 홀짝만 보면 된다. 차수는 $V_1 = 3, V_2 = 2, V_3 = 4, V_4 = 2, V_5 = 3$. 홀수 차수 정점이 V_1, V_5 정확히 두 개. 연결그래프에서 홀수 차수 정점이 0 개면 오일러 회로, 정확히 2 개면 오일러 경로(그 두 점이 양 끝)가 존재한다. 따라서 회로는 없고 경로는 존재.

Q265 그래프 이론

바퀴 그래프 W_5 (정오각형 C_5 의 다섯 꼭짓점과 중심을 모두 이은 그래프)의 채색수(인접한 정점은 다른 색이 되도록 칠하는 최소 색 수)는?

홀수 사이클 (오각형) + 바퀴살



둘레 길이 5 = 홀수 사이클

- ① ① 4
- ② ② 3
- ③ ③ 5
- ④ ④ 2

정답: ① 4

핵심: 홀수 사이클 + 모두에 인접한 허브. 둘레 C_5 는 홀수 사이클이라 3 색이 필요하고 3 색으로 충분. 중심 O 는 둘레 다섯 꼭짓점 모두와 인접하므로 둘레에 등장한 세 색과 모두 달라야 해 네 번째 색이 필요. 따라서 $\chi(W_5) = 4$.

Q266 불변량과 단조량

칠판에 1, 2, 3, 4, 5 가 적혀 있다. 매번 두 수 a, b 를 지우고 $a + b + ab$ 를 적는다. 이 과정을 네 번 반복하면 마지막에 남는 한 수는?

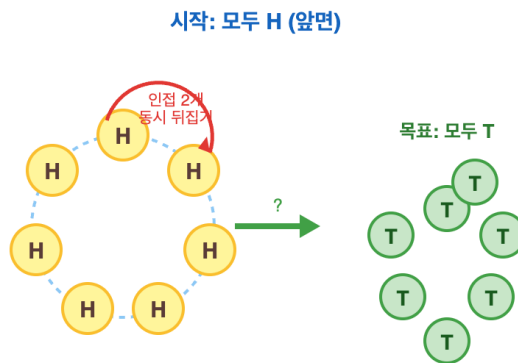
- ① ① 719
- ② ② 720
- ③ ③ 120
- ④ ④ 119

정답: ① 719

핵심 아이디어: $a + b + ab = (a + 1)(b + 1) - 1$. 따라서 각 수에 1 을 더한 값들의 곱 $\prod (x_i + 1)$ 이 연산에 대해 불변이다. 처음 곱은 $(1+1)(2+1)(3+1)(4+1)(5+1) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$. 끝에 남는 수 N 은 $N + 1 = 720$, 즉 $N = 719$.

Q267 불변량과 단조량

원형으로 놓인 동전 7 개가 모두 앞면이다. 한 번에 '인접한 두 동전'을 동시에 뒤집을 수 있다. 모든 동전을 뒷면으로 만들 수 있는가?



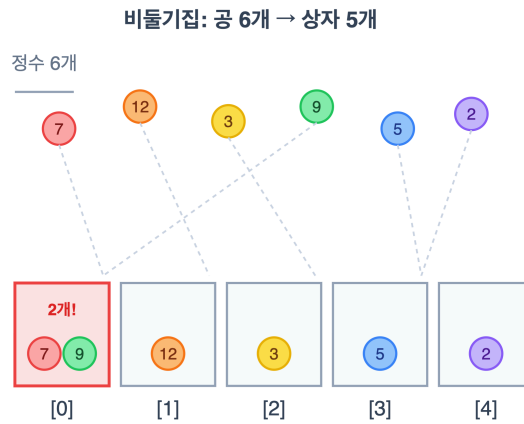
- ① ① 불가능 (앞면 수의 홀짝이 불변)
- ② ② 가능
- ③ ③ 정확히 7번이면 가능
- ④ ④ 홀수 번 시행하면 가능

정답: ① 불가능 (앞면 수의 홀짝이 불변)

핵심: 불변량은 '앞면 동전 개수의 홀짝성'. 인접한 두 동전을 뒤집으면 (앞,앞)→(뒤,뒤)는 -2, (앞,뒤)→(뒤,앞)은 0, (뒤,뒤)→(앞,앞)은 +2 만큼 변해 항상 짝수만큼 변한다. 즉 앞면 개수의 홀짝성은 보존. 시작은 7(홀수), 목표는 0(짝수)이므로 도달 불가능.

Q268 비둘기집 응용

정수를 아무렇게나 골라도 그중 어떤 두 수의 차가 반드시 5의 배수가 되도록 하려면, 최소 몇 개의 정수가 필요한가? (비둘기집)



- ① ① 6
- ② ② 5
- ③ ③ 11
- ④ ④ 4

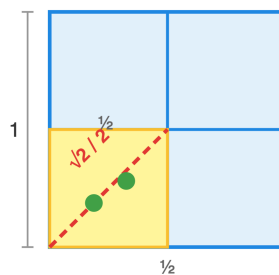
☞ 정답: ① 6

📖 핵심: 두 수의 차가 5의 배수 \iff 두 수의 5로 나눈 나머지가 같음. 나머지는 0, 1, 2, 3, 4의 다섯 종류뿐(비둘기집 5개). 정수 6개를 고르면 같은 나머지를 갖는 두 수가 반드시 생기고 그 차는 5의 배수. 5개로는 나머지를 하나씩 모두 다르게 고를 수 있어 보장되지 않는다. 따라서 최소 6.

