🧠 중등 논리·추론

총 40문제 · 문제와 정답·풀이 포함

Q1 논리 (Knight/Knave)

정직한 사람만 진실을 말하고 거짓말쟁이는 항상 거짓을 말하는 섬에서, 두 주민 A와 B가 다음과 같이 말했다. A: "B는 거짓말쟁이다." B: "나와 A는 같은 부류이다." A와 B의 정체로 옳은 것은?

①) ① A 정직, B 정직

②) ② A 정직, B 거짓말쟁이

③) ③ A 거짓말쟁이, B 정직

④) ④ A 거짓말쟁이, B 거짓말쟁이

🎯 **정답: ② A 정직, B 거짓말쟁이**

📖 A가 정직하다고 가정하면 "B는 거짓말쟁이"가 참이므로 B는 거짓말쟁이. B의 "같은 부류" 진술은 거짓이어야 하는데 실제로 A와 B는 다른 부류이므로 그 진술이 거짓이 되어 일관됨. 반대로 A가 거짓말쟁이라면 B는 정직해야 하고 B의 "같은 부류" 진술이 참이어야 하지만 실제로는 서로 다른 부류라서 모순. 따라서 A는 정직, B는 거짓말쟁이.

💡 이런 유형의 문제는 논리학자 레이먼드 스멀리언의 책에서 시작되어 유명해졌다.

Q2 수열과 점화

등차수열 $3, 7, 11, 15, 19, \ldots$ 의 제 20항 a_{20}의 값은?

①) ① 75

②) ② 79

③) ③ 83

④) ④ 87

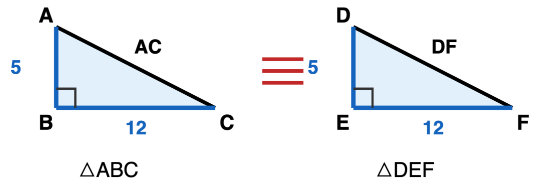
🎯 **정답: ② 79**

📖 첫째항 $a_1 = 3$, 공차 $d = 4$. 일반항 $a_n = a_1 + (n-1)d = 3 + 4(n-1) = 4n - 1$. 따라서 $a_{20} = 4 \times 20 - 1 = 79$.

💡 등차수열의 일반항 공식은 가우스가 어릴 때 1부터 100까지의 합을 구할 때도 활용한 원리이다.

Q3 도형 (합동·닮음·면적)

두 직각삼각형 $\triangle ABC$와 $\triangle DEF$에서 $AB = DE = 5$, $\angle B = \angle E = 90°$, $BC = EF = 12$ 이다. 두 삼각형의 합동조건과 빗변 AC의 길이가 옳게 짝지어진 것은?



①) ① SSS, $AC = 13$

②) ② SAS, $AC = 13$

③) ③ ASA, $AC = 17$

④) ④ SAS, $AC = 17$

🎯 **정답: ② SAS,** $AC = 13$

📖 두 삼각형은 두 변($AB = DE = 5$, $BC = EF = 12$)과 그 사이의 끼인각($\angle B = \angle E = 90°$)이 같으므로 SAS 합동이다. 빗변 AC는 피타고라스 정리에 의해 $AC = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$.

💡 $(5, 12, 13)$은 $(3, 4, 5)$, $(8, 15, 17)$과 함께 대표적인 피타고라스 수이다.

Q4 경우의 수

0, 1, 2, 3, 4의 다섯 숫자가 적힌 카드 중 서로 다른 세 장을 골라 세 자리 자연수를 만들려고 한다. 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는?

①) ① 36

②) ② 48

③) ③ 60

④) ④ 64

🎯 **정답: ② 48**

📖 세 자리 자연수이므로 백의 자리에는 0이 올 수 없다. 백의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3, 4 중 하나로 4가지. 십의 자리는 백의 자리에 쓰인 숫자를 제외한 4개 중 하나로 4가지(0 사용 가능). 일의 자리는 남은 3개 중 하나로 3가지. 따라서 $4 \times 4 \times 3 = 48$ 가지.

💡 맨 앞자리에 0이 올 수 없다는 제한은 0이 도입된 인도 수학의 영향이다.

Q5 논리 (Knight/Knave)

A, B, C 세 사람 중 단 한 명만 진실을 말한다. 그들의 진술은 다음과 같다. A: "B는 거짓말을 하고 있다." B: "C는 거짓말을 하고 있다." C: "A와 B 둘 다 거짓말을 하고 있다." 진실을 말하는 사람은?

①) ① A

②) ② B

③) ③ C

④) ④ 알 수 없음

🎯 **정답: ② B**

📖 각 경우를 검토한다. (1) A만 참인 경우: A의 말에서 B는 거짓 → B의 "C는 거짓"이 거짓 → C는 참. 그런데 C도 참이 되어 모순. (2) B만 참인 경우: B의 말에서 C는 거짓 → C의 "A와 B 모두 거짓"이 거짓 → 적어도 한 명은 참인데 B가 참이므로 만족. A는 거짓이므로 A의 "B는 거짓"이 거짓 → B는 참, 일관됨. (3) C만 참인 경우: C의 말에서 A와 B 모두 거짓이어야 함. A가 거짓이면 "B는 거짓"이 거짓 → B는 참. 모순. 따라서 진실을 말하는 사람은 B.

💡 이런 진술 분석 문제는 명제 논리의 진리값 표(truth table)를 그려서도 풀 수 있다.

Q6 수열과 점화

피보나치 수열은 $F_1 = 1, F_2 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ 으로 정의된다. F_{10}의 값은?

①) ① 34

②) ② 55

③) ③ 89

④) ④ 144

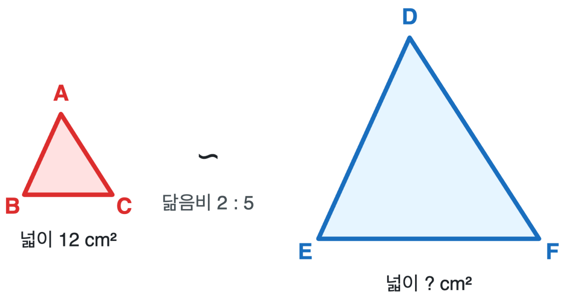
🎯 **정답: ② 55**

📖 점화식에 따라 차례로 계산한다. $F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, F_6 = 8, F_7 = 13, F_8 = 21, F_9 = 34, F_{10} = 55.$

💡 피보나치 수열의 인접한 두 항의 비 F_{n+1}/F_n 은 황금비 $\phi \approx 1.618$에 수렴한다.

Q7 도형 (합동·닮음·면적)

두 삼각형 $\triangle ABC$와 $\triangle DEF$ 는 서로 닮음이며 닮음비가 $2:5$ 이다. $\triangle ABC$의 넓이가 $12\ \mathrm{cm}^2$ 일 때, $\triangle DEF$의 넓이는?



①) ① $30\ \mathrm{cm}^2$
②) ② $60\ \mathrm{cm}^2$
③) ③ $75\ \mathrm{cm}^2$
④) ④ $90\ \mathrm{cm}^2$

🎯 **정답:** ③ $75\ \mathrm{cm}^2$

📖 닮음비가 $m:n$ 인 두 도형의 넓이비는 $m^2:n^2$ 이다. 따라서 $\triangle ABC:\triangle DEF = 2^2:5^2 = 4:25$. 비례식 $12:x = 4:25$ 에서 $4x = 12\times 25 = 300$, $x = 75$. 따라서 $\triangle DEF$의 넓이는 $75\ \mathrm{cm}^2$.

💡 부피비는 닮음비의 세제곱이다. 길이가 2배 큰 입체는 부피가 8배 크다.

Q8 경우의 수

남학생 4명, 여학생 3명으로 이루어진 모임에서 대표 3명을 뽑는데 남학생이 적어도 1명 포함되도록 하려고 한다. 가능한 경우의 수는?

①) ① 30
②) ② 34
③) ③ 35
④) ④ 38

🎯 **정답: ② 34**

📖 "적어도 1명"의 경우는 여사건을 이용한다. 전체 7명에서 3명 뽑는 경우는 ${}_7C_3 = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1} = 35$. 남학생이 한 명도 없는 경우(모두 여학생)는 ${}_3C_3 = 1$. 따라서 남학생이 적어도 1명 포함되는 경우는 $35-1=34$.

💡 "적어도 ~이상" 유형은 여사건 $P(A) = 1 - P(A^c)$ 의 발상으로 거의 항상 빠르게 풀린다.

Q9 비둘기집 원리

1부터 100까지의 자연수 중에서 임의로 몇 개를 뽑아야 그중에 합이 101이 되는 두 수가 반드시 존재하게 할 수 있는가?

①) ① 50개

②) ② 51개

③) ③ 52개

④) ④ 100개

🎯 **정답: ② 51개**

📖 합이 101이 되는 쌍은 $(1, 100), (2, 99), (3, 98), \ \dots, (50, 51)$ 로 모두 50쌍이다. 이 50쌍을 50개의 "비둘기집"이라 하자. 각 쌍에서 한 수씩만 뽑으면 50개를 뽑아도 합이 101이 되는 두 수가 생기지 않을 수 있다. 그러나 51개를 뽑으면 비둘기집 원리에 의해 어떤 한 쌍에서 두 수를 모두 뽑게 되어, 그 두 수의 합은 반드시 101이 된다.

💡 비둘기집 원리는 1834년 디리클레가 처음 공식화하여 "디리클레의 서랍 원리"라고도 한다.

Q10 논리 (Knight/Knave)

4명의 용의자 A, B, C, D 중 정확히 한 명이 범인이다. 각자 다음과 같이 진술했다. A: "B가 범인이다." B: "D가 범인이다." C: "나는 범인이 아니다." D: "B는 거짓말을 하고 있다." 이 네 사람 중 정확히 한 명만 진실을 말한다고 할 때, 범인은?

①) ① A

②) ② B

③) ③ C

④) ④ D

🎯 **정답: ③ C**

📖 네 가지 경우를 모두 따져 진실을 말한 사람이 정확히 한 명인 경우를 찾는다. (가) A가 범인: A의 말 거짓(B 아님), B의 말 거짓(D 아님), C의 말 참(C 아님), D의 말 참(B가 거짓이므로). 진실 2명. 부적합. (나) B가 범인: A 참, B의 말 거짓, C 참, D의 말 참(B가 거짓이므로). 진실 3명. 부적합. (다) C가 범인: A 거짓, B 거짓, C의 말 거짓(C가 범인이므로 "나는 아니다"는 거짓), D의 말 참(B가 거짓이므로). 진실 1명. 적합. (라) D가 범인: A 거짓, B 참, C 참, D의 말 거짓(B가 참이므로). 진실 2명. 부적합. 따라서 범인은 C.

💡 진술논리 문제는 모든 경우를 표로 정리해 진실 갯수를 세는 방식이 가장 안전하다.

Q11 수열과 점화

수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 2, \ a_{n+1} = 3a_n - 2 \ (n \geq 1)$ 를 만족한다. a_5의 값은?

①) ① 70

②) ② 76

③) ③ 82

④) ④ 90

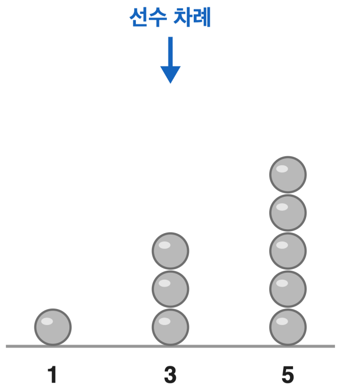
🎯 **정답: ③ 82**

📖 점화식 $a_{n+1} = 3a_n - 2$ 의 양변에서 1을 빼면 $a_{n+1} - 1 = 3(a_n - 1)$. 즉 $\{a_n - 1\}$ 은 첫째항 $a_1 - 1 = 1$, 공비 3 인 등비수열이다. 따라서 $a_n - 1 = 1 \cdot 3^{n-1} = 3^{n-1}$, $a_n = 3^{n-1} + 1$. $a_5 = 3^4 + 1 = 81 + 1 = 82$. 직접 계산해도 $a_2 = 4, a_3 = 10, a_4 = 28, a_5 = 82$.

💡 $a_{n+1} = pa_n + q$ 꼴의 점화식은 "양변에서 고정점 빼기" 기법으로 등비수열로 바꿔 풀 수 있다.

Q12 게임 이론 (Nim)

세 무더기에 돌이 각각 1개, 3개, 5개 놓여 있다. 두 사람이 번갈아 한 무더기에서 1개 이상의 돌을 가져가며, 마지막 돌을 가져가는 사람이 이긴다. 선수가 반드시 이기기 위한 첫 수는?



이진수 표기

1	001
3	011
5	101

①) ① 1개 무더기에서 1개를 가져간다

②) ② 3개 무더기에서 2개를 가져간다

③) ③ 5개 무더기에서 3개를 가져간다

④) ④ 선수는 어떻게 두어도 이길 수 없다

정답: ③ 5개 무더기에서 3개를 가져간다

Nim 게임의 필승 조건: 모든 무더기의 돌 개수를 이진수로 표현한 뒤 자리마다 XOR(배타적 논리합)을 계산하여 그 값이 0 이면 "현재 차례 사람이 진다." 0이 아니면 적절한 수로 0을 만들어 상대에게 넘기면 이긴다. $1 = 001_{(2)}$, $3 = 011_{(2)}$, $5 = 101_{(2)}$. XOR: $001 \oplus 011 \oplus 101 = 111_{(2)} = 7$. 0이 아니므로 선수 필승. 0을 만들려면 어느 무더기를 얼마로 줄여야 하는가? 5를 $1 \oplus 3 = 010_{(2)} = 2$ 로 줄이면 $1 \oplus 3 \oplus 2 = 0$. 즉 5개 무더기에서 3개를 가져가 (1, 3, 2)로 만든다. 다른 선택지는 XOR 0을 만들지 못하므로 후수에게 필승 위치를 넘기지 못한다.

Nim 게임은 1901년 하버드의 부튼이 완전 분석했고 이는 이후 모든 "공정한" 조합 게임 이론의 기초가 되었다.

Q13 확률

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 굴렸다. 두 눈의 합이 7이 될 확률은?

①) ① $\frac{1}{12}$

②) ② $\frac{1}{9}$

③) ③ $\frac{1}{6}$

④) ④ $\frac{5}{36}$

정답: ③ $\frac{1}{6}$

전체 경우의 수: $6 \times 6 = 36$. 합이 7이 되는 순서쌍은 $(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)$로 6가지. 따라서 확률은 $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. 참고로 주사위 두 개 합의 분포에서 7이 가장 확률이 높다.

두 주사위 합 분포는 7을 중심으로 대칭. 카지노 크랩스 게임의 핵심 숫자다.

Q14 집합과 벤다이어그램

두 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$에 대하여 $|A \cup B|$의 값은?

①) ① 5

②) ② 6

③) ③ 7

④) ④ 10

🎯 **정답:** ③ 7

📖 포함배제 원리: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. $|A| = 5$, $|B| = 5$, $A \cap B = \{3, 4, 5\}$이므로 $|A \cap B| = 3$. 따라서 $|A \cup B| = 5 + 5 - 3 = 7$. 또는 직접 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$로 세어도 7.

💡 포함배제 원리는 3집합으로 확장하면 부호가 $+, -, +$ 번갈아 나타난다.

Q15 정수론

24와 36의 최대공약수(GCD)는?

①) ① 6

②) ② 8

③) ③ 12

④) ④ 18

🎯 **정답:** ③ 12

📖 소인수분해: $24 = 2^3 \times 3$, $36 = 2^2 \times 3^2$. 공통 소인수의 최소 지수 곱: $2^{\min(3,2)} \times 3^{\min(1,2)} = 2^2 \times 3 = 12$. 유클리드 호제법으로도: $36 = 24 \times 1 + 12$, $24 = 12 \times 2 + 0$이므로 GCD = 12.

💡 유클리드 호제법은 약 BC 300년에 등장한 인류 최초의 알고리즘 중 하나.

Q16 모듈러 산술

100을 7로 나눈 나머지는? 즉 $100 \pmod 7$의 값은?

①) ① 1

②) ② 2

③) ③ 4

④) ④ 6

🎯 **정답:** ② 2

📖 $100 = 7 \times 14 + 2$이므로 $100 \equiv 2 \pmod 7$. 빠른 계산법: $98 = 7 \times 14$이므로 $100 - 98 = 2$가 나머지. 또는 $100 = 7 \times 15 - 5$로도 가능하지만 나머지는 항상 0 이상 7 미만이어야 하므로 $-5 \equiv 2 \pmod 7$로 환산.

💡 $\pmod 7$은 요일 계산에 자주 쓰인다. 오늘이 월요일이면 100일 후는? $100 \bmod 7 = 2$, 즉 수요일.

Q17 확률

주머니에 빨간 공 3개, 파란 공 5개가 들어있다. 공을 동시에 두 개 꺼낼 때, 두 개 모두 파란 공일 확률은?

①) ① $\frac{25}{64}$
②) ② $\frac{5}{14}$
③) ③ $\frac{5}{16}$
④) ④ $\frac{3}{14}$

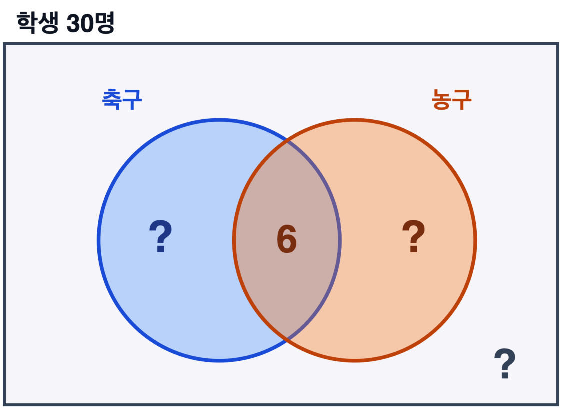
🎯 **정답: ② $\frac{5}{14}$**

📖 전체 공 8개에서 2개 뽑는 경우: $\binom{8}{2} = 28$. 파란 공 5개에서 2개 뽑는 경우: $\binom{5}{2} = 10$. 따라서 확률은 $\frac{10}{28} = \frac{5}{14}$. 순차적 방법으로도: $\frac{5}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{20}{56} = \frac{5}{14}$ (같은 결과).

💡 동시에 뽑기와 비복원 순차 뽑기는 확률이 같다. 시간 순서는 확률에 영향을 주지 않는다.

Q18 집합과 벤다이어그램

30명의 학생 중 축구를 좋아하는 학생은 18명, 농구를 좋아하는 학생은 14명, 두 종목 모두 좋아하는 학생은 6명이다. 두 종목 중 어느 것도 좋아하지 않는 학생은 몇 명인가?



①) ① 2명
②) ② 4명
③) ③ 6명
④) ④ 8명

🎯 **정답: ② 4명**

📖 적어도 하나를 좋아하는 학생 수: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 18 + 14 - 6 = 26$명. 따라서 어느 것도 좋아하지 않는 학생: $30 - 26 = 4$명. 벤다이어그램으로 보면 축구만 12명, 농구만 8명, 둘 다 6명, 바깥 4명, 합 30명으로 확인 가능.

💡 6명을 두 번 세지 않기 위해 한 번 빼주는 것이 포함배제의 핵심 아이디어.

Q19 정수론

72의 양의 약수의 개수는?

①) ① 8개
②) ② 10개
③) ③ 12개
④) ④ 14개

🎯 **정답: ③ 12개**

📖 소인수분해: $72 = 2^3 \times 3^2$. 자연수 $N = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots$ 의 양의 약수의 개수는 $(a_1+1)(a_2+1)\cdots$. 따라서 72의 약수 개수 = $(3+1)(2+1) = 4 \times 3 = 12$개. 직접 나열: $1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72$로 총 12개.

💡 72는 약수가 많아 '풍부수'에 속한다. 약수의 합 $195 > 72 \times 2 - 72 = 72$이므로 72 자신을 뺀 진약수 합도 풍부.

Q20 게임 이론

돌무더기에 돌 15개가 있다. 두 사람이 번갈아 1개, 2개, 또는 3개를 가져갈 수 있고, 마지막 돌을 가져간 사람이 이긴다. 먼저 시작하는 사람이 반드시 이기려면 처음에 몇 개를 가져가야 하는가?

①) ① 1개
②) ② 2개
③) ③ 3개
④) ④ 어떻게 해도 짐

🎯 **정답: ③ 3개**

📖 한 번에 최대 3개까지 가져갈 수 있으므로 모듈러 4가 핵심. 상대에게 돌 개수가 4의 배수로 남겨지면 필승: 상대가 k개 가져가면 나는 $4-k$개를 가져가서 매 라운드 정확히 4개씩 줄어들게 만들 수 있다. $15 \equiv 3 \pmod 4$이므로 처음에 3개를 가져가 12개(4의 배수)를 남긴다. 이후 상대의 수에 맞춰 합이 4가 되도록 응수하면 마지막 돌도 내가 가져간다.

💡 이 게임은 '뺄셈 게임(Subtraction Game)'의 가장 단순한 형태로, 일반화하면 Sprague-Grundy 이론의 출발점이 된다.

Q21 모듈러 산술

7^{100}의 일의 자리 수는?

①) ① 1

②) ② 3

③) ③ 7

④) ④ 9

🎯 **정답:** ① 1

📖 일의 자리는 (mod 10). 7의 거듭제곱 일의 자리 패턴을 찾자: $7^1 = 7$, $7^2 = 49 \to 9$, $7^3 = 343 \to 3$, $7^4 = 2401 \to 1$, $7^5 \to 7$, ... 즉 $7, 9, 3, 1$이 주기 4로 반복. $100 = 4 \times 25$이므로 $100 \equiv 0 \pmod 4$. 주기상 4의 배수 자리는 패턴의 4번째 (1). 따라서 7^{100}의 일의 자리는 1.

💡 모든 $\gcd(a, 10) = 1$인 a에 대해 $a^4 \equiv 1 \pmod{10}$ (오일러 정리, $\varphi(10) = 4$).

Q22 확률

1부터 5까지의 수가 적힌 카드 5장 중에서 서로 다른 3장을 동시에 뽑는다. 뽑은 세 수의 합이 짝수일 확률은?

①) ① $\frac{2}{5}$

②) ② $\frac{1}{2}$

③) ③ $\frac{3}{5}$

④) ④ $\frac{7}{10}$

🎯 **정답:** ③ $\frac{3}{5}$

📖 전체 경우: $\binom{5}{3} = 10$. 짝수: $\{2, 4\}$ (2개), 홀수: $\{1, 3, 5\}$ (3개). 세 수의 합이 짝수이려면 홀수의 개수가 짝수 (0개 또는 2개). 홀수 0개: 짝수 3개 필요한데 2개뿐이라 불가능. 홀수 2개 + 짝수 1개: $\binom{3}{2} \times \binom{2}{1} = 3 \times 2 = 6$가지. 따라서 확률 = $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

💡 '짝수 + 짝수 = 짝수', '홀수 + 홀수 = 짝수', '짝수 + 홀수 = 홀수'. 합의 홀짝은 홀수 개수의 홀짝과 같다.

Q23 정수론

세 자리 자연수 중에서 6의 배수이면서 동시에 8의 배수인 수는 모두 몇 개인가?

①) ① 35개

②) ② 36개

③) ③ 37개

④) ④ 38개

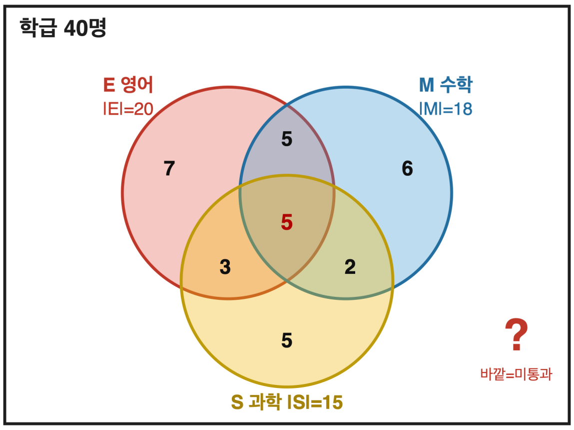
🎯 **정답:** ③ 37개

📖 6과 8의 공배수 = $\mathrm{LCM}(6, 8)$의 배수. $6 = 2 \times 3$, $8 = 2^3$이므로 $\mathrm{LCM} = 2^3 \times 3 = 24$. 세 자리 수 범위 100 이상 999 이하에서 24의 배수를 세자. 가장 작은 것: $\lceil 100/24 \rceil = 5$, $24 \times 5 = 120$. 가장 큰 것: $\lfloor 999/24 \rfloor = 41$, $24 \times 41 = 984$. 개수 = $41 - 5 + 1 = 37$개.

💡 두 수의 공배수는 모두 최소공배수의 배수. $\mathrm{GCD}(a, b) \times \mathrm{LCM}(a, b) = a \times b$의 관계도 성립.

Q24 집합과 벤다이어그램

40명 학급에서 영어, 수학, 과학 시험을 보았다. 영어 통과 20명, 수학 통과 18명, 과학 통과 15명, 영어와 수학 모두 통과 10명, 영어와 과학 모두 통과 8명, 수학과 과학 모두 통과 7명, 세 과목 모두 통과한 학생은 5명이다. 세 과목 중 한 과목도 통과하지 못한 학생은 몇 명인가?



①) ① 5명
②) ② 7명
③) ③ 10명
④) ④ 12명

🎯 **정답: ② 7명**

📖 포함배제 원리로 적어도 한 과목 통과한 학생 수를 구한다: $|E \cup M \cup S| = |E| + |M| + |S| - |E \cap M| - |E \cap S| - |M \cap S| + |E \cap M \cap S| = 20 + 18 + 15 - 10 - 8 - 7 + 5 = 53 - 25 + 5 = 33$명. 따라서 한 과목도 통과하지 못한 학생은 $40 - 33 = 7$명.

💡 포함배제는 부호가 $+, -, +, -, \ldots$ 번갈아 나타난다. n개 집합으로 일반화하면 항이 $2^n - 1$개.

Q25 함수와 패턴

함수 $f(x) = 3x - 5$에 대하여 $f(f(x)) = 16$을 만족하는 x의 값은?

①) ① 3
②) ② 4
③) ③ 5
④) ④ 6

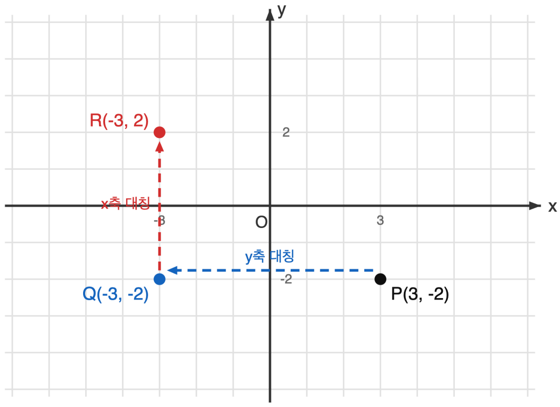
🎯 **정답: ② 4**

📖 함수의 합성을 차근차근 풀어보자. $f(f(x)) = f(3x - 5) = 3(3x - 5) - 5 = 9x - 15 - 5 = 9x - 20$. 따라서 $9x - 20 = 16$에서 $9x = 36$이므로 $x = 4$이다.

💡 $f(x) = 3x - 5$의 고정점(즉 $f(x) = x$가 되는 점)은 $x = \frac{5}{2}$이다.

Q26 좌표 기하

좌표평면 위의 점 $P(3,\ -2)$를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 Q라 하고, 점 Q를 다시 x축에 대하여 대칭이동한 점을 R이라 한다. 점 R의 좌표는?



①) ① $(-3, 2)$
②) ② $(3, 2)$
③) ③ $(-3,\ -2)$
④) ④ $(3,\ -2)$

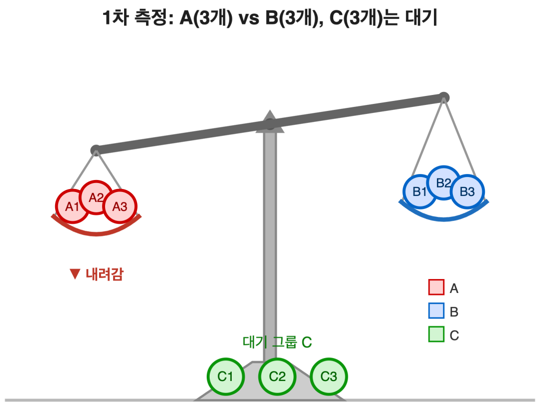
🎯 **정답:** ① $(-3, 2)$

📖 y축 대칭은 x좌표의 부호가 바뀐다: $P(3,\ -2) \to Q(-3,\ -2)$. x축 대칭은 y좌표의 부호가 바뀐다: $Q(-3,\ -2) \to R(-3, 2)$. 따라서 점 R의 좌표는 $(-3, 2)$이다. y축 대칭 후 x축 대칭의 합성은 $(x, y) \to (-x, y) \to (-x,\ -y)$이므로, 이는 우연이 아니라 모든 점에 대하여 항상 원점 대칭(180° 회전)과 일치한다.

💡 y축 대칭 후 x축 대칭은 원점에 대한 대칭과 결과가 같다(두 축이 서로 직교하기 때문).

Q27 재미 두뇌

겉모양이 똑같은 공 9개 중에서 단 1개만 다른 공들보다 약간 무겁다. 무게추가 없는 양팔저울만 사용해서 무거운 공을 반드시 찾으려고 한다. 필요한 최소 측정 횟수는?



①) ① 1번

②) ② 2번

③) ③ 3번

④) ④ 4번

🎯 **정답:** ② 2번

📖 9개 공을 3개씩 A, B, C 세 그룹으로 나눈다. \n(1차) A와 B를 양쪽 접시에 올린다. \n - A가 무거우면 무거운 공은 A에. \n - B가 무거우면 B에. \n - 평형이면 C에. \n어떤 경우든 후보가 정확히 3개로 줄어든다. \n(2차) 후보 3개 중 임의의 2개를 양쪽 접시에 올린다. \n - 한쪽이 내려가면 그 공. \n - 평형이면 남은 1개. \n따라서 2번이면 충분하며, 1번으로는 9개 중 1개를 특정할 수 없으므로 답은 2번.

💡 3^n개의 공이 있을 때 무거운 공 1개는 n번에 찾을 수 있다(매번 후보가 $\frac{1}{3}$로 줄어듦).

Q28 비둘기집 원리

서로 다른 자연수 n개를 임의로 골라도, 그 중에서 차가 6의 배수인 두 수가 반드시 존재함을 보장하려고 한다. n의 최솟값은?

①) ① 5

②) ② 6

③) ③ 7

④) ④ 12

🎯 **정답:** ③ 7

📖 임의의 자연수를 6으로 나눈 나머지는 $0, 1, 2, 3, 4, 5$ 중 하나이다(6가지 경우). 이를 6개의 '비둘기집'이라 하자. 자연수 7개를 고르면 비둘기집 원리에 의해 어떤 두 수의 나머지가 같다. 두 수 a, b가 $a \equiv b \pmod 6$이면 $a - b$가 6의 배수다. 한편 $n = 6$일 때는 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$처럼 나머지가 모두 다른 6개를 고를 수 있으므로 차가 6의 배수인 쌍이 존재하지 않을 수 있다. 따라서 답은 7.

💡 이 원리를 일반화하면 m의 배수 차를 보장하려면 $m + 1$개의 수를 고르면 된다.

Q29 함수와 패턴

수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 1$이고 모든 $n \geq 1$에 대해 $a_{n+1} = a_n + 2n$을 만족한다. a_{10}의 값은?

①) ① 81

②) ② 82

③) ③ 91

④) ④ 100

🎯 **정답:** ③ 91

📖 점화식 $a_{n+1} - a_n = 2n$을 차분의 합으로 풀자. \n

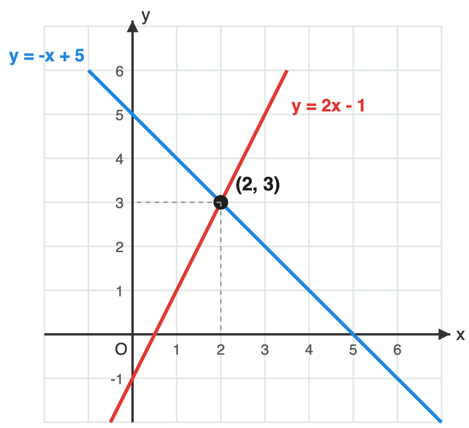
$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2k = 1 + 2 \cdot \frac{(n-1)n}{2} = n^2 - n + 1.$$

\n따라서 $a_{10} = 10^2 - 10 + 1 = 100 - 10 + 1 = 91$. 직접 계산해도 $1, 3, 7, 13, 21, 31, 43, 57, 73, 91$로 같은 결과.

💡 $a_n = n^2 - n + 1$의 값들 $1, 3, 7, 13, 21, 31, \ldots$ 사이의 차는 $2, 4, 6, 8, \ldots$로 등차수열이다.

Q30 좌표 기하

좌표평면 위의 두 직선 $y = 2x - 1$과 $y = -x + 5$의 교점의 좌표를 (a, b)라 할 때, $a + b$의 값은?



①) ① 4

②) ② 5

③) ③ 6

④) ④ 7

🎯 **정답:** ② 5

📖 두 직선이 만나는 점에서는 y값이 같으므로 $2x - 1 = -x + 5$. 정리하면 $3x = 6$이므로 $x = 2$. 이를 한 식에 대입하면 $y = 2 \cdot 2 - 1 = 3$. 따라서 교점은 $(2, 3)$이며 $a + b = 2 + 3 = 5$.

Q31 확률

1부터 5까지의 숫자가 하나씩 적힌 카드 5장에서 동시에 2장을 뽑을 때, 두 카드에 적힌 수의 곱이 짝수일 확률은?

①) ① $\frac{1}{2}$
②) ② $\frac{3}{5}$
③) ③ $\frac{7}{10}$
④) ④ $\frac{4}{5}$

🎯 **정답:** ③ $\frac{7}{10}$

📖 5장에서 2장을 뽑는 전체 경우의 수는 $\binom{5}{2} = 10$. 두 수의 곱이 짝수이려면 적어도 한 수가 짝수여야 한다. 짝수 카드는 $\{2, 4\}$로 2장, 홀수 카드는 $\{1, 3, 5\}$로 3장. \n - 짝수 1장 + 홀수 1장: $2 \times 3 = 6$가지. \n - 짝수 2장: $\binom{2}{2} = 1$가지. \n따라서 곱이 짝수인 경우는 $6 + 1 = 7$가지. 확률은 $\frac{7}{10}$이다.

💡 확률을 직접 구하기 복잡할 때는 '곱이 홀수일 확률($\frac{3}{10}$)을 1에서 뺀다'는 접근도 같은 답을 준다.

Q32 수열

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 10^2$의 값은?

①) ① 285
②) ② 330
③) ③ 385
④) ④ 420

🎯 **정답:** ③ 385

📖 제곱수의 합 공식

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

을 이용하자. $n = 10$을 대입하면 $\frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} = \frac{2310}{6} = 385$. 직접 더해서 확인: $1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 + 81 + 100 = 385$.

💡 제곱수 합 공식은 가우스가 어린 시절 발견했다는 '$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$'의 사촌격이다.

Q33 정수론

120의 양의 약수를 모두 더한 값(약수의 총합)은?

①) ① 240
②) ② 320
③) ③ 360
④) ④ 480

🎯 **정답:** ③ 360

📖 먼저 소인수분해: $120 = 2^3 \times 3 \times 5$. 양의 약수의 총합은 각 소인수의 거듭제곱들을 모두 더한 후 곱하면 된다.

$$\sigma(120) = (1 + 2 + 4 + 8)(1 + 3)(1 + 5) = 15 \times 4 \times 6 = 360.$$

이 공식은 모든 약수를 곱셈적으로 전개해 한 번씩만 세는 원리에 기반한다.

💡 약수의 총합이 자기 자신의 2배인 수를 '완전수'라 한다. 가장 작은 완전수는 6 ($1 + 2 + 3 + 6 = 12 = 2 \times 6$).

Q34 함수와 패턴

실수 전체에서 정의된 함수 f가 모든 실수 x에 대해

$$f(x) + f(1-x) = x^2 + (1-x)^2$$

을 만족한다고 한다. $f\left(\frac{1}{2}\right)$의 값은?

①) ① $\frac{1}{8}$
②) ② $\frac{1}{4}$
③) ③ $\frac{1}{2}$
④) ④ 1

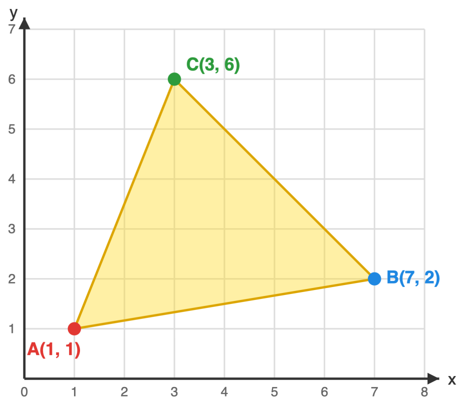
🎯 **정답:** ② $\frac{1}{4}$

📖 주어진 함수방정식에 $x = \frac{1}{2}$를 대입하자. $1 - x = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$이므로 좌변은 $f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 2f\left(\frac{1}{2}\right)$. 우변은 $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$. 따라서 $2f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$이므로 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

💡 $x = \frac{1}{2}$는 x와 $1-x$가 같아지는 '대칭의 중심'이므로, 함수방정식에서 가장 정보를 많이 주는 대입점이다.

Q35 좌표 기하

좌표평면 위의 세 점 $A(1,1)$, $B(7,2)$, $C(3,6)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 넓이는?



①) ① 12
②) ② 13
③) ③ 14
④) ④ 15

🎯 **정답:** ③ 14

📖 좌표 세 점이 이루는 삼각형의 넓이는 '신발끈 공식'으로 직접 계산할 수 있다. \n

$$S = \frac{1}{2}\,|\,x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\,|$$

\n대입하면 \n

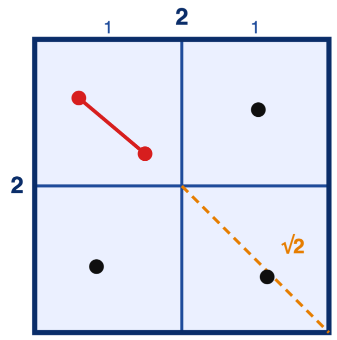
$$S = \frac{1}{2}\,|\,1\cdot(2-6) + 7\cdot(6-1) + 3\cdot(1-2)\,| = \frac{1}{2}\,|\,-4 + 35 - 3\,| = \frac{1}{2}\cdot 28 = 14.$$

\n확인: 직사각형 $[1,7]\times[1,6]$의 넓이 30에서 바깥 삼각형 3개의 넓이를 빼도 14.

💡 신발끈 공식은 좌표를 두 줄로 적고 대각선 곱을 더하고 빼는 모습이 신발끈을 묶는 모양과 닮아서 붙은 이름이다.

Q36 비둘기집 원리

한 변의 길이가 2인 정사각형 영역 안에 5개의 점을 임의로 찍으면, 그 중 어떤 두 점 사이의 거리가 $\sqrt{2}$ 이하인 두 점이 항상 존재함을 보이려고 한다. 비둘기집 원리를 적용하기 위해 정사각형을 어떻게 분할하면 가장 적절한가?



점 5개 > 칸 4개 → 어떤 칸에 점 2개 (거리 ≤ √2)

①) ① 한 변의 길이가 1인 정사각형 4개

②) ② 한 변의 길이가 1인 정사각형 5개

③) ③ 빗변이 2인 직각이등변삼각형 2개

④) ④ 반지름이 1인 원 4개

🎯 **정답: ① 한 변의 길이가 1인 정사각형 4개**

📖 한 변 2인 정사각형을 가로와 세로 중간선으로 자르면 한 변 1인 정사각형 4개가 빈틈없이 나온다. 점이 5개이고 칸이 4개이므로 비둘기집 원리에 의해 어떤 한 칸에는 점이 적어도 2개 들어 있다. 한 변 1인 정사각형 내부의 두 점 사이 최대 거리는 대각선 길이 $\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ 이므로, 같은 칸의 두 점은 거리가 $\sqrt{2}$ 이하이다. ②는 한 변 1인 정사각형 5개로는 한 변 2인 정사각형을 채울 수 없다. ③, ④는 영역의 지름이 $\sqrt{2}$ 보다 커서 결론을 보장하지 못한다.