Q269 비둘기집 응용

한 변의 길이가 1인 정사각형 내부(경계 포함)에 점 5개를 임의로 찍으면, 서로의 거리가 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이하인 두 점이 반드시 존재한다. 그 근거로 옳은 것은?

한 변 1인 정사각형을 4등분



- ① ① 항상 존재 ($\frac{1}{2}$ -정사각형 4분할 + 비둘기집)
- ② ② 존재하지 않을 수도 있다
- ③ ③ 점이 9 개여야 보장된다
- ④ ④ 거리 1 이하만 보장된다

☞ 정답: ① 항상 존재 ($\frac{1}{2}$ -정사각형 4분할 + 비둘기집)

📖 핵심: 큰 정사각형을 한 변 $\frac{1}{2}$ 인 작은 정사각형 4개(비둘기집)로 나눈다. 점 5개를 넣으면 비둘기집 원리로 한 작은 정사각형에 두 점이 들어간다. 작은 정사각형의 최대 거리(대각선)는 $\sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 이므로 그 두 점의 거리는 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이하.

Q270 극값 문제

1, 2, 3 을 적당히 배열하여 수열 a_1, a_2, a_3 을 만든다. $1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 + 3 \cdot a_3$ 의 최댓값은? (재배열 부등식)

- ① ① 14
- ② ② 10
- ③ ③ 12
- ④ ④ 11

정답: ① 14

핵심: 재배열 부등식에 의해 두 수열을 같은 순서(둘 다 오름차순)로 짝지을 때 곱의 합이 최대, 역순으로 짝지을 때 최소. 계수 (1, 2, 3) 에 값 (1, 2, 3) 을 같은 순서로 대응하면 $1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 14$ 가 최댓값(역순이면 $1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 10$ 이 최솟값).

Q271 점화식

수열이 $a_1 = 1, a_n = 2a_{n-1} + 1$ 로 정의될 때 a_6 의 값은?

- ① ① 63
- ② ② 31
- ③ ③ 127
- ④ ④ 62

정답: ① 63

핵심: 양변에 1 을 더해 등비형으로 만든다. $a_n + 1 = 2(a_{n-1} + 1)$ 이므로 $a_n + 1 = 2^{n-1}(a_1 + 1) = 2^{n-1} \cdot 2 = 2^n$, 즉 $a_n = 2^n - 1$. 따라서 $a_6 = 2^6 - 1 = 63$ (수열: 1, 3, 7, 15, 31, 63).

Q272 재미 두뇌

문 세 개 중 하나 뒤에만 자동차가 있다(나머지엔 염소). 참가자가 한 문을 고른 뒤, 정답을 아는 진행자가 '남은 두 문 중 염소가 있는 문'을 하나 열어 보여준다. 이제 남은 다른 문으로 선택을 '바꾸면' 자동차를 얻을 확률은? (몬티 홀)



바꾸면 이길 확률 = 2/3

- 처음 1번이 정답(1/3)이면 → 바꾸면 짐
- 처음 1번이 오답(2/3)이면 → 바꾸면 이길
- ∴ 2번 문으로 바꾸는 것이 유리하다

- ① ① $\frac{2}{3}$
- ② ② $\frac{1}{2}$
- ③ ③ $\frac{1}{3}$
- ④ ④ 바뀌도 같다

정답: ① $\frac{2}{3}$

핵심: 처음 고른 문이 정답일 확률은 $\frac{1}{3}$, 오답일 확률은 $\frac{2}{3}$. '바꾸기' 전략은 처음에 오답을 골랐을 때 정확히 자동차로 이어지므로 성공 확률은 $\frac{2}{3}$. 진행자가 반드시 염소 문을 열어 정보를 주기 때문에 두 남은 문이 $\frac{1}{2}$ 씩이라는 직관이 깨진다.

💡 문이 100개일 때 진행자가 98개의 염소 문을 열어주면, 바꿀 때 성공 확률은 $\frac{99}{100}$ 까지 커진다.

Q273 정수론 (심화)

17은 소수이다. 16!을 17로 나눈 나머지를 구하여라. (윌슨 정리: 소수 p 에 대해 $(p - 1)! \equiv -1 \pmod{p}$)

- ① ① 1
- ② ② 8
- ③ ③ 15
- ④ ④ 16

정답: ④ 16

핵심 아이디어: 윌슨 정리를 직접 적용한다. 17이 소수이므로 $(17 - 1)! = 16! \equiv -1 \pmod{17}$. $-1 \equiv 16 \pmod{17}$ 이므로 나머지는 16. (직접 곱셈에서도 $2 \cdot 3 \equiv 6$, ... 짝지어 1로 소거되고 마지막에 -1 이 남음을 확인할 수 있다.)

윌슨 정리의 역도 성립한다: $(n - 1)! \equiv -1 \pmod{n}$ 이면 n 은 소수다. 즉 소수 판정의 한 기준이 된다.