💡 비둘기집 원리(서랍 원리, Dirichlet 원리)는 단순해 보이지만 정수론, 조합론, 기하학에서 깊은 결과들의 출발점이 된다.

Q37 비둘기집 원리

주머니 안에 7가지 색의 구슬이 충분히 많이 들어 있다. 색을 보지 않고 구슬을 하나씩 꺼낼 때, 같은 색의 구슬이 적어도 3개가 되도록 하려면 최소 몇 개를 꺼내야 하는가?

①) ① 14개

②) ② 15개

③) ③ 16개

④) ④ 21개

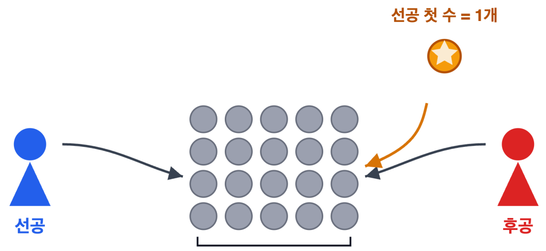
🎯 **정답: ② 15개**

📖 최악의 경우를 생각한다. 7색 각각 2개씩 꺼내면 14개까지는 같은 색이 최대 2개에 그칠 수 있다. 그러나 15번째 구슬을 꺼내는 순간, 어떤 색을 뽑든 그 색은 3개가 된다 (비둘기집 원리). 따라서 최소 15개.

💡 비둘기집 원리에서 '같은 색 k개 보장'은 $(k-1) \times$ (색 수) $+ 1$ 개를 꺼내면 된다.

Q38 게임 이론

돌 21개가 한 무더기에 놓여 있다. 두 사람이 번갈아 가며 1개, 2개, 3개 중 한 개수를 가져가고, 마지막 돌을 가져간 사람이 이긴다. 선공이 반드시 이기려면 첫 수에 몇 개를 가져가야 하는가?



①) ① 1개

②) ② 2개

③) ③ 3개

④) ④ 어떻게 해도 이길 수 없다

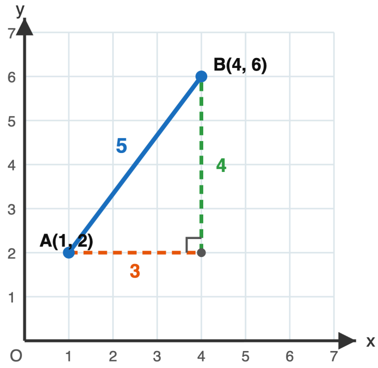
🎯 **정답: ① 1개**

📖 $21 = 4 \times 5 + 1$. 선공이 먼저 1개를 가져가 20개로 만든다. 이후 후공이 a개($1 \le a \le 3$) 가져갈 때마다 선공은 $4 - a$개를 가져가, 남은 돌의 수를 항상 4의 배수로 유지한다. 이 전략으로 마지막에 4개가 남고 후공이 1, 2, 3개 중 무엇을 가져가도 선공이 나머지를 모두 가져가 승리한다.

💡 이렇게 한 번에 가져갈 수 있는 최댓값이 k일 때, 돌의 수를 $(k+1)$의 배수로 유지하는 전략을 '뺄셈 게임 전략'이라 한다.

Q39 좌표 기하

좌표평면 위 두 점 $A(1,\ 2)$와 $B(4,\ 6)$ 사이의 거리는?



①) ① 4
②) ② 5
③) ③ $5\sqrt{2}$
④) ④ 7

🎯 **정답: ② 5**

📖 두 점 사이의 거리 공식: $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(4-1)^2+(6-2)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$. 가로 3, 세로 4의 직각삼각형의 빗변이므로 3-4-5 피타고라스 세 쌍에 해당.

💡 $(3, 4, 5)$는 가장 작은 정수해 피타고라스 세 쌍이다.

Q40 함수와 패턴

$f(x) = 3x - 5$일 때, $f(f(2))$의 값은?

①) ① -2
②) ② 0
③) ③ 1
④) ④ 2

🎯 **정답: ① -2**

📖 먼저 안쪽 함수값을 구한다. $f(2) = 3 \times 2 - 5 = 1$. 다음으로 바깥 함수에 대입한다. $f(1) = 3 \times 1 - 5 = -2$. 따라서 $f(f(2)) = -2$.

💡 함수 합성 $f \circ f$는 같은 함수를 두 번 적용하는 것으로, 결과 함수는 $f(f(x)) = 3(3x-5)-5 = 9x-20$이다.

🧠 중등 논리·추론

총 40문제 · 문제와 정답·풀이 포함

Q41 정수론 (소수)

1보다 크고 30 이하인 자연수 중 소수의 개수는?

①) ① 9개
②) ② 10개
③) ③ 11개
④) ④ 12개

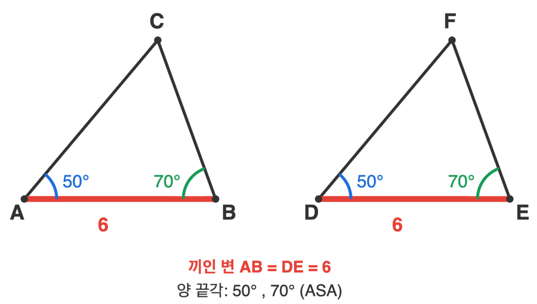
🎯 **정답: ② 10개**

📖 30 이하의 소수를 나열한다: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29. 정확히 10개. 9는 3^2, 15는 3×5, 21은 3×7, 25는 5^2, 27은 3^3, 빨리 떠올리기 좋은 합성수다.

💡 n이 합성수이면 $\sqrt{n}$ 이하의 어떤 소수로는 반드시 나누어진다. 30 이하 합성수는 $\sqrt{30}$ $\approx$ 5.5이므로 2, 3, 5로 거르면 모두 찾을 수 있다.

Q42 도형 (합동)

두 삼각형 $\triangle ABC$와 $\triangle DEF$에서 $\overline{AB} = \overline{DE} = 6$, $\angle A = \angle D = 50°$, $\angle B = \angle E = 70°$일 때, 두 삼각형이 합동임을 보장하는 합동조건은?



①) ① SSS (세 변)
②) ② SAS (두 변과 끼인 각)
③) ③ ASA (두 각과 끼인 변)
④) ④ 합동이 아니다

🎯 **정답: ③ ASA (두 각과 끼인 변)**

📖 $\angle A$와 $\angle B$는 변 $\overline{AB}$의 양 끝각이고, $\angle D$와 $\angle E$는 변 $\overline{DE}$의 양 끝각이다. 즉 끼인 변과 그 양 끝각이 각각 같으므로 ASA(각-변-각) 합동조건을 만족한다.

💡 두 각이 같으면 나머지 한 각도 자동으로 같다 $(180° - 50° - 70° = 60°)$. 그래서 ASA의 변형으로 'AAS(두 각과 한 변)'도 합동조건이다.

Q43 확률

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 두 눈의 합이 7일 확률은?

①) ① $\frac{1}{12}$
②) ② $\frac{1}{6}$
③) ③ $\frac{5}{36}$
④) ④ $\frac{7}{36}$

🎯 **정답: ② $\frac{1}{6}$**

📖 전체 경우의 수는 $6 \times 6 = 36$. 합이 7인 경우: $(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)$의 6가지. 따라서 확률은 $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. 합이 7은 두 주사위 합 중 가장 가능성이 높은 값이다.

💡 표준 주사위는 마주 보는 면의 눈 수의 합이 항상 7이다. 1↔6, 2↔5, 3↔4. 그래서 합이 7이 잘 나오는 분포 정점과 우연히 같은 수다.

Q44 수열과 점화

계단을 한 번에 1칸 또는 2칸씩 올라갈 수 있다. 5칸 짜리 계단을 오르는 서로 다른 방법의 수는?

①) ① 5가지
②) ② 6가지
③) ③ 8가지
④) ④ 10가지

🎯 **정답: ③ 8가지**

📖 n칸 계단의 방법 수를 a_n이라 하면, 마지막 한 걸음이 1칸이면 a_{n-1}, 2칸이면 a_{n-2}이므로 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. $a_1 = 1$, $a_2 = 2$로 시작하여 $a_3 = 3$, $a_4 = 5$, $a_5 = 8$. 따라서 5칸은 8가지. (점화 구조는 피보나치 계열).

💡 이렇게 1과 2의 합으로 자연수를 분할하여 순서를 구별하는 수를 '구성(composition)'이라 부르며, 그 수는 항상 피보나치 수다.

Q45 도형 (닮음·부피)

닮음비가 $2:3$인 두 정육면체가 있다. 두 정육면체의 부피의 비는?

①) ① $2:3$
②) ② $4:9$
③) ③ $8:27$
④) ④ $6:9$

🎯 **정답: ③ $8:27$**

📖 닮음비가 $a:b$인 두 입체도형에서 길이비는 $a:b$, 겉넓이비는 $a^2:b^2$, 부피비는 $a^3:b^3$이다. $2^3:3^3 = 8:27$. 실제로 한 변 2와 3인 정육면체 부피는 8과 27.

💡 길이를 2배 늘리면 부피는 $2^3 = 8$배가 된다. 그래서 '한 변을 두 배 늘린 정육면체'는 부피가 정확히 8배가 된다 (델로스의 정육면체 배가 문제와 관련).

Q46 정수론 / 모듈러

100!을 십진법으로 표기했을 때, 끝자리에 연속해서 나타나는 0의 개수는?

①) ① 20개

②) ② 21개

③) ③ 24개

④) ④ 25개

🎯 **정답: ③ 24개**

📖 끝자리 0의 개수는 $10 = 2 \times 5$의 짝의 개수이고, 100!의 소인수에서 2가 5보다 훨씬 많으므로 결국 5의 지수가 결정한다. 르장드르 공식으로 100!에 들어 있는 소인수 5의 개수는 $\left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{25} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{125} \right\rfloor = 20 + 4 + 0 = 24$. 따라서 끝자리 0은 24개.

💡 n!의 끝자리 0의 개수는 n이 1 늘어난다고 1씩 늘지 않는다. $n = 24 \to 4$개, $n = 25 \to 6$개처럼 5의 거듭제곱 배에서 2개씩 점프한다.

Q47 경우의 수

5명의 학생 A, B, C, D, E를 일렬로 세울 때, A와 B가 서로 이웃하여 서는 경우의 수는?

①) ① 24가지

②) ② 48가지

③) ③ 60가지

④) ④ 72가지

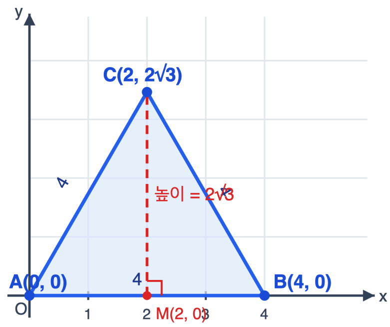
🎯 **정답: ② 48가지**

📖 이웃 두 명을 한 묶음으로 본다 (묶음법). A, B를 한 덩어리로 묶으면 [AB], C, D, E의 4개 대상을 일렬로 세우는 방법이 $4! = 24$. 각 경우에 묶음 내부에서 A와 B의 순서가 (A, B) 또는 (B, A)의 $2! = 2$가지. 따라서 $24 \times 2 = 48$가지.

💡 k명이 이웃해야 한다면, '$(n - k + 1)! \times k!$' 공식이 일반화 형태다.

Q48 좌표 기하

좌표평면 위에 한 변의 길이가 4인 정삼각형의 꼭짓점이 $A(0,\ 0)$, $B(4,\ 0)$이고 세 번째 꼭짓점 C의 y좌표가 양수일 때, 점 C의 좌표와 삼각형 ABC의 넓이를 옳게 짝지은 것은?



①) ① $C(2,\ 2\sqrt{3}\ )$, 넓이 $4\sqrt{3}$

②) ② $C(2,\ \sqrt{3}\ )$, 넓이 $2\sqrt{3}$

③) ③ $C(2,\ 4)$, 넓이 8

④) ④ $C(2,\ 2\sqrt{3}\ )$, 넓이 $8\sqrt{3}$

정답: ① $C(2,\ 2\sqrt{3}\ )$, 넓이 $4\sqrt{3}$

C의 x좌표는 AB의 중점이므로 $\dfrac{0+4}{2}=2$. 정삼각형의 높이 h는 한 변 a에 대해 $h=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times 4=2\sqrt{3}$. 따라서 $C(2,\ 2\sqrt{3}\ )$. 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times h=\dfrac{1}{2}\times 4\times 2\sqrt{3}\ =4\sqrt{3}$.

한 변이 a인 정삼각형의 넓이는 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$. $a=4$이면 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 16=4\sqrt{3}$ 로 같은 값이 나온다.

Q49 모듈러 산술

7^{2026}의 일의 자리 숫자는 무엇인가?

①) ① 1

②) ② 3

③) ③ 7

④) ④ 9

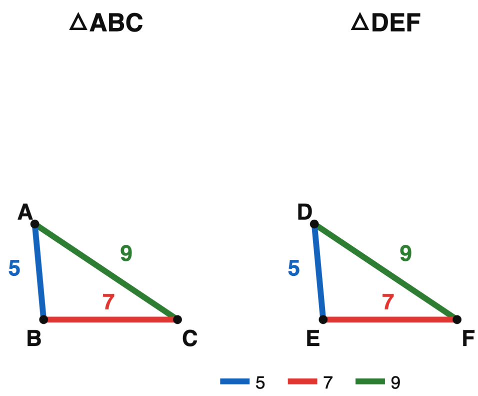
정답: ④ 9

7의 거듭제곱의 일의 자리는 주기 4로 반복된다. $7^1=7$, $7^2=49\rightarrow 9$, $7^3=343\rightarrow 3$, $7^4=2401\rightarrow 1$, $7^5=16807\rightarrow 7$ 로 다시 시작. 따라서 일의 자리는 $(7,9,3,1)$이 순환. $2026=4\times 506+2$이므로 7^{2026}의 일의 자리는 7^2의 일의 자리와 같은 9이다.

모든 자연수 a에 대해 $a^n \pmod{10}$은 길어야 4가지 값을 주기적으로 순환한다.

Q50 도형 (합동·닮음·면적)

두 삼각형 $\triangle ABC$와 $\triangle DEF$의 세 변의 길이가 각각 $5, 7, 9$로 모두 같다. 이 두 삼각형은 어떤 관계에 있는가?



①) ① 항상 합동이다
②) ② 닮음이지만 합동은 아닐 수 있다
③) ③ 추가 정보가 없으면 합동을 알 수 없다
④) ④ 한 각도가 같아야 합동이 보장된다

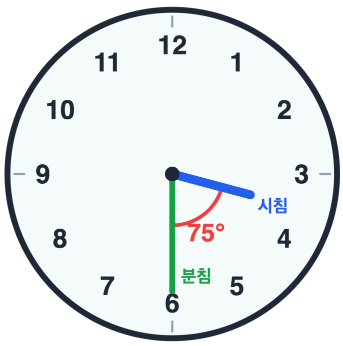
🎯 **정답: ① 항상 합동이다**

📖 두 삼각형의 세 쌍의 대응변의 길이가 각각 같으면 SSS 합동조건에 의해 두 삼각형은 합동이다. 세 변의 길이를 정하는 순간 삼각형의 모양과 크기가 유일하게 결정되므로 다른 정보가 필요 없다.

💡 세 점만으로 삼각형이 결정되듯, 세 변의 길이만으로도 삼각형은 유일하게 결정된다 (단, 삼각부등식을 만족할 때).

Q51 재미 두뇌

시계가 정확히 3시 30분을 가리킬 때, 시침과 분침이 이루는 작은 각의 크기는?



①) ① $60°$
②) ② $75°$
③) ③ $90°$
④) ④ $105°$

🎯 **정답:** ② $75°$

📖 분침: 30분 위치는 12시 기준 $30 \times 6° = 180°$. 시침: 3시 정각엔 $3 \times 30° = 90°$였고, 30분 동안 $30 \times 0.5° = 15°$ 더 진행하여 $105°$. 두 바늘 사이 각 = $|180° - 105°| = 75°$. (시침은 1분당 $0.5°$, 분침은 1분당 $6°$ 움직임.)

💡 분침과 시침이 정확히 겹치는 순간은 12시간에 11번 일어난다 (12번이 아니다).

Q52 정수론

12와 18의 최소공배수는?

①) ① 24

②) ② 36

③) ③ 54

④) ④ 72

🎯 **정답:** ② 36

📖 소인수분해: $12 = 2^2 \times 3$, $18 = 2 \times 3^2$. 최소공배수는 각 소인수의 더 큰 지수를 취해 곱한 값이다. $\mathrm{lcm}(12, 18) = 2^2 \times 3^2 = 4 \times 9 = 36$. 검산: $36 = 12 \times 3 = 18 \times 2$ 이므로 12, 18의 공배수이고, 둘 다 더 작은 공배수는 없다.

💡 두 수의 곱은 항상 (최대공약수) × (최소공배수)와 같다. $12 \times 18 = 216 = 6 \times 36$.

Q53 정수론

60과 84의 최대공약수 $\gcd(60, 84)$는?

①) ① 6

②) ② 12

③) ③ 24

④) ④ 30

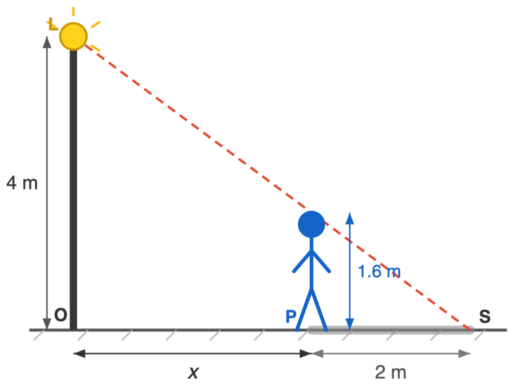
🎯 **정답:** ② 12

📖 소인수분해: $60 = 2^2 \times 3 \times 5$, $84 = 2^2 \times 3 \times 7$. 최대공약수는 공통 소인수의 더 작은 지수를 취해 곱한 값이다. $\gcd(60, 84) = 2^2 \times 3 = 12$. 유클리드 호제법으로도 확인: $84 = 60 \times 1 + 24$, $60 = 24 \times 2 + 12$, $24 = 12 \times 2 + 0$ 이므로 답은 12.

💡 유클리드 호제법은 기원전 300년경 유클리드의 '원론'에 기록된, 인류 역사상 가장 오래된 알고리즘 중 하나다.

Q54 도형 (합동·닮음·면적)

높이 4m인 가로등 아래에서 키 1.6m인 사람이 일직선 상에 서 있다. 사람의 그림자 길이가 2m일 때, 사람은 가로등 기둥에서 얼마나 떨어져 있는가?



①) ① 2 m

②) ② 2.5 m

③) ③ 3 m

④) ④ 4 m

⑤) ⑤ 5 m

🎯 **정답: ③ 3 m**

📖 가로등 꼭대기 L, 가로등 발 O, 사람의 발 P, 그림자 끝 S라 하자. 사람의 키와 가로등이 평행이므로 큰 직각삼각형 $\triangle LOS$와 작은 $\triangle$(사람)PS는 닮음이다. $OP = x$ (구하는 거리), $PS = 2$이므로 $OS = x + 2$. 비례식 $\frac{4}{x+2} = \frac{1.6}{2}$. 양변에 $(x + 2)$ 곱하면 $4 \times 2 = 1.6 \times (x + 2)$, 즉 $8 = 1.6x + 3.2$. 따라서 $x = \frac{4.8}{1.6} = 3$ (m).

💡 고대 그리스 수학자 탈레스는 이 원리를 이용해 자기 그림자와 키의 비를 측정한 뒤, 피라미드의 그림자 길이로부터 피라미드 높이를 계산했다.

Q55 확률

두 개의 주사위를 동시에 던졌을 때, 두 눈의 차의 절댓값이 2일 확률은?

①) ① $\frac{1}{6}$

②) ② $\frac{2}{9}$

③) ③ $\frac{1}{3}$

④) ④ $\frac{4}{9}$

🎯 **정답: ② $\frac{2}{9}$**

📖 두 주사위를 던지는 경우의 수는 $6 \times 6 = 36$가지. 차의 절댓값이 2인 경우는 $(1, 3), (3, 1), (2, 4), (4, 2), (3, 5), (5, 3), (4, 6), (6, 4)$로 총 8가지. 확률 = $\frac{8}{36} = \frac{2}{9}$.

💡 두 주사위의 차의 절댓값으로 가장 자주 나오는 값은 1 (확률 $\frac{10}{36}$), 가장 드물게 나오는 값은 5 (확률 $\frac{2}{36}$)이다.

Q56 모듈러 산술

오늘이 수요일이다. 오늘부터 정확히 100일 후는 무슨 요일인가?

①) ① 목요일
②) ② 금요일
③) ③ 토요일
④) ④ 일요일

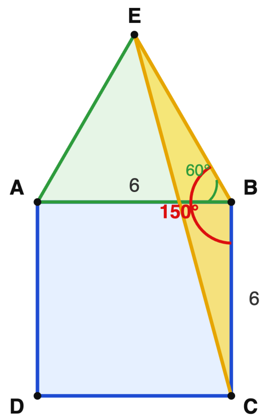
🎯 **정답: ② 금요일**

📖 7일마다 같은 요일이 반복되므로 100일 후 요일은 $100 \pmod 7$ 에 달려있다. $100 = 14 \times 7 + 2$이므로 $100 \equiv 2 \pmod 7$. 따라서 수요일에서 2일 후, 즉 금요일. (확인: 수요일 → 목요일 → 금요일.)

💡 동일한 요일 계산 원리로 '체이스가 만든 요일 공식 (Zeller's congruence)'은 어떤 날짜의 요일이든 즉시 계산할 수 있다.

Q57 도형 (합동·닮음·면적)

한 변의 길이가 6인 정사각형 $ABCD$가 있다. 변 AB의 정사각형 바깥쪽에 정삼각형 ABE를 그렸을 때, 삼각형 BCE의 넓이는?



①) ① 6
②) ② 9
③) ③ 12
④) ④ 18

🎯 **정답: ② 9**

📖 정삼각형 ABE이므로 $BE = AB = 6$이고 $\angle ABE = 60°$. 정사각형 $ABCD$이므로 $\angle ABC = 90°$. E가 정사각형 바깥쪽에 있으므로 두 각은 점 B를 중심으로 같은 방향에 더해진다: $\angle CBE = \angle ABC + \angle ABE = 90° + 60° = 150°$. 따라서 $\triangle BCE$의 넓이 = $\frac{1}{2} \cdot BC \cdot BE \cdot \sin(\angle CBE) = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \sin 150° = \frac{1}{2} \cdot 36 \cdot \frac{1}{2} = 9$.

💡 $\sin 150° = \sin 30° = \frac{1}{2}$ 인 이유는 $\sin(180° - \theta) = \sin\theta$ 이기 때문 (보각 관계).

Q58 논리 (Knight/Knave)

정직한 사람은 항상 진실만 말하고, 거짓말쟁이는 항상 거짓만 말하는 섬에 세 명 A, B, C가 있다. 각자 다음과 같이 말했다. A: "C는 거짓말쟁이다." B: "A와 C는 같은 종류의 사람이다." C: "B는 정직한 사람이다." 세 사람의 정체는?

①) ① A=정직, B=거짓, C=거짓
②) ② A=거짓, B=정직, C=거짓
③) ③ A=정직, B=정직, C=거짓
④) ④ A=거짓, B=거짓, C=정직

정답: ① A=정직, B=거짓, C=거짓

A가 정직이라 가정하면: A의 말이 참 $\Rightarrow$ C는 거짓. 그러면 A(정직)와 C(거짓)는 다른 종류이므로 B의 발언 '같은 종류' 는 거짓 $\Rightarrow$ B는 거짓. 그러면 C의 발언 "B는 정직" 은 거짓 $\Rightarrow$ C는 거짓. 일관됨 ✓. 반대로 A가 거짓이라 가정하면: C는 정직 $\Rightarrow$ A, C는 다른 종류 $\Rightarrow$ B '같은 종류' 거짓 $\Rightarrow$ B 거짓 $\Rightarrow$ C의 "B 정직"은 거짓인데, C가 정직이라 했으므로 모순. 유일한 해는 A=정직, B=거짓, C=거짓.

이런 문제를 푸는 표준 기법은 '한 명의 정체를 가정하고 모순이 나오면 반대'이다. 가정 - 추론 - 검증의 사고 패턴이 곧 수학적 증명의 본질.

Q59 모듈러 산술

2^{100}을 7로 나눈 나머지는?

①) ① 1
②) ② 2
③) ③ 4
④) ④ 6

정답: ② 2

2의 거듭제곱을 7로 나눈 나머지의 주기를 찾는다. $2^1 \equiv 2$, $2^2 \equiv 4$, $2^3 = 8 \equiv 1 \pmod 7$. 이후 $2^4 \equiv 2 \cdot 1 = 2$ 로 다시 시작 $\Rightarrow$ 주기 3. 지수 100을 3으로 나누면 $100 = 3 \times 33 + 1$, 즉 $100 \equiv 1 \pmod 3$. 따라서 $2^{100} \equiv 2^1 \equiv 2 \pmod 7$.

페르마의 소정리에 의해 소수 p와 $\gcd(a, p) = 1$이면 $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$. 여기서 $2^{7-1} = 2^6 \equiv 1 \pmod 7$이 성립한다.

Q60 재미 두뇌

100개의 사물함이 한 줄로 놓여 있고 모두 닫혀 있다. 100명의 학생이 차례로 다음을 한다: n번째 학생은 n의 배수에 해당하는 사물함을 모두 토글한다 (닫혀있으면 열고, 열려있으면 닫음). 모든 학생이 끝낸 후 열려 있는 사물함은 몇 개인가?

사물함 1-100 (약수 개수 홀수 = 열림)

1	2	3	**4**	5	6	7	8	**9**	10
11	12	13	14	15	**16**	17	18	19	20
21	22	23	24	**25**	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	**36**	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	**49**	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	**64**	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	**100**

열림 (완전제곱수) = 10개　　닫힘

①) ① 5개
②) ② 10개
③) ③ 25개
④) ④ 50개

🎯 **정답: ② 10개**

📖 사물함 n은 그 번호의 약수에 해당하는 학생들에 의해 토글된다. 따라서 토글 횟수 = n의 약수의 개수. 처음에 닫혀 있었으므로 토글 횟수가 홀수면 최종적으로 열려 있음. n의 약수는 보통 $(d, n/d)$ 쌍으로 짝지어져 짝수 개인데, n이 완전제곱수일 때만 $\sqrt{n}$ 이 자기 자신과 쌍이 되어 한 개가 남고, 총 개수가 홀수가 된다. 1 - 100 사이 완전제곱수: $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100 \Rightarrow$ 10개.

💡 완전제곱수만 약수의 개수가 홀수라는 성질은 '쌍짓기 논증'의 대표적 예다. 약수를 $d \cdot (n/d)$로 쌍지을 수 없는 유일한 경우가 $d = \sqrt{n}$ 일 때.

Q61 논리 (Knight/Knave)

정직한 사람(항상 참)과 거짓말쟁이(항상 거짓)만 사는 섬에서 두 주민 A, B를 만났다. A는 "B는 거짓말쟁이다."라고 말했고, B는 "A와 나는 같은 종류이다."라고 말했다. A와 B의 종류는?

①) ① 둘 다 정직
②) ② A는 정직, B는 거짓말쟁이
③) ③ A는 거짓말쟁이, B는 정직
④) ④ 둘 다 거짓말쟁이

🎯 **정답: ② A는 정직, B는 거짓말쟁이**

📖 경우 1) A가 정직이라 가정 → A의 말 "B는 거짓말쟁이"는 참 → B는 거짓말쟁이. 그러면 B의 말 "같은 종류"는 거짓 → 실제로 다른 종류. 이는 A=정직, B=거짓말쟁이와 일관. ✓ 경우 2) A가 거짓말쟁이라 가정 → A의 말 거짓 → B는 정직. 그러면 B의 말 "같은 종류"는 참이어야 하는데 실제로는 다른 종류 → 모순. ✗ 따라서 A는 정직, B는 거짓말쟁이.

💡 이런 형태의 퍼즐은 논리학자 레이먼드 스멀리언이 대중화시켰다.

Q62 수열과 점화

첫째항이 3, 공비가 2인 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$이다. 제5항 a_5의 값은?

①) ① 24

②) ② 32

③) ③ 48

④) ④ 96

🎯 **정답: ③ 48**

📖 등비수열의 일반항 공식에 $n = 5$를 대입한다. $a_5 = 3 \cdot 2^{5-1} = 3 \cdot 2^4 = 3 \cdot 16 = 48$. 직접 나열해 확인: 3, 6, 12, 24, 48. 다섯 번째 항이 48이다.

💡 등비수열 2^n은 컴퓨터의 저장 단위(KB, MB, GB)의 기초가 된다.

Q63 비둘기집 원리

한 학급에 13명의 학생이 있다. 1년이 12개월이라 할 때, 같은 달에 태어난 학생이 적어도 몇 명 있다고 확신할 수 있는가?

①) ① 1명

②) ② 2명

③) ③ 3명

④) ④ 4명

🎯 **정답: ② 2명**

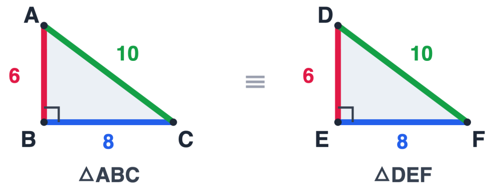
📖 비둘기집 원리: $n + 1$마리의 비둘기를 n개의 둥지에 넣으면 어떤 둥지에는 비둘기가 2마리 이상 있다. 여기서 12개의 달이 '둥지', 13명의 학생이 '비둘기'에 해당한다. 13명이 12개의 달에 분포하면 어떤 달에는 반드시 2명 이상이 있다. 단, 3명 이상은 보장되지 않는다(예: 한 달에 2명, 나머지 11개월에 1명씩).

💡 23명만 있어도 두 명이 같은 생일일 확률이 50%를 넘는 '생일의 역설'은 다른 문제다.

Q64 도형 (합동·닮음·면적)

두 삼각형 $\triangle ABC$와 $\triangle DEF$에서 $AB = DE = 6$, $BC = EF = 8$, $CA = FD = 10$이다. 두 삼각형이 합동임을 보장하는 합동 조건은 무엇이고, $\triangle ABC$의 넓이는?

두 직각삼각형 △ABC 와 △DEF



①) ① SSS, 넓이 24

②) ② SAS, 넓이 24

③) ③ SSS, 넓이 30

④) ④ ASA, 넓이 48

🎯 **정답: ① SSS, 넓이 24**

📖 세 쌍의 대응변의 길이가 모두 같으므로(SSS, 변-변-변) $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$이다. 또한 $6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 = 10^2$이므로 $\triangle ABC$는 $\angle B = 90°$인 직각삼각형(피타고라스의 역). 따라서 넓이는 $\frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24$.

💡 $(6, 8, 10)$은 $(3, 4, 5)$의 2배인 피타고라스 수다.

Q65 게임 이론 (Nim)

21개의 돌이 한 무더기에 놓여있다. 두 명이 번갈아 1개, 2개, 또는 3개의 돌을 가져갈 수 있고, 마지막 돌을 가져가는 사람이 이긴다. 먼저 두는 사람이 반드시 이기려면 처음에 몇 개를 가져가야 하는가?

①) ① 1개
②) ② 2개
③) ③ 3개
④) ④ 어떻게 두어도 짐

🎯 **정답: ① 1개**

📖 핵심 전략: 상대 차례에 남은 돌의 개수가 4의 배수가 되도록 만들면 반드시 이긴다. 상대가 k개($1 \le k \le 3$)를 가져가면 나는 $(4-k)$개를 가져가 매 라운드마다 4개씩 줄이면 된다. $21 = 4 \times 5 + 1$이므로 처음에 1개를 가져가 20개(4의 배수)를 만든다. 이후 상대 차례 → 20, 16, 12, 8, 4, 0 순으로 진행되어 결국 마지막 돌을 내가 가져간다.

💡 이런 단순 Nim은 $\pmod 4$ 분석으로 풀린다. 무더기가 여러 개면 XOR(니모-합) 분석이 필요하다.

Q66 정수론

두 자연수 30과 45에 대하여 최대공약수를 a, 최소공배수를 b라 할 때, $a \times b$의 값은?

①) ① 900
②) ② 1350
③) ③ 1500
④) ④ 2025

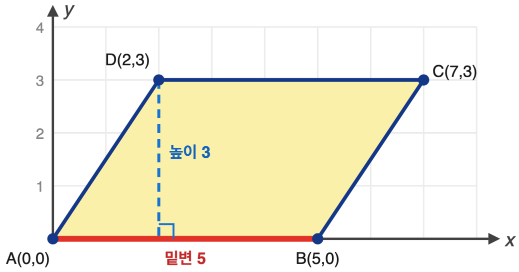
🎯 **정답: ② 1350**

📖 소인수분해: $30 = 2 \times 3 \times 5$, $45 = 3^2 \times 5$. 최대공약수 $a = 3 \times 5 = 15$. 최소공배수 $b = 2 \times 3^2 \times 5 = 90$. $a \times b = 15 \times 90 = 1350$. 검산: 임의의 두 자연수 m, n에 대해 $\gcd(m,n) \times \mathrm{lcm}(m,n) = m \times n$이 성립하므로 $30 \times 45 = 1350$. ✓

💡 $\gcd(a,b) \cdot \mathrm{lcm}(a,b) = a \cdot b$는 모든 두 양의 정수에 대해 항상 성립한다.

Q67 좌표 기하

좌표평면 위에 네 점 $A(0,0)$, $B(5,0)$, $C(7,3)$, $D(2,3)$이 있다. 사각형 $ABCD$의 넓이는?



①) ① 12

②) ② 15

③) ③ 18

④) ④ 21

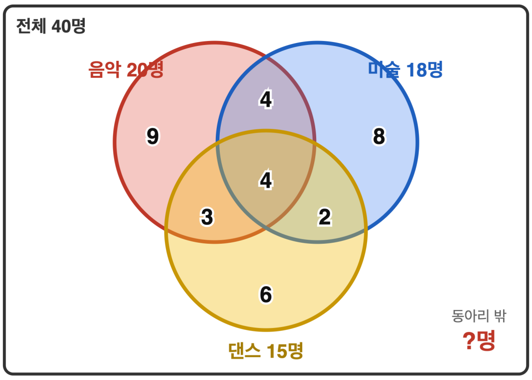
정답: ② 15

📖 $\overrightarrow{AB} = (5,0)$, $\overrightarrow{DC} = (5,0)$로 같으므로 사각형 $ABCD$는 평행사변형이다. 밑변 AB의 길이는 5. 점 D의 y좌표가 3이고 점 A, B는 x축 위에 있으므로 높이는 3. 따라서 넓이 = 밑변 × 높이 = $5 \times 3 = 15$.

💡 평행사변형의 넓이는 두 변 벡터의 외적의 크기와 같다.

Q68 집합과 벤다이어그램

한 학교 동아리 가입 조사에서 40명의 학생에 대해 다음을 얻었다. 음악부 20명, 미술부 18명, 댄스부 15명. 음악∩미술 8명, 미술∩댄스 6명, 음악∩댄스 7명. 세 동아리 모두 가입한 학생 4명. 어떤 동아리에도 가입하지 않은 학생은 몇 명인가?



①) ① 2명
②) ② 4명
③) ③ 6명
④) ④ 8명

🎯 **정답: ② 4명**

📖 포함-배제 원리: $|M \cup A \cup D| = |M| + |A| + |D| - |M \cap A| - |A \cap D| - |M \cap D| + |M \cap A \cap D|$. 대입: $= 20 + 18 + 15 - 8 - 6 - 7 + 4 = 53 - 21 + 4 = 36$. 적어도 하나에 가입한 학생이 36명이므로 어떤 동아리에도 가입하지 않은 학생은 $40 - 36 = 4$명.

💡 포함-배제 원리는 3집합을 넘어 n집합으로 일반화되며, 부호가 교대로 바뀐다.

Q69 함수와 패턴

함수 $f(x) = x^2 - 1$에 대하여 $f(f(f(2)))$의 값은?

①) ① 15
②) ② 24
③) ③ 48
④) ④ 63

🎯 **정답: ④ 63**

📖 안쪽부터 차례로 계산한다. (1) $f(2) = 2^2 - 1 = 3$. (2) $f(f(2)) = f(3) = 3^2 - 1 = 8$. (3) $f(f(f(2))) = f(8) = 8^2 - 1 = 64 - 1 = 63$. 함수 합성은 결합법칙이 성립하므로 안→밖 순서로 대입하면 된다.

💡 $f(x) = x^2 - 1$의 반복 합성은 동역학계 이론에서 만델브로 집합과 연관된다.

Q70 재미 두뇌

네 명의 친구 A, B, C, D가 어두운 다리를 건너야 한다. 각자 건너는 데 걸리는 시간은 A=1분, B=2분, C=5분, D=10분이다. 손전등이 1개뿐이며, 다리는 한 번에 최대 2명까지만 건널 수 있고 반드시 손전등이 있어야 한다. 두 명이 함께 건널 때는 느린 쪽의 속도로 간다. 네 명이 모두 다리를 건너는 데 필요한 최소 시간은?

①) ① 15분

②) ② 17분

③) ③ 19분

④) ④ 21분

🎯 **정답: ② 17분**

📖 핵심 아이디어: 가장 느린 두 사람(C=5, D=10)을 함께 건너게 하여 10분 하나로 묶는다. 최적 순서: ① A+B 건너기 → 2분 (B 속도). ② A가 손전등 갖고 돌아옴 → 1분. ③ C+D 건너기 → 10분 (D 속도). ④ B가 손전등 갖고 돌아옴 → 2분. ⑤ A+B 건너기 → 2분. 총 $2 + 1 + 10 + 2 + 2 = 17$분. (가장 빠른 A가 매번 돌아오는 단순 전략은 $10 + 1 + 5 + 1 + 2 = 19$분으로 더 오래 걸린다.)

💡 이 퍼즐은 '다리와 손전등 문제'로 알려져 있으며, 많은 IT 기업의 면접 단골 문제다.

Q71 정수론

다음 네 수 중 소수가 아닌 것은? $37,\ 41,\ 51,\ 53$

①) ① 37

②) ② 41

③) ③ 51

④) ④ 53

🎯 **정답: ③ 51**

📖 소수는 1과 자기 자신만을 약수로 갖는 1보다 큰 자연수다. $51 = 3 \times 17$이므로 합성수이다. 37, 41, 53은 자기 자신보다 작은 어떤 소수로도 나누어지지 않으므로 모두 소수다. 작은 소수 $(2, 3, 5, 7)$로 나누어 보고, 나누어떨어지지 않으면 소수임이 거의 확정된다 ($\sqrt{53} < 8$이므로 7까지만 확인하면 충분).

💡 51은 외형이 소수처럼 보여 자주 속는 합성수다. 비슷한 함정 수로 $57 = 3 \times 19$, $91 = 7 \times 13$이 있다.

Q72 확률

동전 3개를 동시에 던질 때, 세 동전이 모두 같은 면 (모두 앞면 또는 모두 뒷면)이 나올 확률은?

①) ① $\frac{1}{8}$

②) ② $\frac{1}{4}$

③) ③ $\frac{3}{8}$

④) ④ $\frac{1}{2}$

🎯 **정답: ② $\frac{1}{4}$**

📖 동전 3개의 모든 경우의 수는 $2^3 = 8$가지. 모두 같은 면인 경우는 (앞,앞,앞)과 (뒤,뒤,뒤) 두 가지뿐이다. 따라서 확률은 $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

💡 동전 n개를 던질 때 모두 같은 면일 확률은 $\frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$로 빠르게 감소한다.

Q73 경우의 수

빨간 깃발 3개와 파란 깃발 2개를 일렬로 세워 만들 수 있는 서로 다른 신호의 개수는? (같은 색 깃발끼리는 구별하지 않는다)

①) ① 6
②) ② 10
③) ③ 20
④) ④ 60

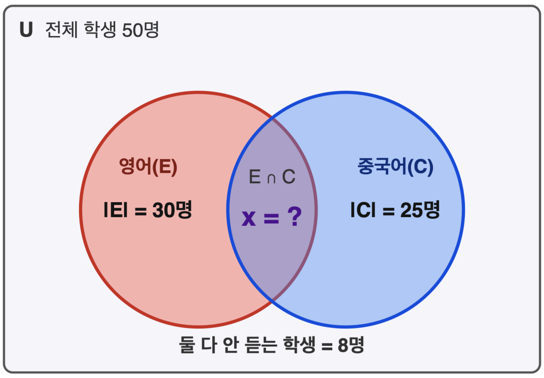
🎯 **정답: ② 10**

📖 같은 것이 있는 순열 (멀티셋 순열) 공식: $\frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{120}{6 \cdot 2} = 10$. 또는 5자리 중 빨간 깃발이 들어갈 자리 3개를 고르는 조합 $\binom{5}{3} = 10$으로 보아도 같다.