Q274 모듈러-합동식

다음 연립합동식을 만족하는 가장 작은 양의 정수 x 를 구하여라.

$$x \equiv 2 \pmod{3}, \quad x \equiv 3 \pmod{5}, \quad x \equiv 2 \pmod{7}$$

- ① ① 23
- ② ② 37
- ③ ③ 52
- ④ ④ 128

정답: ① 23

핵심 아이디어: 중국인 나머지정리. $x \equiv 2 \pmod{3}$ 와 $x \equiv 2 \pmod{7}$ 을 합치면 $x \equiv 2 \pmod{21}$. 따라서 $x \in \{2, 23, 44, \dots\}$. 이 중 $x \equiv 3 \pmod{5}$ 를 만족하는 것은 23 ($23 \equiv 3 \pmod{5}$). **검산:** $23 \equiv 2 \pmod{3}$, $23 \equiv 3 \pmod{5}$, $23 \equiv 2 \pmod{7}$. 모듈러가 서로소이므로 해는 mod 105에서 유일하다.

중국인 나머지정리는 3세기 손자산경의 '물건 세기' 문제에서 비롯되었다.

Q275 비둘기집 응용

임의의 정수들을 고른다고 하자. 그중 어떤 두 수의 차가 반드시 5의 배수가 되도록 보장하려면, 최소 몇 개의 정수를 골라야 하는가?

- ① ① 5
- ② ② 6
- ③ ③ 7
- ④ ④ 11

정답: ② 6

핵심 아이디어: 5로 나눈 나머지(잉여류)는 0, 1, 2, 3, 4의 5가지뿐이다(비둘기집). 5개를 고르면 모두 다른 나머지일 수 있어 두 수의 차이가 5의 배수가 아닐 수 있다. 그러나 6개를 고르면 비둘기집 원리에 의해 같은 나머지를 갖는 두 수가 반드시 존재하고, 그 차는 5의 배수다. 따라서 최소 개수는 6.


비둘기집 원리는 '구멍보다 비둘기가 많으면 한 구멍에 둘 이상'이라는 자명한 사실이지만, 비자명한 결론을 이끌어내는 강력한 도구다.

Q276 조합 (심화)

4명이 각자 모자를 벗어 한 곳에 모은 뒤, 무작위로 하나씩 다시 집는다. 아무도 자기 모자를 집지 않는 경우의 수는?

- ① ① 6
- ② ② 9
- ③ ③ 12
- ④ ④ 15

 **정답: ② 9**

 **핵심 아이디어:** 완전순열(교란순열, derangement)을 포함배제로 센다. $D_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$. $n = 4$ 이면

$$D_4 = 24 \left(1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} \right) = 24 \cdot \frac{9}{24} = 9. \text{ 점화식 } D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}) \text{ 로도 } D_4 = 3(2+1) \cdot \dots = 9.$$


 $n \rightarrow \infty$ 일 때 완전순열의 비율 $D_n/n!$ 은 $1/e \approx 0.368$ 로 수렴한다.

Q277 정수론 (심화)

7을 법으로 하는 3의 위수(order), 즉 $3^k \equiv 1 \pmod{7}$ 을 만족하는 최소 양의 정수 k 를 구하여라.

- ① ① 2
- ② ② 3
- ③ ③ 4
- ④ ④ 6

 **정답: ④ 6**

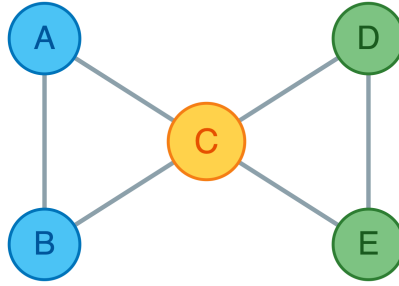
 **핵심 아이디어:** 거듭제곱을 차례로 계산하며 처음으로 1이 되는 지수를 찾는다.

$3^1 \equiv 3, 3^2 \equiv 2, 3^3 \equiv 6, 3^4 \equiv 4, 3^5 \equiv 5, 3^6 \equiv 1 \pmod{7}$. 따라서 위수는 6. 위수는 페르마 소정리의 $p-1=6$ 을 나누어야 하는데($k \mid 6$), 6 자신이 위수이므로 3은 mod 7의 원시근이다.

 원시근이 존재하면 그 거듭제곱이 $1 \sim p-1$ 을 모두 한 번씩 훑는다. 이는 이산로그·암호의 기초다.

Q278 그래프 이론

아래 그래프에서 오일러 회로(모든 간선을 정확히 한 번씩 지나 출발점으로 돌아오는 닫힌 경로)가 존재하는가?



- ① ① 오일러 회로가 존재한다
- ② ② 오일러 경로만 존재한다 (회로는 없음)
- ③ ③ 오일러 회로·경로 모두 없다
- ④ ④ 해밀턴 회로만 존재한다

정답: ① 오일러 회로가 존재한다

핵심 아이디어: 연결그래프에서 오일러 회로 존재 \iff 모든 정점의 차수가 짝수. 차수를 세면

$\deg A = 2, \deg B = 2, \deg C = 4, \deg D = 2, \deg E = 2$ 로 모두 짝수이고 그래프는 연결되어 있다. 따라서 오일러 회로가 존재한다 (예: $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow C \rightarrow A$).

💡 오일러가 1736년 쾨니히스베르크 다리 문제를 풀며 그래프 이론을 탄생시켰다. 거기서는 홀수 차수 정점이 넷이라 불가능했다.

Q279 확률 (조건부·기하)

어떤 질병의 유병률은 1%다. 검사의 민감도(병이 있을 때 양성)는 99%, 특이도(병이 없을 때 음성)는 95%다. 검사 결과가 양성일 때 실제로 병에 걸렸을 확률은 대략 얼마인가?