💡 이 식 $\binom{5}{3} = 10$은 파스칼의 삼각형 5번째 줄에서 그대로 읽을 수 있다.

Q74 집합과 벤다이어그램

어느 학원의 학생 50명 중 영어 강좌를 듣는 학생이 30명, 중국어 강좌를 듣는 학생이 25명, 두 강좌 중 어느 것도 듣지 않는 학생이 8명이다. 영어와 중국어를 모두 듣는 학생의 수는?



①) ① 11
②) ② 12
③) ③ 13
④) ④ 15

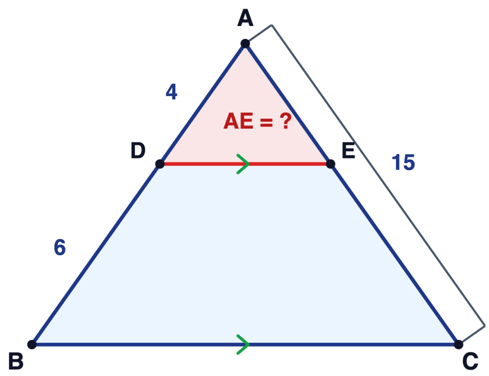
🎯 **정답: ③ 13**

📖 적어도 한 강좌를 듣는 학생 수 = $50 - 8 = 42$명. 포함배제 원리에 의해 $|E \cup C| = |E| + |C| - |E \cap C|$이므로 $42 = 30 + 25 - x$. 따라서 $x = 55 - 42 = 13$명.

💡 두 집합의 교집합 크기를 직접 세는 대신 전체에서 '둘 다 아님'을 빼는 우회로가 자주 쓰인다.

Q75 도형 (닮음)

$\triangle ABC$에서 변 BC와 평행한 직선이 변 AB 위의 점 D와 변 AC 위의 점 E에서 만난다. $AD = 4$, $DB = 6$, $AC = 15$일 때, AE의 길이는?



①) ① 4
②) ② 6
③) ③ 9
④) ④ 10

🎯 **정답: ② 6**

📖 $DE \parallel BC$이므로 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ (AA 닮음). $AB = AD + DB = 4 + 6 = 10$. 닮음비는 $\frac{AD}{AB} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$. 따라서 $AE = \frac{2}{5} \times AC = \frac{2}{5} \times 15 = 6$.

💡 이 성질은 '평행선과 비례선분' 정리로, 고대 그리스의 탈레스가 피라미드 높이를 잰 원리이기도 하다.

Q76 논리 (Knight/Knave)

정직한 사람과 거짓말쟁이만 사는 섬에서 두 사람 A, B가 다음과 같이 말했다. A: 'B는 거짓말쟁이다.' B: '우리 둘 다 정직한 사람이다.' 정직한 사람은 누구인가?

①) ① A만 정직
②) ② B만 정직
③) ③ 둘 다 정직
④) ④ 둘 다 거짓말쟁이

🎯 **정답: ① A만 정직**

📖 가정법으로 모순을 찾는다. (1) B가 정직하다고 가정하면 '둘 다 정직'이 참이므로 A도 정직. 그런데 정직한 A의 발언 'B는 거짓말쟁이'는 참이어야 하므로 B는 거짓말쟁이. 이는 가정과 모순. (2) 따라서 B는 거짓말쟁이. 그러면 A의 말 'B는 거짓말쟁이'는 참이므로 A는 정직.

💡 이런 유형의 논리 퍼즐을 'Knight and Knave (기사와 악당)' 문제라 부르며, 수리논리학자 레이먼드 스멀리안이 즐겨 다뤘다.

Q77 비둘기집 원리

한 모임에서 적어도 3명이 같은 달에 태어난 것을 반드시 보장하려면, 최소 몇 명이 모여야 하는가?

①) ① 13명
②) ② 24명
③) ③ 25명
④) ④ 36명

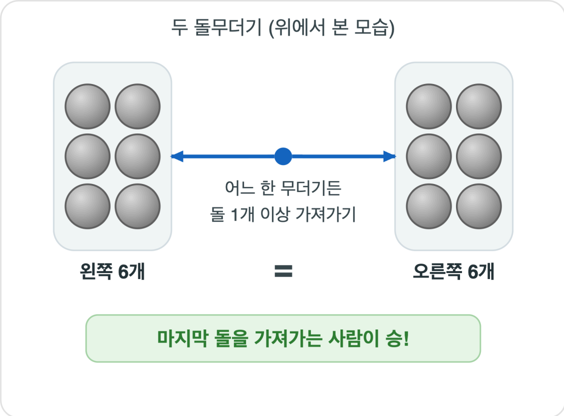
🎯 **정답: ③ 25명**

📖 12개월을 비둘기집으로 본다. 각 달에 최대 2명씩 분산하면 총 $12 \times 2 = 24$명까지는 어떤 달에도 3명이 모이지 않을 수 있다. 그러나 25번째 사람이 들어오면, 이미 2명씩 차 있는 어떤 달에 반드시 추가되어 그 달의 인원이 3명이 된다. 따라서 최소 인원은 25명. 일반화: k명 보장에는 $12(k-1)+1$명이 필요하다.

💡 비둘기집 원리는 단순해 보여도 그래프 이론, 정수론, 컴퓨터 과학의 핵심 증명 도구로 쓰인다.

Q78 게임 이론 (Nim)

돌 무더기 두 개가 있고, 각각 6개의 돌이 들어 있다. 두 사람이 번갈아 자기 차례에 한 무더기를 골라 1개 이상의 돌을 가져간다. 마지막 돌을 가져가는 사람이 이긴다. 어느 쪽이 필승 전략을 갖는가?



①) ① 선공 필승
②) ② 후공 필승
③) ③ 무승부
④) ④ 알 수 없음

🎯 **정답: ② 후공 필승**

📖 두 무더기가 같은 개수일 때 후공은 '대칭 전략 (거울 전략)'을 쓰면 된다. 즉, 선공이 어느 한쪽 무더기에서 k개를 가져가면, 후공은 반대쪽 무더기에서 똑같이 k개를 가져간다. 그러면 다시 두 무더기가 같아진 상태로 선공의 차례가 돌아오고, 이 과정이 반복되어 결국 마지막 돌은 항상 후공이 가져가게 된다.

💡 대칭 전략은 두 무더기가 같을 때만 통한다. 무더기가 서로 다르면 선공이 먼저 두 무더기를 같게 만들어 후공에게 '대칭 전략'의 짐을 떠넘긴다.

Q79 수열과 점화

수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 2$이고 $a_{n+1} = 2a_n + 1$로 정의될 때, a_5의 값은?

①) ① 31

②) ② 47

③) ③ 63

④) ④ 95

🎯 **정답: ② 47**

📖 점화식에 따라 순서대로 계산한다. $a_1 = 2$, $a_2 = 2(2) + 1 = 5$, $a_3 = 2(5) + 1 = 11$, $a_4 = 2(11) + 1 = 23$, $a_5 = 2(23) + 1 = 47$. 일반항을 구하면 $a_n + 1 = 3 \cdot 2^{n-1}$, 즉 $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$이고 $a_5 = 3 \cdot 16 - 1 = 47$로 일치.

💡 $a_{n+1} = 2a_n + 1$ 같은 점화식은 '+1'을 잘 다루기 위해 양변에 1을 더해 등비수열로 바꾸는 기법이 자주 통한다.

Q80 재미 두뇌

거울에 비친 시계를 보니 9시 20분을 가리키고 있었다. (시계는 좌우 반전되어 보임) 실제 시각은?

①) ① 2시 20분

②) ② 2시 40분

③) ③ 3시 20분

④) ④ 3시 40분

🎯 **정답: ② 2시 40분**

📖 아날로그 시계가 거울에 좌우 반전되면 실제 시각 T와 거울 시각 T'의 합은 항상 12시가 된다 (정확히는 11시 60분). 따라서 실제 시각 $= 11:60 - 9:20 = 2:40$. 검증: 실제로 2시 40분의 시계를 거울에 비춰 보면 시침과 분침이 좌우 반전되어 9시 20분으로 보인다.

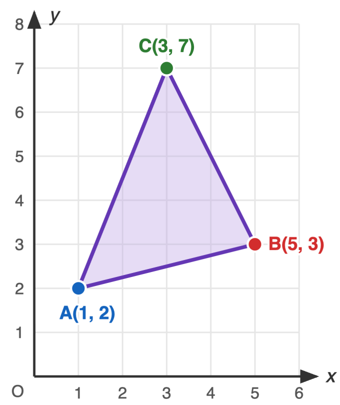
💡 $T + T' = 12:00$이라는 관계는, 시계 문자판이 12시 - 6시 축에 대해 대칭이라는 사실에서 나온다.

🧠 중등 논리·추론

총 40문제 · 문제와 정답·풀이 포함

Q81 좌표 기하

세 점 $A(1,\ 2)$, $B(5,\ 3)$, $C(3,\ 7)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 넓이는?



①) ① 8
②) ② 9
③) ③ 10
④) ④ 12

🎯 **정답: ② 9**

📖 신발끈 (Shoelace) 공식을 사용한다. 넓이 = $\frac{1}{2}\mid x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B)\mid$
$= \frac{1}{2}|1\cdot(3-7) + 5\cdot(7-2) + 3\cdot(2-3)| \ = \frac{1}{2}|-4+25-3| = \frac{1}{2}\cdot 18 = 9.$

💡 신발끈 공식은 좌표를 위에서 아래로 적고 대각선 곱을 'X' 모양으로 빼고 더하는 모습이 신발끈처럼 보여 붙은 이름이다.

Q82 논리 (Knight/Knave)

정직한 사람과 거짓말쟁이만 사는 섬에서 두 사람 A, B를 만났다. A가 "우리 둘 다 거짓말쟁이입니다"라고 말했다. A와 B의 정체는?

①) ① 둘 다 정직
②) ② A는 정직, B는 거짓말쟁이
③) ③ A는 거짓말쟁이, B는 정직
④) ④ 둘 다 거짓말쟁이

🎯 **정답: ③ A는 거짓말쟁이, B는 정직**

📖 가정 1: A가 정직하다고 하자. 그러면 "둘 다 거짓말쟁이"가 참이므로 A도 거짓말쟁이여야 하는데 이는 가정과 모순. 따라서 A는 거짓말쟁이. A의 발언은 거짓이므로 "둘 다 거짓말쟁이"의 부정인 "적어도 한 명은 정직"이 참이다. A는 거짓말쟁이이므로 정직한 쪽은 B. 결론: A는 거짓말쟁이, B는 정직.

💡 자기 자신을 포함해 무리 전체를 언급하는 진술을 다루는 분야를 자기참조 논리라 한다.

Q83 수열과 점화

피보나치 수열은 $a_1 = 1, a_2 = 1$이고 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$으로 정의된다. a_{10}의 값은?

①) ① 34

②) ② 55

③) ③ 89

④) ④ 144

🎯 **정답: ② 55**

📖 규칙대로 차례로 계산한다. $a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_3 = 2,\ a_4 = 3,\ a_5 = 5,\ a_6 = 8,\ a_7 = 13,\ a_8 = 21,\ a_9 = 34,\ a_{10} = 55$. 따라서 $a_{10} = 55$.

💡 피보나치 수열은 해바라기 씨앗 배열, 솔방울 나선 등 자연 곳곳에 나타난다.

Q84 경우의 수

5명의 학생이 원탁에 둘러앉는 방법의 수는?

①) ① 24

②) ② 60

③) ③ 120

④) ④ 720

🎯 **정답: ① 24**

📖 원순열에서는 회전해서 같아지는 배치를 같은 것으로 본다. 한 사람을 한자리에 고정하고 나머지 $n-1$명을 일렬로 세우면 되므로 원순열의 수는 $(n-1)!$. 따라서 $(5-1)! = 4! = 24$.

💡 같은 배치를 회전으로 셀 때 n배 많아지므로 일반 순열보다 n배 적다.

Q85 확률

공평한 주사위 2개를 동시에 던질 때, 두 눈의 합이 7일 확률은?

①) ① $\frac{1}{12}$

②) ② $\frac{1}{6}$

③) ③ $\frac{5}{36}$

④) ④ $\frac{7}{36}$

🎯 **정답: ② $\frac{1}{6}$**

📖 전체 경우의 수는 $6 \times 6 = 36$. 합이 7인 경우는 $(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)$의 6가지. 따라서 확률 $= \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

💡 두 주사위 합 중 7이 가장 자주 나오는 이유는 가능한 쌍의 개수가 최대(6가지)이기 때문이다.

Q86 정수론 (약수·배수·소수)

두 수 12와 18의 최소공배수(LCM)는?

①) ① 24

②) ② 36

③) ③ 54

④) ④ 72

🎯 **정답: ② 36**

📖 소인수분해하면 $12 = 2^2 \times 3$, $18 = 2 \times 3^2$. 최소공배수는 각 소수의 최대 지수를 모은 것이므로 $\mathrm{lcm}(12, 18) = 2^2 \times 3^2 = 4 \times 9 = 36$. 확인: $36 = 12 \times 3 = 18 \times 2$이므로 둘 다 나누어떨어진다.

💡 $\gcd(a, b) \times \mathrm{lcm}(a, b) = a \times b$ 공식도 자주 쓰인다. 실제로 $6 \times 36 = 216 = 12 \times 18$.

Q87 함수와 패턴

일차함수 $f(x) = ax + b$가 $f(1) = 3,\ f(2) = 5$를 만족한다. $f(10)$의 값은?

①) ① 19

②) ② 20

③) ③ 21

④) ④ 23

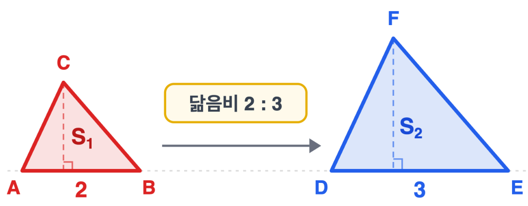
🎯 **정답: ③ 21**

📖 조건을 식으로 쓰면 $a + b = 3$, $2a + b = 5$. 두 식을 빼면 $a = 2$, 대입하면 $b = 1$. 따라서 $f(x) = 2x + 1$이고 $f(10) = 2 \times 10 + 1 = 21$.

💡 두 점이 정해지면 직선 하나가 유일하게 결정된다. 일차함수는 그 직선의 식이다.

Q88 도형 (합동·닮음·면적)

두 닮음인 삼각형이 있다. 닮음비가 $2:3$일 때, 두 삼각형의 넓이의 비는?



①) ① $2:3$

②) ② $4:6$

③) ③ $4:9$

④) ④ $8:27$

🎯 **정답:** ③ $4:9$

📖 닮은 두 평면도형에서 길이의 비가 k이면 넓이의 비는 k^2이다. 닮음비 $2:3$이면 넓이의 비는 $2^2:3^2 = 4:9$. 참고로 부피의 비는 $2^3:3^3 = 8:27$이지만 이 문제는 평면 도형이므로 제곱 비.

💡 이 성질 때문에 축척 $1:1000$인 지도에서 실제 면적은 지도 면적의 $1{,}000{,}000$배가 된다.

Q89 비둘기집 원리

8명이 모인 모임에서 사람들끼리 악수를 한다(한 쌍은 최대 한 번 악수). 적어도 두 명은 악수 횟수가 같음을 비둘기집 원리로 보이려 할 때, 핵심 근거는?

①) ① 한 사람의 악수 횟수는 0부터 7까지 가능하므로 8가지 값이라 비둘기집이 안 통한다

②) ② 한 사람의 악수 횟수는 $0, 1, \ldots, 7$ 중 하나지만 0명과 7명이 동시에 존재할 수 없어 실제 가능한 값은 7가지

③) ③ 모든 사람의 악수 횟수가 짝수이기 때문

④) ④ 8명이 항상 7번씩 악수하기 때문

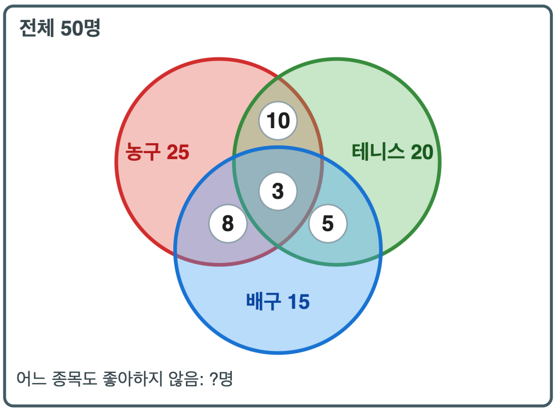
🎯 **정답: ② 한 사람의 악수 횟수는 $0, 1, \ldots, 7$ 중 하나지만 0명과 7명이 동시에 존재할 수 없어 실제 가능한 값은 7가지**

📖 한 사람이 할 수 있는 악수 횟수는 0부터 7까지. 그런데 누군가 7번 악수했다면 그 사람은 나머지 모든 사람과 악수한 것이므로 0번 악수한 사람은 존재할 수 없다. 즉 실제로 가능한 값의 집합은 $\{0, 1, \ldots, 6\}$ 또는 $\{1, 2, \ldots, 7\}$ 중 하나로 7개. 8명을 7개의 "칸"에 넣으면 비둘기집 원리로 적어도 두 명은 같은 칸(=같은 악수 횟수)에 들어간다.

💡 이 "악수 정리"는 모임 인원이 몇 명이든 항상 성립한다. 어떤 그룹에서도 친구 수가 같은 두 명이 존재한다.

Q90 집합과 벤다이어그램

학생 50명을 조사하니 농구를 좋아함 25명, 테니스 20명, 배구 15명. 두 종목씩 모두 좋아함: 농구 ∩ 테니스 10, 테니스 ∩ 배구 5, 배구 ∩ 농구 8. 세 종목 모두 좋아함 3명. 세 종목 중 어느 것도 좋아하지 않는 학생은?



①) ① 5명

②) ② 8명

③) ③ 10명

④) ④ 12명

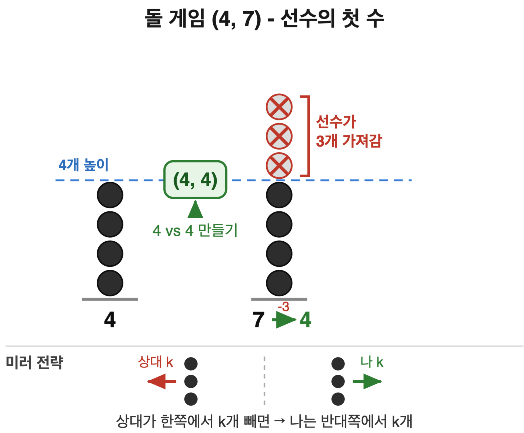
🎯 **정답:** ③ 10명

📖 포함-배제 원리로 적어도 한 종목을 좋아하는 학생 수는 $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C| = 25 + 20 + 15 - 10 - 5 - 8 + 3 = 40$. 따라서 어느 종목도 좋아하지 않는 학생은 $50 - 40 = 10$명.

💡 포함-배제는 "중복을 빼고, 빼지나친 부분은 다시 더한다"는 패턴이다. 집합이 늘면 항이 늘어나며 부호가 번갈아 나타난다.

Q91 게임 이론 (Nim)

돌무더기 2개에 각각 4개, 7개의 돌이 있다. 두 사람이 번갈아 한 무더기를 골라 1개 이상의 돌을 가져가고, 마지막 돌을 가져간 사람이 이긴다. 먼저 두는 사람의 첫 수로 적절한 것은?



①) ① 4 무더기에서 1개를 가져간다

②) ② 7 무더기에서 3개를 가져간다

③) ③ 7 무더기에서 1개를 가져간다

④) ④ 무엇을 해도 후수가 이긴다

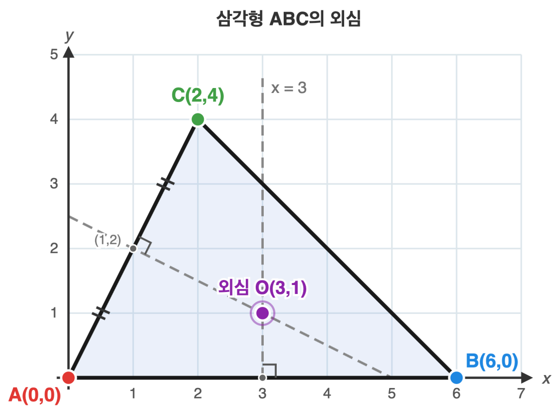
🎯 **정답: ② 7 무더기에서 3개를 가져간다**

📖 두 무더기의 돌 개수가 같아진 상태((k,k) 꼴)에서는 후수가 "미러 전략"으로 항상 마지막 돌을 가져갈 수 있다. 상대가 한 쪽에서 m개를 빼면 반대쪽에서 똑같이 m개를 빼서 균형을 유지하면 되기 때문이다. 따라서 선수는 두 무더기를 같은 개수로 만들어 후수에게 넘기는 것이 필승 전략. 7 무더기에서 3개를 가져가 $(4,4)$로 만들면 된다.

💡 일반 Nim에서는 모든 무더기 개수를 XOR한 값이 0이 아니면 선수가 이긴다. 여기서 $4 \oplus 7 = 100_2 \oplus 111_2 = 011_2 = 3$이므로 선수 승, 그리고 $7 - 3 = 4$로 만들라는 답이 자동으로 따라 나온다.

Q92 좌표 기하

좌표평면 위 세 점 $A(0,0)$, $B(6,0)$, $C(2,4)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 외심의 좌표는?



①) ① $(3,1)$
②) ② $(2,2)$
③) ③ $(3,2)$
④) ④ $(2,1)$

정답: ① $(3,1)$

외심은 세 변의 수직이등분선이 만나는 점이다. 변 AB의 중점 $(3,0)$이고 AB가 x축에 평행하므로 수직이등분선은 $x=3$. 변 AC의 중점 $(1,2)$, 기울기 $\frac{4-0}{2-0}=2$이므로 수직이등분선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$. 식: $y-2=-\frac{1}{2}(x-1)$, 즉 $y=-\frac{x}{2}+\frac{5}{2}$. $x=3$ 대입 시 $y=-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}=1$. 외심 $(3,1)$. 검증: $\overline{OA}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$, $\overline{OB}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$, $\overline{OC}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$ 로 모두 같다.

외심은 외접원의 중심이며, 직각삼각형에서는 외심이 빗변의 중점에 위치한다는 멋진 성질이 있다.

Q93 경우의 수

6가지 종류의 아이스크림 맛 중에서 서로 다른 3가지 맛을 골라 한 컵에 담으려고 한다. 가능한 경우의 수는?

①) ① 10
②) ② 15
③) ③ 20
④) ④ 35

정답: ③ 20

순서를 따지지 않으므로 조합. ${}_6C_3=\frac{6!}{3!\,3!}=\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}=20$. 따라서 20가지.

${}_nC_r={}_nC_{n-r}$ 이므로 ${}_6C_3={}_6C_3$ (자기 자신과 같음, 대칭).

Q94 재미 두뇌

농부가 늑대, 양, 양배추를 데리고 강 건너편으로 가려고 한다. 배에는 농부와 다른 하나만 태울 수 있다. 농부가 없으면 늑대는 양을 잡아먹고, 양은 양배추를 먹어버린다. 모두 안전하게 옮기려면 배가 강을 최소 몇 번 건너야 하는가? (한쪽 강가에서 반대쪽까지 = 1번)

①) ① 5번

②) ② 6번

③) ③ 7번

④) ④ 8번

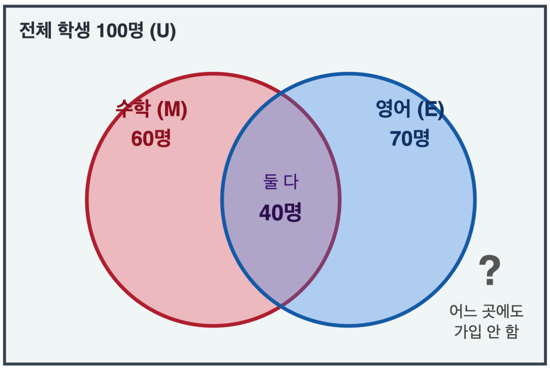
🎯 **정답: ③ 7번**

📖 단계: (1) 농부+양 건너기 (2) 농부 혼자 돌아옴 (3) 농부+늑대 건너기 (4) 농부+양 돌아옴 (5) 농부+양배추 건너기 (6) 농부 혼자 돌아옴 (7) 농부+양 건너기. 총 7번. 핵심은 양을 한 번 다시 데려오는 것.

💡 이 퍼즐은 약 9세기 알퀸(Alcuin)의 책에 처음 등장한 고전 퍼즐이다.

Q95 집합과 벤다이어그램

100명의 학생을 조사하니 수학 동아리에 가입한 학생이 60명, 영어 동아리에 가입한 학생이 70명, 두 동아리 모두 가입한 학생이 40명이었다. 두 동아리 중 어느 곳에도 가입하지 않은 학생은 몇 명인가?



①) ① 5명
②) ② 10명
③) ③ 15명
④) ④ 20명

🎯 **정답:** ② 10명

📖 합집합의 크기: $|M \cup E| = |M| + |E| - |M \cap E| = 60 + 70 - 40 = 90$. 따라서 어느 것에도 속하지 않는 학생은 $100 - 90 = 10$ 명.

💡 포함-배제 원리는 중복 계산을 피하기 위해 더했다가 빼는 방식이다.

Q96 경우의 수

6명의 학생 A, B, C, D, E, F를 한 줄로 세울 때, A와 B가 서로 이웃하여 서는 경우의 수는?

①) ① 120
②) ② 240
③) ③ 360
④) ④ 720

🎯 **정답:** ② 240

📖 A, B를 하나의 묶음으로 보면 묶음 1개와 나머지 4명, 총 5개를 일렬로 세우는 경우는 $5! = 120$. 묶음 안에서 A, B의 순서는 AB, BA의 $2! = 2$가지. 따라서 $5! \times 2! = 120 \times 2 = 240$.

💡 이웃 조건은 '묶음 처리', 이웃하지 않는 조건은 '사이 끼우기'로 푼다.

Q97 모듈러 산술 입문

7^{2026}을 4로 나눈 나머지는?

①) ① 0

②) ② 1

③) ③ 2

④) ④ 3

🎯 **정답:** ② 1

📖 $7 = 4 + 3$ 이므로 $7 \equiv 3 \equiv -1 \pmod 4$. 따라서 $7^{2026} \equiv (-1)^{2026} \pmod 4$. 2026은 짝수이므로 $(-1)^{2026} = 1$. 답은 1.

💡 -1로 합동인 수의 거듭제곱은 지수의 홀짝만 보면 된다.

Q98 확률

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 두 눈의 수의 합이 7일 확률은?

①) ① $\frac{1}{12}$

②) ② $\frac{1}{6}$

③) ③ $\frac{5}{36}$

④) ④ $\frac{7}{36}$

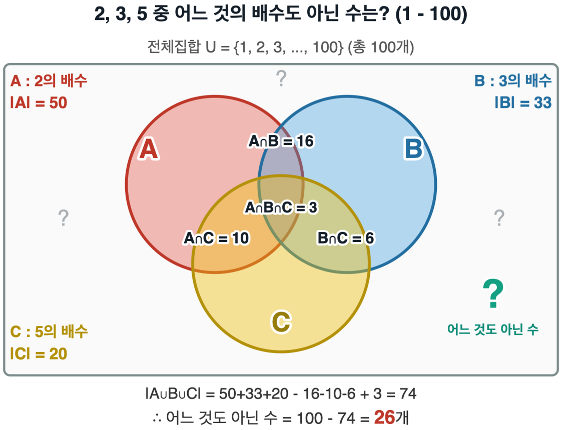
🎯 **정답:** ② $\frac{1}{6}$

📖 전체 경우의 수는 $6 \times 6 = 36$. 합이 7인 경우: $(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)$ 총 6가지. 확률 $= \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

💡 두 주사위의 합 중 7이 가장 자주 나온다 (이유: 모든 쌍이 $1 + 6, 2 + 5, 3 + 4$로 균형).

Q99 집합과 벤다이어그램

1부터 100까지의 자연수 중에서 2, 3, 5 중 어느 것의 배수도 아닌 수는 몇 개인가?



①) ① 20

②) ② 24

③) ③ 26

④) ④ 30

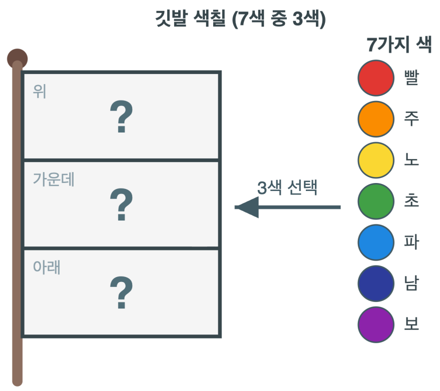
🎯 **정답:** ③ 26

📖 $|A| = \lfloor 100/2 \rfloor = 50,\ |B| = \lfloor 100/3 \rfloor = 33,\ |C| = \lfloor 100/5 \rfloor = 20$. 교집합:
$|A \cap B| = \lfloor 100/6 \rfloor = 16,\ |A \cap C| = \lfloor 100/10 \rfloor = 10,\ |B \cap C| = \lfloor 100/15 \rfloor = 6,\ |A \cap B \cap C| = \lfloor 100/30 \rfloor = 3$. 포함-배제:
$|A \cup B \cup C| = 50 + 33 + 20 - 16 - 10 - 6 + 3 = 74$. 어느 것의 배수도 아닌 수: $100 - 74 = 26$.

💡 이런 방식으로 소수 후보를 거르는 것이 '에라토스테네스의 체'의 기본 아이디어.

Q100 경우의 수

서로 다른 7가지 색깔이 있다. 이 중 3가지 색을 골라 깃발의 위, 가운데, 아래 칸에 각각 칠하는 서로 다른 방법의 수는? (같은 색을 두 번 쓸 수 없음)



①) ① 35

②) ② 120

③) ③ 210

④) ④ 343

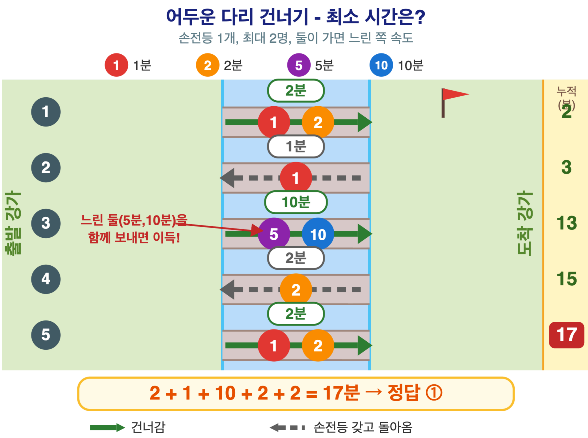
🎯 **정답:** ③ 210

📖 위치(위, 가운데, 아래)가 구별되므로 순서가 의미 있는 순열. ${}_7P_3 = 7 \times 6 \times 5 = 210$. 위 칸 7가지, 가운데 6가지(위와 다름), 아래 5가지(위·가운데와 다름).

💡 만약 같은 색 반복이 허용되면 $7^3 = 343$가지가 된다.

Q101 재미 두뇌

4명의 친구가 밤에 어두운 다리를 건너야 한다. 각자 다리를 건너는 데 1분, 2분, 5분, 10분이 걸린다. 손전등은 단 하나뿐이고, 다리는 한 번에 최대 2명까지 건널 수 있다. 두 명이 함께 건널 때는 느린 사람 속도에 맞춰야 한다. 손전등은 다리를 건널 때 항상 필요하므로, 누군가는 손전등을 다시 가지고 돌아와야 한다. 4명 모두 건너는 최소 시간은?



①) ① 17분
②) ② 19분
③) ③ 20분
④) ④ 21분

🎯 **정답:** ① 17분

📖 핵심 아이디어: 가장 느린 두 명(5분과 10분)을 함께 보내야 시간을 아낄 수 있다. 1) 1분, 2분이 함께 건넘 (2분), 2) 1분이 돌아옴 (1분), 3) 5분, 10분이 함께 건넘 (10분), 4) 2분이 돌아옴 (2분), 5) 1분, 2분이 함께 건넘 (2분). 합계 2 + 1 + 10 + 2 + 2 = 17분. (만약 1분이 매번 손전등을 들고 왕복하면 2 + 1 + 5 + 1 + 10 = 19분이 됨.)

💡 이 문제는 '다리와 손전등 퍼즐'로 유명하며, 직관 (1분이 다 왕복) 대신 '느린 두 명 묶기'가 핵심.

Q102 논리 (Knight/Knave)

정직한 사람(항상 참)과 거짓말쟁이(항상 거짓)만 사는 섬에서 세 사람 A, B, C가 다음과 같이 말했다.

- A: "B는 거짓말쟁이다."
- B: "C는 정직한 사람이다."
- C: "A와 B는 같은 종류이다."

정직한 사람은 누구인가?

①) ① A만 정직

②) ② B만 정직

③) ③ C만 정직

④) ④ A와 C가 정직

🎯 **정답: ① A만 정직**

📖 경우 1) A가 정직 → B는 거짓말쟁이 → B의 말이 거짓이므로 C는 거짓말쟁이 → C의 말이 거짓이므로 A와 B는 다른 종류. 실제로 A(정직)와 B(거짓)는 다름 → 일관성 ✓.

경우 2) A가 거짓 → B는 정직 → C도 정직 → C의 말은 참이므로 A와 B는 같은 종류여야 함. 그러나 A는 거짓, B는 정직으로 다름 → 모순.

따라서 A만 정직, B, C는 거짓말쟁이.

💡 Knight/Knave 퍼즐은 논리학자 레이먼드 스멀리언이 대중화시킨 고전 명제논리 문제이다.

Q103 함수와 패턴

일차함수 $f(x) = ax + b$가 $f(1) = 5$, $f(3) = 11$을 만족한다. $f(10)$의 값은?

①) ① 22

②) ② 28

③) ③ 30

④) ④ 32

🎯 **정답: ④ 32**

📖 두 식을 세운다.

$f(1) = a + b = 5$

$f(3) = 3a + b = 11$

두 식을 빼면 $2a = 6$이므로 $a = 3$.

$b = 5 - 3 = 2$.

따라서 $f(x) = 3x + 2$.

$f(10) = 30 + 2 = 32$.

💡 일차함수의 그래프 기울기 a는 "x가 1 증가할 때 y의 변화량"이며, 두 점만 알면 전체 함수가 결정된다.

Q104 게임 이론 (Nim)

돌무더기 3개에 각각 2개, 3개, 5개의 돌이 있다. 두 사람이 번갈아 한 무더기를 골라 그 무더기에서 1개 이상의 돌을 가져갈 수 있고, 마지막 돌을 가져가는 사람이 이긴다. 선공이 반드시 이기려면 첫 수에서 어떻게 해야 하는가?

세 돌무더기의 상태 : (2, 3, 5)

①) ① 2개 무더기에서 1개를 가져간다
②) ② 3개 무더기에서 2개를 가져간다
③) ③ 5개 무더기에서 4개를 가져간다
④) ④ 어떻게 두어도 후공이 이긴다

🎯 **정답: ③ 5개 무더기에서 4개를 가져간다**

📖 Nim 게임의 필승 조건은 각 무더기 크기의 이진법 XOR이 0이면 "후공 승", 0이 아니면 "선공 승"이다.

현재 무더기: 2, 3, 5를 이진수로.

- $2 = 010_2$
- $3 = 011_2$
- $5 = 101_2$

자리별 XOR: $0 \oplus 0 \oplus 1 = 1, 1 \oplus 1 \oplus 0 = 0, 0 \oplus 1 \oplus 1 = 0$. 결과 $= 100_2 = 4$.

0이 아니므로 선공 승. 선공은 XOR 결과를 0으로 만드는 수를 두어야 한다. 무더기 중 하나의 크기를 $x \oplus 4$로 바꿀 수 있는 것을 찾는다.

- $2 \oplus 4 = 6 > 2 \rightarrow$ 불가
- $3 \oplus 4 = 7 > 3 \rightarrow$ 불가
- $5 \oplus 4 = 1 < 5 \rightarrow$ 가능. 즉 5를 1로 줄인다.

따라서 5개 무더기에서 4개를 가져가 $(2, 3, 1)$ 상태로 만든다. 이후 어떤 수를 두어도 선공은 다시 XOR을 0으로 만들어 승리할 수 있다.

💡 Nim의 필승 전략은 1901년 찰스 부튼이 증명했다. 모든 "공평한 조합 게임"은 Nim의 형태로 환원 가능하다는 Sprague-Grundy 정리도 여기서 출발한다.

Q105 수열과 점화

수열 $2, 5, 10, 17, 26, 37, \ldots$ 의 일반항 a_n은? (단, n은 자연수)

①) ① $a_n = 2n + 1$

②) ② $a_n = n^2 + 1$

③) ③ $a_n = n^2 + n$

④) ④ $a_n = 3n - 1$

🎯 **정답:** ② $a_n = n^2 + 1$

📖 항 사이 차를 계산하면 $5 - 2 = 3$, $10 - 5 = 5$, $17 - 10 = 7$, $26 - 17 = 9$, $37 - 26 = 11$.

차가 $3, 5, 7, 9, 11, \ldots$ 로 등차수열(공차 2)이므로 원래 수열은 n에 대한 이차식이다.

각 항을 $a_n = n^2 + 1$로 검증:
- $n = 1$: $1 + 1 = 2$ ✓
- $n = 2$: $4 + 1 = 5$ ✓
- $n = 3$: $9 + 1 = 10$ ✓
- $n = 4$: $16 + 1 = 17$ ✓
- $n = 5$: $25 + 1 = 26$ ✓

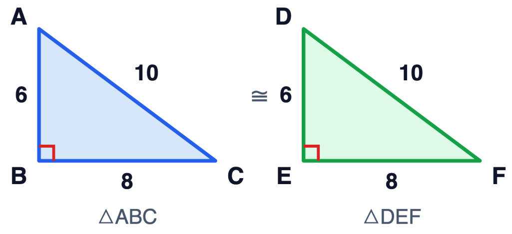
따라서 $a_n = n^2 + 1$.

💡 계차수열의 계차가 일정하면 원래 수열은 그 단계 수만큼의 차수를 가진 다항식이다. 1단 차이가 일정하면 1차식, 2단 차이가 일정하면 2차식이다.

Q106 도형 (합동·닮음·면적)

두 삼각형 $\triangle ABC$와 $\triangle DEF$가 SSS 합동이고, $AB = DE = 6$, $BC = EF = 8$, $CA = FD = 10$이다. $\angle B$의 크기와 $\triangle DEF$의 넓이를 구하라.

SSS 합동인 두 직각삼각형



①) ① $\angle B = 60°$, 넓이 $= 24$

②) ② $\angle B = 90°$, 넓이 $= 24$

③) ③ $\angle B = 90°$, 넓이 $= 30$

④) ④ $\angle B = 60°$, 넓이 $= 12\sqrt{3}$

🎯 **정답: ② $\angle B = 90°$, 넓이 $= 24$**

📖 세 변이 $6, 8, 10$인 삼각형은 $6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 = 10^2$이므로 피타고라스 정리의 역에 의해 직각삼각형이다.

빗변은 가장 긴 변 $CA = 10$ (= FD)이므로, 직각은 빗변에 마주 보는 꼭짓점인 B (= E)에 있다.

따라서 $\angle B = 90°$.

$\triangle DEF$는 $\triangle ABC$와 합동이므로 넓이는 같다.
넓이 $= \frac{1}{2} \times DE \times EF = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24$.

💡 $(3, 4, 5)$의 비가 $(6, 8, 10)$. 가장 작은 피타고라스 수의 2배인 셈. 고대 이집트인들이 직각을 만들 때 사용한 "이집트 끈" 비율이다.

Q107 경우의 수

서로 다른 10명의 학생 중에서 3명을 뽑으려고 한다. 특정한 두 학생 A, B는 반드시 함께 뽑히거나 함께 빠져야 한다. 가능한 경우의 수는?

①) ① 48

②) ② 56

③) ③ 64

④) ④ 120

🎯 **정답:** ③ 64

📖 두 경우로 나눠 센다.

경우 1) A, B 모두 뽑힌다.
나머지 한 자리를 A, B를 제외한 8명 중에서 뽑는 경우.
$\binom{8}{1} = 8$

경우 2) A, B 모두 뽑히지 않는다.
A, B를 제외한 8명 중에서 3명을 뽑는 경우.
$\binom{8}{3} = \frac{8\times7\times6}{3\times2\times1} = 56$

두 경우는 동시에 일어날 수 없으므로 합한다.

$8 + 56 = 64$.

💡 "같이 또는 같이 아니다"는 두 원소를 하나의 묶음처럼 다루는 발상이 핵심. 조건부 조합 문제의 흔한 풀이 패턴이다.

Q108 확률

빨강 공 3개와 파랑 공 5개가 든 주머니에서 임의로 공 2개를 동시에 꺼낼 때, 두 공의 색이 서로 다를 확률은?

①) ① $\frac{3}{8}$

②) ② $\frac{15}{56}$

③) ③ $\frac{15}{28}$

④) ④ $\frac{1}{2}$

🎯 **정답:** ③ $\frac{15}{28}$

📖 전체 경우의 수: 공 8개에서 2개 뽑기.
$\binom{8}{2} = \frac{8\times7}{2} = 28$

색이 서로 다른 경우 (빨강 1, 파랑 1):
$\binom{3}{1}\times\binom{5}{1} = 3\times5 = 15$

확률 $= \dfrac{15}{28}$.

💡 여사건으로도 풀 수 있다. 같은 색일 확률 $= \frac{\binom{3}{2}+\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{3+10}{28} = \frac{13}{28}$. 두 색이 다를 확률 $= 1 - \frac{13}{28} = \frac{15}{28}$.

Q109 비둘기집 원리

1부터 100까지의 정수 중에서 51개를 골랐다. 이 중에는 반드시 두 수의 차가 1인 (즉, 연속한 두 정수) 쌍이 존재함을 증명하라.

🎯 **정답: 비둘기집 원리에 의해 항상 존재한다.**

📖 1부터 100까지의 정수를 다음 50개의 쌍으로 분류한다.

$$\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \ \dots \ , \{99, 100\}$$

각 쌍은 정확히 연속한 두 정수로 이뤄져 있다. 따라서 50개의 "서랍"이 있다.

이제 51개의 정수를 골랐다고 하자. 비둘기집 원리에 따르면, 50개의 서랍에 51개의 정수를 넣으면 어떤 서랍에는 정수가 적어도 2개 들어간다.

그 서랍은 연속한 두 정수의 쌍이고, 그 쌍의 두 원소가 모두 뽑힌 정수에 포함된다. 즉, 차가 1인 두 정수가 존재한다. ∎

💡 비둘기집(서랍) 원리는 디리클레가 정수론 증명에 처음 체계적으로 활용해 "디리클레의 서랍 원리"라고도 부른다.

Q110 정수론 (약수·배수·소수)

약수의 개수가 정확히 12개인 가장 작은 자연수를 구하라.

①) ① 60

②) ② 72

③) ③ 96

④) ④ 144

🎯 **정답:** ① 60

📖 자연수 n을 소인수분해해 $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$로 쓰면, 약수의 개수는
$$d(n) = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdots (a_k + 1)$$

$d(n) = 12$가 되도록 12를 양의 정수의 곱으로 분해하면:

- $12 = 12$: $a_1 = 11$. 최소 $n = 2^{11} = 2048$.
- $12 = 6 \times 2$: $a_1 = 5, a_2 = 1$. 최소 $n = 2^5 \times 3 = 96$.
- $12 = 4 \times 3$: $a_1 = 3, a_2 = 2$. 최소 $n = 2^3 \times 3^2 = 8 \times 9 = 72$.
- $12 = 3 \times 2 \times 2$: $a_1 = 2, a_2 = 1, a_3 = 1$. 최소 $n = 2^2 \times 3 \times 5 = 60$.

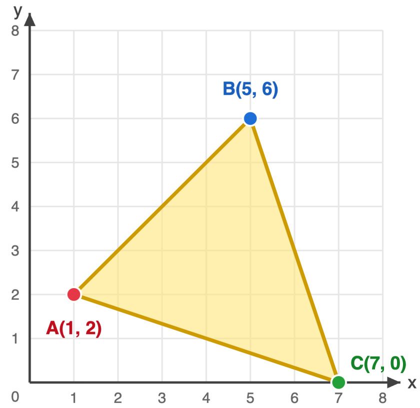
네 값을 비교하면 $\min(2048, 96, 72, 60) = 60$.

검증: $60 = 2^2 \times 3 \times 5$의 약수는 $1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60 \to 12$개 ✓.

💡 60은 약수가 많아 "고도 합성수" 중 하나이다. 1시간 = 60분, 1분 = 60초인 60진법이 등장한 것도 60이 $1, 2, 3, 4, 5, 6$ 등 작은 수들로 나누어 떨어지기 때문이다.

Q111 좌표 기하

세 점 $A(1,2)$, $B(5,6)$, $C(7,0)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 구하라.



①) ① 12

②) ② 14

③) ③ 16

④) ④ 20

🎯 **정답:** ③ 16

📖 세 점 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)$가 이루는 삼각형의 넓이는 신발끈 공식

$$S=\frac{1}{2}\mid x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\mid$$

$A(1,2),B(5,6),C(7,0)$ 대입:

$$S=\frac{1}{2}|1\cdot(6-0)+5\cdot(0-2)+7\cdot(2-6)|$$

$$=\frac{1}{2}|6+(-10)+(-28)|=\frac{1}{2}\cdot 32=16$$

검증: 밑변 AB의 길이 $=\sqrt{(5-1)^2+(6-2)^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$.

직선 AB의 방정식 $y-2=1\cdot(x-1)$, 즉 $x-y+1=0$.

점 $C(7,0)$에서 직선까지 거리 $=\frac{|7-0+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{8}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$.

넓이 $=\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{2}=\frac{1}{2}\cdot 32=16$ ✓.

💡 신발끈 공식은 다각형의 꼭짓점을 시계 반대 방향으로 따라가며 "끈을 묶듯이" 좌표를 교차 곱하기 때문에 이런 이름이 붙었다. 임의의 다각형에도 일반화된다.

Q112 재미 두뇌

8×8 체스판에서 마주 보는 두 꼭짓점 위치의 정사각형 두 칸 (왼쪽 위와 오른쪽 아래 모서리)을 잘라냈다. 남은 62칸을 1×2 도미노 31장으로 빈틈없이 덮을 수 있는가? 가능 여부를 판단하고 이유를 설명하라.

①) ① 가능하다 (덮는 방법 존재)

②) ② 불가능하다 (흑백 칸 수 불일치)

③) ③ 회전 도미노만 사용하면 가능

④) ④ 답을 알 수 없다

🎯 **정답: ② 불가능하다 (흑백 칸 수 불일치)**

📖 체스판 색칠 논증을 사용한다.

8×8 체스판에는 흑백이 번갈아 칠해져 있고, 흑 칸 32개, 백 칸 32개 (합 64).

핵심: **대각선 마주 보는 두 꼭짓점 칸은 항상 같은 색**이다. (행 인덱스 + 열 인덱스의 홀짝이 같으면 같은 색. $1 + 1 = 2$, $8 + 8 = 16$ - 모두 짝수.)

두 칸이 같은 색 (예: 흰색)이라고 하자. 잘라낸 후 남은 칸:
- 흑 칸: 32
- 백 칸: $32 - 2 = 30$

도미노 1×2는 가로든 세로든 항상 인접한 두 칸을 덮고, 인접한 두 칸은 반드시 색이 다르다. 즉, **도미노 하나는 반드시 흑 1개 + 백 1개를 덮는다**.

도미노 31장이 덮는 흑 칸 수 = 백 칸 수 = 31.

그러나 남은 흑 칸은 32, 백 칸은 30이므로 두 수가 다르다. 모순.

따라서 **불가능**.

💡 이 문제는 1946년 막스 블랙이 제기한 "잘린 체스판 문제"이다. 색칠 논증(Coloring Argument)은 조합론과 컴퓨터과학에서 자주 등장하는 강력한 불변량 기법이다.

Q113 논리 (Knight/Knave)

정직한 사람(항상 진실)과 거짓말쟁이(항상 거짓)만 사는 섬에서 두 사람 A, B를 만났다. A는 "B는 정직하다"라고 말했고, B는 "A와 나는 서로 다른 종족이다"라고 말했다. A, B의 종족은?

①) ① 둘 다 정직
②) ② 둘 다 거짓말쟁이
③) ③ A 정직, B 거짓말쟁이
④) ④ A 거짓말쟁이, B 정직

🎯 **정답: ② 둘 다 거짓말쟁이**

📖 경우 1) A가 정직이라 가정. 그러면 "B는 정직"이 참이므로 B도 정직. 그런데 B는 "A와 나는 다른 종족"이라 했고 B가 정직이면 이 말도 참이어야 하는데 둘 다 정직이므로 같은 종족 → 모순. 경우 2) A가 거짓말쟁이라 가정. "B는 정직"이 거짓이므로 B는 거짓말쟁이. B의 발언 "다른 종족"도 거짓이어야 하는데 둘 다 거짓말쟁이라 같은 종족이므로 거짓이 맞다 → 일관됨. 따라서 둘 다 거짓말쟁이.

💡 이런 논리 퍼즐은 수학자 Raymond Smullyan이 대중화했어요.

Q114 모듈러 산술 입문

3^{10}을 7로 나눈 나머지는?

①) ① 1
②) ② 2
③) ③ 4
④) ④ 6

🎯 **정답: ③ 4**

📖 $3^1 \equiv 3,\ 3^2 \equiv 9 \equiv 2,\ 3^3 \equiv 6,\ 3^4 \equiv 18 \equiv 4,\ 3^5 \equiv 12 \equiv 5,\ 3^6 \equiv 15 \equiv 1 \pmod 7$. 주기가 6이므로 $3^{10} = 3^6 \cdot 3^4 \equiv 1 \cdot 4 \equiv 4 \pmod 7$. 따라서 나머지는 4.

💡 페르마의 소정리에 의하면 소수 p에 대해 $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ $(\gcd(a, p) = 1)$. 여기서 $3^6 \equiv 1 \pmod 7$이 정확히 그 경우예요.

Q115 함수와 패턴

함수 f가 $f(1) = 0,\ f(2) = 2,\ f(3) = 6,\ f(4) = 12,\ f(5) = 20$의 규칙을 따른다. $f(10)$의 값은?

①) ① 72
②) ② 81
③) ③ 90
④) ④ 100

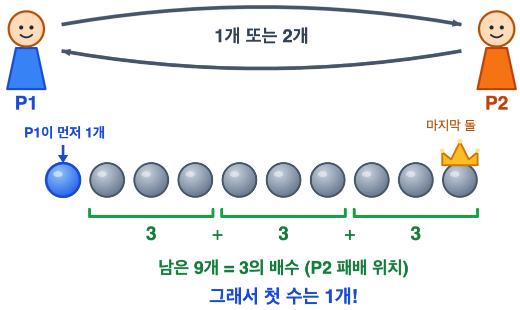
🎯 **정답: ③ 90**

📖 차이를 보면 $2, 4, 6, 8$로 등차수열이므로 이차식임을 추측. $f(n) = n^2 - n = n(n-1)$로 두면 $f(1) = 0,\ f(2) = 2,\ f(3) = 6,\ f(4) = 12,\ f(5) = 20$ 모두 일치. 따라서 $f(10) = 10 \cdot 9 = 90$.

💡 $n(n-1)$은 두 사람을 줄 세우는 경우의 수(순열 ${}_nP_2$)와 같아요. 그래서 이 수열은 "2개를 뽑아 줄 세우기" 패턴이에요.

Q116 게임 이론 (Nim)

돌무더기 한 개에 돌이 10개 있다. 두 사람이 번갈아 가며 한 번에 1개 또는 2개를 가져갈 수 있고, 마지막 돌을 가져간 사람이 이긴다. 먼저 시작하는 사람이 반드시 이기려면 첫 차례에 몇 개를 가져가야 하는가?



①) ① 1개

②) ② 2개

③) ③ 어떻게 해도 무조건 진다

④) ④ 어떻게 해도 무조건 이긴다

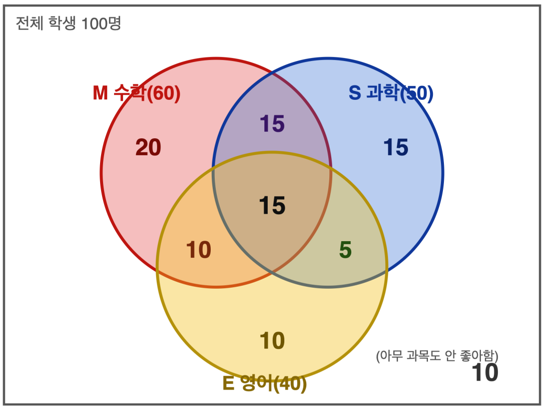
🎯 **정답: ① 1개**

📖 이 게임의 패배 위치(자기 차례에 돌이 그 수만큼 남으면 지는 위치)는 3의 배수. 왜냐하면 상대가 1개를 가져가면 내가 2개를, 상대가 2개를 가져가면 내가 1개를 가져가서 매 라운드 3개씩 줄이면 상대 차례마다 항상 3의 배수가 남기 때문. 10에서 1개를 가져가 9개를 남기면 상대는 패배 위치에 빠진다. 따라서 첫 수는 1개.

💡 이렇게 'k+1개씩 줄여 0(또는 작은 값)으로 몰기'는 Nim 게임의 가장 기본 전략이에요.

Q117 집합과 벤다이어그램

학생 100명을 대상으로 좋아하는 과목을 조사했다. 수학 60명, 과학 50명, 영어 40명이 좋아한다고 답했고, 수학과 과학을 모두 좋아하는 학생은 30명, 수학과 영어는 25명, 과학과 영어는 20명, 세 과목을 모두 좋아하는 학생은 15명이었다. 세 과목 중 어느 하나도 좋아하지 않는 학생은 몇 명인가?



①) ① 5명
②) ② 10명
③) ③ 15명
④) ④ 20명

🎯 **정답: ② 10명**

📖 포함배제 원리: $|M \cup S \cup E| = |M| + |S| + |E| - |M \cap S| - |M \cap E| - |S \cap E| + |M \cap S \cap E| = 60 + 50 + 40 - 30 - 25 - 20 + 15 = 90$. 따라서 적어도 한 과목을 좋아하는 학생은 90명. 어느 것도 좋아하지 않는 학생 $= 100 - 90 = 10$명.

💡 포함배제 원리는 영국 수학자 드 무아브르가 처음 일반화했어요. 'n개 집합'에서도 부호를 번갈아 가며 더하고 빼면 돼요.

Q118 정수론 (약수·배수·소수)

두 자연수 $a = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, $b = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7$이 있다. $\gcd(a, b)$와 $\mathrm{lcm}(a, b)$의 곱은?

①) ① $a + b$
②) ② $a - b$
③) ③ $a \cdot b$
④) ④ a/b

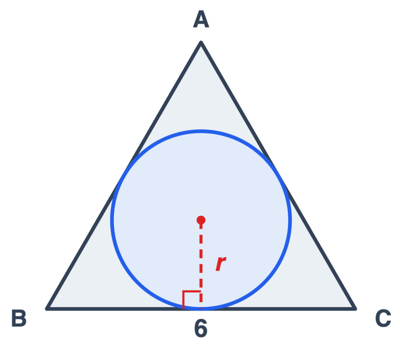
🎯 **정답: ③ $a \cdot b$**

📖 임의의 두 양의 정수에 대해 항등식 $\gcd(a, b) \cdot \mathrm{lcm}(a, b) = a \cdot b$가 성립한다. 실제로 $\gcd = 2^2 \cdot 3^2 = 36$, $\mathrm{lcm} = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 = 7560$. $36 \cdot 7560 = 272160$. 한편 $a = 8 \cdot 9 \cdot 5 = 360$, $b = 4 \cdot 27 \cdot 7 = 756$, $ab = 360 \cdot 756 = 272160$. 일치한다.

💡 소인수마다 지수의 최솟값(GCD)과 최댓값(LCM)을 더하면 두 지수의 합과 같아요. 그래서 GCD × LCM = ab가 항상 성립합니다.

Q119 도형 (합동·닮음·면적)

한 변의 길이가 6인 정삼각형의 내접원의 반지름의 길이는?



①) ① 1
②) ② $\sqrt{2}$
③) ③ $\sqrt{3}$
④) ④ 2

🎯 **정답:** ③ $\sqrt{3}$

📖 공식 1: 정삼각형의 넓이 $= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 6^2 = 9\sqrt{3}$. 반둘레 $s = \frac{18}{2} = 9$. 내접원 반지름 $r = \frac{\text{넓이}}{s} = \frac{9\sqrt{3}}{9} = \sqrt{3}$. 공식 2: 정삼각형은 무게중심 = 내심 = 외심이고, 내접원 반지름은 높이의 $1/3$. 높이 $= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 6 = 3\sqrt{3}$ 이므로 $r = \sqrt{3}$.

💡 정삼각형에서 외접원 반지름 R은 내접원 반지름 r의 정확히 2배예요 ($R = 2r$). 다른 도형에서는 잘 성립하지 않는 특별한 성질이죠.

Q120 확률

주머니 안에 빨간 공 3개, 파란 공 4개, 흰 공 5개가 있다. 이 주머니에서 공 2개를 동시에 꺼낼 때, 두 공의 색이 같을 확률은?

①) ① $\frac{1}{6}$
②) ② $\frac{19}{66}$
③) ③ $\frac{1}{3}$
④) ④ $\frac{47}{66}$

🎯 **정답:** ② $\frac{19}{66}$

📖 전체 경우의 수 $= \binom{12}{2} = 66$. 같은 색 경우: 빨강 $\binom{3}{2} = 3$, 파랑 $\binom{4}{2} = 6$, 흰색 $\binom{5}{2} = 10$이므로 총 $3 + 6 + 10 = 19$. 확률 $= \frac{19}{66}$.

💡 여사건(두 공의 색이 다를 확률)으로 풀면 $1 - \frac{19}{66} = \frac{47}{66}$. 색이 다른 경우가 같은 경우보다 약 2.5배 많아요.

🧠 중등 논리·추론

총 40문제 · 문제와 정답·풀이 포함

Q121 경우의 수

A, B, C, D, E 5명을 일렬로 세울 때, A와 B가 서로 이웃하지 않도록 세우는 방법의 수는?

①) ① 36가지

②) ② 48가지

③) ③ 72가지

④) ④ 96가지

🎯 **정답: ③ 72가지**

📖 전체 - 이웃하는 경우(여사건). 전체 = $5! = 120$. A와 B가 이웃하는 경우: A,B를 한 묶음으로 보면 4개의 대상을 일렬로 = $4! = 24$, 묶음 안에서 AB/BA 순서 2가지 → $24 \times 2 = 48$. 따라서 이웃하지 않는 경우 = $120 - 48 = 72$.

💡 다른 풀이: C,D,E 먼저 일렬($3! = 6$) → 그 사이와 양끝 4자리 중 2자리에 A,B 배치(${}_4P_2 = 12$) → $6 \times 12 = 72$. 답이 일치해요.

Q122 논리 (Knight/Knave)

섬에 사는 세 사람 A, B, C가 다음과 같이 말했다. A: "우리 셋 중에 정직한 사람이 적어도 한 명 있다." B: "A는 거짓말쟁이다." C: "B는 정직하다." 세 사람의 종족을 모두 맞힌 것은?

①) ① 모두 정직

②) ② A 정직, B 거짓, C 거짓

③) ③ A 거짓, B 정직, C 정직

④) ④ 모두 거짓말쟁이

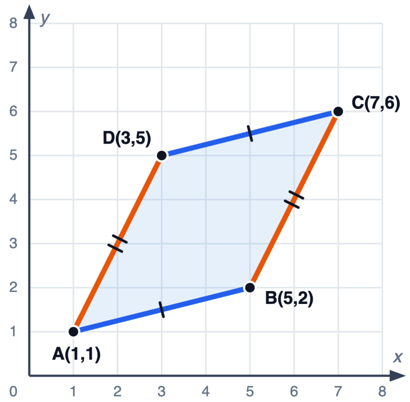
🎯 **정답: ② A 정직, B 거짓, C 거짓**

📖 경우 1) A가 거짓말쟁이라 가정. A의 발언 "적어도 한 명 정직"이 거짓이 되려면 세 명 모두 거짓말쟁이여야 한다. 그러면 B도 거짓말쟁이인데 B의 발언 "A는 거짓말쟁이"는 사실이 되어 B가 진실을 말한 셈 → 모순. 경우 2) A가 정직이라 가정. B의 발언 "A는 거짓말쟁이"는 거짓이므로 B는 거짓말쟁이. C의 발언 "B는 정직"도 거짓이므로 C는 거짓말쟁이. A 발언 "적어도 한 명 정직"은 A 자신이 정직이므로 참 → 일관됨. 따라서 A만 정직, B와 C는 거짓말쟁이.

💡 A처럼 "적어도 한 명은 정직"이라는 발언이 참이려면 A 본인이 정직해도 충분하니, 자기 진술이 자기 종족을 결정짓는 단서가 돼요.

Q123 좌표 기하

좌표평면 위 네 점 $A(1,1)$, $B(5,2)$, $C(7,6)$, $D(3,5)$를 꼭짓점으로 하는 사각형 $ABCD$가 평행사변형임을 확인하고, 그 넓이를 구하시오.



①) ① 12
②) ② 14
③) ③ 16
④) ④ 18

🎯 **정답: ② 14**

📖 먼저 평행사변형 확인: $\vec{AB} = (4,1)$, $\vec{DC} = (4,1)$로 같으므로 AB ∥ DC이고 길이도 같다 → 평행사변형. 넓이 = $|\vec{AB} \times \vec{AD}|$. $\vec{AD} = (2,4)$이므로 2차원 외적(스칼라) $= 4 \cdot 4 - 1 \cdot 2 = 14$. 따라서 넓이는 14.

💡 좌표평면에서 두 벡터로 만드는 평행사변형 넓이는 행렬식 $|\det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}|$ 로 단번에 구할 수 있어요.

Q124 수열과 점화

계단을 한 번에 1칸 또는 2칸씩 오를 수 있다. 8칸짜리 계단을 끝까지 오르는 서로 다른 방법은 모두 몇 가지인가?

①) ① 21
②) ② 28
③) ③ 34
④) ④ 55

🎯 **정답: ③ 34**

📖 n칸 계단을 오르는 방법의 수를 a_n이라 하면, 마지막에 1칸을 오른 경우(a_{n-1}가지)와 2칸을 오른 경우(a_{n-2}가지)로 나뉘므로 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ (피보나치 점화식). 초깃값 $a_1 = 1$, $a_2 = 2$. 차례로 $a_3 = 3, a_4 = 5, a_5 = 8, a_6 = 13, a_7 = 21, a_8 = 34$. 답은 34.

💡 이 수열 1,2,3,5,8,13,21,34,...는 피보나치 수열의 한 칸 옮긴 형태예요. 인도 수학자 헤마찬드라가 12세기에 이미 운율 음절 조합 문제에서 발견했어요.

Q125 비둘기집 원리

1부터 8까지의 자연수 중 서로 다른 5개를 임의로 고르면, 그 중 합이 9가 되는 두 수가 반드시 존재한다. 그 근거가 되는 '비둘기집'(쌍)의 개수는?

①) ① 3개
②) ② 4개
③) ③ 5개
④) ④ 8개

🎯 **정답: ② 4개**

📖 합이 9가 되는 쌍을 만들면 $\{1, 8\}, \{2, 7\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}$ 의 4쌍이 1 - 8을 빠짐없이 덮는다.
이 4쌍을 4개의 '비둘기집'으로 보고, 고른 5개의 수를 '비둘기'로 본다.
비둘기집 원리에 의해 어떤 쌍에는 두 수가 모두 들어가야 하고, 그 두 수의 합은 9이다. 따라서 비둘기집의 개수는 4.

💡 비둘기집 원리는 '$n+1$마리의 비둘기를 n개의 집에 넣으면 한 집에 2마리 이상'이라는 단순한 원리지만, 정수론과 조합론에서 강력한 증명 도구로 쓰인다.

Q126 함수와 패턴

수열 f가 모든 자연수 x에 대해 $f(x+1) = f(x) + 3$ 을 만족하고 $f(1) = 5$ 이다. $f(20)$ 의 값은?

①) ① 56
②) ② 59
③) ③ 62
④) ④ 65

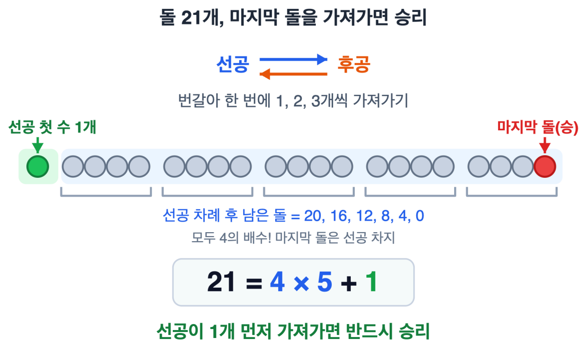
🎯 **정답: ③ 62**

📖 식 $f(x+1) - f(x) = 3$ 은 x가 1 증가할 때 f값이 3씩 늘어남을 뜻한다. 즉 f는 공차 3인 등차수열의 일반항이다.
$f(n) = f(1) + 3 \cdot (n-1) = 5 + 3(n-1)$.
$n = 20$ 대입: $f(20) = 5 + 3 \times 19 = 5 + 57 = 62$.

💡 점화식 $f(x+1) - f(x) = c$ (상수)는 '이산판 도함수가 상수'라는 뜻이고, 그래서 답이 직선식 $f(n) = cn + d$ 형태로 나오는 것이다.

Q127 게임 이론 (Nim)

돌 21개가 한 더미에 쌓여 있다. 두 사람이 번갈아 한 번에 1, 2, 또는 3개를 가져가고, 마지막 돌을 가져가는 사람이 이긴다. 선공이 반드시 이기려면 첫 번째에 몇 개를 가져가야 하는가?



①) ① 1개
②) ② 2개
③) ③ 3개
④) ④ 어떻게 해도 후공이 이긴다

🎯 **정답: ① 1개**

📖 승리 전략의 핵심은 '내 차례가 끝났을 때 남은 돌 수를 4의 배수로 만들기'이다.
후공이 k개($k = 1, 2, 3$)를 가져가면 선공이 $(4 - k)$개를 가져가서 한 라운드에 정확히 4개를 소모할 수 있기 때문이다.
$21 = 4 \times 5 + 1$ 이므로 선공이 먼저 1개를 가져가면 20개가 남고, 이후 위의 전략으로 항상 4의 배수$(16, 12, 8, 4)$를 유지하여 마지막 4개에서 후공이 무엇을 가져가든 선공이 남은 돌을 모두 가져가 승리한다.

💡 이 게임은 '뺄셈 게임(Subtraction Game)'의 가장 단순한 예로, 모듈러 산술이 게임 전략으로 직접 변하는 멋진 사례다.

Q128 논리 (Knight/Knave)

기사(항상 참)와 악당(항상 거짓)만 사는 섬에서 두 사람 A, B를 만났다.
A: "우리 둘 중 적어도 한 명은 악당이다."
B는 아무 말도 하지 않았다. A, B의 정체는?

①) ① 둘 다 기사
②) ② A 기사, B 악당
③) ③ A 악당, B 기사
④) ④ 둘 다 악당

🎯 **정답: ② A 기사, B 악당**

📖 A가 악당이라고 가정하자. 그러면 그의 말 '둘 중 적어도 한 명은 악당'은 거짓이어야 하므로 '둘 다 기사'가 참이 되고, 특히 A도 기사가 되어 모순이다.
따라서 A는 기사이고, 그의 말은 참이다. 즉 '둘 중 적어도 한 명은 악당'이 성립하는데 A는 기사이므로 그 악당은 반드시 B다.
따라서 A 기사, B 악당.

💡 이 유형은 자기 발언 안에 '나'를 포함시켜 모순으로부터 정답을 강제하는 자기참조 논리의 가장 기본형이다.

Q129 수열과 점화

수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + 1$ 을 만족한다. a_6 의 값은?

①) ① 31
②) ② 47
③) ③ 63
④) ④ 127

🎯 **정답: ③ 63**

📖 차례로 계산한다.

$a_1 = 1$
$a_2 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$
$a_3 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$
$a_4 = 2 \cdot 7 + 1 = 15$
$a_5 = 2 \cdot 15 + 1 = 31$
$a_6 = 2 \cdot 31 + 1 = 63.$

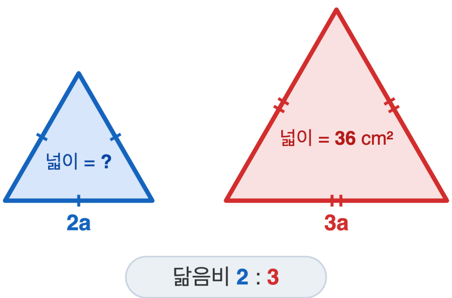
참고로 일반항은 $a_n = 2^n - 1$ 의 꼴이다 (메르센 수).

💡 $2^n - 1$ 이 소수일 때 이를 '메르센 소수'라 한다. 현재까지 알려진 가장 큰 소수는 모두 메르센 소수다.

Q130 도형 (닮음)

닮음비가 $2:3$ 인 두 정삼각형이 있다. 큰 정삼각형의 넓이가 $36\,\mathrm{cm}^2$ 일 때, 작은 정삼각형의 넓이는?

닮은 두 정삼각형



①) ① $12\,\mathrm{cm}^2$
②) ② $16\,\mathrm{cm}^2$
③) ③ $18\,\mathrm{cm}^2$
④) ④ $24\,\mathrm{cm}^2$

🎯 **정답: ②** $16\,\mathrm{cm}^2$

📖 닮은 두 도형의 넓이비는 닮음비의 제곱이다.

닮음비 $2:3$ 이므로 넓이비는 $2^2:3^2 = 4:9$.

큰 정삼각형의 넓이가 $36\,\mathrm{cm}^2$ 이므로 작은 정삼각형의 넓이를 S라 하면 $S:36 = 4:9$, 즉 $S = 36 \times \frac{4}{9} = 16\,\mathrm{cm}^2$.

💡 같은 원리로 닮은 입체도형의 부피비는 닮음비의 세제곱이 된다. 키가 2배 큰 사람이 무게는 약 8배가 되는 이유다.

Q131 경우의 수

8명의 학생 중에서 3명을 뽑아 위원회를 구성하는 방법의 수는?

①) ① 24

②) ② 56

③) ③ 112

④) ④ 336

🎯 **정답:** ② 56

📖 순서를 구별하지 않고 뽑으므로 조합이다.

$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{336}{6} = 56.$

참고로 순서를 구별해 뽑는 순열이라면 ${}_8P_3 = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ 가 된다.

💡 $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ 이므로 $\binom{8}{3} = \binom{8}{5} = 56$. 뽑는 3명을 결정하는 것과 '뽑히지 않을 5명'을 결정하는 것이 같은 수의 방법이기 때문이다.

Q132 확률

1부터 10까지의 자연수가 하나씩 적힌 공 10개가 들어 있는 주머니에서 임의로 한 개를 꺼낼 때, 적힌 수가 소수일 확률은?

①) ① $\frac{1}{5}$

②) ② $\frac{3}{10}$

③) ③ $\frac{2}{5}$

④) ④ $\frac{1}{2}$

🎯 **정답:** ③ $\frac{2}{5}$

📖 1부터 10 사이의 소수는 $2, 3, 5, 7$ 의 4개다 (1은 소수가 아니라는 점에 주의).

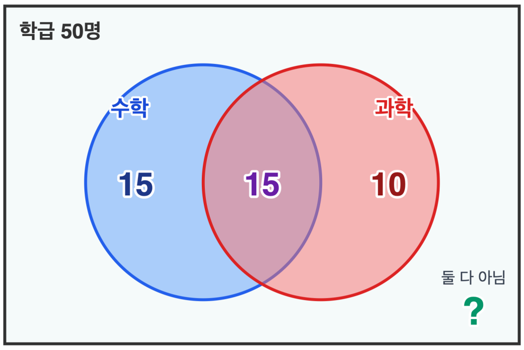
전체 경우의 수는 10, 소수가 적힌 공을 뽑는 사건의 경우의 수는 4.

따라서 확률은 $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

💡 1이 소수가 아닌 이유는 '소인수분해의 유일성'을 지키기 위해서다. 만약 1을 소수로 인정하면 $6 = 2 \cdot 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3$ 처럼 분해가 무한히 늘어난다.

Q133 집합과 벤다이어그램

어느 학급 50명을 대상으로 조사한 결과, 수학을 좋아하는 학생이 30명, 과학을 좋아하는 학생이 25명, 수학과 과학을 모두 좋아하는 학생이 15명이었다. 둘 다 좋아하지 않는 학생은 몇 명인가?



①) ① 5명
②) ② 10명
③) ③ 15명
④) ④ 20명

🎯 **정답: ② 10명**
📖 수학을 좋아하는 집합을 M, 과학을 좋아하는 집합을 S라 하자.
포함배제 원리에 의해 $|M \cup S| = |M| + |S| - |M \cap S| = 30 + 25 - 15 = 40$.
둘 중 하나라도 좋아하는 학생이 40명이므로, 둘 다 좋아하지 않는 학생은 $50 - 40 = 10$ 명.
💡 포함배제 원리는 '겹친 부분을 두 번 세었으니 한 번 빼주자'는 매우 직관적인 셈법이지만, 3집합 이상으로 확장하면 부호가 교대로 나타나는 멋진 일반화 공식이 된다.

Q134 정수론 (약수)

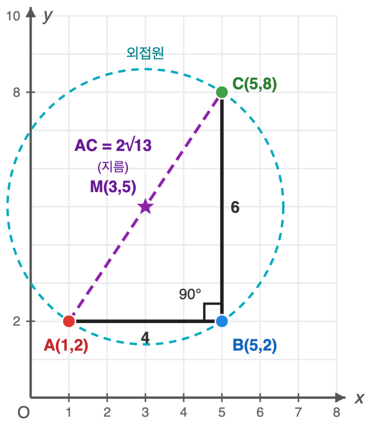
양의 약수의 개수가 정확히 3개인 100 이하의 자연수는 몇 개인가?

①) ① 3개
②) ② 4개
③) ③ 5개
④) ④ 6개

🎯 **정답: ② 4개**
📖 자연수 n의 소인수분해가 $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$ 일 때 약수의 개수는 $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdots (a_k + 1)$ 이다.
이 값이 3이 되려면 3을 자연수의 곱으로 표현하는 방법이 유일하므로 $3 = 3$, 즉 소수 한 개의 제곱 꼴이어야 한다. 즉 $n = p^2$ (단, p는 소수).
$p^2 \leq 100$ 을 만족하는 소수 p는 $2, 3, 5, 7$ 의 4개이고, 해당하는 n은 $4, 9, 25, 49$.
따라서 답은 4개.
💡 약수의 개수가 홀수인 자연수는 모두 완전제곱수이다 (약수가 짝을 이루지 못하는 자기자신의 제곱근이 존재해야 하기 때문).

Q135 좌표 기하

좌표평면 위의 세 점 $A(1,2)$, $B(5,2)$, $C(5,8)$ 을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC 의 외접원의 반지름은?



①) ① $\sqrt{10}$
②) ② $\sqrt{13}$
③) ③ $\sqrt{26}$
④) ④ $2\sqrt{13}$

🎯 **정답: ② $\sqrt{13}$**

📖 $\overrightarrow{BA} = (-4, 0)$, $\overrightarrow{BC} = (0, 6)$ 이므로 두 벡터는 서로 수직이다. 즉 $\angle B = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.
원에 내접하는 직각삼각형에서 빗변은 외접원의 지름이라는 성질('탈레스의 정리')을 이용한다.
빗변 $\overline{AC}$ 의 길이는 두 점 사이 거리 공식으로
$AC = \sqrt{(5-1)^2 + (8-2)^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$.
따라서 외접원의 반지름은 $\dfrac{AC}{2} = \sqrt{13}$.

💡 '반원에 내접하는 각은 직각'이라는 탈레스의 정리는 기록상 최초로 증명된 기하 정리 중 하나로 알려져 있다.

Q136 모듈러 산술 입문

3^{100}을 7로 나눈 나머지를 구하시오.

①) ① 1
②) ② 2
③) ③ 4
④) ④ 6

🎯 **정답: ③ 4**

📖 3의 거듭제곱을 7로 나눈 나머지를 차례로 살피면 $3^1 \equiv 3,\ 3^2 \equiv 2,\ 3^3 \equiv 6,\ 3^4 \equiv 4,\ 3^5 \equiv 5,\ 3^6 \equiv 1 \pmod 7$ 이므로 주기 6.
$100 = 6 \times 16 + 4$ 이므로 $3^{100} \equiv 3^4 \equiv 4 \pmod 7$. 따라서 나머지는 4.

💡 페르마의 소정리에 따르면 소수 p에 대해 $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ 이므로 $3^6 \equiv 1 \pmod 7$ 이 보장된다.

Q137 재미 두뇌

세 친구가 호텔에서 한 방을 30000원에 묵으려 했다. 각자 10000원씩 냈다. 나중에 사장이 방값이 25000원이라며 직원에게 5000원을 돌려주라 했다. 직원은 5000원을 셋으로 나누기 어려워 2000원을 챙기고 각자에게 1000원씩 돌려줬다. 그렇다면 각자 9000원씩 낸 셈이니 $9000 \times 3 = 27000$원이고, 여기에 직원이 챙긴 2000원을 더하면 29000원이 된다. 사라진 1000원은 어디에 있는가?

①) ① 직원이 더 챙겼다

②) ② 잘못된 덧셈에서 비롯된 함정 (사라진 돈은 없다)

③) ③ 사장이 몰래 가져갔다

④) ④ 거스름돈에 포함되어 있다

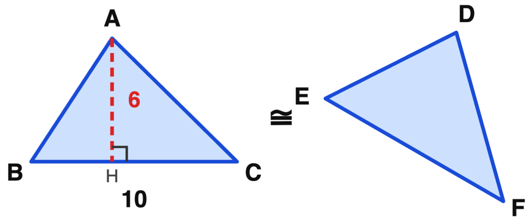
🎯 **정답: ② 잘못된 덧셈에서 비롯된 함정 (사라진 돈은 없다)**

📖 친구들이 실제로 낸 돈은 27000원이며, 이 안에 사장이 받은 25000원과 직원이 챙긴 2000원이 모두 포함되어 있다. 따라서 $27000 = 25000 + 2000$ 이라는 것이 옳은 식이다. 친구들이 낸 27000원에 다시 직원의 2000원을 더하는 것은 같은 돈을 두 번 세는 잘못이다. 사라진 돈은 없다.

💡 이 퍼즐은 1930년대 미국 잡지에 처음 실린 고전적 함정 문제로, 잘못된 식 구성이 어떻게 직관을 속이는지를 보여 준다.

Q138 도형 (합동·닮음·면적)

△ABC에서 $\overline{BC} = 10$ 이고, 꼭짓점 A에서 변 BC에 내린 수선의 길이가 6이다. △DEF가 △ABC와 합동일 때, △DEF의 넓이는?



①) ① 20

②) ② 25

③) ③ 30

④) ④ 60

🎯 **정답: ③ 30**

📖 △ABC의 넓이 $= \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times h = \frac{1}{2} \times 10 \times 6 = 30$. 합동인 두 도형의 넓이는 같으므로 △DEF의 넓이도 30.

💡 합동은 모양과 크기가 같은 도형 사이의 관계로, 회전·대칭·평행이동을 해도 넓이는 변하지 않는다.

Q139 비둘기집 원리

어떤 모임에 학생 25명이 있다. 이들 중 같은 요일에 태어난 학생이 적어도 몇 명은 반드시 있다고 단정할 수 있는가?

①) ① 2명
②) ② 3명
③) ③ 4명
④) ④ 5명

🎯 **정답: ③ 4명**

📖 요일은 7개. 25명을 7개의 요일에 분배할 때 최악의 경우에도 가장 많이 몰린 요일에는 $\left\lceil \frac{25}{7} \right\rceil = 4$ 명이 있어야 한다. 만약 모든 요일에 3명 이하만 있다면 총 $3 \times 7 = 21$명 뿐이라 25명을 담을 수 없다. 따라서 어떤 요일은 적어도 4명이 같이 태어났다.