- ① ① 약 99%
- ② ② 약 50%
- ③ ③ 약 17%
- ④ ④ 약 1%

정답: ③ 약 17%

핵심 아이디어: 베이즈 정리. $P(\text{병} | +) = \frac{P(+ | \text{병})P(\text{병})}{P(+ | \text{병})P(\text{병}) + P(+ | \text{무병})P(\text{무병})}$. 분자 = $0.99 \times 0.01 = 0.0099$, 거짓양성 = $0.05 \times 0.99 = 0.0495$. 따라서 $\frac{0.0099}{0.0099 + 0.0495} = \frac{0.0099}{0.0594} \approx 0.167$, 즉 약 17%.


💡 민감도가 매우 높아도 유병률이 낮으면 양성 예측도는 낮다. '기저율 무시'는 의료 판단에서 흔한 오류다.


Q280 점화식

수열이 $a_1 = 1, a_n = 2a_{n-1} + 1 (n \geq 2)$ 로 정의된다. a_{10} 의 값을 구하여라.

- ① ① 511
- ② ② 1023
- ③ ③ 1024
- ④ ④ 2047

 **정답: ② 1023**

 **핵심 아이디어:** 비제차 점화식을 평행이동으로 등비수열로 만든다. $a_n + 1 = 2(a_{n-1} + 1)$ 이므로 $b_n = a_n + 1$ 은 $b_1 = 2$ 인 공비 2 등비수열. $b_n = 2^n$ 이므로 $a_n = 2^n - 1$. 따라서 $a_{10} = 2^{10} - 1 = 1023$. (하노이 탑에서 원반 n 개를 옮기는 최소 횟수와 같은 식이다.)

 하노이 탑 전설에서 원반 64개를 옮기려면 $2^{64} - 1$ 번, 1초에 한 번씩 옮겨도 약 5,800억 년이 걸린다.

고등/올림피아드 사고력

총 20문제 · 문제와 정답·풀이 포함

Q281 불변량과 단조량

칠판에 1, 2, 3, 4, 5가 적혀 있다. 매 단계마다 두 수 a, b 를 지우고 $a + b + ab$ 를 대신 적는다. 이를 4번 반복하면 한 수만 남는다. 그 수는?

- ① ① 120
- ② ② 719
- ③ ③ 720
- ④ ④ 721

정답: ② 719

핵심 아이디어: 불변량을 찾는다. $a + b + ab = (a + 1)(b + 1) - 1$ 이므로, 각 수에 1을 더한 값들의 '곱'에서 마지막에 1을 빼면 결과가 된다. 즉 $\prod (x_i + 1)$ 이 (마지막 +1까지 포함해) 보존된다. 처음 값 1, ..., 5에 대해 $(1 + 1)(2 + 1)(3 + 1)(4 + 1)(5 + 1) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$. 남는 수는 $720 - 1 = 719$ 이며 연산 순서와 무관하다.

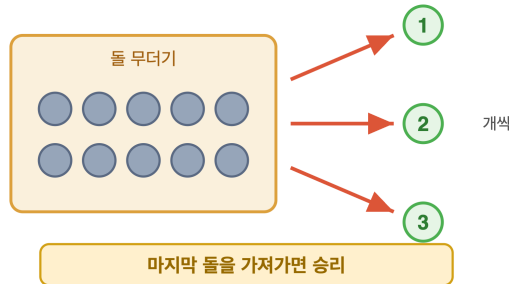
💡 '순서에 무관한 최종값'은 불변량 문제의 전형적 신호다. 곱·합·패리티 중 무엇이 보존되는지 찾는 것이 핵심.

Q282 게임 이론 (Combinatorial)

돌 무더기에 돌 2024개가 있다. 두 사람이 번갈아 한 번에 1, 2, 또는 3개를 가져가며, 마지막 돌을 가져가는 사람이 이긴다. 양쪽이 최선을 다하면 누가 이기는가?

돌 가져가기 게임

한 턴에 1, 2, 또는 3개 제거



- ① ① 선공(첫 번째 사람)이 이긴다
- ② ② 후공(두 번째 사람)이 이긴다
- ③ ③ 항상 비긴다
- ④ ④ 알 수 없다

정답: ② 후공(두 번째 사람)이 이긴다

핵심 아이디어: P-포지션(이전 플레이어 승, 즉 돌 차례를 받은 사람이 지는 위치)은 돌 개수가 4의 배수일 때다. 증명: 0은 P-포지션. 4의 배수에서 1 - 3개를 가져가면 상대방에게 4의 배수가 아닌 수가 가고, 상대는 항상 다시 4의 배수로 만들 수 있다. $2024 = 4 \times 506$ 이므로 시작이 P-포지션이라 선공이 진다. 즉 후공이 이긴다.

💡 후공의 전략은 '상대가 k 개 가져가면 나는 $4 - k$ 개 가져간다'를 반복해 합을 항상 4로 맞추는 것이다.

Q283 함수방정식 (입문)

함수 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ 가 모든 실수 x, y 에 대해 $f(x+y) = f(x)f(y)$ 를 만족하고 $f(1) = 3$ 이다. $f(4)$ 의 값은?