💡 n마리의 비둘기를 k개의 서랍에 넣으면 어떤 서랍에는 $\lceil n/k \rceil$ 마리 이상이 있다는 일반화된 비둘기집 원리이다.

Q140 수열과 점화

첫째항이 3, 공차가 5인 등차수열의 20번째 항을 구하시오.

①) ① 95
②) ② 98
③) ③ 100
④) ④ 103

🎯 **정답: ② 98**

📖 등차수열의 일반항은 $a_n = a_1 + (n-1)d$. $a_{20} = 3 + (20-1) \times 5 = 3 + 95 = 98$.

💡 등차수열의 합 공식 $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$ 은 가우스가 어린 시절 1부터 100까지의 합을 순식간에 구한 것으로 유명하다.

Q141 확률

동전을 3번 던질 때, 세 번 모두 같은 면이 나올 확률은?

①) ① $\frac{1}{8}$
②) ② $\frac{1}{4}$
③) ③ $\frac{3}{8}$
④) ④ $\frac{1}{2}$

🎯 **정답: ② $\frac{1}{4}$**

📖 전체 경우의 수는 $2^3 = 8$. '모두 같은 면'은 (앞,앞,앞) 또는 (뒤,뒤,뒤)의 2가지. 따라서 확률 $= \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

💡 독립시행에서 첫 결과를 기준으로 나머지 두 번이 모두 같을 확률 $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ 로 계산해도 같은 답이 나온다.

Q142 재미 두뇌

한 농부가 늑대, 양, 양배추를 데리고 강을 건너야 한다. 배에는 농부와 한 가지 짐만 탈 수 있다. 농부가 자리를 비우면 늑대는 양을 잡아먹고, 양은 양배추를 먹는다. 농부가 모두 무사히 강 건너편으로 옮기려면 최소 몇 번의 강 횡단이 필요한가? (한 방향 이동을 1회로 셈)

①) ① 5회
②) ② 6회
③) ③ 7회
④) ④ 8회

🎯 **정답: ③ 7회**

📖 한 가지 가능한 순서: (1) 양을 데리고 건넘 → (2) 혼자 돌아옴 → (3) 늑대를 데리고 건넘 → (4) 양을 데리고 돌아옴 → (5) 양배추를 데리고 건넘 → (6) 혼자 돌아옴 → (7) 양을 데리고 건넘. 총 7회. 더 적은 횟수로는 불가능하다.

💡 이 퍼즐은 8세기 카롤링거 왕조의 알퀸이 쓴 '청년을 단련시키는 문제들'에 처음 등장한 1200년 된 고전이다.

Q143 함수와 패턴

함수 f 가 다음 표를 만족한다. $f(x)$의 식으로 알맞은 것은?

x	1	2	3	4
$f(x)$	2	5	10	17

①) ① $f(x) = 3x - 1$
②) ② $f(x) = x^2 + 1$
③) ③ $f(x) = 2x^2 - 3$
④) ④ $f(x) = x^2 - x + 2$

🎯 **정답: ② $f(x) = x^2 + 1$**

📖 각 값을 대입해 보면 $1^2 + 1 = 2,\ 2^2 + 1 = 5,\ 3^2 + 1 = 10,\ 4^2 + 1 = 17$ 로 모두 성립한다. 차이수열 $f(x+1) - f(x) = 3, 5, 7,\ \ldots$ 이 등차로 늘어나는 것도 이차식의 특징.

💡 함수 $x^2 + 1$ 은 어떤 정수 x 에 대해서도 4 의 배수가 되지 않는다는 흥미로운 성질을 가진다.

Q144 모듈러 산술 입문

$2^{100} + 3^{100}$ 을 5로 나눈 나머지는?

①) ① 0
②) ② 1
③) ③ 2
④) ④ 4

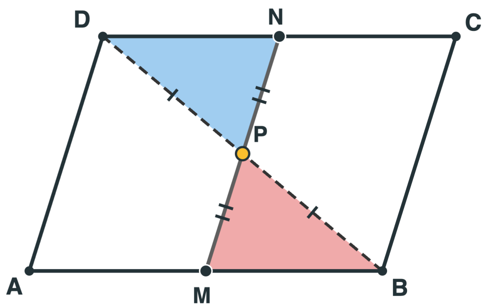
🎯 **정답: ③ 2**

📖 5 는 소수이므로 페르마의 소정리에서 $2^4 \equiv 1,\ 3^4 \equiv 1 \pmod 5$. $100 = 4 \times 25$ 이므로 $2^{100} = (2^4)^{25} \equiv 1 \pmod 5$, $3^{100} \equiv 1 \pmod 5$. 따라서 $2^{100} + 3^{100} \equiv 1 + 1 = 2 \pmod 5$. 나머지는 2.

💡 $2 + 3 = 5$ 이므로 $2 \equiv -3 \pmod 5$. 따라서 $2^{100} \equiv (-3)^{100} = 3^{100} \pmod 5$ 라는 또 다른 접근도 가능하다.

Q145 도형 (합동·닮음·면적)

평행사변형 ABCD에서 변 AB의 중점을 M, 변 CD의 중점을 N이라 하자. 대각선 BD가 선분 MN과 만나는 점을 P라 할 때, △BMP 와 △DNP 의 넓이의 비는?



①) ① 1 : 1
②) ② 1 : 2
③) ③ 2 : 1
④) ④ 1 : 4

정답: ① 1 : 1

📖 평행사변형의 성질에 의해 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ 이고 $\overline{AB} = \overline{CD}$. 중점이므로 $\overline{BM} = \overline{DN}$ 이고 $\overline{BM} \parallel \overline{DN}$. 따라서 사각형 BMDN 은 평행사변형이고, 대각선 BD와 MN은 서로를 이등분한다. 즉 $\overline{BP} = \overline{DP}$, $\overline{MP} = \overline{NP}$. 끼인각도 맞꼭지각으로 같으므로 △BMP ≡ △DNP (SAS). 따라서 넓이비는 $1:1$.

💡 임의의 사각형에서 두 쌍의 대변 중점을 이으면 그 두 선분은 항상 서로를 이등분한다 (바리뇽의 정리의 변형).

Q146 비둘기집 원리

1 부터 100 까지의 자연수 중에서 임의로 51 개를 뽑으면, 반드시 서로 이웃한 (즉 차가 1 인) 두 수가 존재한다. 이를 비둘기집 원리로 증명할 때 사용하는 "비둘기집(서랍)"의 개수로 알맞은 것은?

①) ① 25개
②) ② 50개
③) ③ 51개
④) ④ 100개

정답: ② 50개

📖 1 부터 100 까지의 수를 $(1,2), (3,4), (5,6), \dots, (99,100)$ 의 50 개 쌍으로 나눈다 (이것이 50 개의 서랍). 51 개의 수를 뽑으면 비둘기집 원리에 의해 어떤 한 쌍에서 두 수가 모두 뽑힌다. 같은 쌍의 두 수는 차가 1 이므로 이웃한 두 수가 반드시 존재한다.

💡 한편 차가 1인 두 수는 항상 서로소이므로, 같은 논리로 "51개 중에는 서로소인 두 수가 반드시 있다"도 보일 수 있다.

Q147 함수와 패턴

함수 $f(x) = x^2 + 1$에 대하여 $f(f(2))$의 값을 구하시오.

①) ① 25

②) ② 26

③) ③ 27

④) ④ 30

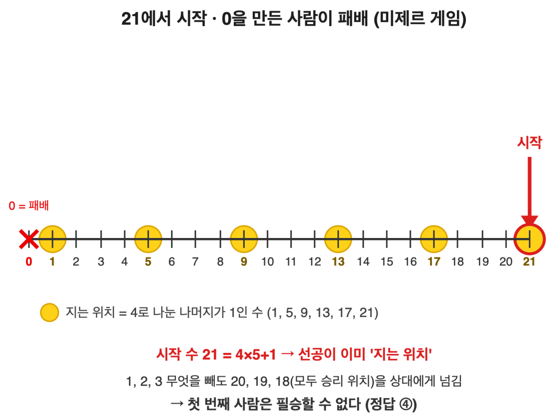
🎯 **정답: ② 26**

📖 안쪽부터 계산한다. $f(2) = 2^2 + 1 = 5$. 이제 $f(5) = 5^2 + 1 = 26$. 따라서 $f(f(2)) = 26$.

💡 함수의 반복 합성은 동역학계의 출발점이다. $x^2 + c$ 꼴 함수를 반복하면 그 유명한 망델브로 집합이 나온다.

Q148 게임 이론 (Nim)

21에서 시작해서 두 사람이 번갈아 가며 1, 2, 3 중 하나를 뺀다. 결과가 0이 되도록 만든 사람이 진다. 첫 번째 사람이 필승하려면 처음에 얼마를 빼야 하는가?



①) ① 1

②) ② 2

③) ③ 3

④) ④ 첫 번째 사람은 필승할 수 없다

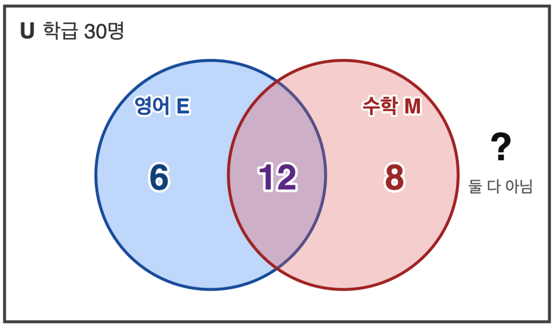
🎯 **정답: ④ 첫 번째 사람은 필승할 수 없다**

📖 0을 만든 사람이 지는 미제르(misère) 게임이다. 자기 차례에 그 수가 남아 있으면 결국 지게 되는 '패배 위치'를 찾자. $n = 1$이면 1을 빼서 0을 만들 수밖에 없어 지므로 1은 패배 위치다. $n = 2, 3, 4$는 각각 적당히 빼서 상대에게 1을 넘길 수 있으므로 승리 위치다. $n = 5$는 $1, 2, 3$ 중 무엇을 빼도($\rightarrow 4, 3, 2$) 상대가 승리 위치에 놓이므로 패배 위치다. 이를 반복하면 패배 위치는 4로 나눈 나머지가 1인 수, 즉 $1, 5, 9, 13, 17, 21$이다. 시작 수 $21 = 4 \times 5 + 1$은 패배 위치이므로, 선공인 첫 번째 사람은 $1, 2, 3$ 중 무엇을 빼도($\rightarrow 20, 19, 18$ 모두 승리 위치) 상대에게 승리 위치를 넘기게 되어 필승 전략이 없다. 따라서 정답은 ④이다.

💡 이 게임은 'Nim의 1차원 변형'으로 불린다. 빼는 최대 수가 k일 때 지는 위치는 항상 $(k + 1)$의 배수가 된다는 일반 정리가 있다.

Q149 집합과 벤다이어그램

30명의 학급에서 영어를 좋아하는 학생이 18명, 수학을 좋아하는 학생이 20명, 두 과목 모두 좋아하는 학생이 12명이다. 영어와 수학 모두 좋아하지 않는 학생은 몇 명인가?



①) ① 2
②) ② 4
③) ③ 6
④) ④ 8

🎯 **정답:** ② 4

📖 포함배제 원리로 영어 또는 수학을 좋아하는 학생 수를 구한다. $|E \cup M| = |E| + |M| - |E \cap M| = 18 + 20 - 12 = 26$. 전체에서 빼면 둘 다 좋아하지 않는 학생은 $30 - 26 = 4$명이다.

💡 포함배제 원리는 19세기 영국 수학자 실베스터가 일반 형태로 정리했지만, 두 집합 형태 자체는 훨씬 더 오래된 직관적인 결과다.

Q150 정수론 (약수·배수·소수)

360의 양의 약수는 모두 몇 개인가?

①) ① 18
②) ② 20
③) ③ 24
④) ④ 30

🎯 **정답:** ③ 24

📖 먼저 소인수분해한다. $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5^1$. 약수의 개수 공식에 따라 각 지수에 1을 더한 값을 곱한다.
$(3+1)(2+1)(1+1) = 4 \times 3 \times 2 = 24$. 따라서 360의 양의 약수는 24개이다.

💡 $N = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$일 때 약수 개수는 $\prod (a_i + 1)$, 약수의 합은 $\prod \frac{p_i^{a_i+1} - 1}{p_i - 1}$이라는 공식이 있다.

Q151 모듈러 산술 입문

오늘이 월요일이다. 지금부터 30일 후는 무슨 요일일까? (요일은 7일마다 반복된다.)

①) ① 화요일
②) ② 수요일
③) ③ 목요일
④) ④ 금요일

🎯 **정답: ② 수요일**

📖 요일은 7일을 주기로 반복되므로 30을 7로 나눈 나머지만 보면 된다. $30 = 7 \times 4 + 2$ 이므로 $30 \equiv 2 \pmod 7$. 월요일에서 2일 뒤이므로 월 → 화 → 수, 즉 수요일이다.

💡 이렇게 큰 날짜의 요일도 나머지(모듈러) 계산이면 암산으로 구할 수 있다.

Q152 정수론 (약수·배수·소수)

이진법(2진법)으로 나타낸 수 $1101_{(2)}$ 를 십진법으로 바꾸면?

①) ① 11
②) ② 12
③) ③ 13
④) ④ 14

🎯 **정답: ③ 13**

📖 각 자리는 오른쪽부터 $2^0, 2^1, 2^2, 2^3$ 의 자리값을 가진다. $1101_{(2)} = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 8 + 4 + 0 + 1 = 13.$

💡 컴퓨터는 모든 수를 이런 2진법(0과 1)으로 저장한다.

Q153 비둘기집 원리

어떤 모임에 사람들이 모였다. '태어난 달(月)이 같은 사람이 반드시 두 명 이상 있다'고 확실히 말하려면, 최소 몇 명이 모여야 할까?

①) ① 12명
②) ② 13명
③) ③ 24명
④) ④ 25명

🎯 **정답: ② 13명**

📖 달은 1월부터 12월까지 12개의 '서랍'이다. 12명까지는 모두 다른 달일 수 있지만(1월~12월 한 명씩), 13번째 사람은 어느 달에 넣어도 이미 누군가 있는 달과 겹친다. 따라서 $12 + 1 = 13$명이면 같은 달 생일이 반드시 생긴다.

💡 비둘기집 원리: $n+1$마리를 n개의 집에 넣으면 한 집에는 반드시 둘 이상이 들어간다.

Q154 재미 두뇌

자료 $\{2,\ 3,\ 7,\ 7,\ 11\}$ 의 중앙값(median)을 구하시오.

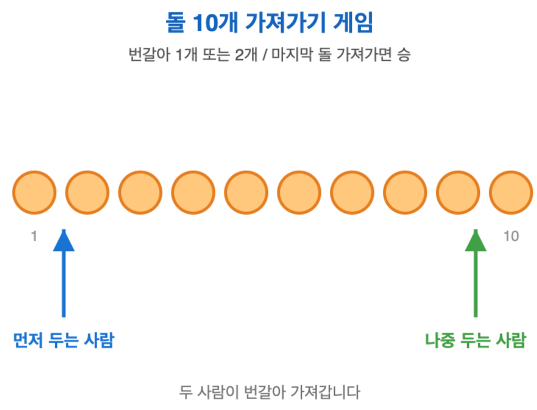
①) ① 5
②) ② 6
③) ③ 7
④) ④ 11

🎯 **정답: ③ 7**

📖 중앙값은 자료를 크기순으로 줄세웠을 때 한가운데 값이다. 작은 순서로 $2, 3, 7, 7, 11$ 로 이미 정렬되어 있고 자료가 5개이므로 3번째 값이 중앙값이다. 따라서 중앙값은 7. (참고로 평균은 $\frac{30}{5} = 6$, 최빈값도 7이다.)

Q155 게임 이론 (Nim)

돌 10개가 한 무더기에 있다. 두 사람이 번갈아 1개 또는 2개를 가져가고, 마지막 돌을 가져가는 사람이 이긴다. 먼저 시작하는 사람이 이기려면 처음에 몇 개를 가져가야 할까?



①) ① 1개

②) ② 2개

③) ③ 3개

④) ④ 먼저 두는 사람은 진다

🎯 **정답: ① 1개**

📖 한 번에 1 또는 2개를 가져가는 게임에서, 상대에게 3의 배수를 남기면 항상 이긴다. 상대가 1개 가져가면 나는 2개, 상대가 2개 가져가면 나는 1개를 가져가 다시 3의 배수를 남길 수 있기 때문이다. $10 = 3 \times 3 + 1$ 이므로 먼저 1개를 가져가 $9(= 3 \times 3)$개를 남기면 필승이다.

💡 한 번에 최대 k개를 가져가는 게임의 핵심은 항상 '$(k+1)$의 배수 남기기' 전략이다.

Q156 확률

공정한 동전을 3번 던질 때, 적어도 한 번 앞면이 나올 확률은?

①) ① $\frac{1}{8}$

②) ② $\frac{1}{2}$

③) ③ $\frac{3}{4}$

④) ④ $\frac{7}{8}$

🎯 **정답: ④ $\frac{7}{8}$**

📖 '적어도 한 번 앞면'의 여사건은 '세 번 모두 뒷면'이다. 모두 뒷면일 확률은 $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$. 따라서 구하는 확률은 $1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$.

💡 '적어도 ~'가 나오면 여사건(반대 경우)을 빼는 것이 보통 가장 빠르다.

Q157 논리 (Knight/Knave)

정직한 사람은 항상 참, 거짓말쟁이는 항상 거짓만 말하는 섬에서 세 명 A, B, C가 말했다.\n A: "B와 C는 같은 종류다."\n B: "A는 거짓말쟁이다."\n C: "A는 정직한 사람이다."\n 정직한 사람은 누구인가?

①) ① A만

②) ② B만

③) ③ C만

④) ④ A와 C

🎯 **정답: ② B만**

📖 A가 정직하다고 가정하면 B와 C는 같은 종류여야 한다. 그런데 B의 말 'A는 거짓말쟁이'는 거짓이 되어 B는 거짓말쟁이, C의 말 'A는 정직'은 참이 되어 C는 정직 - 둘이 다른 종류가 되어 모순. 따라서 A는 거짓말쟁이. 그러면 A의 말 'B와 C는 같은 종류'는 거짓 $\Rightarrow$ B와 C는 다른 종류. B의 말 'A는 거짓말쟁이'는 참이므로 B는 정직, C의 말 'A는 정직'은 거짓이므로 C는 거짓말쟁이. 모순 없음. 정직한 사람은 B만이다.

Q158 정수론 (약수·배수·소수)

방정식 $3x + 5y = 30$ 을 만족하는 음이 아닌 정수 (x, y) 의 쌍은 모두 몇 개인가? (단 $x \geq 0,\ y \geq 0$)

①) ① 2개

②) ② 3개

③) ③ 4개

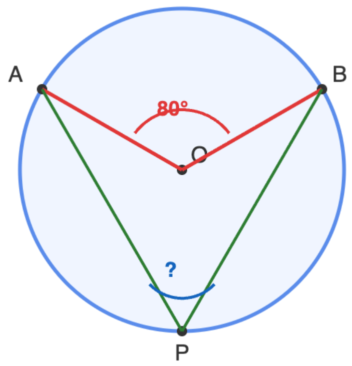
④) ④ 5개

🎯 **정답: ② 3개**

📖 $x = \dfrac{30-5y}{3}$ 가 음이 아닌 정수가 되어야 한다. $30 - 5y \geq 0$ 에서 $y \leq 6$. 또 $30 - 5y$ 가 3의 배수여야 하는데 $30 \equiv 0,\ 5y \equiv 2y \pmod 3$ 이므로 $2y \equiv 0$, 즉 y는 3의 배수. $y = 0, 3, 6$ 일 때 $x = 10, 5, 0$. 따라서 해는 $(10, 0), (5, 3), (0, 6)$ 으로 3개.

Q159 도형 (합동·닮음·면적)

원에서 호 AB에 대한 중심각의 크기가 80° 일 때, 같은 호 AB에 대한 원주각의 크기는?



①) ① 20°
②) ② 40°
③) ③ 80°
④) ④ 160°

정답: ② 40°

한 호에 대한 원주각의 크기는 그 호에 대한 중심각의 크기의 절반이다. 따라서 원주각 $= \frac{1}{2} \times 80^\circ = 40^\circ$.

같은 호 위에 어디에 점을 잡아도 원주각의 크기는 항상 같다.

Q160 재미 두뇌

부등식 $|2x-3| < 5$ 를 만족하는 정수 x 는 모두 몇 개인가?

①) ① 3개
②) ② 4개
③) ③ 5개
④) ④ 6개

정답: ② 4개

$|2x-3| < 5 \iff -5 < 2x-3 < 5$. 각 변에 3을 더하면 $-2 < 2x < 8$, 2로 나누면 $-1 < x < 4$. 이 범위의 정수는 $x = 0, 1, 2, 3$ 으로 모두 4개.

🧠 중등 논리·추론

총 40문제 · 문제와 정답·풀이 포함

Q161 모듈러 산술 입문

어떤 자연수를 7로 나누면 나머지가 3, 5로 나누면 나머지가 2가 된다. 이런 자연수 중 가장 작은 것은?

①) ① 12
②) ② 17
③) ③ 22
④) ④ 27

🎯 **정답:** ② 17

📖 $x \equiv 3 \pmod 7$ 인 수는 3, 10, 17, 24, 31, … 이다. 이 중 5로 나눈 나머지가 2인 것을 찾으면, $3 \to 3,\ 10 \to 0,\ 17 \to 2$ 이므로 17이 조건을 모두 만족하는 가장 작은 수이다. ($17 = 7 \times 2 + 3,\ 17 = 5 \times 3 + 2$.)

💡 서로 다른 나머지 조건을 동시에 푸는 이 방법을 '중국인의 나머지 정리'라고 한다.

Q162 경우의 수

똑같이 생긴 사탕 3개를 서로 다른 세 사람 A, B, C에게 남김없이 나누어 준다. 한 사람이 여러 개를 받아도 되고, 0개를 받아도 된다. 나누어 주는 방법은 모두 몇 가지인가?

①) ① 6가지
②) ② 9가지
③) ③ 10가지
④) ④ 15가지

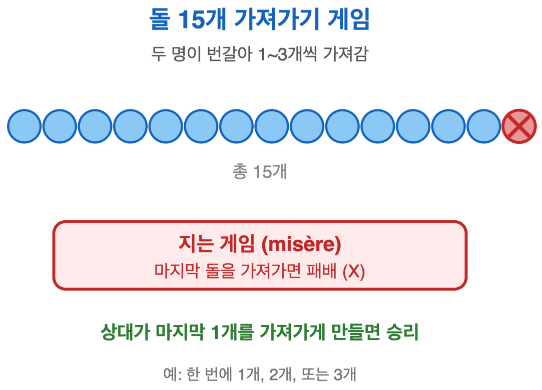
🎯 **정답:** ③ 10가지

📖 같은 사탕 3개를 세 사람에게 나누는 것은, 사탕 3개와 칸막이 2개(세 칸으로 나눔)를 일렬로 놓는 방법과 같다. 전체 5자리 중 칸막이 2자리를 고르면 되므로 $\binom{5}{2} = 10$ 가지. 이것이 중복조합 ${}_3H_3 = {}_5C_3 = 10$ 이다.

💡 이렇게 칸막이를 끼워 세는 방법을 '막대와 별(stars and bars)'이라고 부른다.

Q163 게임 이론 (Nim)

돌 15개가 한 무더기에 있다. 두 사람이 번갈아 1~3개를 가져간다. 이번에는 마지막 돌을 가져가는 사람이 '진다'(지는 게임, misère). 먼저 시작하는 사람이 이기려면 처음에 몇 개를 가져가야 할까?



①) ① 1개
②) ② 2개
③) ③ 3개
④) ④ 먼저 두는 사람은 진다

🎯 **정답:** ② 2개

📖 마지막 돌을 가져가면 지는 게임이므로, 상대 차례에 돌이 정확히 1개 남도록 몰아가면 상대가 그 1개를 어쩔 수 없이 가져가 패한다. 거꾸로 따지면 상대에게 '4로 나눈 나머지가 1'인 개수($1, 5, 9, 13, \ldots$)를 남기면 이긴다. 상대가 a개 가져가면 나는 $4-a$개를 가져가 다시 그 형태를 유지할 수 있기 때문이다. 15에서 2개를 가져가면 $13 = 4 \times 3 + 1$ 개가 남으므로 먼저 2개를 가져가면 필승이다.

💡 마지막을 가져가면 지는 '미제르(misère)' 게임은 보통 게임과 필승 전략이 살짝 다르다.

Q164 정수론 (약수·배수·소수)

어떤 자연수를 3진법으로 나타냈더니 $\overline{aba}_{(3)}$ 꼴(세 자리이고 앞뒤가 대칭)이 되었다. 이런 자연수 중 가장 큰 것을 십진법으로 나타내면?

①) ① 22
②) ② 24
③) ③ 26
④) ④ 27

🎯 **정답:** ③ 26

📖 3진법 세 자리 대칭수 $\overline{aba}_{(3)}$ 에서 맨 앞자리 a는 0이 될 수 없으므로 $a \in \{1, 2\}$, 가운데 $b \in \{0, 1, 2\}$ 이다. 값이 최대가 되려면 $a = 2,\ b = 2$, 즉 $222_{(3)}$. 십진법으로 $2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 2 = 18 + 6 + 2 = 26$.

Q165 확률

주머니에 빨간 공 3개, 파란 공 2개가 들어 있다. 공을 하나씩 연속으로 두 번 꺼낸다(꺼낸 공은 다시 넣지 않음). 첫 번째로 빨간 공이 나왔다고 할 때, 두 번째도 빨간 공일 조건부확률은?

①) ① $\frac{1}{2}$
②) ② $\frac{3}{5}$
③) ③ $\frac{2}{5}$
④) ④ $\frac{3}{10}$

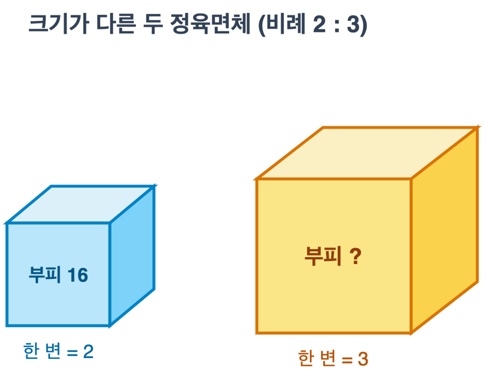
🎯 **정답:** ① $\frac{1}{2}$

📖 첫 번째로 빨간 공이 나왔다는 조건이 주어졌으므로, 그 빨간 공 하나가 빠진 뒤의 상태에서 두 번째를 생각하면 된다. 남은 공은 빨강 2개, 파랑 2개로 모두 4개. 이 중 빨간 공이 2개이므로 두 번째도 빨강일 확률은 $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

💡 '~라고 할 때'라는 조건이 붙으면 표본공간 자체가 줄어든다 - 이것이 조건부확률의 핵심이다.

Q166 도형 (합동·닮음·면적)

닮음비가 $2:3$ 인 두 정육면체가 있다. 작은 정육면체의 부피가 16일 때, 큰 정육면체의 부피는?



①) ① 24
②) ② 36
③) ③ 54
④) ④ 108

🎯 **정답:** ③ 54

📖 닮음인 두 입체도형의 부피의 비는 닮음비의 세제곱과 같다. 닮음비가 $2:3$ 이므로 부피의 비는 $2^3:3^3 = 8:27$. 작은 것의 부피가 16이므로 $16:V = 8:27$, 즉 $V = 16 \times \frac{27}{8} = 54$.

💡 길이는 닮음비의 1제곱, 넓이는 2제곱, 부피는 3제곱으로 커진다.

Q167 재미 두뇌

어떤 통 속의 박테리아는 1분마다 수가 정확히 두 배로 늘어난다. 60분이 지나면 통이 가득 찬다. 그렇다면 통이 절반만큼 찼던 때는 몇 분일 때인가?

①) ① 30분

②) ② 45분

③) ③ 58분

④) ④ 59분

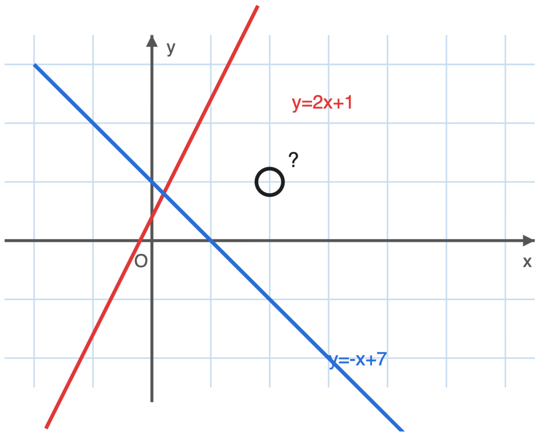
🎯 **정답:** ④ 59분

📖 1분마다 두 배가 된다는 것은, 거꾸로 보면 1분 전에는 절반이었다는 뜻이다. 60분에 가득 찼다면 그 직전인 59분에는 정확히 절반이 차 있었다. '절반이면 시간도 절반(30분)'이라는 직관은 함정이다.

💡 이런 '기하급수적(지수) 증가'는 마지막 순간에 폭발적으로 커져서 직관을 자주 배신한다.

Q168 좌표 기하

두 직선 $y = 2x + 1$ 과 $y = -x + 7$ 의 교점의 좌표는?



①) ① $(1, 3)$

②) ② $(2, 5)$

③) ③ $(3, 4)$

④) ④ $(2, 6)$

🎯 **정답:** ② $(2, 5)$

📖 교점에서는 두 식의 y값이 같으므로 $2x + 1 = -x + 7$. 정리하면 $3x = 6$, $x = 2$. 이를 $y = 2x + 1$ 에 대입하면 $y = 2 \cdot 2 + 1 = 5$. 따라서 교점은 $(2, 5)$ 이다.

💡 두 직선의 교점을 구하는 것은 연립방정식을 푸는 것과 똑같다.

Q169 정수론 (진법 변환)

이진수 $1101_{(2)}$ 를 십진수로 나타내면 얼마인가?

①) ① 11

②) ② 13

③) ③ 15

④) ④ 21

정답: ② 13

📖 이진수의 각 자리는 오른쪽부터 $2^0, 2^1, 2^2, 2^3$ 의 자릿값을 가진다. $1101_{(2)} = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 8 + 4 + 0 + 1 = 13$ 이다.

💡 컴퓨터는 모든 수를 0과 1, 즉 이진수로만 저장한다.

Q170 통계 (대푯값)

자료 3, 7, 7, 8, 10 에 대하여 (평균, 중앙값, 최빈값)을 차례로 구하면?

①) ① (7, 7, 7)

②) ② (7, 8, 7)

③) ③ (7, 7, 8)

④) ④ (8, 7, 7)

정답: ① (7, 7, 7)

📖 평균 $= \dfrac{3+7+7+8+10}{5} = \dfrac{35}{5} = 7$. 자료를 크기순으로 놓으면 $3, 7, 7, 8, 10$ 이고 가운데 값이 7 이므로 중앙값 $= 7$. 가장 많이 나온 값은 7(두 번) 이므로 최빈값 $= 7$. 세 대푯값이 모두 7 로 일치한다.

💡 평균·중앙값·최빈값이 모두 같은 자료는 좌우로 고르게 퍼져 있는 경우가 많다.

Q171 부등식·절댓값

부등식 $|x-3| < 2$ 를 만족하는 정수 x 의 개수는?

①) ① 2 개

②) ② 3 개

③) ③ 4 개

④) ④ 5 개

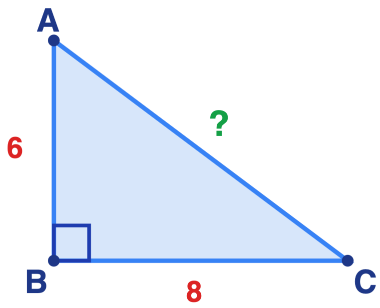
정답: ② 3 개

📖 $|x-3| < 2$ 는 $-2 < x-3 < 2$, 즉 $1 < x < 5$ 를 뜻한다. 이를 만족하는 정수는 $x = 2, 3, 4$ 의 3 개이다.

💡 $|x-a| < r$ 은 수직선에서 점 a 로부터 거리가 r 미만인 구간을 의미한다.

Q172 도형 (피타고라스)

직각을 낀 두 변의 길이가 각각 $6,\ 8$ 인 직각삼각형의 빗변의 길이는?



①) ① 9

②) ② 10

③) ③ 12

④) ④ 14

🎯 **정답:** ② 10

📖 피타고라스 정리에 의해 빗변 c 는 $c^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$ 이므로 $c = \sqrt{100} = 10$ 이다.

💡 $3:4:5$ 와 그 배수인 $6:8:10$ 은 가장 유명한 직각삼각형 변의 비이다.

Q173 모듈러 산술 (나머지)

오늘이 월요일이라면, 지금부터 100 일 후는 무슨 요일인가?

①) ① 화요일

②) ② 수요일

③) ③ 목요일

④) ④ 금요일

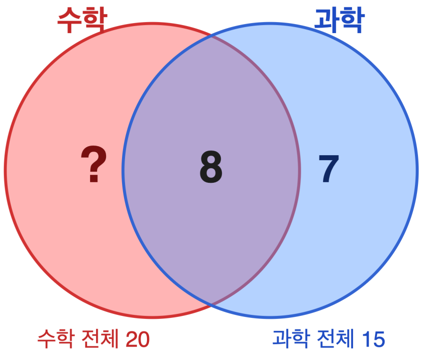
🎯 **정답: ② 수요일**

📖 요일은 7 일마다 반복되므로 100 을 7 로 나눈 나머지만 따지면 된다. $100 = 7 \times 14 + 2$ 이므로 $100 \equiv 2 \pmod 7$. 월요일에서 2 일 뒤는 수요일이다.

💡 이렇게 나머지로 주기를 다루는 계산을 '모듈러 산술'이라 한다.

Q174 집합과 벤다이어그램

어떤 반에서 수학을 좋아하는 학생은 20 명, 과학을 좋아하는 학생은 15 명, 두 과목을 모두 좋아하는 학생은 8 명이다. 수학만 좋아하는(과학은 좋아하지 않는) 학생은 몇 명인가?



①) ① 8 명
②) ② 12 명
③) ③ 15 명
④) ④ 20 명

🎯 **정답:** ② 12 명

📖 수학을 좋아하는 20 명 중 과학도 함께 좋아하는 학생이 8 명이므로, 수학만 좋아하는 학생은 $20 - 8 = 12$ 명이다.

💡 전체 집합에서 겹치는 부분을 빼는 것을 '차집합'이라 한다.

Q175 함수와 패턴

직선 $y = 2x + 1$ 을 y 축 방향으로 -3 만큼 평행이동한 직선의 y 절편은?

①) ① -3
②) ② -2
③) ③ 1
④) ④ 2

🎯 **정답:** ② -2

📖 y 축 방향으로 -3 만큼 평행이동하면 식이 $y = 2x + 1 - 3 = 2x - 2$ 가 된다. y 절편은 $x = 0$ 일 때의 값이므로 -2 이다. (기울기는 변하지 않는다.)

💡 평행이동은 기울기는 그대로 두고 절편만 바꾼다.

Q176 정수론 (부정방정식)

$3x + 2y = 24$ 를 만족하는 자연수(양의 정수) 순서쌍 $(x,\ y)$ 의 개수는?

①) ① 2 개

②) ② 3 개

③) ③ 4 개

④) ④ 5 개

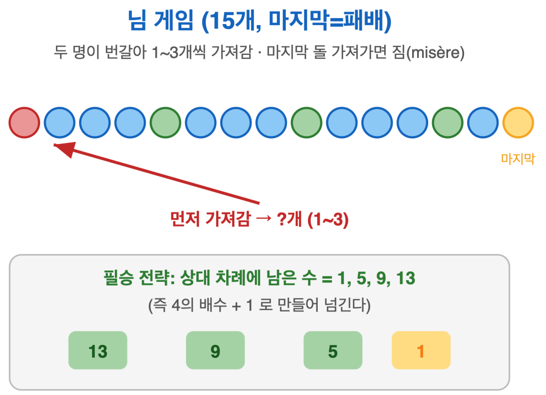
🎯 **정답: ② 3 개**

📖 $y = \dfrac{24-3x}{2}$ 가 양의 정수가 되어야 한다. $24 - 3x$ 가 양수이면서 짝수여야 하므로 x 는 짝수이고 $x < 8$. 따라서 $x = 2 \Rightarrow y = 9$, $x = 4 \Rightarrow y = 6$, $x = 6 \Rightarrow y = 3$ 의 3 개이다. ($x = 8$ 이면 $y = 0$ 이라 자연수가 아니다.)

💡 이렇게 정수해를 찾는 방정식을 '일차부정방정식'이라 한다.

Q177 게임 이론 (Nim 변형)

돌 15 개가 있다. 두 사람이 번갈아 1 개 이상 3 개 이하의 돌을 가져가는데, 이번에는 마지막 돌을 가져가는 사람이 \textbf{지는} 게임(misère)이다. 먼저 시작하는 사람이 이기려면 처음에 몇 개를 가져가야 하는가?



①) ① 1 개

②) ② 2 개

③) ③ 3 개

④) ④ 후공이 항상 이긴다

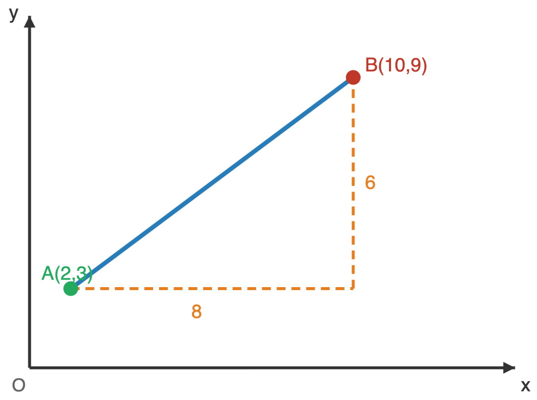
🎯 **정답: ② 2 개**

📖 마지막 돌을 가져가면 지므로, 상대에게 '돌 1 개'만 남겨 강제로 마지막을 집게 하는 것이 목표다. 안전한 상태는 남은 돌이 $4k + 1$ 꼴 (즉 $1, 5, 9, 13,\ \ldots$)이 되어 상대 차례가 오는 경우다. 15 에서 2 개를 가져가면 13 이 남아 상대가 어떤 수(1~3)를 가져가도 다시 $4k + 1$ 로 되돌릴 수 있다. 따라서 처음에 2 개를 가져가면 선공이 이긴다.

💡 마지막에 두는 사람이 지는 규칙을 '미제르(misère)' 게임이라 한다.

Q178 좌표 기하

좌표평면 위의 두 점 $A(2,\ 3)$, $B(10,\ 9)$ 사이의 거리는?



①) ① 8

②) ② 10

③) ③ 12

④) ④ 14

🎯 **정답:** ② 10

📖 두 점 사이의 거리는 $\sqrt{(10-2)^2+(9-3)^2} = \sqrt{8^2+6^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$ 이다.

💡 거리 공식은 사실 좌표평면 위에서 피타고라스 정리를 쓴 것이다.

Q179 경우의 수

5 명의 학생 중에서 대표 2 명을 뽑는 경우의 수는? (순서는 상관없다.)

①) ① 10 가지

②) ② 15 가지

③) ③ 20 가지

④) ④ 25 가지

🎯 **정답:** ① 10 **가지**

📖 순서를 구분하지 않으므로 조합이다. ${}_5C_2 = \frac{5\times4}{2\times1} = \frac{20}{2} = 10$ 가지이다.

💡 만약 회장·부회장처럼 순서를 구분하면 ${}_5P_2 = 20$ 가지로 두 배가 된다.

Q180 논리 (Knight/Knave)

정직한 사람은 항상 참, 거짓말쟁이는 항상 거짓을 말하는 섬에 A, B, C가 있다. A: "B는 거짓말쟁이다." B: "A와 C는 같은 종류다." C: "A는 정직하다." 정직한 사람은 누구인가?

①) ① A

②) ② B

③) ③ C

④) ④ 정직한 사람은 없다

🎯 **정답: ② B**

📖 A가 정직하다고 가정하면 B는 거짓말쟁이가 된다. 그러면 B의 말 'A와 C는 같은 종류'는 거짓이므로 A와 C는 다른 종류 → C는 거짓말쟁이. 그런데 C의 말 'A는 정직하다'가 거짓이 되어 A가 거짓말쟁이가 되니 가정과 모순이다. 따라서 A는 거짓말쟁이. 그러면 A의 말이 거짓이므로 B는 정직하다. B의 말에 따라 A와 C는 같은 종류 → C도 거짓말쟁이. C의 말 'A는 정직하다'는 거짓이고 실제로 A가 거짓말쟁이이므로 모순이 없다. 즉 정직한 사람은 B뿐이다.

💡 이런 문제는 '한 명이 정직하다'고 가정해 모순이 생기는지 확인하는 귀류법으로 푼다.

Q181 수열과 점화

등비수열 $2,\ 6,\ 18,\ 54,\ \ldots$ 의 제 5 항은?

①) ① 108

②) ② 162

③) ③ 216

④) ④ 243

🎯 **정답: ②** 162

📖 첫째항 $a_1 = 2$, 공비 $r = 3$ 인 등비수열이다. 제5항은 $a_5 = 2 \times 3^4 = 2 \times 81 = 162$ 이다. (또는 $54 \times 3 = 162$.)

💡 등비수열은 일정한 비율로 곱해지며 매우 빠르게 커진다.

Q182 모듈러 산술 (거듭제곱)

2^{2026} 을 7 로 나눈 나머지는?

①) ① 1

②) ② 2

③) ③ 4

④) ④ 6

🎯 **정답: ②** 2

📖 2 의 거듭제곱을 7 로 나눈 나머지를 보면 $2^1 \equiv 2,\ 2^2 \equiv 4,\ 2^3 = 8 \equiv 1 \pmod 7$ 로, 3 을 주기로 $2, 4, 1$ 이 반복된다.
$2026 = 3 \times 675 + 1$ 이므로 $2026 \equiv 1 \pmod 3$. 따라서 $2^{2026} \equiv 2^1 \equiv 2 \pmod 7$ 이다.

💡 거듭제곱의 나머지는 반드시 어떤 주기로 반복된다.

Q183 함수와 패턴 (합성)

$f(x) = 2x - 1$ 일 때, $f(f(x)) = 9$ 를 만족하는 x 의 값은?

①) ① 2

②) ② 3

③) ③ 4

④) ④ 5

🎯 **정답:** ② 3

📖 $f(f(x)) = f(2x-1) = 2(2x-1) - 1 = 4x - 3$ 이다. 이것이 9 와 같으므로 $4x - 3 = 9$, $4x = 12$, $x = 3$ 이다. 검산: $f(3) = 5$, $f(5) = 9$ 로 맞다.

💡 함수를 두 번 적용하는 것을 '합성함수'라 하며 $f \circ f$ 로 쓴다.

Q184 확률

서로 다른 두 개의 주사위를 던질 때, 나온 두 눈의 \textbf{합이 소수}일 확률은?

①) ① $\frac{1}{3}$

②) ② $\frac{5}{12}$

③) ③ $\frac{1}{2}$

④) ④ $\frac{7}{12}$

🎯 **정답:** ② $\frac{5}{12}$

📖 두 주사위의 모든 경우는 $6 \times 6 = 36$ 가지다. 두 눈의 합으로 가능한 소수는 $2, 3, 5, 7, 11$ 이다. 각 합이 나오는 경우의 수는 합 2:1, 합 3:2, 합 5:4, 합 7:6, 합 11:2 로 총 $1 + 2 + 4 + 6 + 2 = 15$ 가지. 따라서 확률은 $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$ 이다.

💡 두 주사위 합 중 가장 잘 나오는 값은 7(6가지)이고, 그 7 도 소수다.

Q185 모듈러 산술 입문

7^{2024}의 일의 자리 숫자는 무엇인가? (즉 $7^{2024} \pmod{10}$)

①) ① 1

②) ② 3

③) ③ 7

④) ④ 9

🎯 **정답:** ① 1

📖 7의 거듭제곱의 일의 자리는 $7^1 = 7$, $7^2 = 49 \to 9$, $7^3 \to 3$, $7^4 \to 1$ 로 $(7, 9, 3, 1)$ 이 주기 4로 반복된다. $2024 = 4 \times 506$ 이므로 $2024 \equiv 0 \pmod{4}$, 즉 주기의 네 번째 위치에 해당한다. 따라서 일의 자리는 1.

💡 끝자리가 주기를 가지는 이유는 곱셈에서 새 끝자리가 이전 끝자리에만 의존하기 때문이다.

Q186 비둘기집 원리

한 동아리에서 '생일이 같은 달인 두 사람'이 반드시 존재하도록 보장하려면, 최소 몇 명이 모여야 하는가?

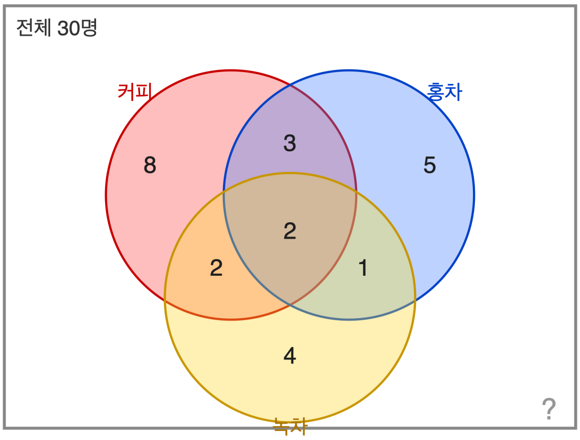
①) ① 12명
②) ② 13명
③) ③ 24명
④) ④ 25명

🎯 **정답: ② 13명**

📖 달(서랍)은 12개뿐이다. 12명까지는 모두 서로 다른 달일 수 있다(1월부터 12월까지 한 명씩). 그러나 한 명을 더해 13명이 되면 어떤 달에는 반드시 2명 이상이 배정되므로(비둘기집 원리: $13 > 12$), 같은 달 생일인 두 사람이 존재한다. 따라서 최소 13명.

Q187 집합과 벤다이어그램

30명에게 커피·홍차·녹차 선호를 조사했다. 커피만 8명, 홍차만 5명, 녹차만 4명, 커피와 홍차만(녹차 제외) 3명, 커피와 녹차만 2명, 홍차와 녹차만 1명, 셋 다 좋아하는 사람 2명이었다. 셋 중 아무것도 좋아하지 않는 사람은 몇 명인가?



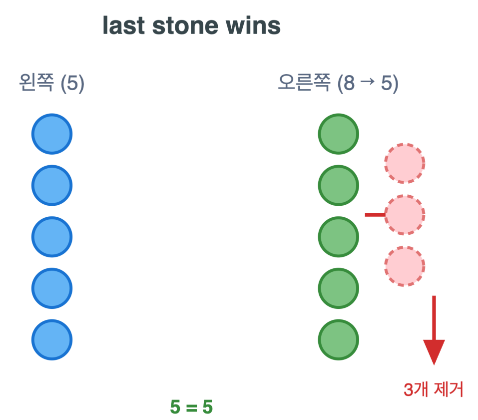
①) ① 3명
②) ② 4명
③) ③ 5명
④) ④ 6명

🎯 **정답: ③ 5명**

📖 적어도 하나를 좋아하는 사람 수는 모든 영역의 합이다: $8 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 2 = 25$. 전체가 30명이므로 아무것도 좋아하지 않는 사람은 $30 - 25 = 5$명.

Q188 게임 이론 (Nim)

돌무더기가 두 개 있다: 한 무더기는 5개, 다른 무더기는 8개. 두 사람이 번갈아 한 무더기에서 1개 이상 가져가고, 마지막 돌을 가져간 사람이 이긴다. 선수(먼저 두는 사람)가 이기려면 첫 수로 어떻게 해야 하는가?



①) ① 5개 무더기에서 3개 가져간다
②) ② 8개 무더기에서 3개 가져간다
③) ③ 8개 무더기에서 1개 가져간다
④) ④ 어떻게 해도 선수가 진다

🎯 **정답: ② 8개 무더기에서 3개 가져간다**
📖 두 무더기 개수를 같게 만들면(여기서는 둘 다 5개) 이후 상대가 어느 무더기에서 몇 개를 가져가든, 다른 무더기에서 똑같이 가져가 다시 같게 맞출 수 있다(대칭 따라하기 전략). 결국 상대가 먼저 무더기를 비우게 되어 마지막 돌은 항상 내가 가져간다. 따라서 8개에서 3개를 가져가 $5, 5$로 만든다.
💡 두 무더기 Nim에서 개수가 다르면 선수, 같으면 후수가 유리하다.

Q189 정수론 (약수·배수·소수)

두 자연수의 최대공약수가 6, 최소공배수가 90이다. 한 수가 18일 때 다른 수는?

①) ① 15
②) ② 24
③) ③ 30
④) ④ 45

🎯 **정답: ③ 30**
📖 두 수의 곱은 (최대공약수)×(최소공배수)와 같다: $18 \times x = 6 \times 90 = 540$. 따라서 $x = 540 \div 18 = 30$. 확인: $\gcd(18, 30) = 6,\ \mathrm{lcm}(18, 30) = 90$ 으로 조건을 만족한다.

Q190 정수론 (약수·배수·소수)

$3x + 5y = 30$을 만족하는 음이 아닌 정수 (x, y)의 쌍은 몇 개인가?

①) ① 2개
②) ② 3개
③) ③ 4개
④) ④ 6개

🎯 **정답: ② 3개**
📖 $30 - 3x$ 가 5의 배수이고 0 이상이어야 한다. $3x \equiv 0 \pmod 5$ 에서 x는 5의 배수. $x = 0 \Rightarrow y = 6$, $x = 5 \Rightarrow y = 3$, $x = 10 \Rightarrow y = 0$. $x = 15$이면 $3 \cdot 15 = 45 > 30$ 이므로 불가. 따라서 $(0, 6), (5, 3), (10, 0)$ 의 3개.

Q191 논리 (Knight/Knave)

기사(항상 참)와 거짓말쟁이(항상 거짓)만 사는 섬에서 두 사람 A, B를 만났다. A는 "B는 기사이다"라고 말했고, B는 "A와 나는 서로 다른 부류이다"라고 말했다. 두 사람의 정체는?

①) ① 둘 다 기사
②) ② A는 기사, B는 거짓말쟁이
③) ③ A는 거짓말쟁이, B는 기사
④) ④ 둘 다 거짓말쟁이

🎯 **정답: ④ 둘 다 거짓말쟁이**

📖 A가 기사라고 가정하면 그의 말이 참이므로 B도 기사이다. 그러면 B의 말 '서로 다른 부류'가 참이어야 하지만 둘 다 기사라 같은 부류이므로 모순. 따라서 A는 거짓말쟁이. A의 말 'B는 기사'는 거짓이므로 B도 거짓말쟁이. 이때 B의 말 '서로 다른 부류'도 거짓이어야 하는데, 실제로 둘 다 거짓말쟁이라 같은 부류이므로 거짓이 맞다. 모순이 없다. 따라서 둘 다 거짓말쟁이.

Q192 수열과 점화

수열이 $a_1 = 2,\ a_{n+1} = 2a_n + 1$ 로 정의된다. a_5의 값은?

①) ① 23
②) ② 39
③) ③ 47
④) ④ 95

🎯 **정답: ③ 47**

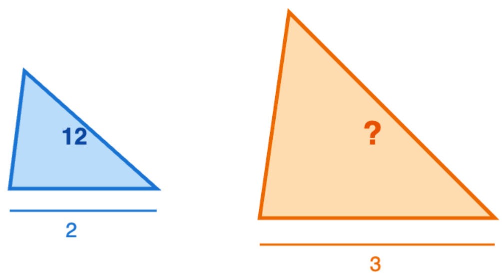
📖 차례로 계산한다: $a_1 = 2,\ a_2 = 2 \cdot 2 + 1 = 5,\ a_3 = 2 \cdot 5 + 1 = 11,\ a_4 = 2 \cdot 11 + 1 = 23,\ a_5 = 2 \cdot 23 + 1 = 47.$

💡 이 수열은 $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$ 의 일반항을 가진다.

Q193 도형 (합동·닮음·면적)

닮음비가 $2:3$ 인 두 닮은 삼각형이 있다. 작은 삼각형의 넓이가 12일 때, 큰 삼각형의 넓이는?

대응변 비율 2 : 3



닮은 삼각형

①) ① 18
②) ② 24
③) ③ 27
④) ④ 36

🎯 **정답: ③ 27**

📖 닮은 도형에서 넓이의 비는 닮음비의 제곱과 같다. 닮음비가 $2:3$ 이면 넓이의 비는 $2^2:3^2 = 4:9$. 작은 넓이가 12이므로 $12:S = 4:9$, 즉 $S = 12 \times \dfrac{9}{4} = 27$.

Q194 확률

빨간 공 4개와 파란 공 3개가 든 주머니에서 동시에 2개를 꺼낼 때, 두 개 모두 빨간 공일 확률은?

①) ① $\frac{1}{7}$

②) ② $\frac{2}{7}$

③) ③ $\frac{3}{7}$

④) ④ $\frac{2}{21}$

🎯 **정답: ② $\frac{2}{7}$**

📖 전체 7개 중 2개를 꺼내는 경우의 수는 $\binom{7}{2} = 21$. 빨간 공 4개 중 2개를 꺼내는 경우의 수는 $\binom{4}{2} = 6$. 따라서 확률은 $\frac{6}{21} = \frac{2}{7}$.

Q195 비둘기집 원리

1부터 100까지의 정수 중에서 몇 개를 고르려 한다. 고른 수들 중에 '차가 1인 두 수(연속한 두 정수)'가 반드시 포함되도록 하려면 최소 몇 개를 골라야 하는가?

①) ① 50개

②) ② 51개

③) ③ 99개

④) ④ 100개

🎯 **정답: ② 51개**

📖 수들을 $\{1,2\},\{3,4\},\ \dots\ ,\{99,100\}$ 처럼 연속한 두 수씩 묶으면 서랍(짝)이 50개 생긴다. 50개를 고를 때는 각 짝에서 하나씩만 골라 연속한 두 수를 피할 수 있다(예: 홀수만). 그러나 51개를 고르면 비둘기집 원리에 의해 어떤 짝에서 두 수를 모두 고르게 되고, 그 두 수는 차가 1이다. 따라서 최소 51개.

Q196 함수와 패턴

함수 $f(x) = 2x + 1$ 에 대하여 $f(f(2))$ 의 값은?

①) ① 5

②) ② 9

③) ③ 11

④) ④ 13

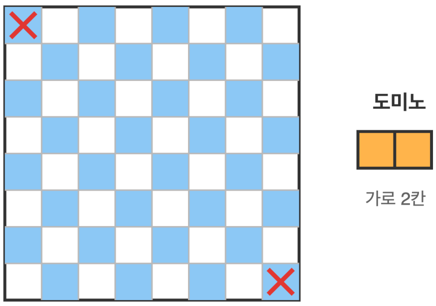
🎯 **정답: ③ 11**

📖 안쪽부터 계산한다. $f(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$. 그 결과를 다시 넣으면 $f(5) = 2 \cdot 5 + 1 = 11$. 따라서 $f(f(2)) = 11$.

Q197 재미 두뇌

8×8 체스판에서 서로 마주 보는 두 모서리 칸(왼쪽 위와 오른쪽 아래)을 잘라냈다. 남은 62칸을 한 개가 두 칸을 덮는 도미노 31개로 빈틈없이 덮을 수 있는가?

8×8 체스판 (모서리 2칸 잘라냄)



①) ① 가능하다

②) ② 불가능하다

③) ③ 도미노 30개면 가능

④) ④ 자르는 위치에 따라 다르다

🎯 **정답: ② 불가능하다**

📖 도미노 하나는 항상 인접한 흰 칸 1개와 검은 칸 1개를 덮는다. 그런데 마주 보는 두 모서리 칸은 같은 색이다(체스판에서 대각으로 마주 보는 두 모서리는 색이 같다). 따라서 그 두 칸을 제거하면 한 색이 32개, 다른 색이 30개로 색의 개수가 어긋난다. 도미노 31개로 덮으려면 두 색이 각각 31개여야 하므로 불가능하다(홀짝/색칠 논증).

💡 이 '잘린 체스판' 문제는 색칠 논증의 위력을 보여주는 고전 퍼즐이다.

Q198 모듈러 산술 입문

지금 시각은 9시이다. 지금부터 정확히 100시간 후의 시각은 몇 시인가? (12시간제 시계로 답하라.)

①) ① 1시

②) ② 4시

③) ③ 9시

④) ④ 13시

🎯 **정답: ① 1시**

📖 12시간마다 시계는 같은 위치로 돌아온다. 100을 12로 나누면 $100 = 12 \times 8 + 4$이므로 나머지는 4. 즉 100시간 후는 4시간 후와 같다. $9 + 4 = 13$이고 $13 - 12 = 1$이므로 1시이다.

💡 이렇게 일정 주기로 반복되는 계산을 '모듈러 산술'이라 한다. 시계는 $\mathrm{mod}\ 12$의 세계이다.

Q199 경우의 수

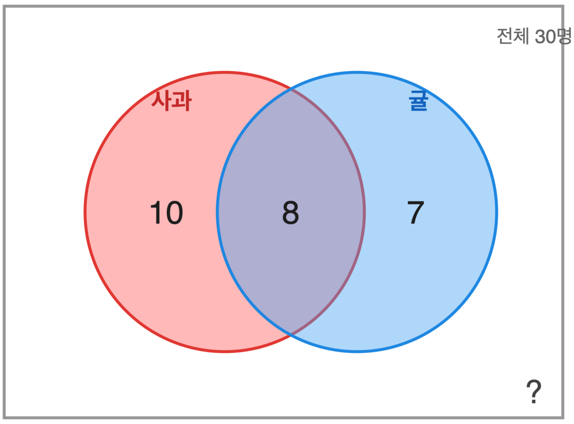
어느 분식집에서 김밥 3종류, 음료 2종류 중 각각 하나씩 골라 세트를 만든다. 만들 수 있는 서로 다른 세트는 모두 몇 가지인가?

①) ① 5가지
②) ② 6가지
③) ③ 8가지
④) ④ 9가지

🎯 **정답: ② 6가지**
📖 김밥을 고르는 3가지 경우 각각에 대해 음료를 고르는 2가지가 있으므로, 곱의 법칙에 의해 $3 \times 2 = 6$가지이다.
💡 독립적인 선택이 이어질 때는 더하지 말고 곱한다. 이것이 '곱의 법칙'이다.

Q200 집합과 벤다이어그램

어느 반 학생 30명 중 사과를 좋아하는 학생이 18명, 귤을 좋아하는 학생이 15명, 둘 다 좋아하는 학생이 8명이다. 둘 다 좋아하지 않는 학생은 몇 명인가?



①) ① 3명
②) ② 5명
③) ③ 7명
④) ④ 8명

🎯 **정답: ② 5명**
📖 적어도 하나를 좋아하는 학생 수는 포함배제에 의해 $18 + 15 - 8 = 25$명이다. 따라서 둘 다 좋아하지 않는 학생은 $30 - 25 = 5$명이다.
💡 두 집합의 합집합 크기는 각각을 더한 뒤 겹친 부분을 한 번 빼면 된다.

🧠 중등 논리·추론

총 40문제 · 문제와 정답·풀이 포함

Q201 정수론 (약수·배수·소수)

72의 양의 약수는 모두 몇 개인가?

①) ① 6개

②) ② 8개

③) ③ 12개

④) ④ 18개

🎯 **정답: ③ 12개**

📖 $72 = 2^3 \times 3^2$로 소인수분해된다. 약수의 개수는 각 지수에 1을 더해 곱하므로 $(3+1)(2+1) = 4 \times 3 = 12$개이다.

💡 소인수분해의 지수만 알면 약수를 일일이 세지 않아도 개수를 바로 구할 수 있다.

Q202 수열과 점화

첫째항이 5이고 공차가 4인 등차수열의 제10항은?

①) ① 36

②) ② 40

③) ③ 41

④) ④ 45

🎯 **정답: ③ 41**

📖 등차수열의 일반항은 $a_n = a_1 + (n-1)d$이다. 따라서 $a_{10} = 5 + (10-1) \times 4 = 5 + 36 = 41$이다.

💡 등차수열은 일정한 양만큼 더해 나가므로 직선처럼 일정한 기울기로 증가한다.

Q203 확률

1부터 20까지의 자연수가 하나씩 적힌 공 20개 중 하나를 뽑을 때, 적힌 수가 4의 배수일 확률은?

①) ① $\frac{1}{5}$

②) ② $\frac{1}{4}$

③) ③ $\frac{1}{3}$

④) ④ $\frac{2}{5}$

🎯 **정답: ② $\frac{1}{4}$**

📖 1부터 20까지 중 4의 배수는 $4, 8, 12, 16, 20$으로 5개이다. 따라서 확률은 $\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$이다.

💡 확률은 '원하는 경우의 수'를 '전체 경우의 수'로 나눈 값이다.

Q204 모듈러 산술 입문

3^{100}의 일의 자리 숫자는?

①) ① 1

②) ② 3

③) ③ 7

④) ④ 9

🎯 **정답: ① 1**

📖 3의 거듭제곱의 일의 자리는 $3^1 = 3,\ 3^2 = 9,\ 3^3 = 27(7),\ 3^4 = 81(1)$로 $3, 9, 7, 1$이 주기 4로 반복된다. $100 = 4 \times 25$이므로 100은 4의 배수, 즉 주기의 마지막인 3^4과 같은 위치이다. 따라서 일의 자리는 1이다.

💡 일의 자리만 보는 것은 $\bmod 10$으로 생각하는 것과 같다.

Q205 경우의 수

8명의 학생 중에서 청소 당번 2명을 뽑는 방법은 모두 몇 가지인가? (뽑는 순서는 따지지 않는다.)

①) ① 16가지

②) ② 28가지

③) ③ 56가지

④) ④ 64가지

🎯 **정답: ② 28가지**

📖 순서를 따지지 않고 뽑으므로 조합이다. $\binom{8}{2} = \frac{8 \times 7}{2 \times 1} = 28$가지이다.

💡 순서를 따지면 순열($_8P_2 = 56$), 따지지 않으면 조합($_8C_2 = 28$)으로 정확히 절반이 된다.

Q206 정수론 (약수·배수·소수)

1부터 100까지의 자연수 중 2의 배수 또는 3의 배수인 수는 모두 몇 개인가?

①) ① 50개

②) ② 66개

③) ③ 67개

④) ④ 83개

🎯 **정답: ③ 67개**

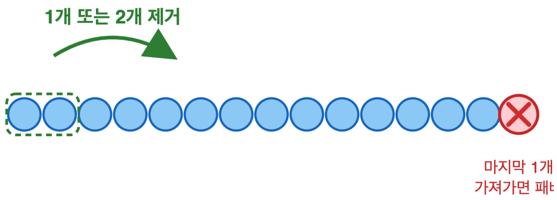
📖 2의 배수는 50개, 3의 배수는 $\lfloor 100/3 \rfloor = 33$개, 6의 배수(둘 다인 수)는 $\lfloor 100/6 \rfloor = 16$개이다. 중복으로 센 6의 배수를 한 번 빼면 $50 + 33 - 16 = 67$개이다.

💡 '또는'을 셀 때는 두 개를 더한 뒤 겹친 부분(공배수)을 빼는 포함배제가 필요하다.

Q207 게임 이론 (Nim)

돌 15개가 한 무더기에 있다. 두 사람이 번갈아 1개 또는 2개씩 가져간다. 마지막 돌을 가져가는 사람이 지는 게임일 때, 먼저 시작하는 사람의 필승 전략은?

돌 15개: 한 차례에 1개 또는 2개 제거



두 사람이 번갈아 돌을 제거합니다.

①) ① 먼저 2개를 가져간 뒤, 상대가 가져간 수와 합쳐 항상 3이 되도록 가져간다

②) ② 먼저 1개를 가져간 뒤, 상대와 합쳐 항상 3이 되도록 가져간다

③) ③ 후공이 무조건 이기므로 선공의 전략은 없다

④) ④ 먼저 2개를 가져가면 무조건 진다

🎯 **정답: ① 먼저 2개를 가져간 뒤, 상대가 가져간 수와 합쳐 항상 3이 되도록 가져간다**

📖 상대에게 돌 1개만 남기면 상대는 그 1개를 가져갈 수밖에 없어 마지막 돌을 가져가 진다. 즉 남은 돌이 1이 되도록 몰아가면 이긴다. 패배 위치는 남은 돌을 3으로 나눈 나머지가 1인 경우다. $15 \equiv 0 \pmod 3$이므로 선공이 먼저 2개를 가져가 13개($13 \equiv 1 \pmod 3$)를 만들고, 이후 상대가 k개 가져갈 때마다 $3 - k$개를 가져가 나머지 1 상태를 유지하면 결국 상대에게 1개를 남겨 이긴다.

💡 마지막을 가져가면 지는 게임을 '미제르(misère)' 게임이라 한다.

Q208 수열과 점화

$a_1 = 1, a_2 = 1$이고 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ $(n \geq 3)$로 정의된 수열의 제7항 a_7은?

①) ① 8

②) ② 11

③) ③ 13

④) ④ 21

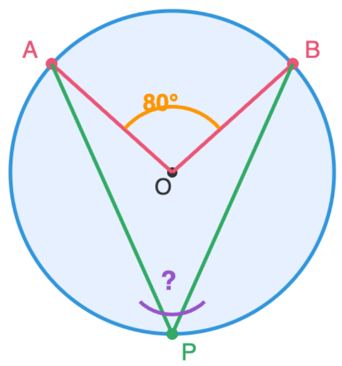
🎯 **정답: ③ 13**

📖 각 항은 앞의 두 항의 합이다. $a_3 = 1 + 1 = 2$, $a_4 = 1 + 2 = 3$, $a_5 = 2 + 3 = 5$, $a_6 = 3 + 5 = 8$, $a_7 = 5 + 8 = 13$이다.

💡 이 수열이 바로 피보나치 수열이다. 자연의 꽃잎 수나 솔방울 나선에서도 자주 나타난다.

Q209 도형 (합동·닮음·면적)

원에서 호 AB에 대한 중심각의 크기가 $80°$일 때, 같은 호 AB에 대한 원주각의 크기는?



①) ① $20°$

②) ② $40°$

③) ③ $80°$

④) ④ $160°$

🎯 **정답: ② $40°$**

📖 같은 호에 대한 원주각은 중심각의 절반이다. 따라서 원주각 $= \frac{1}{2} \times 80° = 40°$이다.

💡 같은 호 위라면 원주각의 위치를 어디로 옮겨도 크기는 항상 같다(원주각의 성질).

Q210 확률

동전을 4번 던질 때, 적어도 한 번은 앞면이 나올 확률은?

①) ① $\frac{1}{16}$

②) ② $\frac{1}{2}$

③) ③ $\frac{7}{8}$

④) ④ $\frac{15}{16}$

🎯 **정답: ④ $\frac{15}{16}$**

📖 '적어도 한 번 앞면'의 여사건은 '4번 모두 뒷면'이다. 모두 뒷면일 확률은 $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$이므로, 구하는 확률은 $1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$이다.

💡 '적어도'가 나오면 여사건(반대 사건)을 먼저 구하는 것이 훨씬 빠르다.

Q211 비둘기집 원리

한 모임에 13명이 있다. 생일의 '월(月)'만 따질 때, 같은 달에 태어난 사람이 적어도 두 명 있다고 반드시 말할 수 있는가?

①) ① 그렇다, 반드시 있다

②) ② 아니다, 모두 다른 달일 수도 있다

③) ③ 24명은 되어야 보장된다

④) ④ 정보가 부족해 알 수 없다

🎯 **정답: ① 그렇다, 반드시 있다**

📖 달은 12개뿐인데 사람은 13명이다. 비둘기집 원리에 의해 12개의 '서랍(달)'에 13명을 넣으면 적어도 한 달에는 2명 이상 들어간다. 따라서 같은 달에 태어난 사람이 반드시 존재한다.

💡 비둘기집 원리: n개의 서랍에 $n+1$마리를 넣으면 적어도 한 서랍에는 두 마리가 들어간다.

Q212 비둘기집 원리

1부터 100까지의 자연수 중에서 서로 다른 51개를 고른다. 이때 고른 수 중에 차가 1인 두 수(연속한 두 자연수)가 반드시 존재함을 설명한 것으로 옳은 것은?

①) ① 1~100을 연속한 두 수씩 50쌍으로 묶으면, 51개를 고를 때 어느 한 쌍에서 두 수를 모두 고르게 된다

②) ② 홀수만 50개 고르면 연속한 두 수가 없으므로 명제는 거짓이다

③) ③ 50개만 골라도 항상 연속한 두 수가 존재한다

④) ④ 차가 1인 두 수는 어떻게 골라도 생기지 않는다

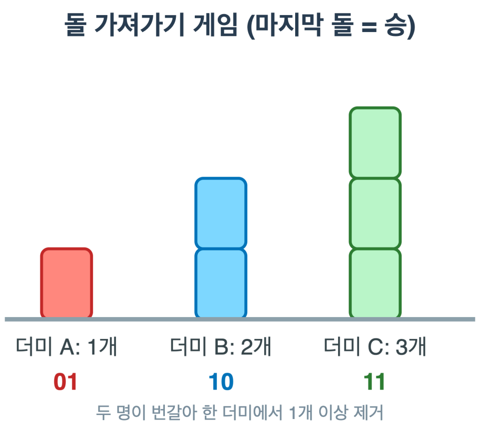
🎯 **정답: ① 1~100을 연속한 두 수씩 50쌍으로 묶으면, 51개를 고를 때 어느 한 쌍에서 두 수를 모두 고르게 된다**

📖 $\{1,2\},\{3,4\}, \ldots ,\{99,100\}$처럼 연속한 두 수끼리 50개의 쌍(서랍)으로 묶는다. 51개를 고르면 비둘기집 원리에 의해 적어도 한 쌍에서 두 수가 모두 선택되고, 그 두 수는 차가 1이다. 참고로 50개일 때는 홀수만 모두 고르면 연속한 두 수가 없으므로 51개여야 보장된다.

💡 '쌍으로 묶기'는 비둘기집 원리를 적용할 서랍을 똑똑하게 설계하는 핵심 기술이다.

Q213 게임 이론 (Nim)

돌무더기가 3개 있고 각각 1개, 2개, 3개이다. 두 사람이 번갈아 한 무더기에서 1개 이상 가져가며, 마지막 돌을 가져가는 사람이 이긴다. 누가 이기는 전략을 가지는가?



①) ① 후공(두 번째로 두는 사람)

②) ② 선공(먼저 두는 사람)

③) ③ 항상 비긴다

④) ④ 누가 이길지 정해지지 않는다

🎯 **정답: ① 후공(두 번째로 두는 사람)**

📖 님 게임의 승패는 각 무더기 크기를 이진수로 나타내 자리별 XOR(이진합)로 판단한다. $1 = 01_2$, $2 = 10_2$, $3 = 11_2$이고 $01 \oplus 10 \oplus 11 = 00_2 = 0$이다. 모든 자리의 XOR이 0인 상태는 '다음에 두는 사람이 지는 위치'이다. 현재 선공이 이 위치에서 시작하므로, 후공이 매번 XOR을 다시 0으로 되돌리며 결국 이긴다.

💡 이 XOR 값을 '님 값(Nim-sum)'이라 하며, 0이면 다음 차례인 사람이 진다.

Q214 재미 두뇌

겉보기가 똑같은 동전 9개 중 1개만 진짜보다 가볍고, 나머지 8개는 모두 무게가 같다. 양팔저울만 사용해 가벼운 동전 1개를 반드시 찾아내려면, 최소 몇 번 저울질하면 되는가?

①) ① 1번

②) ② 2번

③) ③ 3번

④) ④ 4번

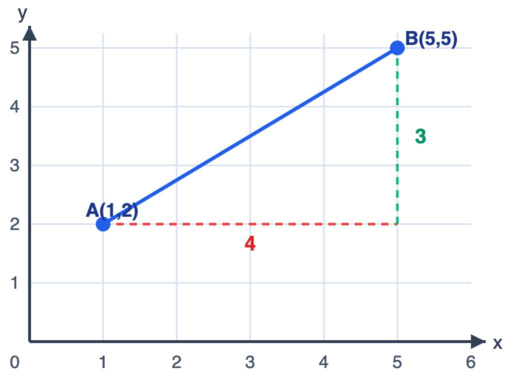
🎯 **정답: ② 2번**

📖 9개를 3개씩 세 그룹 A, B, C로 나눈다. (1) A와 B를 저울에 올린다. 평형이면 가벼운 동전은 C에, 한쪽이 가벼우면 그 그룹에 있다. 어느 경우든 가벼운 동전이 든 3개짜리 그룹을 알아낸다. (2) 그 3개 중 두 개를 저울에 올린다. 평형이면 남은 하나가, 한쪽이 가벼우면 그쪽이 가벼운 동전이다. 따라서 2번이면 충분하다.

💡 한 번의 저울질로 '왼쪽 가볍다 / 평형 / 오른쪽 가볍다' 세 가지를 구분할 수 있어, n번이면 최대 3^n개 중에서 찾을 수 있다. $9 = 3^2$이라 2번이면 된다.

Q215 좌표 기하

좌표평면 위의 두 점 $A(1, 2)$와 $B(5, 5)$ 사이의 거리는 얼마인가?



①) ① 4

②) ② 5

③) ③ $\sqrt{7}$

④) ④ 7

🎯 **정답: ② 5**

📖 두 점 사이의 거리 공식은 $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ 이다. 대입하면 $\sqrt{(5-1)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$. 이는 직각을 낀 두 변이 $3, 4$인 직각삼각형의 빗변(피타고라스 3-4-5)과 같다.

💡 3-4-5 는 가장 작은 '정수 변 직각삼각형'이라서 고대 이집트에서 직각을 만드는 데 쓰였다고 한다.

Q216 논리 (Knight/Knave)

기사(항상 참말)와 거짓말쟁이(항상 거짓말)만 사는 섬에서, 주민 A가 "$3 \times 3 = 9$"라고 말했다. A는 어떤 사람인가?

①) ① 기사
②) ② 거짓말쟁이
③) ③ 알 수 없다
④) ④ 둘 다 가능

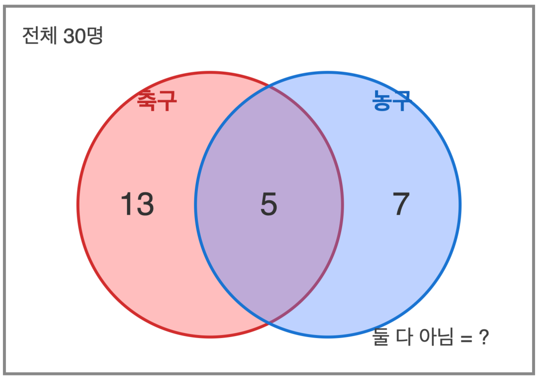
🎯 **정답: ① 기사**

📖 $3 \times 3 = 9$ 는 참인 문장이다. 거짓말쟁이는 절대 참말을 하지 않으므로, 참인 문장을 말한 A는 거짓말쟁이일 수 없다. 따라서 A는 기사이다. 핵심은 '발언 내용의 참·거짓'을 먼저 판단한 뒤 화자의 종류를 정하는 것이다.

💡 이런 '기사와 거짓말쟁이' 퍼즐은 논리학자 레이먼드 스멀리언이 대중화했다.

Q217 집합과 벤다이어그램

30명의 학생 중 축구를 좋아하는 학생이 18명, 농구를 좋아하는 학생이 12명, 둘 다 좋아하는 학생이 5명이다. 적어도 한 종목을 좋아하는 학생은 몇 명인가?



①) ① 23명
②) ② 25명
③) ③ 30명
④) ④ 35명

🎯 **정답: ② 25명**

📖 합집합의 크기는 포함배제로 $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 18 + 12 - 5 = 25$. 따라서 적어도 한 종목을 좋아하는 학생은 25명이다. (참고: 둘 다 좋아하지 않는 학생은 $30 - 25 = 5$명.)

💡 겹치는 부분을 한 번 빼 주는 이유는 두 번 세어졌기 때문이다. 이것이 포함배제 원리의 출발점이다.

Q218 모듈러 산술 입문

7^{2024}의 일의 자리 숫자는 무엇인가?

①) ① 1

②) ② 3

③) ③ 7

④) ④ 9

🎯 **정답:** ① 1

📖 7의 거듭제곱의 일의 자리는 $7^1 = 7,\ 7^2 = 49,\ 7^3 = 343,\ 7^4 = 2401$ 에서 7, 9, 3, 1 이 주기 4로 반복된다. $2024 = 4 \times 506$ 이므로 $2024 \equiv 0\ (mod\ 4)$, 즉 주기의 4번째(마지막)에 해당해 일의 자리는 1 이다.

💡 일의 자리만 보는 것은 $\mathrm{mod}\ 10$ 으로 계산하는 것과 같다.

Q219 정수론 (약수·배수·소수)

두 수 84와 120의 최대공약수(GCD)는 얼마인가?

①) ① 4

②) ② 6

③) ③ 12

④) ④ 24

🎯 **정답:** ③ 12

📖 소인수분해하면 $84 = 2^2 \times 3 \times 7,\ 120 = 2^3 \times 3 \times 5$ 이다. 공통 소인수의 가장 작은 지수를 택하면 $2^2 \times 3 = 12$. 따라서 최대공약수는 12 이다.

💡 유클리드 호제법으로도 구할 수 있다: $120 = 84 \times 1 + 36,\ 84 = 36 \times 2 + 12,\ 36 = 12 \times 3$ 이므로 GCD $= 12$.

Q220 수열과 점화

첫째항이 3, 공비가 2인 등비수열의 제6항은 얼마인가?

①) ① 48

②) ② 64

③) ③ 96

④) ④ 192

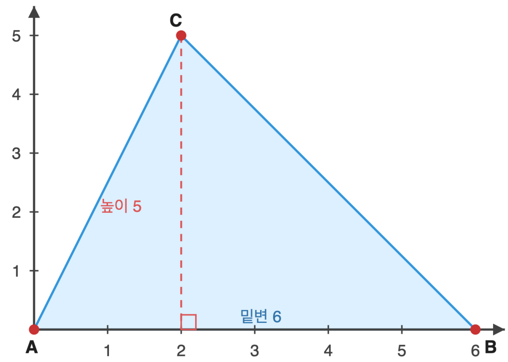
🎯 **정답:** ③ 96

📖 등비수열의 일반항은 $a_n = a_1 \times r^{n-1}$ 이다. $a_6 = 3 \times 2^5 = 3 \times 32 = 96$. 수열을 직접 써 보면 3, 6, 12, 24, 48, 96 이다.

💡 등비수열은 매 항이 일정한 비율로 커져서, 종이를 반으로 접을 때 두께가 늘어나는 방식과 같다.

Q221 좌표 기하

세 점 $A(0,0)$, $B(6,0)$, $C(2,5)$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이는 얼마인가?



①) ① 12

②) ② 15

③) ③ 18

④) ④ 30

🎯 **정답: ② 15**

📖 밑변 AB는 x축 위에 있어 길이가 6, 점 C의 y좌표가 곧 높이이므로 높이는 5 이다. 넓이 $= \frac{1}{2} \times 6 \times 5 = 15$. 신발끈 공식으로도 $\frac{1}{2}|0(0-5) + 6(5-0) + 2(0-0)| = \frac{1}{2} \times 30 = 15$.

💡 신발끈(shoelace) 공식은 좌표만 알면 어떤 다각형의 넓이도 구해 준다.

Q222 논리 (Knight/Knave)

두 주민 A, B가 있다. A는 "B는 거짓말쟁이다"라고 말하고, B는 "A와 나는 같은 종류다"라고 말했다. 두 사람의 정체는?