- ① ① 12
- ② ② 27
- ③ ③ 81
- ④ ④ 243

정답: ③ 81

핵심 아이디어: 곱셈형 코시 함수방정식. $f(x+y) = f(x)f(y)$ 에 정수 인수를 넣으면 $f(n) = f(1)^n$ 이다. 실제로 $f(2) = f(1)^2$, $f(3) = f(1)^3$, $f(4) = f(1)^4$. 따라서 $f(4) = 3^4 = 81$. (연속성이나 양수 조건을 가정하면 전체 해는 $f(x) = 3^x$ 로 유일하게 결정된다.)

💡 가법형 $g(x+y) = g(x) + g(y)$ 에 $g = \ln f$ 를 취하면 곱셈형이 가법형으로 바뀐다. 두 방정식은 로그-지수로 연결된다.

Q284 조합 (심화)

원소가 4개인 집합을 공집합이 아닌 부분집합들로 나누는(분할하는) 방법의 수를 구하여라. (부분집합의 순서는 무시한다.)

- ① ① 8
- ② ② 14
- ③ ③ 15
- ④ ④ 52

정답: ③ 15

핵심 아이디어: 이것은 벨 수 B_4 다. 분할의 크기별로 센다. 한 덩어리 {1234}: 1가지. 3+1: $\binom{4}{1} = 4$. 2+2: $\frac{1}{2}\binom{4}{2} = 3$. 2+1+1: $\binom{4}{2} = 6$. 1+1+1+1: 1. 합 $1 + 4 + 3 + 6 + 1 = 15$. 점화식 $B_{n+1} = \sum_k \binom{n}{k} B_k$ 로도 $B_4 = 15$ ($B_0=1, B_1=1, B_2=2, B_3=5$).

💡 $B_5 = 52$ 로 카드 한 벌 장수와 같은 우연. 벨 수는 '집합 분할의 개수'를 세는 기본 수열이다.

Q285 다이오판티

방정식 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4}$ 를 만족하는 양의 정수 순서쌍 (x, y) 의 개수를 구하여라.

- ① ① 3
- ② ② 5
- ③ ③ 6
- ④ ④ 9

정답: ② 5

핵심 아이디어: '사이먼의 좋아하는 인수분해'로 곱 형태를 만든다. 양변에 $4xy$ 를 곱하면 $4y + 4x = xy$, 즉 $xy - 4x - 4y = 0$, 양변에 16을 더하면 $(x-4)(y-4) = 16$. $x, y > 0$ 이려면 $x-4 > 0$ (음수면 $1/x + 1/y < 1/4$ 불가). 16의 양의 약수는 1, 2, 4, 8, 16의 5개이고, 각 약수쌍 $(x-4, y-4) \in \{(1, 16), (2, 8), (4, 4), (8, 2), (16, 1)\}$ 이 순서쌍을 준다. 따라서 5개.

💡 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{n}$ 의 해의 개수는 n^2 의 약수 개수와 같다. 여기서 $n = 4$, $n^2 = 16$ 의 약수 5개와 일치한다.

Q286 극값 문제

양의 실수 a, b, c 가 $a + b + c = 3$ 을 만족할 때, $a^2 + b^2 + c^2$ 의 최솟값을 구하여라.

- ① ① 1
- ② ② 3
- ③ ③ 9
- ④ ④ $3\sqrt{3}$

정답: ② 3

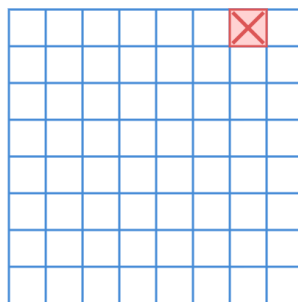
핵심 아이디어: 코시-슈바르츠(또는 제곱평균-산술평균). $(1^2 + 1^2 + 1^2)(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2$ 이므로 $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq 9$, 즉 $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3$. 등호는 $a = b = c = 1$ 일 때 성립한다. 따라서 최솟값은 3. (변수가 같을 때 제곱합이 최소가 되는 것은 '분산이 0'일 때라는 직관과 일치.)

💡 합이 고정될 때 제곱합은 값들이 평균에 모일수록 작아진다. 통계의 분산 개념과 정확히 같은 원리다.

Q287 귀납법

8×8 체스판에서 임의의 한 칸을 제거하여 63칸이 남았다. 이를 L자 모양 트로미노(정사각형 3칸이 직각으로 붙은 조각)로 빈틈없이 겹치지 않게 덮을 수 있는가? 가능하다면 필요한 트로미노 개수는?

8x8 격자판 (X = 제거된 칸)



L-트로미노



(3칸 7자 조각)

- ① ① 덮을 수 없다
- ② ② 가능하며 21개
- ③ ③ 가능하며 20개
- ④ ④ 가능하며 22개

정답: ② 가능하며 21개

핵심 아이디어: 크기에 대한 강귀납법. $2^n \times 2^n$ 판에서 한 칸을 제거하면 항상 L-트로미노로 덮을 수 있음을 보인다. 판을 네 개의 $2^{n-1} \times 2^{n-1}$ 사분면으로 나누면 제거된 칸은 한 사분면에만 있다. 중앙에 L-트로미노 하나를 두어 나머지 세 사분면의 중심 한 칸씩을 '가짜로 제거'된 것처럼 만들면, 네 사분면 모두 '한 칸 제거된 2^{n-1} 판'이 되어 귀납가정으로 덮인다. 8×8 은 $n = 3$ 이라 항상 가능. 칸 수가 $63 = 3 \times 21$ 이므로 트로미노는 21개.