①) ① A 기사, B 거짓말쟁이

②) ② A 거짓말쟁이, B 기사

③) ③ 둘 다 기사

④) ④ 둘 다 거짓말쟁이

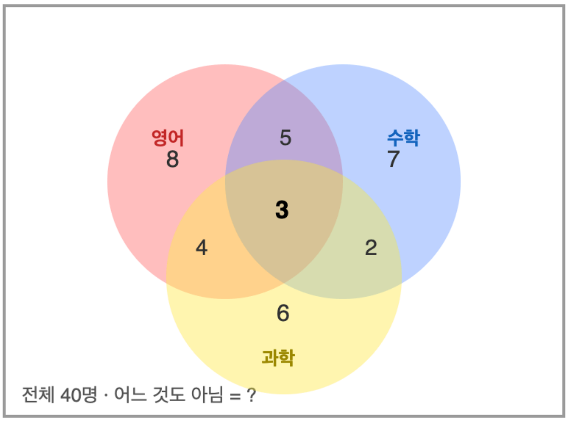
🎯 **정답: ① A 기사, B 거짓말쟁이**

📖 A가 기사라고 가정하면 그 말이 참이라 B는 거짓말쟁이. 그러면 B의 "같은 종류다"는 거짓이어야 하는데 실제로 둘은 다른 종류이므로 거짓이 맞아 모순이 없다. 반대로 A가 거짓말쟁이라면 "B는 거짓말쟁이"가 거짓이라 B는 기사가 되고, B의 참말 "같은 종류"가 성립해야 하지만 둘은 다른 종류라 모순. 따라서 A 기사, B 거짓말쟁이.

💡 한쪽 가정으로 끝까지 따라가 모순이 나오면 다른 쪽이 답이다. 이것이 귀류법의 핵심이다.

Q223 집합과 벤다이어그램

40명의 학생이 영어, 수학, 과학 중 좋아하는 과목을 골랐다. 영어 22명, 수학 18명, 과학 15명, 영∩수 9명, 수∩과 7명, 영∩과 6명, 세 과목 모두 3명이다. 한 과목도 좋아하지 않는 학생은 몇 명인가?



①) ① 3명
②) ② 4명
③) ③ 5명
④) ④ 6명

🎯 **정답: ② 4명**

📖 포함배제로 적어도 한 과목을 좋아하는 학생 수 $= 22 + 18 + 15 - 9 - 7 - 6 + 3 = 36$. 전체가 40명이므로 한 과목도 좋아하지 않는 학생은 $40 - 36 = 4$명이다.

💡 세 집합 포함배제에서는 두 개씩 겹친 부분을 빼고, 세 개가 겹친 부분을 다시 더해 준다.

Q224 모듈러 산술 입문

오늘이 화요일이라면, 지금부터 100일 후는 무슨 요일인가?

①) ① 화요일
②) ② 수요일
③) ③ 목요일
④) ④ 금요일

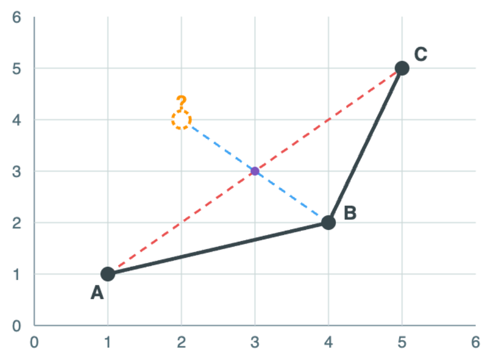
🎯 **정답: ③ 목요일**

📖 요일은 7일마다 반복되므로 $\mathrm{mod}\ 7$ 로 계산한다. $100 = 7 \times 14 + 2$ 이므로 $100 \equiv 2 \pmod 7$. 따라서 화요일에서 2일 뒤인 목요일이다.

💡 이렇게 큰 날짜의 요일을 나머지로 빠르게 구하는 방법을 모듈러 산술이라고 한다.

Q225 좌표 기하

평행사변형 $ABCD$ 에서 세 꼭짓점이 $A(1,1)$, $B(4,2)$, $C(5,5)$ 이다. 네 번째 꼭짓점 D 의 좌표는? (꼭짓점은 $A \to B \to C \to D$ 순서)



①) ① $(2,4)$

②) ② $(3,4)$

③) ③ $(2,6)$

④) ④ $(8,6)$

🎯 **정답:** ① $(2,4)$

📖 평행사변형은 두 대각선 AC와 BD가 서로의 중점에서 만난다. AC의 중점 $=\left(\frac{1+5}{2}, \frac{1+5}{2}\right)=(3,3)$. 이것이 BD의 중점이어야 하므로 $\frac{4+x}{2}=3,\ \frac{2+y}{2}=3$ 에서 $x=2,\ y=4$. 따라서 $D(2,4)$. (벡터로는 $D=A+C-B=(1+5-4,\ 1+5-2)=(2,4)$.)

💡 '대각선이 서로를 이등분한다'는 성질은 평행사변형을 판정하는 조건 중 하나다.

Q226 논리 (Knight/Knave)

세 주민 A, B, C 가 있다. A: "우리 셋은 모두 거짓말쟁이다." B: "C 는 기사다." C: "B 는 기사다." 세 사람의 정체는?

①) ① A 거짓말쟁이, $B{\cdot}C$ 기사

②) ② $A{\cdot}B{\cdot}C$ 모두 기사

③) ③ A 기사, $B{\cdot}C$ 거짓말쟁이

④) ④ 모두 거짓말쟁이

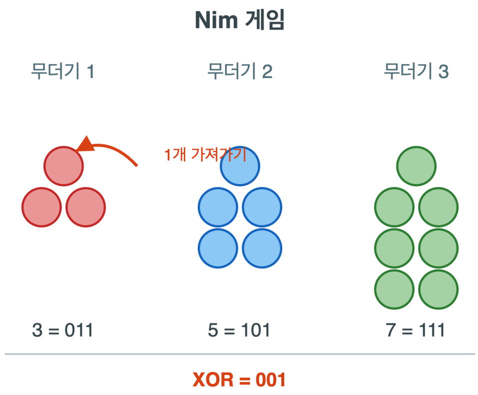
🎯 **정답: ① A 거짓말쟁이, $B{\cdot}C$ 기사**

📖 A가 "우리 모두 거짓말쟁이"라고 말했는데, 기사라면 자신을 거짓말쟁이라 할 수 없으니 A는 거짓말쟁이다. 그 말이 거짓이므로 셋 중 적어도 한 명은 기사다. 이제 B, C를 보자. 만약 B가 거짓말쟁이면 "C는 기사"가 거짓이라 C도 거짓말쟁이, 그러면 C의 "B는 기사"도 거짓이 되어 셋이 모두 거짓말쟁이 - 이는 A의 말을 참으로 만들어 모순이다. 따라서 B는 기사이고, 그 참말로 C도 기사. 결론: A 거짓말쟁이, $B{\cdot}C$ 기사.

💡 "우리는 모두 거짓말쟁이"라는 말을 한 사람은 절대 기사가 될 수 없다 - 자기모순이기 때문이다.

Q227 게임 이론 (Nim)

돌무더기 세 개에 각각 3개, 5개, 7개의 돌이 있다. 두 사람이 번갈아 한 무더기에서 1개 이상 가져가고, 마지막 돌을 가져가는 사람이 이긴다. 먼저 두는 사람이 이기려면 첫 수로 어떻게 해야 하는가?



①) ① 후공이 이긴다

②) ② 3개 무더기에서 1개를 가져간다 $\rightarrow (2, 5, 7)$

③) ③ 7개 무더기에서 2개를 가져간다 $\rightarrow (3, 5, 5)$

④) ④ 5개 무더기를 모두 가져간다 $\rightarrow (3, 0, 7)$

🎯 **정답: ② 3개 무더기에서 1개를 가져간다** $\rightarrow (2, 5, 7)$

📖 님 게임의 승패는 각 무더기 크기를 이진수로 쓴 뒤 모두 XOR(자리별 합의 홀짝)한 '님 합'으로 정해진다. $3 \oplus 5 \oplus 7 = 011 \oplus 101 \oplus 111 = 001 \neq 0$ 이므로 선공이 이긴다. 이기려면 님 합을 0으로 만들어야 하는데, 3무더기를 $3 \oplus 001 = 2$로 줄이면 $(2, 5, 7)$ 이 되고 $010 \oplus 101 \oplus 111 = 000$. 이후 상대가 무엇을 하든 다시 님 합을 0으로 되돌리면 선공이 마지막 돌을 가져간다.

💡 님 게임의 'XOR로 승패가 결정된다'는 사실은 1901년 찰스 부턴이 증명했다.

Q228 정수론 (약수·배수·소수)

$7x + 5y = 100$ 을 만족하는 0 이상의 정수해 (x, y) 는 모두 몇 쌍인가?

①) ① 2쌍

②) ② 3쌍

③) ③ 4쌍

④) ④ 5쌍

⑤) ⑤ 무수히 많다

🎯 **정답: ② 3쌍**

📖 $y = \frac{100 - 7x}{5} \geq 0$ 이 정수여야 한다. $100 - 7x \equiv 0 \pmod 5$ 에서 $100 \equiv 0$ 이므로 $7x \equiv 0$, 즉 $2x \equiv 0 \pmod 5 \rightarrow x \equiv 0 \pmod 5$. 또 $7x \leq 100$ 이라 $x \leq 14$. 조건을 만족하는 x는 $0, 5, 10$ 세 개이고, 각각 $y = 20,\ 13,\ 6$. 따라서 정수해는 $(0, 20), (5, 13), (10, 6)$ 의 3쌍.

💡 이렇게 정수해만 찾는 방정식을 디오판토스 방정식(일차부정방정식)이라고 한다.

Q229 비둘기집 원리

1부터 100까지의 자연수 중에서 몇 개를 뽑으면, 그 안에 반드시 차가 1인 (연속한) 두 수가 들어 있게 되는가? 그렇게 되도록 보장하는 최소 개수는?

①) ① 50개

②) ② 51개

③) ③ 52개

④) ④ 26개

🎯 **정답: ② 51개**

📖 1부터 100을 연속한 두 수씩 묶으면 $\{1,2\},\{3,4\},\ \ldots\ ,\{99,100\}$ 으로 50개의 묶음(서랍)이 된다. 각 묶음에서 한 개씩만 고르면 연속한 두 수 없이 최대 50개까지 뽑을 수 있다. 그러나 51개를 뽑으면 비둘기집 원리에 의해 어떤 한 묶음에서 두 수를 모두 뽑게 되고, 그 두 수는 연속한다. 따라서 최소 51개.

💡 50개까지는 연속수를 피할 수 있으므로(예: 홀수만), '경계가 정확히 51'이라는 점이 이 문제의 핵심이다.

Q230 재미 두뇌

십진수 200 을 7진법으로 나타내면?

①) ① $404_{(7)}$

②) ② $400_{(7)}$

③) ③ $440_{(7)}$

④) ④ $406_{(7)}$

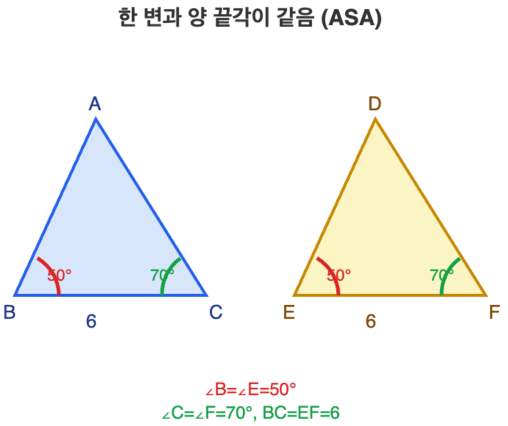
🎯 **정답: ① $404_{(7)}$**

📖 200을 7로 반복해 나눈다: $200 = 7 \times 28 + 4$ (나머지 4), $28 = 7 \times 4 + 0$ (나머지 0), $4 = 7 \times 0 + 4$ (나머지 4). 나머지를 아래에서 위로 읽으면 404. 검산: $4 \times 7^2 + 0 \times 7 + 4 = 4 \times 49 + 4 = 196 + 4 = 200$. 따라서 $404_{(7)}$.

💡 진법 변환은 '나누고 나머지를 거꾸로 읽기' 한 가지 규칙으로 어떤 진법이든 통한다.

Q231 도형 (합동·닮음·면적)

두 삼각형 $\triangle ABC$와 $\triangle DEF$에서 $\angle B = \angle E = 50^\circ$, $BC = EF = 6$, $\angle C = \angle F = 70^\circ$ 이다. 두 삼각형이 합동임을 보장하는 합동조건은?



①) ① SSS 합동

②) ② SAS 합동

③) ③ ASA 합동

④) ④ RHS 합동

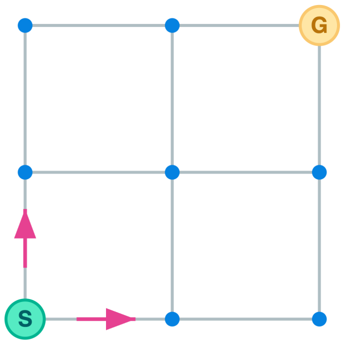
🎯 **정답: ③ ASA 합동**

📖 주어진 조건은 한 변 $BC = EF$와 그 변의 양 끝에 있는 두 각 $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ 가 각각 같다는 것이다. '한 변과 그 양 끝각'이 같으므로 ASA(각-변-각) 합동이다.

💡 삼각형은 세 정보(변·각의 적절한 조합)만 정해지면 모양이 완전히 결정되는 가장 안정된 도형이라, 다리·철탑 구조에 많이 쓰인다.

Q232 경우의 수

2×2 칸 격자의 왼쪽 아래 꼭짓점에서 오른쪽 위 꼭짓점까지, 오른쪽 또는 위쪽으로만 한 칸씩 이동할 때 최단 경로의 수는?



①) ① 4
②) ② 6
③) ③ 8
④) ④ 12

🎯 **정답: ② 6**

📖 오른쪽 이동(R) 2번, 위쪽 이동(U) 2번, 총 4번의 이동을 배열하는 문제이다. 4칸 중 R가 들어갈 2자리를 고르면 되므로 $\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6$ 가지.

💡 이런 격자 경로 수는 파스칼의 삼각형에 그대로 나타난다. 각 격자점에 도달하는 경로 수를 적어 보면 파스칼의 삼각형이 펼쳐진다.

Q233 정수론 (진법)

이진법으로 나타낸 수 $1011_{(2)}$ 를 십진법으로 나타내면?

①) ① 9
②) ② 11
③) ③ 13
④) ④ 15

🎯 **정답: ② 11**

📖 각 자리의 자리값은 $2^3, 2^2, 2^1, 2^0$ 이다. $1011_{(2)} = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 8 + 0 + 2 + 1 = 11.$

💡 컴퓨터는 전기가 켜짐(1)/꺼짐(0) 두 상태만 쓰기 때문에 모든 정보를 이진법으로 저장한다.

Q234 경우의 수

세 종류의 사탕(딸기·포도·레몬)이 충분히 많이 있다. 종류 중복을 허용하여 사탕 5개를 고르는 경우의 수는? (순서는 생각하지 않는다)

①) ① 10
②) ② 15
③) ③ 21
④) ④ 35

🎯 **정답: ③ 21**

📖 서로 다른 3종류에서 중복을 허용해 5개를 고르는 중복조합이다. ${}_3H_5 = \binom{3+5-1}{5} = \binom{7}{5} = \binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ 가지.

💡 중복조합은 '칸막이 2개와 사탕 5개를 한 줄로 늘어놓기'와 같다. 그래서 $\binom{7}{2}$ 가 나온다.

Q235 확률

1부터 10까지 적힌 카드 10장 중 한 장을 임의로 뽑을 때, 뽑은 수가 소수일 확률은?

①) ① $\frac{1}{5}$
②) ② $\frac{3}{10}$
③) ③ $\frac{2}{5}$
④) ④ $\frac{1}{2}$

🎯 **정답: ③ $\frac{2}{5}$**

📖 1부터 10까지의 소수는 $2, 3, 5, 7$ 로 4개이다(1은 소수가 아님). 전체는 10가지이므로 확률은 $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

💡 1을 소수에서 제외하는 이유는, 소인수분해가 단 한 가지로 정해지도록 약속하기 위해서이다.

Q236 함수와 패턴

일차함수 $f(x) = 3x - 4$ 에 대하여 $f(x) = x$ 를 만족하는 x 의 값은? (이런 점을 함수의 '고정점'이라 한다)

①) ① 1
②) ② 2
③) ③ 3
④) ④ 4

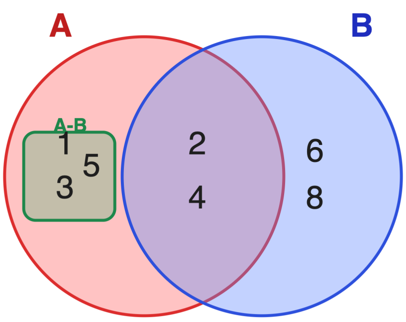
🎯 **정답: ② 2**

📖 $f(x) = x$ 이므로 $3x - 4 = x$. 정리하면 $2x = 4$, 따라서 $x = 2$. 즉 $f(2) = 3 \cdot 2 - 4 = 2$ 로 자기 자신으로 돌아온다.

💡 고정점은 직선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = x$ 가 만나는 점이다. 함수를 여러 번 적용해도 변하지 않는 '안정한 값'이다.

Q237 집합과 벤다이어그램

집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ 에 대하여 차집합 $A - B$ 의 원소의 개수는?



①) ① 2
②) ② 3
③) ③ 4
④) ④ 5

🎯 **정답: ② 3**

📖 $A - B$ 는 A 의 원소 중 B 에 속하지 않는 것이다. A 에서 공통 원소 $2, 4$ 를 빼면 $\{1, 3, 5\}$ 가 남으므로 원소는 3개.

💡 차집합 $A - B$ 는 $A \cap B^c$ 와 같다. 'A이면서 B가 아닌 것'이라는 같은 뜻을 두 가지로 쓴 것이다.

Q238 통계

자료 $3, 5, 5, 7, 10$ 에 대하여 평균, 중앙값, 최빈값 중 값이 가장 큰 것은?

①) ① 평균

②) ② 중앙값

③) ③ 최빈값

④) ④ 모두 같다

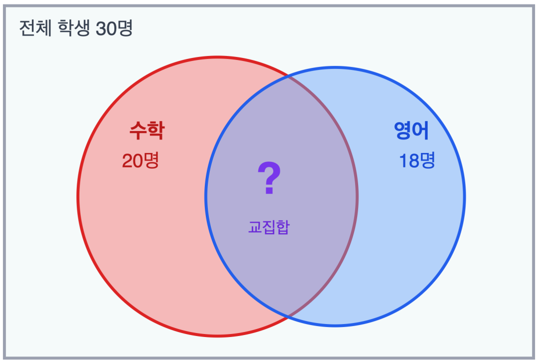
🎯 **정답: ① 평균**

📖 평균 $= \frac{3+5+5+7+10}{5} = \frac{30}{5} = 6$. 자료를 크기순으로 놓으면 가운데 값(중앙값) $= 5$. 가장 자주 나온 값(최빈값) $= 5$. 따라서 평균 6 이 가장 크다.

💡 평균은 큰 값(여기선 10) 하나에 크게 흔들린다. 그래서 소득처럼 한쪽으로 치우친 자료는 중앙값을 함께 본다.

Q239 집합과 벤다이어그램

학생 30명 중 수학을 좋아하는 학생이 20명, 영어를 좋아하는 학생이 18명이다. 두 과목을 모두 좋아하는 학생 수의 최솟값은?



겹침이 가장 작을 때 = 20 + 18 - 30 = 8명

①) ① 6

②) ② 8

③) ③ 10

④) ④ 12

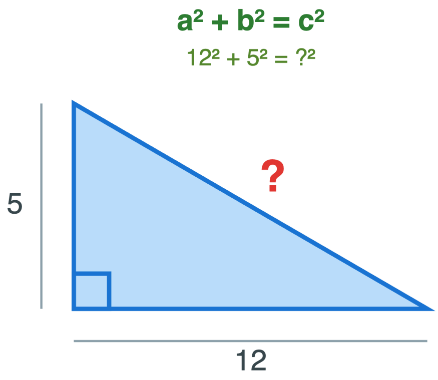
🎯 **정답: ② 8**

📖 두 집합의 합집합은 전체 30명을 넘을 수 없다. $|A \cup B| = 20 + 18 - |A \cap B| \leq 30$ 에서 $38 - |A \cap B| \leq 30$, 즉 $|A \cap B| \geq 8$. 따라서 두 과목을 모두 좋아하는 학생 수의 최솟값은 8명.

💡 $20 + 18 = 38$ 이 학생 수 30보다 8 많다. 이 '넘침'이 곧 겹쳐야 하는 최소 인원이 된다.

Q240 도형 (합동·닮음·면적)

직각을 낀 두 변의 길이가 각각 5, 12 인 직각삼각형의 빗변의 길이는?



①) ① 13

②) ② 15

③) ③ 17

④) ④ $\sqrt{119}$

🎯 **정답: ① 13**

📖 피타고라스 정리에 의해 빗변 c 는 $c^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$. 따라서 $c = \sqrt{169} = 13$.

💡 $(5, 12, 13)$ 처럼 세 변이 모두 정수인 직각삼각형을 '피타고라스 세 쌍'이라 한다. $(3, 4, 5)$ 다음으로 유명하다.

🧠 중등 논리·추론

총 40문제 · 문제와 정답·풀이 포함

Q241 논리 (홀짝·증명)

정수 5개를 더했더니 합이 홀수가 되었다. 이 5개 중 홀수인 정수의 개수로 가능한 것은?

①) ① 항상 짝수개

②) ② 홀수개

③) ③ 항상 2개

④) ④ 알 수 없다

🎯 **정답: ② 홀수개**

📖 짝수를 아무리 더해도 합의 홀짝에는 영향을 주지 않고, 합의 홀짝은 홀수의 개수에 의해서만 정해진다. 홀수를 짝수 번 더하면 합이 짝수, 홀수 번 더하면 합이 홀수가 된다. 합이 홀수이므로 홀수인 정수는 홀수개(1, 3, 5개 중 하나)이다.

💡 이런 '홀짝(패리티)' 논증은 풀 수 없어 보이는 퍼즐을 한 줄로 해결하기도 한다. 체스판 도미노 덮기 문제가 대표적이다.

Q242 함수와 패턴

두 함수 $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x - 3$ 에 대하여 $(f \circ g)(x) = 7$ 을 만족하는 x 의 값은?

①) ① 5

②) ② 6

③) ③ 7

④) ④ 8

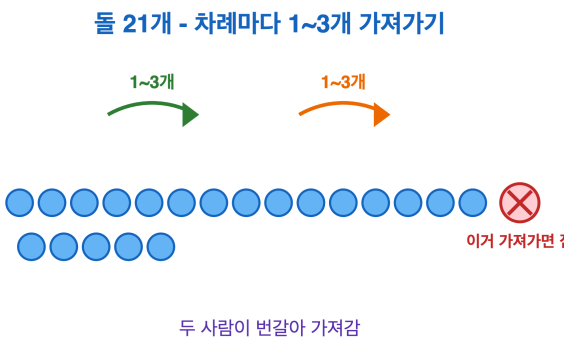
🎯 **정답: ② 6**

📖 합성함수 $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x - 3) = 2(x - 3) + 1 = 2x - 5$. 이것이 7이므로 $2x - 5 = 7$, $2x = 12$, $x = 6$. (확인: $g(6) = 3$, $f(3) = 7$.)

💡 합성에서는 순서가 중요하다. $(f \circ g)$ 는 g 를 먼저, 그다음 f 를 적용한다. $(g \circ f)$ 와는 보통 다르다.

Q243 게임 이론 (Nim 변형)

돌 21개가 한 무더기에 있다. 두 사람이 번갈아 1개, 2개, 또는 3개를 가져가는데, 이번에는 \textbf{마지막 돌을 가져가는 사람이 진다}(미제르 규칙). 두 사람이 최선을 다할 때 누가 이기는가?



①) ① 선공 필승
②) ② 후공 필승
③) ③ 항상 비김
④) ④ 알 수 없음

🎯 **정답: ② 후공 필승**

📖 마지막 돌을 가져가면 지므로, 상대에게 '돌 1개'를 남기면 이긴다. 지는 위치(자기 차례에 지는 위치)는 남은 돌이 $1, 5, 9, \ldots$ 즉 4로 나눈 나머지가 1인 경우이다. $21 = 4 \times 5 + 1$ 이므로 시작 시점이 바로 지는 위치이다. 따라서 \textbf{먼저 두는 선공이 지고, 후공이 필승}이다. 후공은 매번 합이 4가 되도록 가져가(1+3, 2+2, 3+1) 선공에게 항상 $4k + 1$ 개를 남기면 된다.

💡 마지막에 가져가면 이기는 보통 규칙이었다면 $21 \equiv 1 \pmod 4$ 라 선공이 졌다. 미제르(지는 게임) 규칙은 막판에서만 전략이 살짝 뒤집힌다.

Q244 모듈러 산술 입문

7^{2023}의 일의 자리 숫자는 무엇인가? (힌트: $7^1 = 7,\ 7^2 = 49,\ 7^3 = 343,\ 7^4 = 2401$ 에서 일의 자리가 반복된다.)

①) ① 1
②) ② 3
③) ③ 7
④) ④ 9

🎯 **정답: ② 3**

📖 7의 거듭제곱의 일의 자리는 $7, 9, 3, 1$ 의 4개 주기로 반복된다. 지수 2023을 4로 나눈 나머지를 구하면 $2023 = 4 \times 505 + 3$ 이므로 나머지는 3이다. 따라서 주기의 세 번째 값인 3이 일의 자리가 된다.

💡 일의 자리만 보려면 사실상 $\pmod{10}$ 을 계산하는 것이고, 밑이 무엇이든 일의 자리는 길어야 4의 주기로 반복된다.

Q245 함수와 패턴

함수 $f(x) = 2x + 1$ 에 대하여 $f(f(3))$ 의 값을 구하여라.

①) ① 7

②) ② 13

③) ③ 15

④) ④ 19

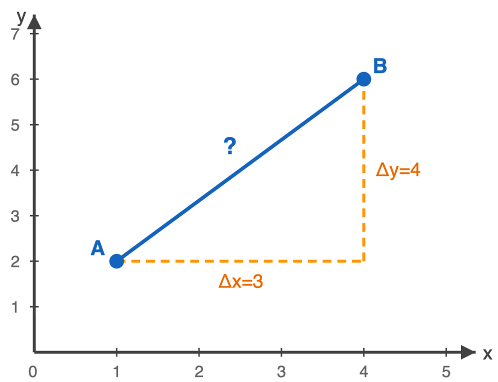
🎯 **정답: ③ 15**

📖 먼저 안쪽을 계산한다. $f(3) = 2 \times 3 + 1 = 7$. 그 결과를 다시 f 에 넣으면 $f(7) = 2 \times 7 + 1 = 15$. 합성함수는 안에서 밖으로 차례로 계산한다.

💡 f 를 두 번 합성하면 $f(f(x)) = 2(2x + 1) + 1 = 4x + 3$ 으로 여전히 일차함수다.

Q246 좌표 기하

좌표평면 위 두 점 $A(1, 2)$ 와 $B(4, 6)$ 사이의 거리를 구하여라.



①) ① 4

②) ② 5

③) ③ $\sqrt{7}$

④) ④ 7

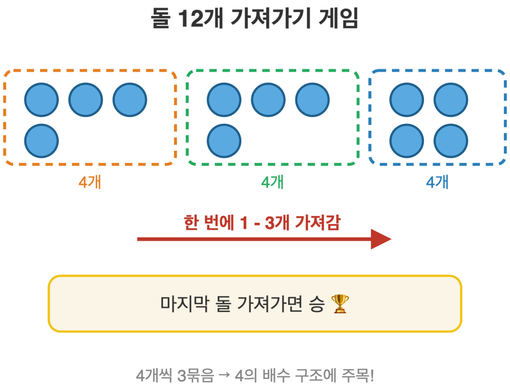
🎯 **정답: ② 5**

📖 두 점 사이 거리 공식 $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ 를 쓴다. 가로 차이는 $4 - 1 = 3$, 세로 차이는 $6 - 2 = 4$ 이므로 거리는 $\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$.

💡 $3, 4, 5$ 는 가장 유명한 피타고라스 수다. 좌표 거리 공식은 피타고라스 정리를 좌표에 옮긴 것일 뿐이다.

Q247 게임 이론 (Nim)

돌 12개가 한 무더기에 있다. 두 사람이 번갈아 한 번에 1개, 2개, 또는 3개를 가져가고, 마지막 돌을 가져가는 사람이 이긴다. 두 사람 모두 최선을 다할 때 누가 이기는가?



①) ① 선공(먼저 가져가는 사람)
②) ② 후공(나중에 가져가는 사람)
③) ③ 항상 비긴다
④) ④ 알 수 없다

🎯 **정답: ② 후공**

📖 이 게임의 핵심은 남은 돌 수를 4의 배수로 만들어 상대에게 넘기는 것이다. 상대가 $k(=1,2,3)$ 개를 가져가면 나는 $4-k$ 개를 가져가 항상 4개씩 줄일 수 있다. 시작이 12(4의 배수)이면 후공이 이 전략으로 매 라운드 4개씩 줄여 마지막 돌을 가져간다. 일반적으로 처음 개수가 4의 배수면 후공 필승, 아니면 선공 필승.

💡 이런 '뺄셈 게임'에서 가져갈 수 있는 최대가 m 이면 $m+1$ 의 배수가 패배 위치가 된다.

Q248 정수론 (약수·배수·소수)

두 자연수의 곱이 360 이고 최대공약수가 6 일 때, 두 수의 최소공배수는 얼마인가?

①) ① 36
②) ② 60
③) ③ 72
④) ④ 120

🎯 **정답: ② 60**

📖 두 수 a, b 에 대하여 항상 $(\mathrm{gcd})\times(\mathrm{lcm}) = a\times b$ 가 성립한다. 따라서 $\mathrm{lcm} = a \times b \mathrm{gcd} = \frac{360}{6} = 60.$

💡 실제로 그런 두 수는 6 과 60 이다$(\mathrm{gcd}=6,$ 곱 $=360)$. 곱과 최대공약수만 알아도 최소공배수가 정해진다.

Q249 정수론 (진법 변환)

십진수 45 를 이진법(2진법)으로 나타내면?

①) ① 101011_2
②) ② 110101_2
③) ③ 101101_2
④) ④ 111001_2

🎯 **정답:** ③ 101101_2

📖 45 를 2로 계속 나누며 나머지를 적는다:
$45 \div 2 = 22 \cdots 1,\ 22 \div 2 = 11 \cdots 0,\ 11 \div 2 = 5 \cdots 1,\ 5 \div 2 = 2 \cdots 1,\ 2 \div 2 = 1 \cdots 0,\ 1 \div 2 = 0 \cdots 1$. 나머지를 아래에서 위로 읽으면 101101_2. 검산: $32 + 8 + 4 + 1 = 45$.

💡 $45 = 32 + 8 + 4 + 1 = 2^5 + 2^3 + 2^2 + 2^0$ 이라서 각 자리 1의 위치가 곧 더한 거듭제곱을 알려준다.

Q250 통계

자료 $2,\ 4,\ 7,\ 7,\ 10$ 에서 (평균), (중앙값), (최빈값) 세 값 중 가장 큰 값은 무엇인가?

①) ① 6
②) ② 7
③) ③ 8
④) ④ 10

🎯 **정답:** ② 7

📖 평균은 $\dfrac{2+4+7+7+10}{5} = \dfrac{30}{5} = 6$. 자료가 이미 크기순이므로 중앙값(가운데 값)은 7. 최빈값(가장 자주 나온 값)은 두 번 나온 7. 따라서 $6, 7, 7$ 중 가장 큰 값은 7.

💡 평균은 큰 값(여기선 10) 하나에 쉽게 끌려가지만, 중앙값은 가운데 위치만 보므로 극단값에 덜 흔들린다.

Q251 확률

주머니에 빨간 공 3개와 파란 공 2개가 들어 있다. 동시에 2개를 꺼낼 때, 두 공의 색이 같을 확률은?

①) ① $\frac{1}{5}$
②) ② $\frac{2}{5}$
③) ③ $\frac{1}{2}$
④) ④ $\frac{3}{5}$

🎯 **정답:** ② $\frac{2}{5}$

📖 전체 경우의 수는 $\binom{5}{2} = 10$. 같은 색인 경우는 (빨강 2개) $\binom{3}{2} = 3$ 가지와 (파랑 2개) $\binom{2}{2} = 1$ 가지로 합 4 가지. 따라서 확률은 $\dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5}$.

💡 여사건(색이 다른 경우)으로 풀어도 된다: 다른 색은 $3 \times 2 = 6$ 가지라 $\dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$, 그 여사건이 $\dfrac{2}{5}$ 로 일치한다.

Q252 논리 (Knight/Knave)

정직한 사람(항상 참)과 거짓말쟁이(항상 거짓)만 사는 섬에서 두 주민 A, B를 만났다. A가 말한다: "우리 둘 중 적어도 한 명은 거짓말쟁이다." A와 B의 정체는?

①) ① A 정직, B 거짓말쟁이

②) ② A 거짓말쟁이, B 정직

③) ③ 둘 다 정직

④) ④ 둘 다 거짓말쟁이

🎯 **정답: ① A 정직, B 거짓말쟁이**

📖 A가 거짓말쟁이라고 가정하면 그의 말은 거짓이어야 한다. 그런데 그 말이 거짓이려면 '둘 다 정직'이어야 하므로 A가 정직이 되어 가정과 모순. 따라서 A는 정직이고, 그 말은 참이므로 둘 중 적어도 한 명은 거짓말쟁이다. A는 정직이니 거짓말쟁이는 B다.

💡 '적어도 한 명은 거짓말쟁이'라는 말을 정직한 사람이 할 수 있다는 점이 핵심이다. 자기를 포함해 단정짓지 않기 때문이다.

Q253 비둘기집 원리

한 학급 학생 31 명의 생일이 모두 같은 해의 어느 달(1월 - 12월)에 속한다. 생일이 같은 달인 학생이 적어도 몇 명은 반드시 존재하는가?

①) ① 2명

②) ② 3명

③) ③ 4명

④) ④ 12명

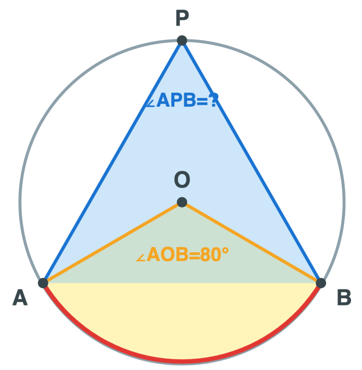
🎯 **정답: ② 3명**

📖 서랍(달) 12개에 비둘기(학생) 31명을 넣는다. 만약 어느 달도 3명 미만(즉 최대 2명)이라면 학생은 많아야 $12 \times 2 = 24$ 명뿐이라 31명을 담을 수 없다. 따라서 적어도 한 달에는 $\left\lceil \frac{31}{12} \right\rceil = 3$ 명 이상이 몰린다.

💡 일반 공식은 'n 개 서랍에 m 마리를 넣으면 어떤 서랍에 최소 $\lceil m/n \rceil$ 마리'이다.

Q254 도형 (원)

한 원에서 호 AB에 대한 중심각의 크기가 80° 이다. 같은 호 AB에 대한 원주각의 크기는?



①) ① 40°

②) ② 80°

③) ③ 160°

④) ④ 20°

🎯 **정답: ① 40°**

📖 같은 호에 대하여 (원주각) $= \dfrac{1}{2} \times$ (중심각) 이 성립한다. 따라서 원주각 $= \dfrac{1}{2} \times 80^\circ = 40^\circ$.

💡 원 위 어디에 점 P를 찍어도 같은 호를 보는 원주각은 항상 같다. 이를 원주각의 일정성이라 한다.

Q255 함수와 패턴

두 함수 $f(x) = 3x - 1, g(x) = x + 2$ 가 있다. 합성함수의 값 $(f \circ g)(2)$, 즉 $f(g(2))$ 를 구하여라.

①) ① 7

②) ② 9

③) ③ 11

④) ④ 13

🎯 **정답: ③ 11**

📖 $f \circ g$ 는 먼저 g 를 적용한 뒤 f 를 적용한다. $g(2) = 2 + 2 = 4$. 그 값을 f 에 넣으면 $f(4) = 3 \times 4 - 1 = 11$.

💡 순서가 중요하다. 반대로 $(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(5) = 7$ 로 값이 달라진다. 합성은 교환되지 않는다.

Q256 정수론 (일차부정방정식)

방정식 $2x + 3y = 24$ 를 만족하는 양의 정수 (x, y) 의 순서쌍은 모두 몇 개인가?

①) ① 2개

②) ② 3개

③) ③ 4개

④) ④ 5개

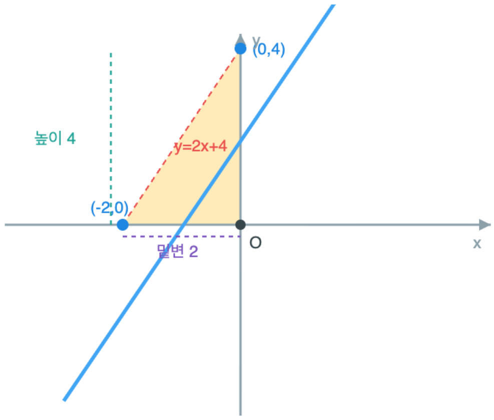
🎯 **정답: ② 3개**

📖 $2x = 24 - 3y$ 이므로 우변이 양수이고 짝수여야 한다. 24 가 짝수이므로 $3y$ 도 짝수, 즉 y 가 짝수여야 한다. 또 $x > 0$ 이려면 $3y < 24$, 즉 $y < 8$. 따라서 가능한 짝수 $y = 2, 4, 6$. 각각 $x = 9,\ x = 6,\ x = 3$ 으로 모두 양의 정수다. 순서쌍은 $(9, 2), (6, 4), (3, 6)$ 으로 3개.

💡 x 의 계수 2와 y 의 계수 3의 최소공배수 6만큼 y 가 움직일 때마다 해가 정수로 유지된다. 그래서 해가 규칙적인 간격으로 나타난다.

Q257 좌표 기하

직선 $y = 2x + 4$ 가 x 축, y 축과 만나는 점과 원점이 이루는 삼각형의 넓이를 구하여라.



①) ① 4

②) ② 6

③) ③ 8

④) ④ 12

🎯 **정답: ① 4**

📖 x 절편은 $y = 0$ 일 때 $0 = 2x + 4 \Rightarrow x = -2$ 이므로 점 $(-2, 0)$. y 절편은 $x = 0$ 일 때 $y = 4$ 이므로 점 $(0, 4)$. 이 두 점과 원점이 만드는 직각삼각형의 밑변은 $|-2| = 2$, 높이는 4 이므로 넓이는 $\frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4$.

💡 직선 $y = ax + b$ 가 두 축과 원점으로 만드는 삼각형 넓이는 항상 $\frac{b^2}{2|a|}$ 로 정리된다. 여기선 $\frac{16}{4} = 4$.

Q258 모듈러 산술 입문

3^{100} 의 마지막 두 자리(즉 $\pmod{100}$)는 무엇인가?

①) ① 01

②) ② 03

③) ③ 43

④) ④ 49

🎯 **정답: ① 01**

📖 마지막 두 자리는 100 으로 나눈 나머지다. 먼저 $3^{10} = 59049$ 이므로 $3^{10} \equiv 49 \pmod{100}$. 그러면 $3^{20} = (3^{10})^2 \equiv 49^2 = 2401 \equiv 1 \pmod{100}$. 따라서 $3^{20} \equiv 1$ 이고, $3^{100} = (3^{20})^5 \equiv 1^5 = 1 \pmod{100}$. 마지막 두 자리는 01.

💡 3^{20} 이 100 으로 나눈 나머지가 1이라는 사실(차수 20) 덕분에, 지수가 20의 배수면 항상 마지막 두 자리가 01이 된다.

Q259 부등식·절댓값

부등식 $|2x-3|<5$ 를 만족하는 정수 x 는 모두 몇 개인가?

①) ① 3개

②) ② 4개

③) ③ 5개

④) ④ 6개

🎯 **정답: ② 4개**

📖 $|A|<5$ 는 $-5<A<5$ 와 같다. 따라서 $-5<2x-3<5$. 각 변에 3 을 더하면 $-2<2x<8$, 다시 2 로 나누면 $-1<x<4$. 이 범위의 정수는 $x=0,1,2,3$ 으로 4개.

💡 절댓값 부등식 $|x-a|<r$ 는 '수직선에서 a 로부터 거리가 r 미만인 점'을 뜻한다. 여기선 중심 $\frac{3}{2}$ 에서 거리 $\frac{5}{2}$ 이내 구간이다.

Q260 경우의 수 (중복조합)

똑같은 사탕 5 개를 서로 다른 세 명 A, B, C에게 남김없이 나누어 준다. 한 명도 못 받는 경우도 허용할 때, 나누는 방법은 모두 몇 가지인가?

①) ① 15가지

②) ② 18가지

③) ③ 21가지

④) ④ 28가지

🎯 **정답: ③ 21가지**

📖 사탕 5개를 별 ★ ★ ★ ★ ★ 로, 세 사람으로 나누는 칸막이를 막대 | 2개로 생각한다(별과 막대 방법). 별 5개와 막대 2개, 총 7자리 중 막대 2자리를 고르면 분배가 결정되므로 $\binom{7}{2}=21$ 가지. 이는 중복조합 ${}_3H_5=\binom{3+5-1}{5}=\binom{7}{5}=21$ 과 같다.

💡 '별과 막대'(stars and bars)는 같은 물건을 여러 사람에게 나누는 문제를 막대 위치 고르기로 바꿔 주는 강력한 도구다.

Q261 함수와 패턴

자료 4, 6, 6, 8, 11 의 평균을 M, 중앙값을 m이라 할 때 $M-m$의 값은?

①) ① 0

②) ② 1

③) ③ 2

④) ④ 3

🎯 **정답: ② 1**

📖 평균 $M=\frac{4+6+6+8+11}{5}=\frac{35}{5}=7$. 자료를 크기순으로 놓으면 $4,6,6,8,11$ 이고 가운데(3번째) 값이 중앙값이므로 $m=6$. 따라서 $M-m=7-6=1$.

💡 평균은 극단값(아주 크거나 작은 값)에 흔들리지만 중앙값은 잘 흔들리지 않아 통계에서 자주 함께 본다.

Q262 함수와 패턴

$f(x) = 2x - 1$, $g(x) = x + 3$ 일 때, 합성값 $f(g(2))$ 의 값은?

①) ① 7

②) ② 8

③) ③ 9

④) ④ 10

🎯 **정답: ③ 9**

📖 안쪽부터 계산한다. $g(2) = 2 + 3 = 5$. 그 결과를 f에 넣으면 $f(5) = 2 \cdot 5 - 1 = 9$.

Q263 비둘기집 원리

어떤 모임에서 "적어도 두 사람은 태어난 달(月)이 같다"는 것을 반드시 보장하려면 최소 몇 명이 필요한가?

①) ① 11명

②) ② 12명

③) ③ 13명

④) ④ 24명

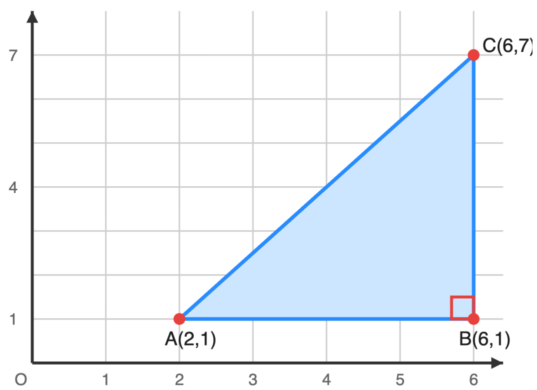
🎯 **정답: ③ 13명**

📖 달은 1월부터 12월까지 12개(서랍). 12명까지는 각자 다른 달일 수 있어 보장되지 않는다. 그러나 $12 + 1 = 13$명이면 비둘기집 원리에 의해 적어도 한 달에 2명 이상이 몰릴 수밖에 없다.

💡 이 원리로 '서울에 머리카락 수가 똑같은 두 사람이 반드시 있다'도 증명할 수 있다.

Q264 좌표 기하

좌표평면 위 세 점 $A(2, 1)$, $B(6, 1)$, $C(6, 7)$ 을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC 의 넓이는?



①) ① 10

②) ② 12

③) ③ 14

④) ④ 24

🎯 **정답: ② 12**

📖 $A(2, 1)$ 과 $B(6, 1)$ 은 y좌표가 같아 밑변 $AB = 6 - 2 = 4$. $B(6, 1)$ 과 $C(6, 7)$ 은 x좌표가 같아 높이 $BC = 7 - 1 = 6$ 이며 점 B에서 직각이다. 넓이 $= \frac{1}{2} \times 4 \times 6 = 12$.

Q265 모듈러 산술 입문

7^{2024} 의 일의 자리 숫자는?

①) ① 1
②) ② 3
③) ③ 7
④) ④ 9

🎯 **정답: ① 1**

📖 7의 거듭제곱의 일의 자리는 $7^1 = 7,\ 7^2 = 49(9),\ 7^3 = 343(3),\ 7^4 = 2401(1)$ 로 $7, 9, 3, 1$ 이 주기 4로 반복된다. $2024 = 4 \times 506$ 이므로 $2024 \equiv 0 \pmod 4$, 즉 주기의 마지막 값인 1 이다.

Q266 수열과 점화

첫째항이 3, 공비가 2 인 등비수열의 첫 4개 항의 합은?

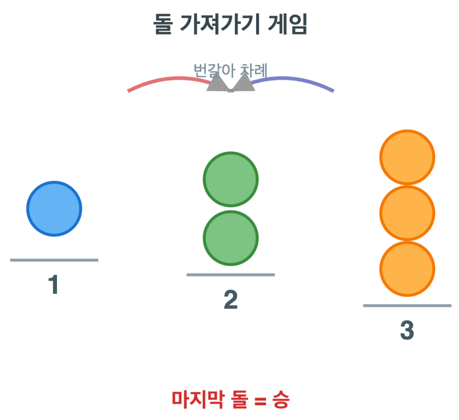
①) ① 30
②) ② 36
③) ③ 45
④) ④ 48

🎯 **정답: ③ 45**

📖 항을 차례로 구하면 $3,\ 6,\ 12,\ 24$ (각 항에 2를 곱함). 합 $= 3 + 6 + 12 + 24 = 45$. (공식으로는 $\frac{3(2^4 - 1)}{2 - 1} = 3 \times 15 = 45$.)

Q267 게임 이론 (Nim)

돌무더기 3개가 각각 1개, 2개, 3개 있다. 두 사람이 번갈아 한 무더기에서 1개 이상 가져가고, 마지막 돌을 가져가는 사람이 이긴다. 누가 필승 전략을 갖는가?



①) ① 선공(먼저 두는 사람)
②) ② 후공(나중에 두는 사람)
③) ③ 항상 비김
④) ④ 알 수 없음

🎯 **정답: ② 후공(나중에 두는 사람)**

📖 님 게임의 승패는 각 무더기 개수의 이진수 배타적합(XOR)으로 정한다. $1 \oplus 2 \oplus 3 = 0$ 이므로 현재 위치는 두는 사람이 지는 'P-위치'다. 즉 선공이 무엇을 해도 후공이 다시 XOR을 0으로 만들 수 있어 후공이 필승.

💡 이 'XOR=0' 규칙은 1901년 보우턴이 증명한 님 게임의 완전 해법이다.

Q268 경우의 수

5원짜리와 2원짜리 동전만으로 정확히 53원을 만들려고 한다. (각 동전은 0개 이상 사용) 가능한 (5원 개수, 2원 개수)의 경우는 모두 몇 가지인가?

①) ① 4가지
②) ② 5가지
③) ③ 6가지
④) ④ 7가지

🎯 **정답: ② 5가지**

📖 $5a + 2b = 53$ 에서 $2b = 53 - 5a$ 가 0 이상이고 짝수여야 한다. $53 - 5a$ 가 짝수이려면 $5a$ 가 홀수, 즉 a 가 홀수. $5a \le 53$ 이므로 $a \le 10$. 따라서 $a = 1, 3, 5, 7, 9$ 의 5가지이며 각각 $b = 24, 19, 14, 9, 4$ 이다.

Q269 확률

주머니에 빨간 공 3개와 파란 공 2개가 있다. 한 개씩 연속으로 두 번 꺼낼 때(꺼낸 공은 다시 넣지 않음), 두 번 모두 빨간 공일 확률은?

①) ① $\frac{9}{25}$
②) ② $\frac{3}{10}$
③) ③ $\frac{2}{5}$
④) ④ $\frac{1}{2}$

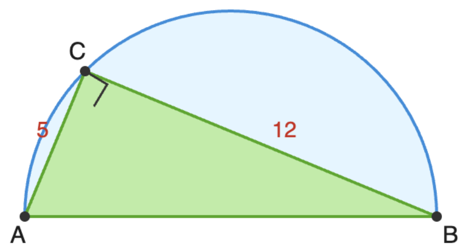
🎯 **정답: ② $\frac{3}{10}$**

📖 첫 번째가 빨강일 확률 $\frac{3}{5}$. 빨강 하나를 뺐으므로 남은 4개 중 빨강 2개, 두 번째도 빨강일 확률 $\frac{2}{4}$. 따라서 $\frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$.

💡 다시 넣는 '복원추출'이었다면 $\frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$ 로 답이 달라진다.

Q270 도형 (합동·닮음·면적)

지름이 AB 인 반원의 원 위의 한 점 C 에 대해 삼각형 ABC 를 만든다. $AC = 5$, $BC = 12$ 일 때 삼각형 ABC 의 넓이는?



①) ① 24
②) ② 30
③) ③ 36
④) ④ 60

🎯 **정답: ② 30**

📖 반원(지름)에 대한 원주각은 항상 $90°$ 이다(탈레스 정리). 따라서 $\angle ACB = 90°$ 인 직각삼각형이고, 직각을 낀 두 변이 $AC = 5$, $BC = 12$ 이므로 넓이 $= \frac{1}{2} \times 5 \times 12 = 30$.

💡 이때 빗변(지름) $AB = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$ 으로, 5-12-13 도 직각삼각형을 이루는 유명한 수다.

Q271 수열과 점화

$a_1 = 1$ 이고 $a_n = 2a_{n-1} + 1$ 로 정해지는 수열에서 a_6 의 값은?

①) ① 31
②) ② 47
③) ③ 63
④) ④ 127

🎯 **정답: ③ 63**

📖 규칙(앞 항을 2배 한 뒤 1을 더함)대로 계산한다. $a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_3 = 7,\ a_4 = 15,\ a_5 = 31,\ a_6 = 63$. (일반항은 $a_n = 2^n - 1$ 이다.)

Q272 재미 두뇌

닫혀 있는 사물함 100개가 1번부터 있다. 1번 학생은 모든 사물함을, 2번 학생은 2의 배수 번호를, ... n번 학생은 n의 배수 번호 사물함을 "열려 있으면 닫고, 닫혀 있으면 여는" 방식으로 모두 한 번씩 다녀간다(100번 학생까지). 마지막에 열려 있는 사물함은 몇 개인가?

①) ① 7개

②) ② 10개

③) ③ 12개

④) ④ 50개

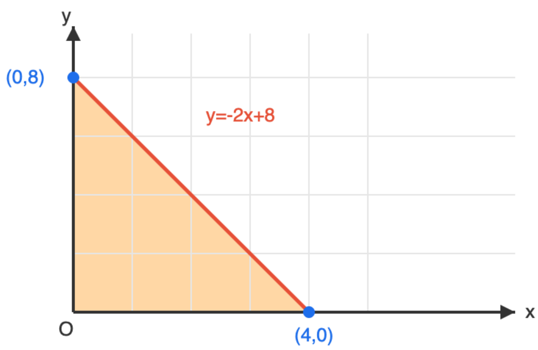
🎯 **정답: ② 10개**

📖 k번 사물함은 k의 약수 번호 학생마다 한 번씩 상태가 바뀐다. 처음이 '닫힘'이므로 약수의 개수가 홀수일 때만 최종적으로 '열림'이 된다. 약수의 개수가 홀수인 수는 완전제곱수뿐이다. 1부터 100까지 완전제곱수는 $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100$ 으로 10개.

💡 약수가 홀수 개인 이유는 완전제곱수만 한 약수($\sqrt{k}$)가 짝을 이루지 못하고 혼자 남기 때문이다.

Q273 좌표 기하

직선 $y = -2x + 8$ 과 x축, y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이는?



①) ① 8

②) ② 12

③) ③ 16

④) ④ 32

🎯 **정답: ③ 16**

📖 x절편은 $y = 0$ 일 때 $0 = -2x + 8 \Rightarrow x = 4$, 즉 $(4, 0)$. y절편은 $x = 0$ 일 때 $y = 8$, 즉 $(0, 8)$. 원점에서 직각인 삼각형이므로 넓이 $= \frac{1}{2} \times 4 \times 8 = 16$.

Q274 논리 (Knight/Knave)

정직한 사람은 항상 참말을, 거짓말쟁이는 항상 거짓말을 하는 섬이 있다. 주민 A가 "B와 나는 둘 다 거짓말쟁이다"라고 말했다. A와 B의 정체는?

①) ① A 정직, B 정직
②) ② A 정직, B 거짓말쟁이
③) ③ A 거짓말쟁이, B 정직
④) ④ A 거짓말쟁이, B 거짓말쟁이

🎯 **정답: ③ A 거짓말쟁이, B 정직**

📖 만약 A가 정직한 사람이라면 그의 말 "둘 다 거짓말쟁이"가 참이어야 하는데, 그러면 A 자신도 거짓말쟁이가 되어 모순이다. 따라서 A는 거짓말쟁이이고, 그의 말은 거짓이다. "둘 다 거짓말쟁이"가 거짓이라는 것은 적어도 한 명은 정직하다는 뜻인데, A는 이미 거짓말쟁이이므로 B가 정직한 사람이어야 한다.

💡 자기 자신을 포함해 말하는 '자기 언급' 진술은 거짓말쟁이 판별의 단골 장치다.

Q275 수열과 점화

첫째항이 3, 공차가 4인 등차수열의 첫 10개 항의 합을 구하여라.

①) ① 200
②) ② 210
③) ③ 220
④) ④ 230

🎯 **정답: ② 210**

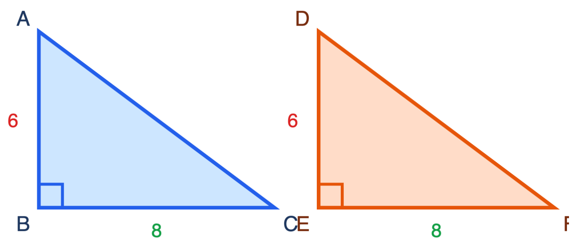
📖 등차수열의 부분합 공식 $S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$를 쓴다. $a = 3,\ d = 4,\ n = 10$이므로 $S_{10} = \frac{10}{2}\{2 \cdot 3 + 9 \cdot 4\} = 5(6 + 36) = 5 \cdot 42 = 210.$

💡 가우스는 어린 시절 $1 + 2 + \cdots + 100$을 이 짝짓기 아이디어로 순식간에 5050이라 답했다.

Q276 도형 (합동·닮음·면적)

두 삼각형 $\triangle ABC$, $\triangle DEF$에서 $\angle B = \angle E = 90^\circ$, $AB = DE = 6$, $BC = EF = 8$ 이다. SAS 합동에 의해 두 삼각형은 합동이다. $\triangle ABC$의 넓이는?

합동 (SAS)



∠B = ∠E = 90°, AB=DE, BC=EF → △ABC ≡ △DEF

①) ① 18
②) ② 20
③) ③ 24
④) ④ 30

🎯 **정답: ③ 24**

📖 $\angle B = 90^\circ$이므로 AB와 BC가 직각을 낀 두 변(밑변·높이)이다. 넓이 $= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$. 두 삼각형은 SAS로 합동이므로 $\triangle DEF$의 넓이도 같다.

💡 SAS는 두 변과 그 '사이 끼인 각'이 같아야 한다. 끼인 각이 아니면 합동이 보장되지 않는다.

Q277 경우의 수

8명이 모인 모임에서 모든 사람이 서로 한 번씩 악수를 했다. 악수는 모두 몇 번 일어났는가?

①) ① 16
②) ② 28
③) ③ 36
④) ④ 56

🎯 **정답: ② 28**

📖 악수는 두 사람을 짝지어 한 번 세는 것이므로 순서가 없는 조합이다. $\binom{8}{2} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$.

💡 n명이면 악수 횟수는 $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$, 이는 완전그래프 K_n의 변의 개수와 같다.

Q278 정수론 (약수·배수·소수)

두 수 48과 60의 최소공배수(LCM)를 구하여라.

①) ① 120

②) ② 180

③) ③ 240

④) ④ 480

🎯 **정답: ③ 240**

📖 소인수분해하면 $48 = 2^4 \cdot 3$, $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$. LCM은 각 소인수의 '최대 지수'를 택한다: $2^4 \cdot 3 \cdot 5 = 16 \cdot 15 = 240$. (참고로 GCD $= 2^2 \cdot 3 = 12$이고 $\mathrm{GCD} \times \mathrm{LCM} = 12 \cdot 240 = 2880 = 48 \cdot 60$.)

💡 항상 $\mathrm{GCD}(a, b) \times \mathrm{LCM}(a, b) = a \times b$ 가 성립한다.

Q279 모듈러 산술 입문

7^{2024}의 일의 자리 숫자를 구하여라.

①) ① 1

②) ② 3

③) ③ 7

④) ④ 9

🎯 **정답: ① 1**

📖 7의 거듭제곱의 일의 자리는 $7^1 = 7,\ 7^2 = 49 \to 9,\ 7^3 = \ ...\ 3,\ 7^4 = \ ...\ 1$ 로 $7, 9, 3, 1$이 주기 4로 반복된다. $2024 = 4 \times 506$이므로 $2024 \equiv 0 \pmod 4$, 즉 주기의 네 번째 자리에 해당해 일의 자리는 1이다.

💡 일의 자리만 보는 것은 $\bmod 10$ 계산이고, 거의 모든 정수 거듭제곱의 끝자리는 주기를 갖는다.

Q280 확률

1부터 20까지의 자연수 중 하나를 무작위로 뽑을 때, 그 수가 3의 배수이거나 5의 배수일 확률은?

①) ① $\frac{7}{20}$

②) ② $\frac{9}{20}$

③) ③ $\frac{1}{2}$

④) ④ $\frac{11}{20}$

🎯 **정답: ② $\frac{9}{20}$**

📖 3의 배수는 $3, 6, 9, 12, 15, 18$로 6개, 5의 배수는 $5, 10, 15, 20$으로 4개, 둘 다인 15의 배수는 15 하나뿐이다. 포함·배제로 $6 + 4 - 1 = 9$개. 따라서 확률은 $\frac{9}{20}$.

💡 두 조건을 단순히 더하면 겹치는 부분을 두 번 세게 되므로 교집합을 한 번 빼 주어야 한다.

🧠 중등 논리·추론

총 20문제 · 문제와 정답·풀이 포함

Q281 비둘기집 원리

한 모임에 여러 명이 모였을 때, 태어난 '달'이 같은 사람이 반드시 두 명 이상 있으려면 최소 몇 명이 모여야 하는가?

①) ① 12
②) ② 13
③) ③ 24
④) ④ 25

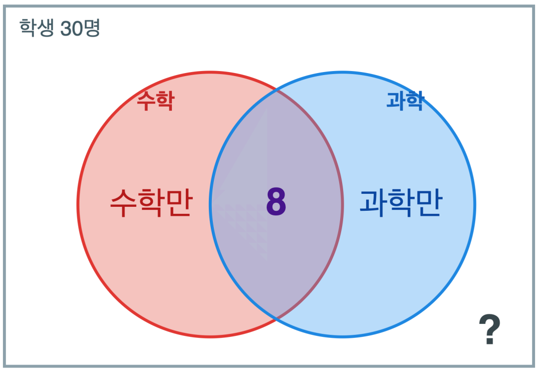
🎯 **정답: ② 13**

📖 달은 12개(서랍), 사람은 비둘기다. 12명이면 모두 다른 달일 수도 있어 보장되지 않지만, 13명이면 비둘기집 원리에 의해 어떤 달에는 반드시 2명 이상이 배정된다. 따라서 13명.

💡 비둘기집 원리는 'n개의 칸에 $n+1$개를 넣으면 한 칸에 둘 이상'이라는 매우 단순하지만 강력한 도구다.

Q282 집합과 벤다이어그램

학생 30명 중 수학을 좋아하는 학생이 18명, 과학을 좋아하는 학생이 14명, 둘 다 좋아하는 학생이 8명이다. 둘 다 좋아하지 않는 학생은 몇 명인가?



①) ① 4
②) ② 6
③) ③ 8
④) ④ 10

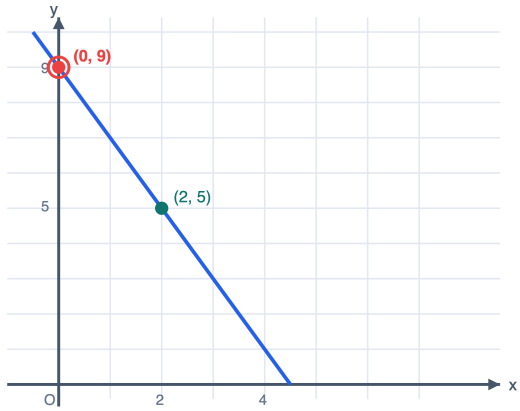
🎯 **정답: ② 6**

📖 수학 또는 과학을 좋아하는 학생 수(합집합)는 포함·배제로 $18 + 14 - 8 = 24$명. 따라서 둘 다 좋아하지 않는 학생은 $30 - 24 = 6$명이다.

💡 $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ 는 벤다이어그램에서 겹친 부분을 한 번만 세기 위한 식이다.

Q283 좌표 기하

점 $(2, 5)$를 지나고 기울기가 -2인 직선의 y절편을 구하여라.



①) ① 7

②) ② 8

③) ③ 9

④) ④ 10

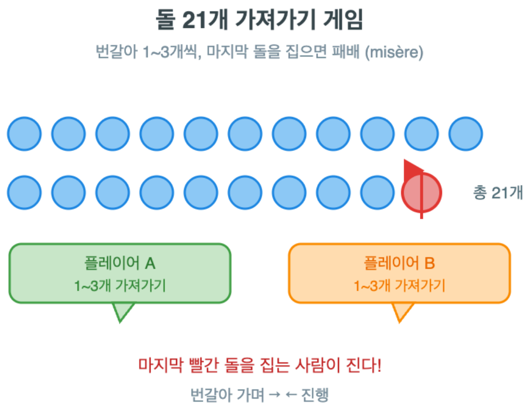
🎯 **정답: ③ 9**

📖 직선의 식을 $y = -2x + b$로 두고 점 $(2, 5)$를 대입하면 $5 = -2 \cdot 2 + b = -4 + b$, 따라서 $b = 9$. y절편은 직선이 y축($x = 0$)과 만나는 값이므로 9.

💡 기울기와 한 점만 주어지면 직선은 유일하게 결정된다(점-기울기 형태).

Q284 게임 이론 (Nim)

돌 21개가 한 무더기에 있다. 두 사람이 번갈아 1개, 2개, 또는 3개를 가져가는데, 이번에는 '마지막 돌을 가져가는 사람이 지는' 규칙(미제르)이다. 누가 이기는가?



①) ① 선공 필승

②) ② 후공 필승

③) ③ 무승부

④) ④ 알 수 없음

🎯 **정답: ② 후공 필승**

📖 마지막 돌을 잡으면 지므로, 상대에게 '돌 1개'만 남기면 상대가 어쩔 수 없이 마지막 돌을 잡고 진다. 분석하면 남은 돌이 4로 나눈 나머지가 1인 위치$(1, 5, 9, \ldots)$에 놓인 사람이 진다. $21 = 4 \times 5 + 1$이므로 $21 \equiv 1 \pmod 4$. 선공이 이 패배 위치에서 시작하므로, 후공이 매번 합이 4가 되도록 맞춰 가면 후공이 이긴다.

💡 같은 게임이라도 '마지막을 잡으면 이김(정상형)'과 '잡으면 짐(미제르)'에서 필승 전략이 달라진다.

Q285 재미 두뇌

자료 $5,\ 7,\ 7,\ 9,\ 12$ 의 평균, 중앙값, 최빈값을 차례로 구하면?

①) ① 평균 8, 중앙값 7, 최빈값 7

②) ② 평균 7, 중앙값 8, 최빈값 7

③) ③ 평균 8, 중앙값 8, 최빈값 9

④) ④ 평균 9, 중앙값 7, 최빈값 7

🎯 **정답: ① 평균 8, 중앙값 7, 최빈값 7**

📖 평균 $= \frac{5+7+7+9+12}{5} = \frac{40}{5} = 8$. 자료를 크기순으로 늘어놓으면 가운데(세 번째) 값이 중앙값이므로 7. 가장 자주 나온 값(최빈값)은 두 번 나온 7이다.

💡 평균은 극단값에 민감하지만 중앙값은 극단값의 영향을 덜 받아 자료가 치우칠 때 유용하다.

Q286 정수론 (약수·배수·소수)

방정식 $3x + 5y = 30$ 을 만족하는, $x \geq 0$ 이고 $y \geq 0$ 인 정수해 (x, y) 의 개수는?

①) ① 2

②) ② 3

③) ③ 4

④) ④ 5

🎯 **정답: ② 3**

📖 $x = \frac{30 - 5y}{3}$ 이 음이 아닌 정수가 되어야 한다. $30 - 5y \geq 0$ 에서 $y \leq 6$. 또 $30 - 5y$가 3의 배수여야 하는데 $30 \equiv 0,\ 5y \equiv 2y \pmod 3$ 이므로 $2y \equiv 0 \pmod 3$, 즉 y가 3의 배수다. $y \in \{0, 3, 6\}$ 이고 각각 $x = 10, 5, 0$. 따라서 해는 3개.

💡 $ax + by = c$ 형태의 일차부정방정식은 GCD가 c를 나눌 때만 정수해를 가진다.

Q287 확률

상자 1에는 빨강 공 2개·파랑 공 3개, 상자 2에는 빨강 공 4개·파랑 공 1개가 있다. 상자를 똑같은 확률로 하나 고른 뒤 공을 하나 꺼냈더니 빨강이었다. 이 공이 상자 2에서 나왔을 확률은?

①) ① $\frac{1}{2}$

②) ② $\frac{2}{3}$

③) ③ $\frac{3}{5}$

④) ④ $\frac{4}{5}$

🎯 **정답: ② $\frac{2}{3}$**

📖 조건부확률(베이즈). 빨강을 뽑을 확률은 상자1에서 $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{10}$, 상자2에서 $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{10}$. 빨강이 나왔다는 조건에서 상자2일 확률은 $\frac{\frac{4}{10}}{\frac{2}{10} + \frac{4}{10}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

💡 결과(빨강)를 보고 원인(어느 상자)을 거꾸로 추론하는 것이 베이즈 정리의 핵심이다.

Q288 경우의 수

숫자 $0, 1, 2, 3, 4$ 중에서 서로 다른 세 숫자를 골라 만든 세 자리 짝수는 모두 몇 개인가? (같은 숫자 반복 불가, 백의 자리는 0이 될 수 없음)

①) ① 24

②) ② 28

③) ③ 30

④) ④ 36

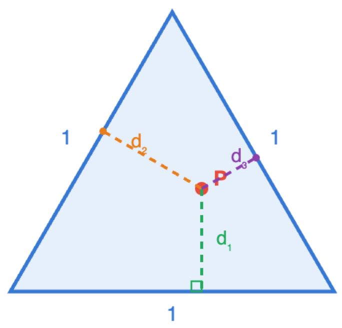
🎯 **정답: ③ 30**

📖 짝수이므로 일의 자리는 $0, 2, 4$ 중 하나다. (i) 일의 자리가 0: 백의 자리 4가지, 십의 자리 남은 3가지 $\rightarrow$ 12개. (ii) 일의 자리가 2: 백의 자리는 0과 2를 뺀 3가지, 십의 자리 3가지 $\rightarrow$ 9개. (iii) 일의 자리가 4: 같은 방식으로 9개. 합 $12 + 9 + 9 = 30$.

💡 0이 끼면 '맨 앞에 못 옴' 제약 때문에 일의 자리가 0인 경우와 아닌 경우를 나눠 세는 것이 안전하다.

Q289 재미 두뇌

한 변의 길이가 1인 정삼각형 내부의 한 점 P에서 세 변까지 내린 거리의 합 $d_1 + d_2 + d_3$ 은 P의 위치와 관계없이 일정하다. 그 값은?



①) ① $\frac{1}{2}$
②) ② $\frac{\sqrt{3}}{2}$
③) ③ $\sqrt{3}$
④) ④ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

정답: ② $\frac{\sqrt{3}}{2}$

📖 점 P와 세 꼭짓점을 이으면 정삼각형이 세 개의 작은 삼각형으로 나뉜다. 각 작은 삼각형의 밑변은 모두 1이고 높이가 d_1, d_2, d_3이므로 넓이의 합은 $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (d_1 + d_2 + d_3)$. 이것이 정삼각형 전체 넓이 $\frac{\sqrt{3}}{4}$와 같으므로 $d_1 + d_2 + d_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 즉 정삼각형의 높이와 같다.

💡 이 성질을 비비아니(Viviani) 정리라 하며, 거리의 합이 점의 위치와 무관하게 늘 높이와 같다는 점이 직관을 살짝 배신한다.

Q290 논리 (Knight/Knave)

기사(항상 참)와 거짓말쟁이(항상 거짓)만 사는 섬에서 두 사람 A, B를 만났다. A는 "B와 나는 같은 종류다"라고 말했고, B는 "A와 나는 다른 종류다"라고 말했다. 두 사람의 정체는?

①) ① A 기사, B 기사
②) ② A 기사, B 거짓말쟁이
③) ③ A 거짓말쟁이, B 기사
④) ④ A 거짓말쟁이, B 거짓말쟁이

정답: ③ A 거짓말쟁이, B 기사

📖 A가 기사라면 "같은 종류"가 참이므로 B도 기사여야 한다. 그러나 그러면 B의 말 "다른 종류"가 참이 되어 둘이 다른 종류가 되니 모순이다. 따라서 A는 거짓말쟁이다. A의 말 "같은 종류"는 거짓이므로 둘은 서로 다른 종류이고, 따라서 B는 기사다. 실제로 B의 말 "다른 종류"는 참이 되어 모순이 없다.

💡 두 사람이 서로 모순되는 주장을 하면, 한 명은 반드시 거짓말쟁이라는 사실만으로 정체가 결정되는 경우가 많다.

Q291 모듈러 산술 입문

이진수 $1101_{(2)}$ 를 십진법으로 나타내면?

①) ① 11

②) ② 12

③) ③ 13

④) ④ 14

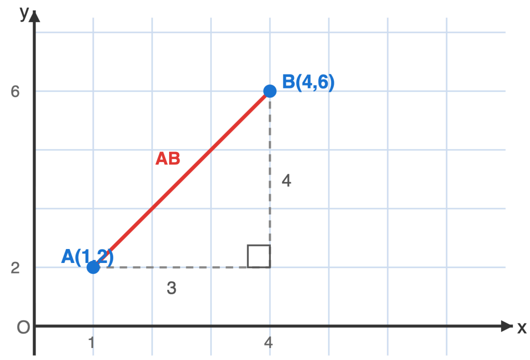
정답: ③ 13

각 자리의 자릿값은 오른쪽부터 $2^0, 2^1, 2^2, 2^3$이다. $1101_{(2)} = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 8 + 4 + 0 + 1 = 13.$

컴퓨터는 모든 정보를 0과 1로 저장한다. 이진법 네 자리($2^4 = 16$가지)로 0부터 15까지 표현할 수 있다.

Q292 좌표 기하

좌표평면 위의 두 점 $A(1, 2)$와 $B(4, 6)$ 사이의 거리는?



①) ① 4

②) ② 5

③) ③ 6

④) ④ 7

정답: ② 5

두 점 사이의 거리는 $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ 이다. $\sqrt{(4-1)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$

거리 공식은 사실 피타고라스 정리를 좌표평면에 옮겨 놓은 것이다. 밑변 3, 높이 4면 빗변은 늘 5인 '3-4-5 직각삼각형'이다.

Q293 함수와 패턴

부등식 $|2x - 3| < 5$ 를 만족하는 정수 x의 개수는?

①) ① 3개

②) ② 4개

③) ③ 5개

④) ④ 6개

정답: ② 4개

$|2x - 3| < 5$ 는 $-5 < 2x - 3 < 5$ 와 같다. 각 변에 3을 더하면 $-2 < 2x < 8$, 다시 2로 나누면 $-1 < x < 4$. 이 범위의 정수는 $0, 1, 2, 3$ 으로 모두 4개다.

$|A| < k(k > 0)$는 항상 $-k < A < k$로 풀린다. 절댓값 부등식은 '범위'로 바꾸는 것이 핵심이다.

Q294 경우의 수

서로 다른 세 종류의 사탕(딸기맛, 포도맛, 레몬맛)이 충분히 많이 있다. 종류만 구분하여 사탕 5개를 고르는 방법은 모두 몇 가지인가? (같은 종류는 서로 구별하지 않는다.)

①) ① 15가지
②) ② 18가지
③) ③ 21가지
④) ④ 24가지

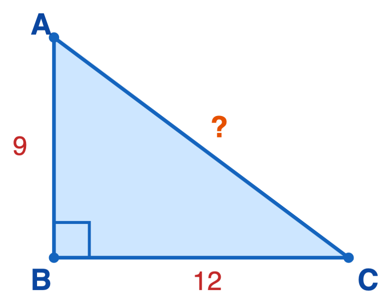
🎯 **정답: ③ 21가지**

📖 세 종류에서 중복을 허용해 5개를 고르는 중복조합이다. 각 종류의 개수를 $a+b+c=5(a,b,c\geq 0$ 정수)의 음이 아닌 정수해의 개수로 셀 수 있고, 이는 $\binom{5+3-1}{5}=\binom{7}{5}=\binom{7}{2}=21$ 이다.

💡 이것은 '막대와 칸막이' 방법으로도 풀린다. 사탕 5개(○)와 칸막이 2개(|)를 한 줄로 늘어놓는 배열의 수 $\binom{7}{2}$와 같다.

Q295 도형 (합동·닮음·면적)

직각을 낀 두 변의 길이가 각각 9, 12인 직각삼각형이 있다. 빗변의 길이와 삼각형의 넓이를 차례대로 구하면?



①) ① 빗변 13, 넓이 54
②) ② 빗변 15, 넓이 54
③) ③ 빗변 15, 넓이 108
④) ④ 빗변 21, 넓이 54

🎯 **정답: ② 빗변 15, 넓이 54**

📖 피타고라스 정리로 빗변 $=\sqrt{9^2+12^2}=\sqrt{81+144}=\sqrt{225}=15$. 넓이는 직각을 낀 두 변을 밑변과 높이로 보아 $\frac{1}{2}\times 9\times 12=54$.

💡 $9, 12, 15$는 $3, 4, 5$의 각 변을 3배 한 것이다. 직각삼각형 변의 비 $3:4:5$를 알아두면 계산이 빨라진다.

Q296 게임 이론 (Nim)

돌무더기 3개가 각각 2개, 4개, 6개 있다. 두 사람이 번갈아 한 무더기에서 1개 이상 가져가고, 마지막 돌을 가져간 사람이 이긴다. 두 사람이 모두 최선을 다할 때 누가 이기는가?

①) ① 선공이 이긴다
②) ② 후공이 이긴다
③) ③ 항상 비긴다
④) ④ 먼저 6개 무더기를 비우는 쪽이 이긴다

🎯 **정답: ② 후공이 이긴다**

📖 일반 Nim에서는 각 무더기 크기를 이진수로 나타내 자리별 XOR(배타적 합)을 구한다. $2 \oplus 4 \oplus 6$ 을 계산하면 $010 \oplus 100 \oplus 110 = 000$, 즉 XOR이 0이다. XOR이 0인 상태는 '지는 자리(선공 패)'이므로, 후공이 항상 대응 수로 XOR을 다시 0으로 만들 수 있어 후공이 이긴다.

💡 Nim의 필승 전략은 1901년 찰스 부튼이 '이진수 XOR'로 완전히 풀었다. 무더기가 몇 개든 XOR만 계산하면 승패를 알 수 있다.

Q297 정수론 (약수·배수·소수)

방정식 $5x + 3y = 47$ 을 만족하는 자연수(양의 정수) 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수는?

①) ① 2개
②) ② 3개
③) ③ 4개
④) ④ 5개

🎯 **정답: ② 3개**

📖 $5x = 47 - 3y$ 가 양수이면서 5의 배수여야 한다. $47 \equiv 2 \pmod 5$, $3y \equiv 2 \pmod 5$ 에서 $y \equiv 4 \pmod 5$. $y = 4$일 때 $x = \dfrac{47-12}{5} = 7$, $y = 9$일 때 $x = \dfrac{47-27}{5} = 4$, $y = 14$일 때 $x = \dfrac{47-42}{5} = 1$. $y = 19$이면 $5x < 0$이라 불가. 따라서 $(7,4), (4,9), (1,14)$ 의 3개다.

💡 이런 일차부정방정식의 자연수 해는 한 해를 찾으면 나머지는 일정한 간격(x는 3씩 감소, y는 5씩 증가)으로 규칙적으로 나타난다.

Q298 논리 (Knight/Knave)

정직한 사람(기사)은 항상 참말만, 거짓말쟁이(악당)는 항상 거짓말만 한다. 섬 주민 A, B 두 사람을 만났다. A가 "우리 둘 중 적어도 한 명은 거짓말쟁이입니다."라고 말했다. A와 B의 정체는?

①) ① A=기사, B=거짓말쟁이

②) ② A=거짓말쟁이, B=기사

③) ③ 둘 다 기사

④) ④ 둘 다 거짓말쟁이

🎯 **정답: ① A=기사, B=거짓말쟁이**

📖 A가 거짓말쟁이라고 가정하면, A의 말 "적어도 한 명은 거짓말쟁이"는 거짓이어야 한다. 그러려면 두 사람 모두 거짓말쟁이가 아니어야(둘 다 기사) 하는데, 이는 A가 거짓말쟁이라는 가정과 모순이다. 따라서 A는 기사이고, A의 말은 참이다. 즉 둘 중 적어도 한 명은 거짓말쟁이인데 A는 기사이므로 B가 거짓말쟁이다.

💡 "적어도 한 명은 거짓말쟁이" 유형은 말한 사람이 거의 항상 기사로 확정되는 고전적 구조다.

Q299 수열과 점화

수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 3$이고 $a_{n+1} = 2a_n - 1$ 을 만족한다. a_4의 값은?

①) ① 9

②) ② 13

③) ③ 17

④) ④ 25

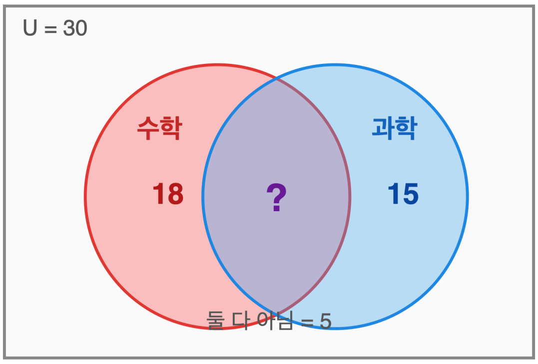
🎯 **정답: ③ 17**

📖 점화식에 차례로 대입한다. $a_1 = 3$, $a_2 = 2 \cdot 3 - 1 = 5$, $a_3 = 2 \cdot 5 - 1 = 9$, $a_4 = 2 \cdot 9 - 1 = 17$. (일반항은 $a_n = 2^n + 1$이며, $a_4 = 16 + 1 = 17$로 확인된다.)

💡 $a_{n+1} = 2a_n - 1$처럼 '곱하고 빼기' 점화식은 고정점 $x = 2x - 1 \Rightarrow x = 1$을 빼면 등비수열로 변한다.

Q300 집합과 벤다이어그램

어느 반 학생 30명을 조사했더니 수학을 좋아하는 학생이 18명, 과학을 좋아하는 학생이 15명, 둘 다 좋아하지 않는 학생이 5명이었다. 수학과 과학을 모두 좋아하는 학생은 몇 명인가?



①) ① 6명
②) ② 8명
③) ③ 10명
④) ④ 12명

🎯 **정답:** ② 8명

📖 둘 다 좋아하지 않는 학생이 5명이므로 적어도 하나를 좋아하는 학생은 $30 - 5 = 25$명이다. 포함·배제 원리에서 $|수학 \cup 과학| = |수학| + |과학| - |수학 \cap 과학|$ 이므로 $25 = 18 + 15 - x$. 따라서 $x = 33 - 25 = 8$. 모두 좋아하는 학생은 8명이다.

💡 포함·배제 원리는 '두 번 센 겹친 부분을 한 번 빼준다'는 직관 그 자체다.