💡 이 '결손 체스판 정리'는 강귀납법(분할정복)의 교과서적 예로, 재귀 알고리즘 설계 논리와 똑같다.

Q288 재미 두뇌

어떤 가족에 두 자녀가 있고, '적어도 한 명은 아들'이라는 사실만 알려져 있다. 두 자녀가 모두 아들일 확률은? (아들·딸 출생은 각각 $\frac{1}{2}$, 독립으로 가정한다.)

- ① ① $\frac{1}{4}$
- ② ② $\frac{1}{3}$
- ③ ③ $\frac{1}{2}$
- ④ ④ $\frac{2}{3}$

☞ 정답: ② $\frac{1}{3}$

📖 핵심 아이디어: 조건부 확률에서 표본공간을 올바르게 줄이는 것이 관건. 두 자녀의 출생 순서를 고려한 표본공간은 $\{BB, BG, GB, GG\}$ 로 각각 확률 $\frac{1}{4}$. '적어도 한 명 아들' 조건은 GG 를 제외해 $\{BB, BG, GB\}$ 만 남기고, 이 셋은 같은 확률이다. 이 중 둘 다 아들(BB)은 하나뿐이므로 확률은 $\frac{1}{3}$. 직관적인 $\frac{1}{2}$ 은 BG 와 GB 를 합쳐버리는 오류에서 나온다.

💡 같은 문제라도 '첫째가 아들'이라는 조건이면 답은 $\frac{1}{2}$ 로 바뀐다. 정보를 어떻게 얻었는지가 확률을 좌우한다(소년-소녀 역설).

Q289 다이오판티

x, y 가 양의 정수이고 $x^2 - y^2 = 96$ 을 만족할 때, 순서쌍 (x, y) 의 개수는?

- ① ① 2
- ② ② 3
- ③ ③ 4
- ④ ④ 5

☞ 정답: ③ 4

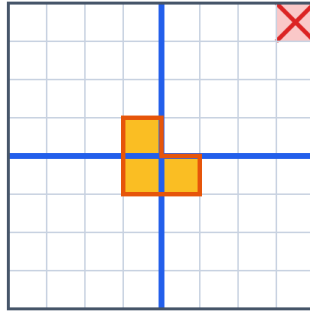
📖 핵심: $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ 로 인수분해하고 두 인수의 패리티를 따진다. $d = x - y, e = x + y$ 라 하면 $de = 96, d < e$ 이고 d, e 는 항상 같은 패리티여야 한다. 96 이 짝수이므로 둘 다 홀수일 수 없고 따라서 둘 다 짝수다. 96 의 짝수 \times 짝수 분해 (d, e) : $(2, 48), (4, 24), (6, 16), (8, 12)$. 각각 $x = \frac{d+e}{2}, y = \frac{e-d}{2}$ 로 $(25, 23), (14, 10), (11, 5), (10, 2)$ 의 4개.

💡 $N = x^2 - y^2$ 꼴로 쓸 수 있는 정수는 $N \not\equiv 2 \pmod{4}$ 인 수뿐이다.

Q290 귀납법

$2^n \times 2^n$ 격자판에서 임의의 한 칸을 제거한 도형은 항상 L자 모양 트로미노(정사각형 3칸)로 빈틈없이 덮을 수 있음이 귀납법으로 증명된다. $n = 3$ (즉 8×8 에서 한 칸 제거) 일 때 필요한 트로미노의 개수는?

8x8 결손 체스판 - 귀납적 4분할



- ① ① 16
- ② ② 21
- ③ ③ 22
- ④ ④ 64

정답: ② 21

핵심(귀납 한 줄): $2^n \times 2^n$ 을 네 개의 $2^{n-1} \times 2^{n-1}$ 로 나누고, 중앙에 L-트로미노 하나를 놓아 네 사분면이 각각 '한 칸 제거된 상태'가 되게 만들면 귀납가설로 모두 덮인다. 칸 수는 $8 \times 8 - 1 = 63$ 이고 트로미노가 3칸을 덮으므로 개수는 $63/3 = 21$. (일반적으로 $\frac{4^n - 1}{3}$ 개.)

Q291 재미 두뇌

1 번부터 100 번까지 번호가 붙은 전구가 모두 꺼져 있다. $k = 1, 2, \dots, 100$ 에 대해 '번호가 k 의 배수인 전구를 모두 토글(켜짐 ↔ 꺼짐)'하는 작업을 차례로 한다. 100번의 작업이 끝났을 때 켜져 있는 전구의 개수는?

- ① ① 9
- ② ② 10
- ③ ③ 50
- ④ ④ 100

정답: ② 10

핵심: 전구 n 은 n 의 약수의 개수만큼 토글된다. 약수는 보통 쌍 $(d, n/d)$ 로 짝지어지므로 개수가 짝수여서 다시 꺼지지만, n 이 완전제곱수일 때만 \sqrt{n} 이 짝을 못 이뤄 약수 개수가 홀수가 되어 최종적으로 켜진다. 1 - 100 의 완전제곱수는 1, 4, 9, ..., 100 의 10 개.

💡 '약수의 개수가 홀수 \iff 완전제곱수'라는 사실이 직관(절반쯤 켜질 것 같다)을 깬다.

Q292 모듈러·합동식

$x \equiv 2 \pmod{3}$, $x \equiv 3 \pmod{5}$, $x \equiv 2 \pmod{7}$ 을 모두 만족하는 가장 작은 양의 정수 x 는?

- ① ① 23
- ② ② 44
- ③ ③ 58
- ④ ④ 86

정답: ① 23

핵심: 중국인 나머지정리(CRT). $x \equiv 2 \pmod{3}$ 과 $x \equiv 2 \pmod{7}$ 에서 $x \equiv 2 \pmod{21}$ 이므로 $x \in \{2, 23, 44, 65, \dots\}$. 이 중 $x \equiv 3 \pmod{5}$ 를 만족하는 것은 23 ($23 = 4 \cdot 5 + 3$). 3, 5, 7 이 서로소이므로 해는 $\pmod{105}$ 로 유일하며 최소 양수는 23.

Q293 함수방정식 (입문)

모든 실수 x 에 대해 $f(x) + 2f(1-x) = x^2$ 을 만족하는 함수 f 가 있다. $f(2)$ 의 값은?

- ① ① $-\frac{2}{3}$
- ② ② $\frac{2}{3}$
- ③ ③ $-\frac{1}{3}$
- ④ ④ 0

정답: ① $-\frac{2}{3}$

핵심: $x \rightarrow 1-x$ 치환으로 식을 하나 더 만들어 연립한다. 원식 (1): $f(x) + 2f(1-x) = x^2$. x 대신 $1-x$: (2)

$f(1-x) + 2f(x) = (1-x)^2$. (2) $\times 2 -$ (1): $3f(x) = 2(1-x)^2 - x^2$, 즉 $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 2}{3}$. 따라서 $f(2) = \frac{4 - 8 + 2}{3} = -\frac{2}{3}$.

Q294 조합 (심화)

1 부터 1000 까지의 정수 중에서 2, 3, 5 중 어느 것으로도 나누어떨어지지 않는 수의 개수는?

- ① ① 234
- ② ② 266
- ③ ③ 300
- ④ ④ 468

정답: ② 266

핵심: 포함배제(inclusion-exclusion). 배수 개수 $[1000/2] = 500$, $[1000/3] = 333$, $[1000/5] = 200$; 두 개씩 $[1000/6] = 166$, $[1000/10] = 100$, $[1000/15] = 66$; 셋 모두 $[1000/30] = 33$. 적어도 하나로 나뉘는 수 $= 500 + 333 + 200 - (166 + 100 + 66) + 33 = 734$. 따라서 답은 $1000 - 734 = 266$.

💡 이는 $1000 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = 266.\bar{6}$ 에 가까운데, 오일러 토션트 φ 의 밀도 공식과 같은 원리다.

Q295 비둘기집 응용

{1, 2, 3, ..., 10} 에서 몇 개의 수를 뽑으면, 뽑은 수들 중 합이 11 이 되는 두 수가 반드시 존재하게 되는가? (그 최소값)

- ① ① 5
- ② ② 6
- ③ ③ 7
- ④ ④ 11

정답: ② 6

핵심: 합이 11 인 쌍으로 비둘기집을 만든다. {1, 10}, {2, 9}, {3, 8}, {4, 7}, {5, 6} 의 5개 집(쌍)으로 1 - 10 이 모두 분할된다. 6 개를 뽑으면 비둘기집 원리에 의해 같은 쌍에서 두 수가 나와 합 11 이 보장된다. 반면 각 쌍에서 하나씩만 고른 5 개(예: 1, 2, 3, 4, 5)는 합 11 이 없으므로 5 로는 불충분. 따라서 최소값은 6.

Q296 점화식

하노이 탑에서 원반 n 개를 옮기는 최소 이동 횟수 a_n 은 $a_1 = 1, a_n = 2a_{n-1} + 1$ 을 만족한다. a_{10} 의 값은?

- ① ① 512
- ② ② 1000
- ③ ③ 1023
- ④ ④ 1024

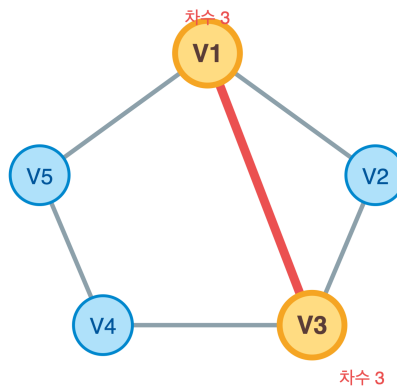
정답: ③ 1023

핵심: 점화식 $a_n = 2a_{n-1} + 1$ 의 양변에 1 을 더하면 $a_n + 1 = 2(a_{n-1} + 1)$ 로 등비꼴이 된다. $a_1 + 1 = 2$ 이므로 $a_n + 1 = 2^n$, 즉 $a_n = 2^n - 1$. 따라서 $a_{10} = 2^{10} - 1 = 1023$.

💡 $2^n - 1$ 꼴(메르센 수)은 하노이 탑, 이진수 전체 카운트 등 '한 비트씩 누적'되는 구조에서 자주 등장한다.

Q297 그래프 이론

정점 V_1, \dots, V_5 와 간선 $V_1V_2, V_2V_3, V_3V_4, V_4V_5, V_5V_1, V_1V_3$ 으로 이루어진 그래프가 있다. 이 그래프에 대한 옳은 설명은?



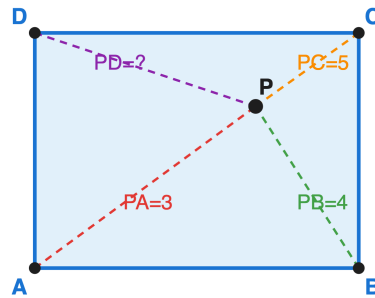
- ① ① 오일러 회로가 존재한다
- ② ② 오일러 경로는 존재하지만 회로는 없다
- ③ ③ 오일러 경로도 회로도 없다
- ④ ④ 오일러 회로가 두 개 이상 있다

정답: ② 오일러 경로는 존재하지만 회로는 없다

핵심: 차수의 홀짝을 센다. 각 정점 차수는 $V_1:3, V_2:2, V_3:3, V_4:2, V_5:2$. 그래프는 연결되어 있고 홀수 차수 정점이 정확히 2 개(V_1, V_3)다. 오일러 회로는 '모든 차수가 짝수'일 때만, 오일러 경로는 '홀수 차수 정점이 0 또는 2개'일 때 존재한다. 따라서 회로는 없고 경로는 (V_1 또는 V_3 에서 시작해) 존재한다.

Q298 올림피아드 기하

직사각형 $ABCD$ 와 한 점 P 에 대해 $PA = 3$, $PB = 4$, $PC = 5$ 일 때 PD 의 값은? (단 A, C 는 서로 마주 보는 꼭짓점, B, D 도 마주 보는 꼭짓점)



- ① ① $3\sqrt{2}$
- ② ② $\sqrt{34}$
- ③ ③ 5
- ④ ④ $2\sqrt{6}$

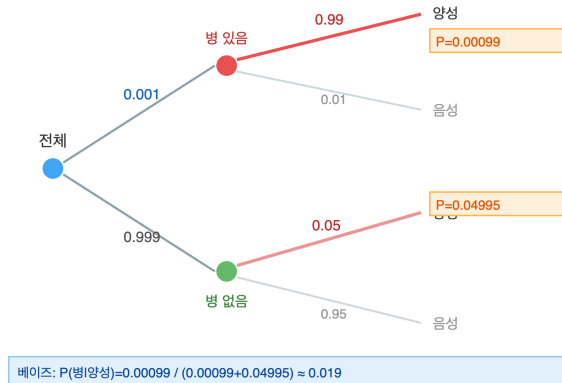
☞ 정답: ① $3\sqrt{2}$

📖 핵심: 영국 국기 정리(British Flag Theorem) - 직사각형의 임의의 점 P 에 대해 마주 보는 두 꼭짓점까지 거리 제곱의 합이 같다: $PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$. 따라서 $PD^2 = PA^2 + PC^2 - PB^2 = 9 + 25 - 16 = 18$, $PD = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$. (좌표를 잡고 $P = (x, y)$ 로 직접 전개해도 같은 항등식이 나온다.)

💡 이 정리는 점 P 가 직사각형 안이든 밖이든, 평면 어디에 있던 항상 성립한다.

Q299 확률 (조건부·기하)

어떤 희귀병의 유병률이 0.1% 이다. 검사는 병이 있으면 99% 확률로 양성(민감도), 병이 없어도 5% 확률로 양성(위양성)이 나온다. 한 사람이 양성 판정을 받았을 때, 실제로 병에 걸렸을 확률은 대략?



- ① ① 약 1.9%
- ② ② 약 50%
- ③ ③ 약 95%
- ④ ④ 약 99%

정답: ① 약 1.9%

핵심: 베이즈 정리. $P(\text{병} | +) = \frac{P(+ | \text{병})P(\text{병})}{P(+)}$. 분자 = $0.99 \times 0.001 = 0.00099$. 양성 전체 확률

$P(+)$ = $0.00099 + 0.05 \times 0.999 = 0.00099 + 0.04995 = 0.05094$. 따라서 $\frac{0.00099}{0.05094} \approx 0.0194 \approx 1.9\%$. 검사 정확도가 높아도 유병률이 낮으면 양성 대부분이 위양성이라는 '기저율 무시' 직관 함정.

💡 이 현상(기저율 오류)은 의료 진단뿐 아니라 스팸 필터, 보안 경보 등에서도 똑같이 나타난다.

Q300 불변량과 단조량

칠판에 1, 2, 3, ..., 2024 가 적혀 있다. 매 단계마다 두 수 a, b 를 지우고 $a + b - 1$ 을 새로 적는다. 이 작업을 더 이상 할 수 없을 때(수가 하나 남을 때) 칠판에 남는 수는?

- ① ① 2047277
- ② ② 2049300
- ③ ③ 2048300
- ④ ④ 2023

정답: ① 2047277

핵심(불변량): 한 번의 작업에서 칠판 수의 합은 $(a + b)$ 가 사라지고 $(a + b - 1)$ 이 생기므로 정확히 1 만큼 줄고, 수의 개수도 1 씩 준다. 처음 합은 $1 + 2 + \dots + 2024 = \frac{2024 \cdot 2025}{2} = 2049300$. 수를 2024 개에서 1 개로 줄이려면 작업을 2023 번 하므로 합은 2023 만큼 줄어 $2049300 - 2023 = 2047277$. 어떤 순서로 작업해도 결과는 같다.